Narration[1] : « Des tapis à plat sans trous »

Céline Vendeira

Groupe Ddmes

UN JEU DE TÂCHES ET DES POLYDRONS

L'article qui suit est la narration d'un jeu de tâches utilisant le matériel *polydrons*[2]. Pour une description plus détaillée des « jeux de tâches », voir le texte de Favre (2008). Il importe de préciser que les jeux de tâches menés dans le contexte de l'enseignement spécialisé n'ont pas pour objectif d'enseigner, mais d'enrichir l'expérience mathématique des élèves. De plus, aucune contrainte de réussite ou d'achèvement n'est nécessaire pour passer d'une tâche à l'autre. Pour revenir au matériel *polydrons*, il présente un certain potentiel pour la construction de solides, mais également pour la réalisation de pavages ou de construction de patrons. Dans ce qui suit, le matériel n'est utilisé que pour des pavages du plan. Comme le terme pavage n'est pas familier aux élèves, la métaphore du tapis est utilisée avec l'expression « des tapis à plat sans trous ». Le matériel comprend différentes pièces en plastique dur qui s'articulent par une pression des charnières l'une contre l'autre. Il est constitué de polygones dont deux types de triangles (équilatéraux et isocèles rectangles), des carrés, et des pentagones réguliers[3].

Le jeu de tâches est pensé afin de permettre aux élèves des découvertes autour des pavages. Avec quelles pièces (identiques ou assemblage de différentes pièces) est-il possible de paver ? Peut-on toujours paver ? Existe-t-il des règles qui permettent de décider si le pavage est possible ? Y a-t-il différentes façons d'assembler les pièces afin de réaliser le pavage ?

Les trois narrations qui suivent vous permettront de découvrir la richesse des expérimentations que le matériel offre ainsi que la dynamique des jeux de tâches.

Narration 1 : la métaphore du tapis

Avec Mathilde et Nicolas

La séance débute en précisant que le matériel polydrons ne va pas être utilisé afin de créer des solides, mais des tapis à plat. « Pensez-vous que l'on peut faire un tapis à plat sans trou avec des triangles comme ça ? » (triangles équilatéraux). Mathilde, obtient un tapis « rond » en rassemblant six triangles équilatéraux au même sommet.

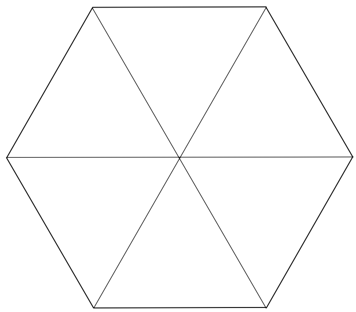


Figure 1 : Tapis proposé par Mathilde

« S'agit-il vraiment d'un rond ? » Il s'engage une discussion sur les côtés (du rond) et leur nombre.

> Nos diverses expérimentations montrent que lorsque le nombre de côtés augmente les élèves ont tendance à décrire la forme comme de plus en plus ronde.

Mathilde ne compte pas en pointant les côtés extérieurs des triangles, mais en pointant les triangles eux-mêmes.

> On peut faire l'hypothèse de la prégnance de la vision des surfaces sur celle des segments ou des sommets décrite par Duval (2006).

Elle aboutit ainsi à six. « Et combien de pointes ? » Cette question l'embarrasse, car le terme « pointe » désigne aussi les sommets

1 *Pour rappel n°218.*

2 *Il s'agit d'un équipement distribué, dans le canton de Genève, en deux exemplaires par classe de la 5P à la 8P.*

3 *Une autre boîte vendue séparément, mais n'étant pas à disposition des enseignants genevois comprend également des rectangles et des hexagones réguliers.*

qui se rejoignent à l'intérieur du « rond ». Elle en trouve alors vingt-et-une (au lieu de dix-huit) car elle compte deux fois un même triangle.

