Une analyse a priori de la tâche « Les 9 boules de Cristal »

Valérie Batteau

HEP Vaud

Nous proposons de réaliser une analyse a priori de la tâche mathématique « Les 9 boules de cristal » (Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. 1998a, p. 45) issue des Moyens d'Enseignement Romands de 5P Harmos[1]. Nous allons identifier les connaissances mathématiques en jeu dans la tâche, puis étudier différentes stratégies et les variables didactiques de la tâche.

L'objectif de cette analyse a priori est :

- d'étudier les stratégies possibles afin de permettre d'anticiper les procédures[2] mises en œuvre par les élèves, ainsi que les connaissances mathématiques en jeu
- d'étudier les variables didactiques[3] afin de permettre d'une part, d'identifier ce que l'enseignant peut modifier dans la tâche et les conséquences de ses choix (même implicites) sur les stratégies et les connaissances mathématiques en jeu et d'autre part, d'adapter la tâche à ses élèves (en la simplifiant, en la complexifiant, en proposant des variantes par une action sur les valeurs des variables didactiques).

1 Élèves de 8-9 ans.

2 « Une procédure peut être définie comme l'ensemble des opérations (éventuellement des actions) que l'élève élabore pour atteindre le but assigné par le problème.

Une stratégie est le processus que l'on met en place pour élaborer la procédure de résolution d'un problème. » (Charnay & Mante, 2014, p. 78)

3 *Variable qui peut être modifiée par l'enseignant et qui affecte la hiérarchie des stratégies (par le coût, la validité, la complexité). (Briand & Chevalier, 1995)*

Analyse a priori de la tâche

Présentation de la tâche

Les 9 boules de cristal
Cherche tous les nombres que l'on peut présenter sur un boulier à 2 tiges en utilisant 9 boules au maximum.

Figure 1 : « Les 9 boules de cristal » (Danalet., *1998a, p. 45)*

La tâche « Les 9 boules de cristal » est un prolongement de la tâche « Vanille-Fraise » dans laquelle les élèves doivent rechercher le nombre de boules nécessaires pour représenter des nombres sur un boulier. Un prolongement est une suite à la tâche décrite.

> *Selon les cas, le prolongement permet à l'élève :*
>
> *• de se familiariser avec des connaissances fraîchement construites en les faisant fonctionner dans une situation semblable ou proche*
>
> *• d'aborder, en réinvestissant ses connaissances, la même notion, mais dans un contexte différent.*
>
> *La différenciation de l'enseignement et de l'apprentissage s'effectue ici par le moyen de tâches différentes.*
>
> *En principe, le prolongement peut aussi s'adresser à tous les élèves. (ibid., 1998b, p. 24)*

Dans la mise en œuvre, le livre du maître préconise :

> *« l'enseignant s'assure que les élèves connaissent le fonctionnement du boulier à tiges. » (p.106)*

et pour la mise en commun,

> *« les élèves confrontent les démarches utilisées pour respecter la contrainte du minimum de boules. » (p.106)*

Il faudrait adapter dans notre cas ce commentaire en respectant « la contrainte d'utiliser neuf boules au maximum ». Cette tâche n'est donc pas une tâche de découverte de l'utilisation du boulier. Par contre, comme la tâche précise d'utiliser un boulier à deux tiges et qu'il est sous-entendu que l'enseignant utilise le matériel de classe (p.270), un boulier avec un support à quatre tiges, il faut préciser de n'utiliser que deux tiges sur les quatre.

Connaissances mathématiques en jeu

Cette tâche fait partie du Module 2, champs C, « Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens » :

> **Compétence générale** : *Établir le lien entre une collection organisée en unités, dizaines, centaines, milliers, …, son écriture chiffrée et sa désignation orale.*
>
> **Notions** : *le système décimal.*
>
> **Compétences** : *utiliser différentes désignations d'un nombre, estimer, dénombrer et comparer de grandes collections, décomposer un nombre en milliers, centaines, dizaines, unités, extraire le nombre de dizaines ou de centaines d'un nombre. (p. 61)*

Les élèves doivent représenter des nombres avec des boules qu'ils enfilent sur un boulier à deux tiges. L'utilisation du matériel est imposée pour représenter les nombres et dans le livre du maître, il est précisé que les bouliers

> *sont les modèles les plus proches de l'écriture habituelle d'un nombre dans un système de numération de position. Ils sont aussi très performants pour les opérations, mais ils exigent une compréhension parfaite de la valeur positionnelle des chiffres. Le rôle et l'importance du 0 sont ici matériellement illustrés : une tige vide de boule doit obligatoirement être caractérisée par une écriture correspondante. Exemples : Vanille-Fraise, […] (p. 67)*

L'enseignant a la charge de décoder explicitement les connaissances mathématiques en jeu dans la tâche, à savoir :

- l'aspect positionnel du système de numération,
- la représentation de nombres sur un boulier,
- le passage du nombre représenté sur un boulier à son écriture chiffrée.

