# les nombres en couleurs

Nov. 1963 **10**

**Bulletin Cuisenaire**

PARAIT 5 FOIS PAR AN · ABONNEMENT : F. 3.— · CHEQUES POSTAUX I 16 713, GENEVE
REDACTEUR: S. ROLLER, ECOLE DU MAIL, GENEVE, 5, RUE DU VILLAGE SUISSE. TEL. (022) 24 79 60

## STIMULATION DE L'ESPRIT

aidant ce dernier à faire face
à des situations nouvelles

« *L'habitude que prennent les élèves très jeunes de ne pas se limiter à un seul aspect, d'être toujours prêts à rencontrer l'inconnu, fait que la mathématique, comme matière d'enseigner, devient éducatrice dans le sens large. On éduque l'enfant et sa sensibilité à être ouverts à tout ce qui vient et n'est-ce pas aujourd'hui le gros problème de la pédagogie que de préparer l'enfant à un monde qui change ? N'est-il pas vrai que la réalité que nous connaissons tous est fonction du temps ? Et parce qu'elle est fonction du temps, personne ne peut prévoir ce qu'elle sera. Elle pourrait être un jour tellement différente de ce qu'elle est présentement, que nous ne pourrions, sans injustice à leur égard, préparer nos enfants à un monde statique.* »

Extrait d'une conférence donnée à la télévision de Montréal (Canada), le 6 décembre 1960, par C. GATTEGNO.

## NUMERATION ET BASES DIFFERENTES

1. Dénombrer une quantité d'objets (grandeur discontinue) ou évaluer la grandeur d'une quantité continue, revient à comparer ces quantités à une quantité-étalon en exprimant le rapport trouvé d'une manière numérique.

2. L'étalon de numération est constitué par une progression géométrique. Le premier terme en est 1. Les termes suivants varient selon la base choisie. Si cette base est, par exemple, 3, les termes qui suivent 1 seront $3^1$ (3), $3^2$ (9), $3^3$ (27), etc. (Notons que le premier terme terme 1 vaut $3^0$ — 3, puissance zéro.)

En base 4, les termes seront $4^0$ (1), $4^1$ (4), $4^2$ (16), $4^3$ (64), etc.
Ces étalons peuvent être illustrés au moyen des réglettes.

*Base 3*

Premier terme: la Rb; second terme: la Rv; troisième terme: 3 Rv côte à côte, formant une *plaque* carrée; quatrième terme: 9 Rv formant un *cube*.

*Base 4*

1er terme: la Rb; 2e terme: la Rc; 3e terme: 4 Rc formant une plaque carrée; 4e terme: 16 Rc formant un cube.
*Remarque:* le 1er terme est toujours la Rb, le 2e terme est constitué par une R, il a la forme d'un *bâton*, le 3e terme a la forme d'une *plaque* carrée et le 4e terme a la forme d'un *cube*.

3. Pour représenter symboliquement ces étalons on a établi la convention suivante: Les divers termes sont placés l'un à côté de l'autre par ordre croissant allant de *droite à gauche*.
Chaque terme est représenté par un chiffre qui tient sa valeur de la *place* qu'il occupe dans la série croissante des termes.

4. L'écriture chiffrée du rapport entre le système de référence d'une part, et la quantité à mesurer d'autre part, implique qu'on dispose d'un nombre de signes (de chiffres) correspondant à celui de la base: en base 3, trois chiffres: 1, 2 et 0; en base 4: quatre chiffres: 1, 2, 3 et 0.
Chaque « ordre » (chaque ordre correspondant à un terme de la progression géométrique) peut contenir un nombre d'éléments correspondant aux chiffres évoqués au paragraphe précédent. Ainsi, en base trois, dans le premier ordre, on peut avoir 1, 2 ou zéro éléments; si on en avait 3, on constituerait une unité de l'ordre supérieur. Ce qui fait que, en base 3 toujours, la quantité qui correspond à notre « 3 » se note 10.
Quelle que soit la base, on aura toujours les notations suivantes: 1 élément du 1er ordre sera noté 1; 1 élément du 2e ordre sera noté 10 (cet élément est représenté, avec le matériel par une réglette — un bâton); 1 élément du 3e ordre sera noté 100 (il est représenté par une plaque carrée); 1 élément du 4e ordre sera noté 1000 (il est représenté par un cube).
100, en base 4, correspond à 16 dans la base 10 qui nous est familière; 1000, en base 5, correspond à 125 en base 10.