Une nouvelle question est proposée avec le triangle isocèle rectangle. « Peut-on faire un tapis à plat sans trou avec ce triangle-là ? » Les deux élèves répondent aussitôt positivement. « De combien de triangles aurez-vous besoin pour faire votre tapis ? » Nicolas répond sans hésitation « deux » puis prend deux pièces qu'il assemble par leur hypoténuse et affirme « ben voilà, un tapis carré ! »

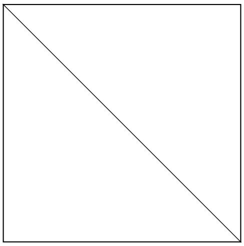
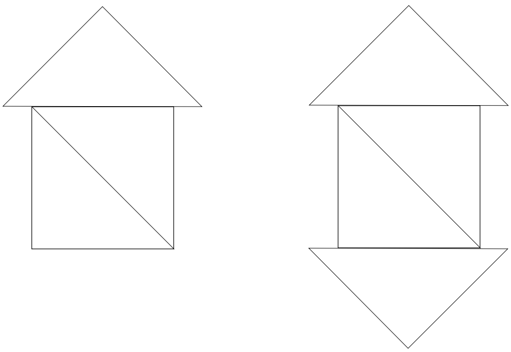


Figure 2 : Production de Nicolas

C'est une surprise. Je m'attendais à un assemblage de quatre ou huit pièces.

Cette production met à mal la métaphore du tapis. Un tapis peut effectivement être constitué d'une seule pièce. Le fait que le pavage puisse continuer, selon une règle de formation déterminée, à l'infini, n'apparait pas dans la métaphore.

Je relance Nicolas : « Peux-tu faire une autre forme de tapis et si oui de combien de pièces as-tu besoin ? » Il en demande quatre. À la place de les assembler en deux fois deux carrés comme je l'aurais imaginé, il forme une maison en utilisant trois pièces.



Figures 3 : Production de Nicolas à trois (« maison ») et quatre (« double flèche ») pièces

Suite à une remarque de ma part, Nicolas ajoute un toit de l'autre côté.

Le fait que la longueur des côtés ne coïncide pas ne le dérange pas. Pendant ce temps Mathilde construit un tapis à partir de six pièces.

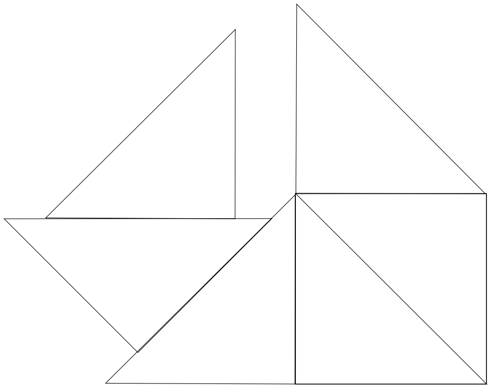
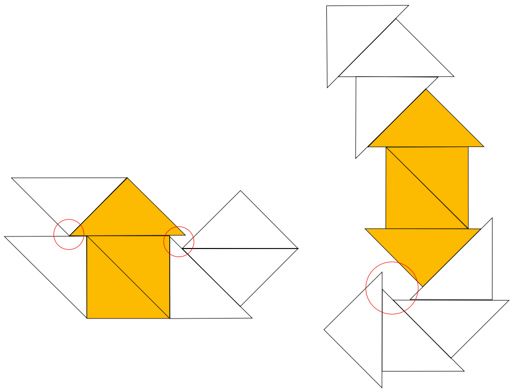


Figure 4 : Proposition de Mathilde avec six pièces

Selon les deux élèves, cette nouvelle proposition comporte un trou, alors que celles proposées par Nicolas n'en avaient pas.

Une nouvelle fois la métaphore du tapis est mise en cause. Dans le sens commun, un trou dans un tapis rend compte d'un tapis qui aurait été rongé de l'intérieur. Avec trois ou quatre pièces seulement, le trou n'apparait pas car il constitue le bord du tapis.