Cette tâche vise plus largement la pratique du raisonnement dans le domaine de la numération, en particulier la mise en œuvre d'une procédure systématique de comptage pour trouver la liste exhaustive des solutions.

Stratégies possibles

Une **première stratégie** se place dans le registre des écritures chiffrées, on considère ici les nombres de 0 à 99 étant entendu que les nombres de 0 à 9 seront considérés comme ayant un chiffre des dizaines nul. On cherche tous les nombres que l'on peut représenter de dizaine en dizaine : de 0 à 9, puis de 10 à 19, puis de 20 à 29 ..., jusqu'à de 90 à 99, avec la contrainte que la somme des chiffres des dizaines et des unités soit inférieure ou égale à 9. Les solutions sont donc : 0; 1; 2; ... 9; 10; 11; ... 18; 20; 21; ... 27; 30; ... 36; …; 80; 81; 90. Il y a donc 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 solutions.

Une **deuxième stratégie** est d'utiliser un boulier à deux tiges pour mettre en œuvre cette même démarche de comptage dans laquelle on enfile les boules une à une sur la tige des unités puis on écrit le nombre représenté à chaque fois que l'on enfile une boule. Ensuite, on enlève toutes les boules et on recommence en mettant une boule sur la tige des dizaines et en enfilant une à une les huit boules restantes sur la tige des unités. Il faut recommencer cette marche à suivre jusqu'au moment où on enfile les neuf boules sur la tige des dizaines et on obtient ainsi les 55 solutions. Pour les trouver toutes, il faut mettre en place une procédure systématique de comptage. Dans ce cas, on peut se poser la question de savoir si la représentation par le boulier est une aide et s'il n'est en fait pas plus simple de se poser directement la tâche dans le registre des écritures chiffrées.

Une **troisième stratégie** consiste à chercher tous les nombres que l'on peut représenter avec au maximum une boule, puis deux,..., jusqu'à neuf boules sur un boulier, en reprenant la même marche à suivre que précédemment.

Avec zéro boule, il y a 1 nombre possible (le nombre 0).

Avec une boule *au maximum*, il y a le nombre formé avec zéro boule auquel on ajoute les nombres formés avec exactement une boule (1 et 10). Il y a donc 3 solutions.

Avec deux boules au maximum, il y a les nombres formés avec une boule au maxi-

Nombre maximum de boules utilisées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Solutions	0	0; 1 ; 10	0; 1; 10; 2 ; 11; 20	0; 1 ; 10; 2 ; 11; 20 3; 12; 21; 30	0; … 40	0; … 50	0; … 60	0; … 70	0; … 80	0; … 90
Nombre de solutions	1	3	3	10	15	21	28	36	45	55

Tableau 1 Nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

mum (0 ; 1 ; 10) auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement deux boules (2 ; 11 ; 20). Il y a donc 6 solutions.

Ainsi de suite, jusqu'à neuf boules, on trouve tous les nombres formés avec huit boules au maximum auxquels on ajoute les nombres formés avec exactement neuf boules 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90. On trouve donc les 55 solutions.

Une **quatrième stratégie** est de se placer dans le registre des écritures chiffrées pour mettre en œuvre cette démarche de comptage. On cherche tous les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à 2, puis à 3..., jusqu'à 9.

Une **cinquième stratégie** est le tâtonnement : on utilise le boulier à deux tiges en enfilant des boules et en notant les nombres correspondants, mais sans mettre en œuvre de procédure systématique.

Ces stratégies permettent de travailler l'aspect positionnel du système de numération (avec ou sans boulier) et la pratique du raisonnement. Les deuxième, troisième et cinquième stratégies (avec boulier) permettent de travailler la représentation de nombres sur un boulier et le passage du nombre représenté sur un boulier à son écriture chiffrée.

La troisième stratégie est la plus pertinente avec l'utilisation du boulier et la première dans le registre des écritures chiffrées.

Nous allons étudier les variables didactiques de la tâche et les effets des changements de leurs valeurs sur les stratégies.

