Analyse et proximités

Richard O'Donovan

CEC André-Chavanne, Genève

Introduction

Les difficultés de l'apprentissage et de l'enseignement de l'analyse au gymnase sont bien connues. La littérature abonde en exemples d'utilisations de métaphores, de manipulations d'adverbes, de ce qui se passe « juste avant » la limite, etc. Faire un lien avec l'intuition est sans doute nécessaire, le problème majeur étant qu'en général on ne parvient pas à quitter le domaine de l'image, ce qui nuit à l'apprentissage de la rigueur.

Avec mon collègue Olivier Lessmann du Collège Rousseau (Genève) et le professeur Karel Hrbacek de l'université CUNY (New York) nous avons entrepris une démarche radicalement différente : adaptons les mathématiques plutôt que la didactique ! Le résultat est une approche qui utilise des « infiniment petits » (qu'on appellera ici « ultrapetits »). Comme pour tout cours d'introduction à l'analyse, on admet l'existence des réels. Ceux-ci sont une donnée de type axiomatique. Dans l'approche discutée ici, on donne une description qui, par rapport à l'enseignement classique, comporte des propriétés supplémentaires. L'idée est de présenter des axiomes « de bas niveau », des propriétés des réels et d'en déduire les propriétés des limites plutôt que d'introduire (de manière tout aussi axiomatique) des propriétés des limites qui, étant des propriétés de fonctions, sont des objets beaucoup plus complexes. Les axiomes sont donnés au départ, ensuite tout se démontre relativement facilement dans une démarche complètement déductive de sorte que tout ce qui porte le nom de théorème est réellement démontré, comme par exemple celui concernant la dérivée de la composition. Cette approche – qui est un sous-produit de l'analyse nonstandard – est utilisée par des enseignants de plusieurs collèges de Genève depuis une dizaine d'années.

Le problème

Qu'est-ce qu'une limite ? Ce que l'on approche ? Mais on sait bien que les nombres ne bougent pas... Ce dont on peut être arbitrairement proche ? Mais quelle est la mesure d'arbitrairement proche ?

Commençons par rappeler la définition classique de la continuité :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$$

$$(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Ici, la notion de « proche » est vraiment bien cachée ! L'utilisation de plusieurs quantificateurs différents ; leur ordre ; le fait qu'on choisisse d'abord ε qui n'est utilisé qu'à la fin ; le fait que le choix de δ dépende de ε (bien que ce soit pour tout ε); le fait qu'on ne puisse étudier indépendamment ce qui est à gauche de la flèche de ce qui est à droite : tout cela rend cette formule extrêmement indigeste pour les néophytes.

Tentatives de contournement du problème

Face à la difficulté de la formule précédente, l'enseignant doit se résoudre à raconter une histoire : une narration qui rend intuitivement acceptables les résultats. Il s'en suit une liste de règles à apprendre telles que : la limite des sommes est la somme des limites, la limite des produits est le produit des limites, idem pour le quotient si la limite du dénominateur n'est pas zéro. Toutes ces règles sont données sans preuve tout simplement parce que, dans le cadre de ces définitions non rigoureuses, c'est impossible. On peut admettre que ces règles prennent le statut de donnée axiomatique, mais il reste néanmoins le flou dans la définition même de la limite. La dérivée est souvent présentée comme la pente de la tangente. Le problème est alors de définir la tangente sans recourir à la notion de dérivée. Le problème cognitif est qu'une droite reposant entre deux points (sécante) est bien déterminée, mais lorsqu'elle repose sur un seul point, on se retrouve face aux problèmes fondamentaux des origines de l'analyse. Une autre approche consiste à faire des zooms successifs, jusqu'à faire apparaître certaines courbes comme localement quasi droites (Maschietto, 2005), ce qui présente des similarités avec notre approche.

Plusieurs démonstrations classiques se font en ajoutant et en retranchant les quantités appropriées ou en multipliant et en divisant par une même quantité (souvent la quantité que l'on fait apparaître intervient à l'intérieur d'une limite, ce qui est rarement justifié explicitement...). Il n'est en général pas possible de faire trouver par les élèves quel tour de passe-passe fera l'affaire.

L'étude des limites est en général difficile pour les élèves car l'image mentale de ce concept n'est pas aisée à développer. Des élèves, vus lors d'un dépannage, ne comprenaient pas pourquoi on leur demandait de démontrer : « si une fonction est dérivable en un maximum local, alors la dérivée en ce point est nulle. » La démonstration passe par des limites (concept non évident) pour démontrer un théorème considéré comme évident. Pourquoi ne pas demander à l'élève d'accepter directement le théorème ?