Partant de leurs réactions, je leur demande si, en ajoutant des pièces supplémentaires aux tapis « maison » et « double flèche », des trous apparaîtront ?



Figures 5 : Assemblages à partir des tapis « maison » (gauche) et « double flèche » (droite)

Mathilde identifie des trous sans toutefois pouvoir se prononcer sur leur permanence. « Peuvent-ils disparaître en ajoutant encore des pièces ? » Nicolas précise que ce n'est pas possible de combler le trou de la figure de droite, car il ne parvient pas à mettre de pièce dedans.

Cette première narration met en évidence deux aspects. Le premier concerne l'ajustement nécessaire (à caude de la métaphore du tapis) de la présentation du jeu aux élèves en intégrant l'idée de recouvrement du pavage, absente de ce premier jeu de tâches. Le deuxième concerne le potentiel du travail avec des polygones non réguliers tel que le triangle isocèle rectangle engendrant des surfaces non convexes lorsque des côtés de longueurs différentes sont accolés.

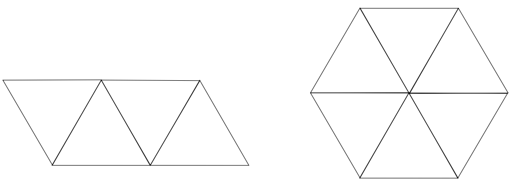
Ci-dessous sont proposées deux narrations supplémentaires de ce même jeu de tâches enrichi de cette première expérience avec les élèves.

NARRATIONS 2 & 3 : NŒUDS DE PAVAGE

AVEC ALAIN ET JEAN-DANIEL

Le jeu de tâches débute comme le précédent. Cette fois par contre, il faut être certain de pouvoir continuer le pavage jusqu'à recouvrir tout le sol de la classe sans jamais laisser de trous.

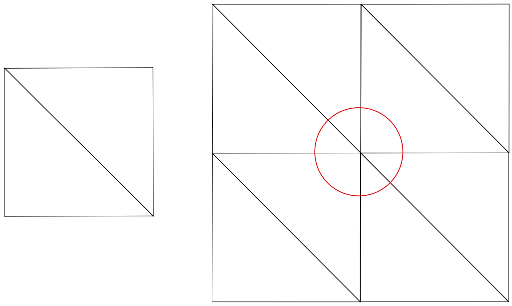
Le jeu débute avec le triangle équilatéral. Les élèves sont rapidement convaincus que c'est possible. Les productions réalisées sont différentes chez les deux élèves.



Figures 6 : Productions des deux élèves (1) Frise en longueur et (2) hexagone

L'expérimentation se poursuit avec les triangles rectangles isocèles. « Est-il possible de faire un tapis sans trou qui recouvre tout le sol de la classe avec ce nouveau triangle ? » Les deux élèves ne perçoivent pas à priori l'angle droit des triangles isocèles rectangles. Ils se lancent dans l'expérimentation sans faire d'hypothèses. Dans l'action, ils découvrent que « c'est plus difficile » car les côtés ne s'accolent pas tous comme avec les triangles équilatéraux. Assez spontanément ils accolent uniquement des côtés de même longueur (à la différence de Mathilde et Nicolas).

Alors qu'Alain tâtonne, Jean-Daniel accole systématiquement deux triangles par leur hypoténuse afin de construire des carrés qu'il regroupe ensuite par quatre en un carré plus grand et ainsi de suite.



Figures 7 : carré composé de 2 triangles puis de 8 triangles

A partir de la proposition avec huit triangles, nous pointons le nombre de triangles qui se joignent par leur sommet. C'est ce que nous nommons par la suite « nœud de pavage ». Dans le cas du carré formé de huit triangles, nous pouvons compter six triangles au nœud de ce pavage particulier.