Variables didactiques

Une **première variable** didactique est le fait d'utiliser dans la tâche exactement neuf boules ou au maximum neuf boules. Laisser la possibilité d'utiliser au maximum neuf boules et non exactement neuf boules pour représenter des nombres est une difficulté supplémentaire. En effet, si la tâche est de représenter tous les nombres possibles sur un boulier à deux tiges avec exactement neuf boules, la tâche est beaucoup plus simple et s'apparente au dénombrement des décompositions additives en deux termes dont la somme vaut neuf. Il n'y a que dix nombres possibles (9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90). Une stratégie consiste à mettre toutes les boules sur la tige qui représente le chiffre des unités, de noter le nombre représenté, de passer une boule sur la tige qui représente le chiffre des dizaines, de noter le nombre représenté, ainsi de suite, en passant les boules une à une. L'utilisation du boulier dans cette stratégie permet de représenter les nombres et aide à trouver la liste exhaustive des nombres possibles.

Dans la tâche, la variable didactique est d'utiliser au maximum neuf boules, cela implique de mettre en place une procédure systématique de comptage pour trouver toutes les solutions.

Une **deuxième variable** didactique est le fait d'utiliser ou non un boulier[4]. En effet, cela n'implique pas les mêmes représentations du nombre. Sur un boulier à deux tiges, nous pouvons représenter uniquement des nombres entiers à un ou deux chiffres. Le fait de disposer de neuf boules au maximum implique que le nombre de boules qui représente le chiffre des dizaines ajouté au nombre de boules qui représente le chiffre des unités est inférieur ou égal à neuf. La

4 *Il est envisageable de schématiser un boulier avec des boules afin d'y représenter les nombres. Ce boulier schématisé offre une possibilité de trace écrite intéressante pour les élèves.*

retranscription dans le registre sémiotique des écritures chiffrées consiste à rechercher les nombres entiers à un chiffre ou à deux chiffres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est inférieure ou égale à neuf. Comme nous l'avons vu, certaines stratégies sont plus pertinentes avec ou sans l'utilisation d'un boulier.

Une **troisième variable** didactique est le nombre de tiges à utiliser pour représenter des nombres sur un boulier avec neuf boules au maximum.

- Avec un boulier à une tige, tous les nombres possibles sont solutions, la tâche ne présente pas d'intérêt mathématique.
- Avec un boulier à deux tiges, le domaine numérique est de 0 à 90. Il faut exclure les nombres dont la somme des chiffres des dizaines et des unités est supérieure ou égale à dix. Le nombre important de solutions (55) incite à mettre en place une procédure systématique de comptage que ce soit avec ou sans boulier.
- Avec un boulier à trois tiges, le domaine numérique est de 0 à 900 et le nombre de solutions (220) est encore plus important. Les stratégies consistant à rechercher toutes les solutions avec un boulier ou dans le registre des écritures chiffrées sont toujours possibles, mais coûteuses en temps. La stratégie optimale utilise des suites.

De [0 ; 100[, on retrouve les solutions sur un boulier à deux tiges (Tableau 1).

Les nombres de solutions correspondent aux dix premiers nombres triangulaires, définis par la suite (t_n) $t_1=1$ pour tout entier n non nul, $t_n=1+2+…+n$.

Pour trouver le nombre total de solutions de [0 ; 1000[, on calcule la somme du nombre de solutions pour chaque intervalle de [0 ;100[, ..., [900 ;1000[, c'est-à-dire la somme $t_{10}+…+t_1$ (Tableau 2).

Intervalle	[0 ; 100[	[100 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 400[	[400 ; 500[
Solutions	0; ... ; 90	100; ...; 108; 110; ...; 117; ... ; 180	200; ...; 207; 210; ...; 216; ...; 270	300; ...; 306; 310; ...; 315; ...; 360	400; ...; 405; 410; ...; 414; ...; 450
Nombre de solutions	10+9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 55 $= t_{10}$	9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 45 $= t_9$	8+7+6+5+4 +3+2+1 = 36 $= t_8$	7+6+5+4 +3+2+1 = 28 $= t_7$	6+5+4 +3+2+1 = 21 $= t_6$
Intervalle	[500 ; 600[	[600 ; 700[	[700 ; 800[	[800 ; 900[	[900 ; 1000[
Solutions	500; ... ; 504 ; 510; ...; 513; ...; 540	600; ...; 603; 610; ...; 612; 620; 621; 630	700; 701; 702; 710; 711; 720	800; 801; 810	900
Nombre de solutions	5+4+3+2+1 = 15 $= t_5$	4+3+2+1 = 10 $= t_4$	3+2+1 = 6 $= t_3$	2+1 = 3 $= t_2$	$1 = t_1$

Tableau 2 Nombre de solutions par intervalle de [0 ;1000[

Intervalle	[1000 ; 1100[	[1100 ; 1200[	[1200 ; 1300[	[1300 ; 1400[	[1400 ; 1500[
Nombre de solutions	9+8+7+6+5 +4+3+2+1 = 45 $= t_9$	8+7+6+5+4 +3+2+1 = 36 $= t_8$	7+6+5+4 +3+2+1 = 28 $= t_7$	6+5+4 +3+2+1 = 21 $= t_6$	5+4+3+2+1 = 15 $= t_5$
Intervalle	[1500 ; 1600[	[1600 ; 1700[	[1700 ; 1800[	[1800 ; 2000[	
Nombre de solutions	4+3+2+1 = 10 $= t_4$	3+2+1 = 6 $= t_3$	2+1 = 3 $= t_2$	$1 = t_1$	

Tableau 3 Nombre de solutions par intervalle de [1000 ; 2000[

On définit alors la suite (U_n) des nombres tétraédriques par

$U_n=t_1+\ldots+t_n$. pour tout entier n non nul.

