QUELLE EST LA PLACE DU RAISONNEMENT SEMI QUANTITATIF (RSQ) DANS L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

Cedric LORETAN, Laura WEISS, Andreas MUELLER

Université de Genève et Collège d'Oron-Palézieux (Vaud) ; Université de Genève, Institut Universitaire de Formation des Enseignants (IUFE) ; Université de Genève, Faculté des sciences.

INTRODUCTION

Depuis toujours, les mathématiques occupent une place importante dans la plupart des travaux scientifiques et constituent un lien fondamental pour approcher les disciplines scientifiques. Cependant ce lien est quasi méconnu de nos élèves. Pour eux, les sciences et les mathématiques sont deux disciplines à part entière, indépendantes l'une de l'autre. D'ailleurs trop souvent cela est involontairement véhiculé par l'enseignant lui-même qui évite le plus possible l'usage des mathématiques en sciences.

Cependant ce lien est si fondamental qu'il est essentiel de le développer le plus vite possible afin de le rendre intuitif pour les élèves. Un moyen possible de le tisser et de le faire apparaître à l'école, serait de développer chez l'élève le raisonnement « par ordre de grandeur » ou raisonnement semi-quantitatif (RSQ). Cet outil puissant, à la portée de tous, nécessitant l'utilisation de compétences mathématiques accessibles (comme on le verra ci-dessous), permettrait de réconcilier l'allergie aux mathématiques avec la dimension quantitative omniprésente en sciences servant de langage de communication entre scientifiques. Négliger cet outil serait comme entreprendre un voyage à travers le monde sans la maîtrise de la langue de Shakespeare.

Brièvement, l'objectif phare du RSQ est de répondre à des questions en exploitant des données approchées à la puissance de dix près, avec une prise de conscience de la plausibilité des approximations faites et des résultats obtenus. Le but est, entre autres, de développer une posture scientifique et le sens critique à l'égard des données et des résultats (Loretan, Müller & Weiss, 2017). En guise d'illustration, nous proposons ci-dessous un exemple concret.

> Le 15 juillet 2009, le Washington Post publie: "Obama announces a plan of 12 billions of dollars dedicated to community school." Que penser de cette annonce ?
>
> Une recherche sur la toile, à l'aide du moteur de recherche Wolfram Alpha, indique que le nombre total d'individus engagés dans une formation scolaire, professionnelle ou universitaire aux USA correspond à 82.29 millions. Une simple comparaison des ordres de grandeur des deux données chiffrées, à savoir 10 milliards de dollars pour la somme offerte et 100 millions pour le nombre de personnes dans un cursus d'étude, donne une somme de 100 dollars par personne ! Ainsi la somme gigantesque de plusieurs milliards de dollars se résume finalement à une distribution de 100 dollars par « tête de pipe ». Mais l'annonce d'Obama présentée de la sorte aurait-elle eu le même impact ?

Fig. 1 : Exemple du sens critique vis-à-vis des données chiffrées

Pour les plus curieux, plusieurs publications (Weinstein & Adam, 2008 ; Schwarz, 2003) proposent des problèmes de ce type, connus sous le nom de problèmes de Fermi en hommage au célèbre physicien Enrico Fermi, maître absolu en la matière (voir aussi Weiss, 2013).

LE RSQ EN LONG ET EN LARGE

Une définition du RSQ

La comparaison entre le raisonnement quantitatif et les mathématiques traditionnelles proposée par Steen (2004) (Fig. 2) met en évidence que le premier est d'ordre pratique, qu'il peut être employé par tout un chacun et concerne des données numériques du monde réel, alors que les secondes sont abstraites et employées le plus souvent par des spécialistes.

