

COMPAREZ, C'EST GAGNÉ ! GRANDEUR, MESURE ET OPTIMISATION

Shaula Fiorelli Vilmart¹ et Pierre-
Alain Cherix²

Université de Genève

Qu'est-ce que les pavages, les suites de nombres, la calculatrice et le pliage ont en commun ? Bien sûr, on peut remarquer que ces thèmes sont tous liés peu ou prou aux mathématiques, mais à Genève, ces sujets ont un autre lien plus précis : ce sont les thèmes choisis pour les Semaines des Mathématiques qui ont eu lieu en 2004, 2005, 2007 et 2010.

MAIS AU FAIT, C'EST QUOI UNE SEMAINE DES MATHÉMATIQUES ?

C'est un événement organisé par la Commission genevoise de l'enseignement des mathématiques (CEM). Cette commission regroupe des représentants des quatre ordres d'enseignement, de l'école enfantine à l'enseignement supérieur et offre un lieu d'échange pour les acteurs de l'enseignement des mathématiques à Genève. Un de ses buts principaux est de décroiser les mathématiques vues dans les divers ordres d'enseignement en offrant des possibilités de rencontre pour des enseignants intéressés. C'est dans cette optique que la Semaine des Mathématiques a été pensée. Il s'agit, durant une semaine, de faire travailler des élèves de tout ordre sur un thème commun, dans le but de promouvoir la cohérence de l'enseignement des mathématiques durant toute la scolarité, du primaire à l'université, en optant pour une problématique commune. Ce travail sur un thème identique permet de mieux percevoir l'unité des mathématiques, la nécessaire continuité de leur enseignement, et devrait contribuer à resserrer les liens entre les différents acteurs de l'enseignement.

¹ shaula.fiorelli@unige.ch

² pierre-alain.cherix@unige.ch

COMMENT PARTICIPER

En pratique, les enseignants qui le désirent pourront, durant leurs heures de mathématiques, proposer des activités spécialement conçues³ avec lesquelles les élèves pourront (re)découvrir le sens de notions mathématiques, débattre de la validité de leurs propositions, et développer et entraîner des techniques nécessaires à la résolution de problèmes.

Nous proposons comme date pour cette Semaine des mathématiques la première semaine d'enseignement après les vacances de Noël, à savoir du **6 au 10 janvier 2014**.

LE THÈME DE CETTE ÉDITION

Pour cette 5^{ème} édition, le thème retenu est Grandeur, Mesure et Optimisation. L'utilisation des mathématiques dans la vie courante correspond souvent à mesurer une certaine grandeur. Par exemple, dans bien des situations, nous sommes confrontés à des questions du genre : « Quel est l'objet le plus grand/lourd/rapide/ cher/... que je puisse obtenir ? ». Pour répondre à cette question, nous devons nous demander : « Qui est plus grand/lourd/rapide/cher/... que... ? ». Cette démarche nous permet de choisir parmi une famille de situations données, celle qui répond le mieux à notre besoin. Mais pour gagner, nous sommes obligés de comparer.

Le but de cet article est de présenter quelques unes des activités développées pour cet événement. Nous en avons choisies quatre qui nous semblent bien refléter la diversité des notions de grandeur et de mesure. Mais au préalable nous devons préciser ce que nous entendons par ces deux mots.

GRANDEURS ET MESURES ? DÉFINITIONS

Dans le langage courant les notions de grandeur et de mesure peuvent sembler assez similaires, malgré tout elles ne coïncident pas exactement. Essayons d'expliquer leurs différences. Plusieurs auteurs s'y

³ Les activités sont disponibles sur le site

<http://icp.ge.ch/dip/mathspip.php?rubrique146>

sont essayés, en particulier R. Charnay et M. Mante (2008), N. Rouche (1994) et bien d'autres. Ils mettent en avant le fait que la mesure se réfère à un nombre réel positif, alors que la grandeur ne décrit qu'une caractéristique d'une famille d'objets similaires pouvant plus ou moins être comparés.

Essayons d'être un peu plus précis. Dans un document de travail distribué lors de formations continues, Eric Burdet, se référant à Charnay et Mante (2008), écrit :

Grandeur : *caractère (attribut, caractéristique, propriété) d'un objet ou d'un phénomène susceptible de variations (chez cet objet ou d'un objet à l'autre).*

En ce sens, une grandeur n'est rien d'autre qu'une fonction allant d'un espace d'objets (ou de situations) dans un autre ensemble. Cela nous semble peut-être un peu trop large, en effet dans l'idée de grandeur, il nous semble percevoir au moins informellement la possibilité de comparer deux valeurs obtenues, même si cela se fait sur des critères non objectifs.