5. En résumé, un système de numération est un système de *classes* qui s'ordonnent selon une progression géométrique. Evaluer une quantité reviendra donc à *classer* cette quantité, à la distribuer dans un système quelconque de numération.

Cette opération consiste, en définitive, à établir un *rapport* numérique entre le système de référence et la quantité que l'on se propose d'évaluer.

6. 0. — Tout *rapport* implique trois éléments:
a) la quantité à évaluer;
b) le terme de référence;
c) l'expression numérique qui rend compte de la relation qui unit a à b.

Deux éléments du rapport étant connus, on peut toujours retrouver le troisième.
Il en va de même, ici, pour la numération.

6. 1. — *1er problème.*

Evaluer numériquement la relation existant entre une certaine quantité et tel système de numération.

*Exemple:*

La quantité à mesurer est une poignée de réglettes saisies au hasard.
On a cette collection: b, j, r, b, c, a, c, o, j, c, c, c, r, r, v, b, n, r, f.
Le terme de référence est le système de numération en base 3.
Plaçons des Rv le long de la ligne formée avec les réglettes mentionnées ci-dessus. La ligne sera entièrement vert clair avec, à son extrémité, une Rb.
Groupons les Rv. Trois forment une plaque. Trois plaques (9 Rv) forment un cube. Que trouvons-nous au terme de cette opération ?

Nous trouvons 2 cubes, 2 plaques, 1 bâton et une Rb.
Nous noterons cela ainsi:

| | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|
| *Base 3* Réglettes vert clair | 2 | 2 | 1 | 1 |

c = petit cube (1er ordre);
b = bâton (2e ordre);
p = plaque (3e ordre);
C = grand cube (1er ordre de la 2e classe).

Qu'aurions-nous obtenu en *base 4 ?*
Plaçons des Rc le long de la ligne à mesurer. Groupons ces Rc pour en faire des plaques et des cubes.
Que trouvons-nous ?
Nous trouvons 1 cube et 3 bâtons. Nous noterons cela ainsi:

| | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|
| *Base 4* Réglettes carmin | 1 | 0 | 3 | 0 |

Et en *base 10,* que trouverions-nous ?
Nous trouverions 7 bâtons et 1 Rf (6 cubes).

| | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|
| *Base 10* Réglettes orange | | | 7 | 6 |

La ligne à évaluer vaut, en base 10, 76 (septante-six) unités.

Résumons les trois évaluations:

| | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|
| *Base 3* | 2 | 2 | 1 | 1 |
| *Base 4* | 1 | 0 | 3 | 0 |
| *Base 10* | | | 7 | 6 |

6. 2. — *2e problème.*

Constituer une grandeur, la base et la relation numérique étant données.

*Exemple:*
Former la ligne notée ainsi en base 5:
1 2 0 4
Plaçons ce nombre dans le tableau:

| | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | 4 |

Constituons la quantité ainsi notée:
1 Cube de 25 Rj,
2 plaques de 5 Rj chacune (en tout 10 Rj),
4 c.
Effilons cette quantité pour lui donner son aspect linéaire... Nous obtenons une longue ligne faite de 35 Rj + 4 Rb.
En base 10 (plaçons des Ro le long de la ligne), la ligne mesurerait 179 c (179 Rb; 179 cm).

6. 3. — *3e problème.*

Trouver la base, la quantité concrète et l'expression numérique étant données.