Le jeu de tâches se poursuit en mettant de côté le matériel *polydrons* limité à des polygones réguliers (hormis le triangle rectangle isocèle). Chaque élève reçoit un tas d'une dizaine de feuilles blanches empilées. De manière très directive, je demande de réaliser deux coups de ciseaux permettant de créer ainsi une dizaine d'exemplaires de triangles égaux quelconques (pas toujours évident de réaliser un triangle quelconque…). « Est-il possible de faire un tapis à plat sans trou avec des triangles comme ça ? » En manipulant les élèves constatent qu'il est possible de paver le plan avec des triangles égaux quelconques.

La fin de séance approche. Je prends une pièce carrée dans le matériel *polydrons*. Ils doivent se prononcer sur la possibilité de paver avec cette pièce jusqu'à recouvrir tout le sol de la classe sans jamais laisser de trous. Alain indique que c'est possible en assemblant quatre carrés qui se joignent en un point. Il ajoute que ce n'est pas possible avec un autre nombre de pièces que quatre. Il identifie ainsi que le seul nœud de pavage possible avec le carré est constitué de quatre pièces.

Lors de cette séance apparaîssent de manière récurrente des questions autour de l'assemblage des pièces par leurs sommets et donc le potentiel de questionner les élèves autour des nœuds de pavage. La narration suivante en est une bonne illustration.

Avec Sally et Serena

La troisième expérimentation se déroule avec Sally et Serena.

L'expérimentation débute comme la précédente avec le triangle équilatéral. Sally produit un pavage avec six triangles en hexagone (comme dans la figure 6). Je propose alors de chercher d'autres solutions : est-ce possible avec pour nœud de pavage 3, 4 ou 5 pièces ?

De son côté Serena produit une frise en longueur. Elle détermine alors qu'il est possible de paver le plan avec trois triangles au sommet.

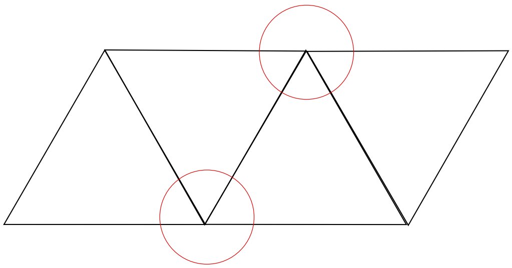


Figure 8 : Production de Serena

En parallèle, on voit apparaître du volume chez Sally qui referme sa construction avec pour nœud de pavage trois triangles, puis quatre et cinq. À six elle retombe sur son hexagone dans le plan. Elle ne voit par contre pas comment poursuivre au-delà de six. Je prends alors un triangle supplémentaire, l'ajoute aux six autres et referme la construction avec pour nœud de pavage sept triangles, donnant ainsi un solide non convexe. Serena investit cette nouvelle piste « Va –t-on finalement retomber sur du plat à un moment donné ? » Elle assemble jusqu'à douze triangles et obtient avec fierté « une fleur ».

Figure 9 : Production « fleur » de Serena avec douze triangles

Le jeu de tâches se poursuit avec les triangles isocèles rectangles. L'une des deux élèves propose une frise assemblant des blocs carrés de huit triangles associés comme dans la figure 7.

L'assemblage des triangles est différent à chaque nouveau nœud de pavage. La production ci-dessous créé une suite avec des nœuds de pavage de 6 - 7 - 5 - 7 – 5 sommets (de gauche à droite).

Figure 10 : Production de 6 - 7 - 5 - 7 – 5 sommets

Dès lors débute une réflexion sur l'existence d'une éventuelle suite logique dans les nœuds du pavage. Puis le jeu de tâche est relancé « Est-t-il possible de paver le plan en assemblant 2-3-4-6-9 triangles et plus au sommet ? » La séance se clôt avant de pouvoir investiguer davantage la question.

En guise de conclusion, la richesse des nouvelles tâches apparues au fil des parties montre l'évolution que peut subir un jeu de tâches par le simple fait des interactions entre expérimentateur et élèves. Il est également important de pointer le potentiel du matériel polydrons pour réaliser des tâches autour des questions de pavage alors qu'il est souvent employé pour la construction de solides.

Références

Duval R., Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, 82, 9-30.