L'exemple donné par R. Charnay d'une grandeur est la gentillesse d'une personne. On dit facilement qu'une personne est plus gentille qu'une autre, mais cela n'a rien d'absolu, puisque cela dépend de l'appréciation de la personne qui émet ce jugement. On préfère évidemment avoir des moyens de comparaison mieux définis. C'est ce qui amène à l'idée de grandeur repérable.

Une grandeur repérable est une grandeur dont l'espace d'arrivée est un espace totalement ordonné dans lequel la comparaison se fait sur l'ordre de l'espace d'arrivée. Si, comme c'est le plus souvent le cas, cet espace est celui des nombres, alors on peut dire précisément qu'une situation est « trois fois plus... » qu'une autre.

Comme exemple de grandeur repérable on donne souvent la température, puisqu'on peut comparer la température de deux objets et déterminer lequel est le plus chaud en regardant effectivement sur un thermomètre lequel montre la valeur la plus élevée.

Petite question de réflexion : Est-ce que la couleur des yeux est une grandeur repérable ?

Revenons à l'exemple de la température. Nous venons de dire qu'il s'agit d'une grandeur repérable ; est-elle aussi mesurable ?

Mathématiquement, dans l'idée de mesure s'ajoute la notion d'additivité. Autrement dit, si deux objets disjoints ont chacun une mesure, on veut que la mesure des deux objets pris ensemble corresponde à la somme des deux mesures des objets pris isolément. Ceci n'est pas valable dans le cas de la température.

Une grandeur mesurable est donc une grandeur repérable pour laquelle il est possible de donner un sens au fait que la mesure de deux (ou d'une famille finie d') objets disjoints est égale à la somme des mesures des objets pris isolément.

Les exemples de telles mesures sont nombreux (au moins dans des échelles de valeurs raisonnables) puisqu'on trouve, l'aire, le volume, la longueur, la vitesse, la masse, le temps, et bien d'autres.

Implicitement, dans cette définition, le choix d'une échelle a été fait, puisque l'on peut admettre que la valeur 1 est atteinte. Néanmoins, la mesure d'une grandeur se réfère souvent non seulement au choix d'une grandeur mesurable, comme la longueur, mais aussi au choix d'une longueur de référence (le mètre, le pied, l'inch,...).

La mesure d'une grandeur est donc la donnée d'une grandeur mesurable et d'un objet étalon. Ainsi, dans le même document Eric Burdet, toujours en se référant à Charnay et Mante (2008) écrit :

Mesurer, c'est déterminer la valeur d'une grandeur (la longueur d'un segment, l'aire d'une surface, le volume d'un solide, la masse d'un objet, ...) par comparaison avec une grandeur unité de même espèce, prise comme référence.

Mathématiquement, la seule notion bien définie est celle de mesure qui englobe effectivement la notion d'additivité, mais laisse implicite le choix de l'unité de mesure. Il s'agit par contre d'arriver à donner un sens mathématique précis à la notion « deux objets pris ensemble ». Si nos objets initiaux sont des ensembles, alors les « deux objets initiaux pris ensemble » se traduit comme la

réunion des deux ensembles initiaux, pour autant que celle-ci soit aussi un objet initial. Souvent dans la pratique, on parlera de réunion des deux objets, sans nécessairement avoir défini clairement ce que l'on entend par là. Heureusement dans la plupart des cas, il n'y a pas d'ambiguïté.

DES EXEMPLES D'ACTIVITÉS

GRANDEUR SANS MESURE

Mathématiquement, la notion de grandeur n'est pas définie, puisque celle-ci est souvent liée à une mesure associée. Il semble néanmoins avéré qu'il est important pour les enfants de s'approprier l'idée de grandeur avant de l'associer automatiquement à sa mesure, c'est-à-dire à un nombre. En pratique, nous comparons souvent des objets sans les mesurer ; par exemple, si nous voulons comparer la taille de deux personnes, nous les mettons dos à dos pour voir laquelle est la plus grande, sans nécessairement mesurer leur taille respective.