*Exemple:*
Soit une poignée des réglettes mises en ligne: a, j, c, b, m, r, j, r, v, j, a, v, r, r, j, c, r, c, f.
La notation chiffrée est 1 1 0 1.
Quelle a été la base choisie ?
La ligne des réglettes étant faite, il faut tâtonner... Les réglettes de même couleur qu'on alignerait contre la ligne mesurée doivent, une fois groupées, donner 1 *C*ube, 1 *p*laque et 1 *c*ube.
Par approximation on se rendra compte que l'on peut hésiter entre les bases 5 (réglettes jaunes), 4 (réglettes carmin) ou 3 (réglettes vert clair).
Essayons avec la base 5... Que trouvons-nous ?
Nous trouvons:
3 1 1
c'est-à-dire 3 plaques jaunes, 1 bâton et 1 cube.
Echec !
Essayons avec la base 3... Que trouvons-nous ?
Nous trouvons:
1 0 0 0 0
c'est-à-dire 1 *B*âton (= 1 grand bâton constitué par 3 *C*ubes), 0 *C*ube, 0 *p*laques, 0 *b*âton, 0 *c*ube.
Nouvel échec !
*Observation:* plus la base est petite (base 3 plus petite que

base 5), plus l'expression numérique grandit:

base 3  10000
base 5  311

La notation donnée dans le problème est 1101. Elle se situe entre 311 et 10 000. Il y a des chances que la mesure de la ligne ait été faite en base 4. Essayons.

Plaçons des réglettes carmin le long de notre ligne... Que trouvons-nous ?

Nous trouvons:

1 1 0 1

Réussite ! Réponse: la mesure de la ligne a été faite en *base 4*.

Et en base 10, qu'aurions-nous trouvé ?

Nous aurions trouvé *81*.

*Résumé:*

| | B | C | p | b | c |
|---|---|---|---|---|---|
| *Base 3* | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *4* | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| *5* | | | 3 | 1 | 1 |
| *10* | | | | 8 | 1 |

A propos de la *lecture* de ces nombres: seul le nombre exprimé en base 10 peut se lire *quatre-vingt-un*. Les autres nombre doivent être *épelés* avec indication de la base:

10 000 se lit: « un, zéro, zéro, zéro, zéro, en base 3 »;
1 101 se lit: « un, un, zéro, un, en base 4 »;
311 se lit: « trois, un, un, en base 5 ».

*Remarque:* La même *quantité* (celle donnée par la poignée initiale de réglettes) a revêtu plusieurs aspects (la quantité vert clair, la quantité carmin, la jaune, l'orangée) auxquels ont correspondu plusieurs notations chiffrées, mais c'est en réalité toujours la *même quantité* (conservation de la grandeur à travers des formes différentes). *S. R.*

ROLLER (Samuel) et METRAUX (Gilbert) - *La numération* - Rapport 63,08 du Service de la Recherche, section de pédagogie. Ecole du Mail, 5, rue du Village-Suisse, Genève. Prix: Fr. 3.50.

✱ *De l'intelligence pratique à l'intelligence réflexive*. PIAGET (Jean), in tome XV de « L'encyclopédie française », page 15-25 - 11:
« Lorsque l'enfant a, pour ainsi dire, manipulé des nombres ou des surfaces avant de les connaître par la pensée, la notion qu'il en acquiert ultérieurement consiste véritablement en une prise de conscience des schèmes actifs déjà familiers, et non pas, comme dans les méthodes ordinaires, en un concept verbal s'accompagnant d'exercices formels et sans intérêt, sans substructure expérimentale antérieure. »

✱ D'après des informations émanant de C. Gattegno lui-même, les réglettes sont actuellement en usage dans près de 80 pays des cinq continents (« Cuisenaire News », 4, p. 13, 1).