De [0;1000[, il y a

$U_{10}=1+3+6+10+15+21+28+36+45+55$

$$= \frac{10(10+1)(10+2)}{6} = 220 \text{ solutions.}$$

- Avec <u>un boulier à quatre tiges</u>, le domaine numérique est de 0 à 9000 et la stratégie optimale utilise également les suites des nombres triangulaires et tétraédriques.

De [1000 ; 2000[(Tableau 3), il y a $U_9=1+3+6+10+15+21+28+36+45 = 165$ solutions.

De même, de [2000 ; 3000[, il y a $U_8=1+3+6+10+15+21+28+36 = 120$ solutions.

Ainsi de suite, de [0 ; 10000[, il y a $220+165+120+84+56+35+20+10+4+1 = 715$ solutions.

Dès que l'on utilise trois tiges et plus sur un boulier, il y a un saut, car la tâche devient beaucoup trop complexe pour le niveau scolaire concerné et les procédures efficaces avec un boulier à deux tiges deviennent trop coûteuses en temps. Il faut donc trouver de nouvelles stratégies qui utilisent de nouvelles connaissances (suites des nombres triangulaires et tétraédriques, séries).

Nombre maximum de boules utilisées	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de solutions	64 $= 100-t_8$	72 $= 100-t_7$	79 $= 100-t_6$	85 $= 100-t_5$	90 $= 100-t_4$	94 $= 100-t_3$	97 $= 100-t_2$	99 $= 100-t_1$	100

Tableau 4 Nombre de solutions en fonction du nombre maximum de boules utilisées

Une **quatrième variable** didactique est le nombre de boules que l'on peut utiliser au maximum sur un boulier à deux tiges.

Le domaine numérique est de 0 à 99 et le nombre maximum de boules que l'on peut utiliser est donc 18. De 0 à 9 boules au maximum, le nombre de solutions correspond à la suite des dix premiers nombres triangulaires (Tableau 2). Il est intéressant de remarquer qu'à partir de 10 boules, nous ne retrouvons pas la suite des nombres triangulaires (Tableau 4).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Tableau 5 Tableau de nombres de 0 à 99

En effet, dans notre système de numération en base dix, la somme des chiffres des dizaines et des unités des nombres sur une même diagonale est constante (Tableau 5). Pour compter le nombre de solutions en utilisant de 10 à 18 boules, la stratégie optimale est de calculer le complément à 100 des nombres tétraédriques (Tableau 4).

Conclusion

Pour simplifier la tâche tout en visant les mêmes connaissances mathématiques que la tâche initiale, il est possible de réduire le nombre de boules (cf. quatrième variable didactique) ou de proposer aux élèves de chercher tous les nombres qu'ils peuvent représenter sur un boulier à deux tiges avec exactement neuf boules (cf. première variable didactique).

Inversement, pour complexifier la tâche, il est possible d'augmenter le nombre de tiges sur le boulier (cf. troisième variable didactique), cette tâche peut être adaptée jusqu'au secondaire 2. Nous pouvons également augmenter le nombre de boules (cf. quatrième variable didactique) et le nombre de solutions devient plus important.

Nous interrogeons la pertinence de l'utilisation du boulier pour cette tâche, en considérant les difficultés observées chez les élèves pendant une leçon et en considérant que son utilisation n'est pas pertinente dans toutes les stratégies pour établir la liste exhaustive des solutions.

En considérant la marge de manœuvre importante laissée à l'enseignant concernant la mise en œuvre de la tâche et le déroulement de la leçon, cette analyse a priori offre à l'enseignant des pistes de réflexion et d'adaptation de la tâche.

Références

Briand, J., & Chevalier, M. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* Paris : Hatier.

Charnay, R., & Mante, M. (2014). *Professeur des écoles. Admissibilité. Mathématiques. Tome 2.* CRPE : Hatier concours.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. (1998a). *Mathématiques 3P - Livre de l'élève*. Neuchâtel : Corome.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C., & Villars-Kneubühler, F. (1998b). *Mathématiques 3P - Livre du maître*. Neuchâtel : Corome.