Dans la plupart des cas, l'introduction à l'analyse est présentée sans le formalisme ε, δ complet , considéré comme tellement difficile que trop d'élèves seraient laissés en arrière et que le sens est obscurci par la technicité. La présentation qui en résulte se fait au moyen de gesticulations des mains et de beaucoup de métaphores telles que des x qui bougent vers... Il ne s'agit pas de critiquer l'usage des métaphores. Lakoff et Nunez ont clairement montré leur efficacité et même leur nécessité fondamentale (Lakoff & Nunez, 2000) ; mais il faudrait pouvoir aller au-delà de l'image mentale et aboutir au plus près du concept mathématique lui-même. Pour le mathématicien enseignant que nous sommes, cette situation est frustrante parce que nous ne montrons pas ce qui est au cœur de notre passion et de notre sujet : l'argumentation et la rigueur dans la démonstration. Par ailleurs, quand il y a des démonstrations, elles reposent sur un mélange de définitions imagées, quelques explications informelles et quelques étapes rigoureuses. La décision de quelles sont les parties qui doivent être formelles est une décision de l'enseignant. Pour certains élèves, les étapes données sans preuve sont moins intuitivement acceptables que le théorème qu'elles permettent de démontrer, causant un conflit entre le statut de l'intuition et celui de la preuve.

Une solution possible

C'est pour tenter de remédier à cette situation que nous avons travaillé plus de dix ans avec le professeur Hrbacek.

Nous voulions trouver une formulation – bien évidemment mathématiquement correcte – qui décrive les concepts de manière aussi proche que possible de l'intuition. Le résultat est une théorie où la dérivée peut être enseignée en premier, la continuité venant ensuite et la limite définie au moyen de la continuité, soit un retournement quasi complet de l'ordre habituel des chapitres. Cet ordre est plus proche du développement historique de l'analyse, ce qui n'est pas une exclusivité de cette approche (Maschietto, 2005).

Le point de départ est un constat : autant la limite « que l'on approche sans nécessairement atteindre » est un concept difficile, autant nous avons observé que la notion « d'infiniment petit » semble exister dans l'esprit des élèves de telle manière qu'on peut se dire que cela fait partie d'un bagage acquis sans en être conscient. De nos jours, le zoom avant et le zoom arrière font partie des notions connues et intégrées en tant qu'intuition par tous. L'idée que, si l'on zoome sur la droite réelle en se centrant sur un point, on verra apparaître des détails auparavant invisibles est perçue comme une évidence. Après tout, s'il y a une infinité de points sur [0,1], il doit bien y en avoir qui sont trop proches pour être distinguables à l'œil nu.

En classe, la présentation qui en résulte est complètement déductive et la plupart des démonstrations peuvent être découvertes par les élèves après quelques exercices préparatoires.

Ce qui est présenté ici a été développé avec deux objectifs : être utilisable en classe et être une théorie mathématique correcte. Ce dernier point est établi : Hrbacek a publié une démonstration qu'il s'agit d'une extension cohérente. C'est-à-dire que les nouvelles notions introduites – en plus des notions classiques – n'ajoutent pas de contradiction. Une version de cette preuve est disponible sur ultrasmall.org/foundations/consistency-of-rbst.

Un théorème classique sur les fonctions réelles est vrai dans une des théories si et seulement si il est vrai dans l'autre. La comparaison entre l'analyse classique et l'analyse avec ultrapetits n'est pas faite ici sur les mérites mathématiques respectifs de chaque approche, mais sur le plan pédagogique.

Une discussion des axiomes et des principes mathématiques peut être trouvée sur le site http://ultrasmall.org, de même qu'on y trouvera un manuel enseignant et des supports de cours (en anglais et en français).

L'introduction aux limites prend du temps en classe – même quand on se contente de définitions imagées non rigoureuses. Cela prend environ la même durée pour introduire – de manière rigoureuse – le nouveau concept d'observabilité et les propriétés qui en découlent : les quantités ultrapetites et les quantités ultragrandes. L'image mentale que l'on se forme est celle d'échelles de grandeur. Les nombres usuels (définis sans référence au concept d'observabilité) sont ceux que l'on peut voir sans microscope ni télescope. Ensuite il y a des nombres ultrapetits (non nuls et plus petits en valeur absolue que n'importe quel nombre observable strictement positif). Bien que ce soient des réels, un microscope est nécessaire pour les voir. Leurs inverses seront bien évidemment ultragrands. Un télescope est nécessaire pour voir ces nombres. Si on zoome sur un nombre observable, par exemple 2, des nombres ultraproches de 2 deviennent observables. Mais on peut recommencer : il n'y a pas de fin au nombre de fois que l'on peut zoomer : c'est la différence majeure avec les autres approches nonstandard.