Parmi les activités proposées aux petits degrés, trois d'entre elles répondent plus particulièrement à ce besoin : « Problème de poids », « Les enfants se comparent... » et « Les arbres ». Dans cette dernière, il s'agit justement de déterminer quel est le plus gros arbre d'un parc.



Quel est le plus gros arbre du parc?

Le but principal de cette activité est de permettre aux élèves de prendre conscience de ce qu'est une grandeur en trouvant des moyens de comparer les arbres entre eux.

Un second but est de faire remarquer que « gros » n'est pas bien défini et qu'ils doivent choisir une définition commune de ce mot. Ce deuxième but n'apparaîtra pas nécessairement, mais pourrait émerger au cas où des définitions différentes amèneraient à

des classifications distinctes.

LA VITESSE, GRANDEUR OU MESURE ?

Une autre activité développée pour l'école primaire, « Course à pied », demande à plusieurs groupes d'enfants ayant participé à plusieurs courses de durée fixée de déterminer lequel d'entre eux a couru le plus loin.

Pour les plus grands, il s'agit de plus de répondre à la question « qui a couru le plus vite ? ». Ceci les oblige à ramener les distances parcourues sur des temps différents à un même temps de référence. Cette activité confronte les enfants à deux grandeurs : le temps et la distance et leur permet d'aborder la notion de vitesse.

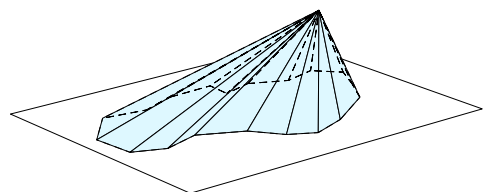
UNE GRANDEUR POUR TROUVER UNE MESURE

Il est aussi intéressant de voir que l'utilisation astucieuse du volume et de son invariance par découpe (équidécomposabilité) permet de trouver des propriétés de la mesure du volume.

Voyons un exemple. Il s'agit sans doute, historiquement parlant, de la première justification théorique du fait que le volume d'un tétraèdre régulier s'exprime selon la formule⁴ :

$$\text{Volume} = \text{base} \cdot \text{hauteur} / 3$$

Parmi les formules décrivant le volume de polyèdres simples, la première qui pose un vrai problème semble être celle d'objet de type pyramide. C'est-à-dire un objet constitué de l'ensemble des segments de droite reliant tout point d'une base plane donnée à un sommet donné (souvent supposé hors du plan contenant la base)



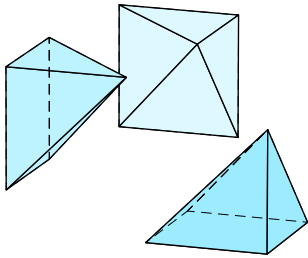
Un objet de type pyramide

Pour ce type d'objet, la formule est toujours la même :

⁴ Noter que par « base » on entend l'aire de la base.

Volume = base • hauteur / 3 ,
mais comment expliquer le 1/3.

S'il existe une décomposition d'un cube en trois pyramides identiques à base carrée, Max Dehn (1902) a démontré qu'il n'existe aucune décomposition d'un tétraèdre régulier en un cube. La preuve de cette formule pour le tétraèdre régulier (n'utilisant pas le calcul intégral) est donc particulièrement intéressante.



La décomposition d'un cube en trois pyramides identiques à base carrée

La preuve de cette formule pour le tétraèdre régulier est due à Eudoxe (voir à ce sujet l'excellent article de Jean Itard (1950)) et est accessible à tout élève connaissant le volume d'un parallélépipède rectangle pour autant qu'il admette les présupposés naturels d'Eudoxe. Une activité basée sur cette preuve permet donc non seulement de démontrer cette formule qui donne la mesure du volume du tétraèdre régulier en utilisant les propriétés de la grandeur, à savoir son invariance par découpe, mais permet aussi d'entraîner et d'utiliser la résolution algébrique d'équations dans un contexte très différent de ceux habituellement rencontrés par les élèves.

CONSÉQUENCES PARADOXALES D'UNE MESURE

Une dernière activité, le paradoxe de Simpson, montre que l'idée de mesure permet d'expliquer, ou au moins de faire apparaître, des phénomènes qui semblent à première vue paradoxaux.