## A PROPOS DU NOMBRE 11 (suite)

6. Du paragraphe 1 au paragraphe 5, on est resté dans le cadre du nombre 11. Il faut maintenant rompre ce cadre et introduire des nombres inférieurs à 11 (occasion d'une revision). On aura, par exemple:

| | |
|---|---|
| $9 + 2 = .\ (11)$ | $6 + 5 = .\ (11)$ |
| $7 + 4 = .\ (11)$ | $5 + 4 = .\ (9)$ |
| $6 + 4 = .\ (10)$ | $8 + 3 = .\ (11)$ |
| $3 + 4 = .\ (7)$ | $3 + 5 = .\ (8)$ |

7. Mêmes calculs qu'au paragraphe 6 mais avec les lacunes en d'autres endroits:

| | |
|---|---|
| a) $9 + . = 11$ | b) $. + 2 = 11$ |
| $7 + . = 11$ | $. + 4 = 11$ |
| $6 + . = 10$ | $. + 4 = 10$ |
| $3 + . = 7$ etc. | $. + 4 = 7$ etc. |

8. (Exercices semblables à ceux du paragraphe 4). Reprenons les opérations du paragraphe 6:

$9 + 2 = 11$
$7 + 4 = 11$
$6 + 4 = 10$
$3 + 4 = 7$ etc.

Essayons de remplacer les résultats (11, 11, 10, 7, etc.) par des calculs qui font 11, 11, 10, 7, etc. On pourra avoir (ce sont *les enfants* qui proposeront):

$9 + 2 = 8 + 3$
$7 + 4 = 5 + 6$
$6 + 4 = 7 + 3$
$3 + 4 = 1 + 6$ etc.

9. Avec les matériaux du paragraphe 8, composer des exercices semblables à ceux du paragraphe 5:

| | |
|---|---|
| a) $9 + . = 8 + 3$ | c) $9 + 2 = 8 + .$ |
| $7 + . = 5 + 6$ | $7 + 4 = 5 + .$ |
| $6 + . = 7 + 3$ | $6 + 4 = 7 + .$ |
| $3 + . = 1 + 6$ etc. | $3 + 4 = 1 + .$ etc. |
| b) $. + 2 = 8 + 3$ | d) $9 + 2 = . + 3$ |
| $. + 4 = 5 + 6$ | $7 + 4 = . + 6$ |
| $. + 4 = 7 + 3$ | $6 + 4 = . + 3$ |
| $. + 4 = 1 + 6$ etc. | $3 + 4 = . + 6$ etc. |

**10.** **Essayer de composer 11 avec des R de même couleur. Observer. On trouvera:**

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$$
$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11$$
$$3 + 3 + 3 + 2 = 11$$
$$4 + 4 + 3 = 11$$
$$5 + 5 + 1 = 1$$

**On pourra alors remplacer les additions par des multiplications:**

$$11 \times 1 = 11$$
$$(5 \times 2) + 1 = 11$$
$$(3 \times 3) + 2 = 11$$
$$(2 \times 4) + 3 = 11$$
$$(2 \times 5) + 1 = 11$$

**11.** **Avec le matériau du paragr. 10, composer des exercices lacunaires:**

a) $(5 \times 2) + 1 = .$
$(2 \times 4) + 3 = .$ etc.

b) $(5 \times 2) + . = 11$
$(2 \times 4) + . = 11$ etc.

c) $(5 \times .) + 1 = 11$
$(2 \times .) + 3 = 11$ etc.

d) $(. \times 2) + 1 = 11$
$(. \times 4) + 2 = 11$ etc.

**12.** **Remplacer le résultat 11 par un « calcul équivalent »:**

$$(5 \times 2) + 1 = 9 + 2$$
$$(3 \times 3) + 2 = 4 + 7$$
$$(2 \times 4) + 3 = 8 + 3 \quad \text{etc.}$$

**Ce travail se fait avec les *enfants*. Ce sont *eux* qui proposent les « expressions équivalentes ».**

**13.** **Avec le matériau du paragr. 12, composer des exercices lacunaires:**

a) $(5 \times 2) + 1 = 9 + .$ etc.
b) $(5 \times 2) + 1 = . + 2$ etc.
c) $(5 \times 2) + . = 9 + 2$ etc.
d) $(5 \times .) + 1 = 9 + 2$ etc.
e) $(. \times 2) + 1 = 9 + 2$ etc.