Ce qui doit être noté est que bien que ces concepts puissent être rendus assez intuitifs, ils sont ici complètement formalisés et mathématiquement cohérents. Une fois les bases établies lors des premières leçons, il n'est plus nécessaire d'introduire de nouvelles propriétés ni résultats.

On montre ici deux preuves (avec les définitions nécessaires) pour illustrer comment cela peut fonctionner en classe. Il faut se rappeler que tous les mots auront été au préalable définis de manière précise. Le but ici n'est pas de faire du lecteur un expert en la matière mais un témoin de ce qui peut se passer en classe.

Continuité

Le formalisme utilisé exprime que la continuité préserve la proximité. Une fonction *f* est continue en a si

$$(\forall x)\big(x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq f(a)\big)$$

Ce qui se lit : si x est ultraproche de *a* alors *f(x)* est ultraproche de *f(a)*. Le quantificateur indique que la proximité de *f(x)* avec *f(a)* ne doit pas dépendre du choix de x. Le théorème suivant est un des théorèmes classiques sur la continuité :

> Si g est continue en a et f est continue en g(a), alors f∘g est continue en a.

Démonstration : Soit $x \simeq a$. Alors $g(x) \simeq g(a)$ par continuité de *g* en *a* et $f(g(x)) \simeq f(g(a))$ par continuité de *f* en *g(a)*. □

Cette preuve peut aussi être présentée en utilisant $g(a)=y$ et $g(x)=u$. Alors $u \simeq y$ par continuité de *g* en *a* et par continuité de *f* en *y* on a $f(u) \simeq f(y)$. □

Cette démonstration est complète et doit être comparée avec la preuve classique dont l'énoncé

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f\big(g(a)\big)$$

annonce déjà la difficulté de montrer que la limite passe à l'intérieur.

Dérivée

On continue par la dérivée de la composition. Une fonction *f* est dérivable en *a* s'il existe un nombre observable *d* tel que pour tout *h* ultrapetit, on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq d$$

alors on écrit *f'(a)=d*.

Il est aisé de démontrer que si *f* est dérivable en *f(a)* et *h* ultrapetit, on a

$f(a+h)=f(a)+f'(a).h+\varepsilon.h$

avec $\varepsilon \simeq 0$ et la partie qui est un nombre observable multiplié par un incrément ultrapetit est la dérivée. C'est l'équation de l'incrément. On remarquera ici une expression assez proche du formalisme de Carathéodory (Hairer 1996) ou de l'utilisation de et o(h) et O(h) de Newton ou de Landau. Ce qui ne devrait pas être vraiment une surprise dans la mesure où ce sont les mêmes concepts que l'on étudie.

Le théorème sur la dérivée de la composition s'énonce de la manière suivante :

> Si g est dérivable en *a* et *f* est dérivable en *g(a)*, alors ($f \circ g$) est dérivable en *a* et $(f \circ g)'(a)=f'(g(a)).g'(a)$.

La démonstration classique commence en général par

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x) - f(g(a))}{x - a}$$

et continue par l'introduction (à l'intérieur de la limite !) du produit/division par

g(x)-g(a).

Mais en respectant les règles données sur les limites, on pourrait tout aussi bien écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f\big(g(x)\big)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{f(g(a))}{x - a}$$

comme pour la dérivée de la somme, ce qui est une différence de deux formes indéterminées. C'est-à-dire que selon l'ordre dans lequel on procède, on trouve un résultat ou non. Et donner comme règle qu'on ne doit prendre les limites qu'à la fin, c'est introduire une règle arbitraire de plus. A la différence de « ∞ » qui n'est pas un nombre, un ultragrand est un nombre réel et la différence de deux réels existe – même si son ordre de grandeur n'est pas toujours facile à déterminer.

Ici, on procède de manière directe sans introduction de facteurs/diviseurs supplémentaires.

Démonstration : On commence avec l'équation de l'incrément ∞ : Soit *h* ultrapetit. On pose :

$f(g(a+h))=f(g(a)+g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h)$ et on note, pour clarifier, $k=g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h$. On a donc $f(g(a+h))=f(g(a)+k)$.