Raisonnement quantitatif	Mathématiques traditionnelles
Pratique	Abstraites
Les objets d'étude sont des données tirées du monde réel	Les objets d'étude sont des idéaux mathématiques
Employé par tout un chacun, à tout moment afin de prendre conscience du monde qui l'entoure	Employées dans des domaines comme : les sciences, la technologie, l'ingénierie…

Fig. 2 : Raisonnement quantitatif vs mathématiques (Steen, 2004)

En outre, le but est totalement différent : si les mathématiques permettent une analyse adéquate de problèmes mathématiques appartenant aux différents domaines de celles-ci (analyse, géométrie, topologie, équations différentielles, etc.), le RSQ vise plutôt à se faire une idée chiffrée de l'importance d'un phénomène ou d'une situation. Cela ne signifie pas qu'il n'y ait pas d'abstraction dans l'utilisation du RSQ, au contraire. Mais cette abstraction réside dans la modélisation des situations et dans le choix des données pertinentes plus que dans la manipulation d'objets abstraits.

Le raisonnement quantitatif est donc ancré dans un contexte de vie quotidienne et contribue aux responsabilités citoyennes de l'homme de la rue. En plus des caractéristiques du raisonnement quantitatif, le RSQ ne se base pas sur des données numériques précises, mais sur leur ordre de grandeur. En effet, on peut considérer que ce qui caractérise la mesure d'une grandeur physique, c'est d'une part l'unité associée à cette grandeur (par exemple une unité de distance ou de masse ou de temps) et d'autre part l'ordre de grandeur de la mesure qui permet d'estimer sa valeur relativement à la situation. A cette caractéristique, il faut ajouter le « sens des nombres » (leur importance relativement à une situation donnée) et un regard critique par rapport à l'information en général et en particulier celle diffusée par les médias.

Les compétences intrinsèques au RSQ

Le RSQ se compose principalement de deux compétences complémentaires.

La première est la capacité de pouvoir estimer l'ordre de grandeur de la solution (puissance de 10). En effet, pour citer la célèbre et fameuse règle de Enrico Fermi : "better be approximately right than precisely wrong"[1].

Les outils mathématiques indispensables à cette compétence sont donc :

1. La capacité à manipuler la notation scientifique.
2. L'usage des unités pertinentes pour le problème.
3. La capacité d'arrondir, dans ce contexte le plus souvent à l'unité supérieure ou inférieure.

[1] Mieux approximativement correct que précisément faux.

4. L'approximation des formes géométriques : en deux dimensions tout peut être considéré comme un disque ou un carré et en trois dimensions comme une sphère ou un cube.
5. Enfin une certaine culture scientifique avec entre autres la connaissance de diverses échelles (de longueurs, temps, énergies, température, etc.) qui constituent de véritables portes d'entrée vers le calcul estimatoire.

La tâche suivante, inspirée par Delgado, Stevens et Shin (2008) est un excellent exemple mettant en évidence les outils cités ci-dessus :

Pour caractériser la dimension d'un globule rouge, l'expert scientifique sait que son diamètre est de l'ordre de grandeur du micromètre. Il est capable de contextualiser ce globule, comme étant environ cent fois trop petit pour être vu à l'œil nu, et autour de 4 ordres de grandeur ou 10'000 fois plus grand qu'un atome. L'expert est en mesure de comparer cette dimension à celle d'autres objets : par exemple, le globule rouge est plus grand qu'un atome, qu'une molécule d'eau, ou qu'une mitochondrie, mais plus petit qu'un acarien ou que des grains de pollen.

La deuxième compétence est le développement d'un regard critique face à l'information diffusée par les médias. Cette compétence est notamment extrêmement importante en matière de santé et de prise de décision comme on le voit dans l'exemple ci-dessous tiré d'une étude de Garcia et Galesic (2009), mettant en scène l'annonce d'une firme pharmaceutique.

Avec la prise d'un médicament x, le risque de mourir d'un arrêt cardiaque chez les personnes avec un haut taux de cholestérol est fortement réduit : une étude réalisée sur 900 cobayes humains avec un haut taux de cholestérol a montré que 80 personnes sur 800 qui n'ont pas pris le médicament sont mortes après une attaque cardiaque alors que 16 personnes sur 100 qui ont pris ce médicament sont mortes suite à une attaque cardiaque.