Pour comprendre cet exemple, il faut se rappeler que lorsqu'on parle d'une probabilité (ou qu'on la calcule), on compare des mesures. En effet, on cherche à calculer la probabilité qu'un événement E se produise avant que celui-ci n'ait lieu. Ainsi, face à

une expérience à venir, si nous pouvons déterminer tous les résultats possibles qu'on peut obtenir, nous pouvons choisir ceux qui réalisent l'événement E.

Si une partie de l'expérience est déjà connue, ou si une information supplémentaire nous est donnée, cela restreint l'univers des résultats possibles, ainsi que, peut-être, l'ensemble des résultats induisant E. La probabilité de E sachant cette nouvelle information doit être recalculée en tenant compte de ces restrictions. C'est ce qu'on a appelé une probabilité conditionnelle.

Pour les plus âgés de nos élèves, on peut ainsi mettre en avant certains phénomènes étonnants, voire paradoxaux, liés à cela. Le paradoxe de Simpson est un tel phénomène. Imaginons que nous voulions comparer l'efficacité de deux traitements contre les calculs rénaux. Et que nous connaissions non seulement des statistiques de guérison suite aux deux traitements sur un échantillon de 700 patients, mais aussi que nous connaissions la taille des calculs de chaque patient, alors l'évaluation du traitement va dépendre dramatiquement de la prise en compte ou non de la taille des calculs rénaux (voir Annexe).

On remarque qu'on ne peut pas se contenter d'observer des résultats triés de manière arbitraire pour en déduire des conclusions (méthode inductive). Il est nécessaire d'avoir une théorie a priori, qui donne les catégories pertinentes dans lesquelles doivent être répartis les résultats de l'expérience que l'on va réaliser (méthode déductive).

Ceci étant dit, rien ne nous assure que la prise en compte d'un autre paramètre (par exemple le poids, l'âge, le sexe etc.) ne modifierait pas à nouveau les conclusions.

Il est troublant de rencontrer ce type de paradoxes, mais cela nous oblige à garder un esprit critique face à nos résultats⁵.

En conclusion, nous voyons au travers de ces exemples que les idées de grandeur et de mesure, bien que prenant des formes très variées, admettent des méthodes et des approches similaires. L'additivité de

⁵ Pour en savoir plus sur le paradoxe de Simpson, vous pouvez lire l'article de Jean-Paul Delahaye (2013).

la mesure est la propriété fondamentale donnant sa force à cette notion. Faire des mathématiques revient en fait à réaliser qu'une propriété commune apparaît dans des situations apparemment différentes, et que c'est cette propriété sous-jacente qui permet une résolution similaire des questions soulevées dans les situations observées. Le prix à payer pour cette unification est l'abstraction de la notion. C'est la diversité des exemples de mesures, et par conséquent la grande variété d'activités que l'on peut proposer aux élèves, qui a fait que ce thème a été choisi pour cette nouvelle Semaine des Mathématiques.

RÉFÉRENCES

Charnay, R., Mante, M., (2008). *Mathématiques - Tome 1*. Hatier, Collection Hatier concours.
 Dehn, M. (1902). Über den Rauminhalt. *Math. Ann.* 55, 465-478.
 Delahaye, J.-P. (2013). L'embarassant paradoxe de Simpson. *Pour la science* 429, 80-85.
 Rouche, N. (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Reperes-IREM*, 15, 25-36.
 Itard, J. (1950). *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, Tome 3(3) 210-213.

ANNEXE

Deux traitements principaux sont possibles contre les calculs rénaux : une chirurgie classique (traitement A) et une chirurgie endoscopique (traitement B). Un hôpital procède à une étude statistique comparée et obtient les résultats suivants :

Taux de guérison (succès/total)

Traitement A	Traitement B
78% (273/350)	83% (289/350)

Sur la base de ces observations seules, on peut en déduire que le traitement B est plus efficace que le traitement A.

Pour les mêmes 700 cas de calculs rénaux, un assistant propose une nouvelle interprétation des résultats, en rajoutant une donnée concernant la taille des calculs rénaux, il obtient les résultats suivants :

Résultats en fonction de la taille des calculs

Petits calculs		Gros calculs	
Traitement A	Traitement B	Traitement A	Traitement B
93% (81/87)	87% (234/270)	73% (192/263)	69% (55/80)

On observe que le traitement A est plus efficace que le B dans les deux cas. En rajoutant cette observation, on en déduit donc que le traitement A est plus efficace que le traitement B, soit la conclusion inverse !