D'où $f(g(a)+k)=f(g(a))+f'(g(a))\cdot k+\delta\cdot k$. Le dernier terme est un ultrapetit fois un ultrapetit et ne fera donc pas partie de la dérivée. On développe

$$\begin{aligned} f'(g(a))\cdot k &= f'(g(a))(g'(a)\cdot h+\varepsilon\cdot h) \\ &= f'(g(a))\cdot g'(a)\cdot h+f'(g(a))\cdot\varepsilon\cdot h. \end{aligned}$$

La partie qui est un observable multiplié par h est $f'(g(a))\cdot g'(a)$; c'est donc la dérivée. □

Commentaire didactique

Nous procédons à la première étape dans une étude didactique, qui est de tester une méthode et de rassembler des informations basées sur les expériences personnelles.

On explique la dérivée de, par exemple, $f(x)=x^2$ en $x=3$ en disant qu'on fait un zoom sur ⟨3,f(3)⟩ et on compare *f(3)* avec *f(3+h)* (pour un *h* ultrapetit). Ce qu'on voit est extrêmement proche d'une ligne droite dont la pente est *6+h*. Tout cela est sans problème. La dérivée est alors définie comme la partie observable de cette pente et donc *f'(3)=6*. On pourra faire remarquer que, fondamentalement, la démarche est identique à la démarche traditionnelle – ce qui est vrai. Mais cognitivement, la différence est énorme. Avec la définition classique, la difficulté cognitive bien connue est que la dérivée est définie lorsque la droite ne repose plus que sur un seul point et semble pouvoir alors prendre n'importe quelle pente. L'utilisation de la tangente pour justifier le résultat pose la question de la circularité dans la définition de la tangente elle-même. La préservation de la proximité semble une étape intellectuelle plus simple.

De manière générale, le formalisme suit de près l'image mentale que l'on se fait de grande proximité. Il n'y a pas de conflit avec le fait que les nombres ne bougent pas les uns vers les autres ni ne tendent à aller où que ce soit. Arbitrairement petit est directement interprété comme ultrapetit.

Les étudiants sont préparés pour leurs

études supérieures par le fait qu'on donne une définition de la limite, mais après que les concepts de base aient été bien compris. La continuité étant définie comme ci-dessus, la limite d'une fonction en un point est donnée par la valeur que devrait prendre cette fonction pour être continue en ce point. Il faut noter que cela suffit pour que les élèves puissent trouver la définition exacte : une fonction *f* a une limite en *a* s'il y a un nombre observable *L* tel que pour tout x on a : $x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq L$.

Nous avons revu des élèves après leur passage à l'université ou à l'EPFL. Dans l'ensemble, ils ont bien compris les concepts de base (continuité, dérivée, intégrale), ont eu un bon entraînement à la démonstration avec rigueur et ont pu facilement transposer la notion d'ultraproximité à celle de « tendre vers » et celle de « voisin observable » avec « prendre la limite ». Certains élèves de formation habituelle, c'est-à-dire ayant appris les limites sans ε, δ mais avec force gestes et mouvements de doigts, souffrent beaucoup plus de la découverte de l'apprentissage de la rigueur. Ce dernier point aurait besoin d'être corroboré par des études extérieures.

Qu'il n'y ait pas de malentendu : nous ne prétendons pas que l'analyse avec ε, δ devrait être remplacée par l'analyse avec ultrapetits dans tous les cas. Pour le contrôle de l'erreur – ou ε n'est pas ultrapetit – cette méthode est même nécessaire et très naturelle. Nous nous sommes concentrés sur les avantages pour un cours d'introduction.

La motivation première de cette recherche était de remettre plus de rigueur dans les cours d'analyse au gymnase. Nos élèves auront vu toutes les démonstrations de ce qu'ils citent – y compris, par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires.

Des collègues qui ont adopté cette approche la trouvent plus satisfaisante. Pour l'enseignant comme pour les élèves, elle devient vite très naturelle. Pour la prochaine étape, il faudrait que des didacticiens viennent voir. Ils seront les bienvenus.

Références

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History*. New York : Springer Verlag.

Hrbacek, K., Lessmann, O. & O'Donovan, R. (2015). *Analysis with Ultrasmall Numbers. Boca Raton*, London, New York : CRC Press.

Hrbacek, K., Lessmann, O. & O'Donovan, R. (2010). Analysis with Ultrasmall Numbers. *American Mathematical Monthly* 117(9), 801-816.

Lakoff, G. & Nunez, R. (2000). *Where Mathematics Come From*. New York : Basic Books.

Maschietto, M. (2005). Exploration de fonctions, linéarité locale et calculatrices graphiques. *Math-Ecole* 216, 37-44.

O'Donovan, R. (2009). Teaching Analysis with ultrasmall numbers. *Mathematics Teaching Research Journal* 3(3), 1-22.