**14.** **Autres égalités (à faire trouver *par les enfants* munis des R):**

$$(5 \times 2) + 1 = (2 \times 4) + 3$$
$$(3 \times 3) + 2 = (2 \times 5) + 1$$

**15.** **Avec le matériau du paragr. 14, composer des exercices lacunaires:**

a) $(3 \times 3) + 2 = (2 \times 5) + .$ etc.
b) $(3 \times 3) + 2 = (2 \times .) + 1$ etc.
c) $(3 \times 3) + 2 = (. \times 5) + 1$ etc.
d) $(3 \times 3) + . = (2 \times 5) + 1$ etc.
e) $(3 \times .) + 2 = (2 \times 5) + 1$ etc.
f) $(. \times 3) + 2 = (2 \times 5) + 1$ etc.

16. Du paragraphe 10 au paragraphe 15, on est resté dans le cadre de 11. Il faut maintenant rompre ce cadre et introduire des calculs portant sur des nombres plus petits que 11 (revision).
On aura (comme au paragraphe 11):

a) $(5 \times 2) + 1 = .\ (11)$
$(4 \times 2) = .\ (8)$
$(2 \times 3) + 1 = .\ (7)$
$(2 \times 4) + 3 = .\ (11)$ etc.

b) $(5 \times .) + 1 = 11$
$(4 \times .) = 8$ etc.

c) $(. \times 2) + 1 = 11$
$(. \times 2) = 8$ etc.

17. (Comme au paragraphe 13):

a) $(5 \times 2) + 1 = 7 + .$
$(4 \times 2) = 3 + .$ etc.

b) $(5 \times 2) + 1 = . + 4$
$(4 \times 2) = . + 5$ etc.

c) $(5 \times .) + 1 = 7 + 4$
$(4 \times .) = 3 + 5$ etc.

d) $(. \times 2) + 1 = 7 + 4$
$(. \times 2) = 3 + 5$ etc.

18. (Comme au paragraphe 14.) Autres égalités encore. A faire trouver par les enfants:
$(5 \times 2) + 1 = (3 \times 3) + 2$
$4 \times 2 = (2 \times 3) + 2$ etc.

19. (Comme au paragraphe 15):

a) $(5 \times 2) + 1 = 3 \times 3 + .$
$4 \times 2 = 2 \times 3 + .$

b) $(5 \times 2) + 1 = 3 \times . + 2$
$4 \times 2 = 2 \times . + 2$

c) $(5 \times 2) + 1 = . \times 3 + 2$
$4 \times 2 = . \times 3 + 2$

d) $(5 \times .) + 1 = (3 \times 3) + 2$
$4 \times . = (2 \times 3) + 2$
etc.

e) $(. \times 2) + 1 = (3 \times 3) + 2$
$. \times 2 = (2 \times 3) + 2$
etc.

20. Tous ces exercices ne comportent que deux signes: le signe + et le signe ×. Des exercices semblables peuvent être inventés avec les signes — et :
Des combinaisons presque infinies peuvent être imaginées.

21. Pratiquement, ces exercices pourraient être mis sur *fiches de carton assez fort.* Fiches numérotées. Des fiches *d'auto-correction* pourraient être établies. Ainsi, sans dépasser le nombre 11, pris comme exemple ici, un matériel important pourrait être préparé.

22. *Remarque technique:*
Comment présenter clairement une question comme
$$5 \times 2 + 1 = 3 \times 3 + .$$
On peut faire ainsi: $5 \times 2 \quad + 1 = 3 \times 3 \quad + .$
en détachant nettement les groupes « × »;
ou ainsi: $(5 \times 2) + 1 = (3 \times 3) + .$
en employant les parenthèses, comme nous l'avons fait.

*S. R.*