Cette information, testée sur un large public montre qu'une grande majorité des personnes interrogées croit aux bénéfices de ce médicament, car seulement 16 personnes meurent lorsque ce dernier est pris comparé à 80 s'il n'est pas consommé. Ce résultat laisse songeur, le public ne prend pas en compte le pourcentage de décès : 10% sans prise à comparer avec 16% avec prise du médicament !

LES PLANS D'ÉTUDES ET LE RSQ « FONT-ILS BON MÉNAGE » ?

Le RSQ – ou du moins une partie de ses compétences – est-il présent dans les plans d'études ? En fait, on trouve des mentions de compétences de type RSQ au sein de documents institutionnels suisses (sur le plan romand et fédéral) et internationaux.

Afin de mettre en évidence sa présence dans l'enseignement romand, le tableau ci-dessous (Fig.3), adapté du programme de l'option spécifique vaudoise « Mathématiques et Physique » (CIIP/DFJC, 2012) du plan d'étude romand (PER), présente différents exemples de compétences étroitement liées au RSQ.

Domaines	Exemples
Recherche, expérimentation et rédaction	Tri et organisation des informations. Pose de conjectures. Déduction d'informations nouvelles à partir de celles connues. Réduction de la complexité d'un problème. Utilisation des propriétés des nombres et opérations afin d'établir des preuves. Acceptation ou refus d'un résultat par estimation de l'ordre de grandeur ou confrontation au réel. Communication d'un résultat en utilisant un vocabulaire et des symboles adéquats.
Nombres	Sensibilité aux nombres. Sensibilité aux probabilités.
Fonctions et équations	Utiliser le concept de fonction dans différentes situations. L'outil informatique (tableur, grapheur)
Mesures et Incertitudes	Associer les bonnes unités. Estimer une incertitude sur une mesure. Développer l'esprit critique envers la plausibilité d'une valeur et sa précision. Arrondir.
Astronomie	Effectuer des opérations avec la notation scientifique standard : Préfacteur × Puissance de dix × Unité. Calculs avec des grands nombres. Résoudre des problèmes de proportionnalités. Comparaison de grandeurs impliquées. La notion d'échelles. Conversion d'unités. Connaissance de : vitesse de la lumière, année-lumière, unité astronomique

Fig. 3 : Compétences explicitement (en italique gras) ou implicitement liées au RSQ (en italique)

Sur le plan suisse, les standards HARMOS sciences reprennent aussi ces notions à maints endroits, on trouve ainsi les termes tels que réunir, classer, comparer, exposer, présenter, estimer, justifier et argumenter.

Au niveau international, les concepts de RSQ apparaissent dans les projets “Adult Literacy and Life Skills Survey” de l'OCDE (2011), “Project 2061 Science for all Americans” de l'American Association for the Advancement of Science (AAAS, 1990), “Statement of Beliefs” du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, USA). Ce dernier affirme : “Computational skills and number concepts are essential components of the mathematics curriculum, and a knowledge of estimation and mental computation are more important than ever" (NCTM, 2014)[2].

Or, déjà dans les années 80, Reys, Rybolt, Bestgen et Wyatt (1982) et avant eux Carpenter, Coburn, Reys, et Wilson (1976) constataient que l'estimation était un des domaines de compétences les plus négligés dans les programmes de mathématiques. Son traitement était souvent superficiel et donc insuffisant pour construire des compétences appréciables. Plus de deux décennies plus tard, les recherches empiriques de Siegler et Booth (2005) et de Jones *et al.* (2012), montrent que les élèves, comme les adultes, sont toujours de pauvres estimateurs. Par exemple, Jones *et al.* (2012) calculent que le pourcentage d'erreur obtenu dans des estimations de longueur d'objets usuels par des élèves de 12-14 ans varie de 16% à 237%. De façon générale, les élèves ont tendance à la surestimation.

Cela révèle que la capacité d'estimation, qui est la pièce maîtresse du RSQ, reste problématique. L'apprentissage du RSQ est complexe, car non seulement l'enseignant doit remédier à l'apprentissage de notions censées être déjà connues comme les unités ou les puissances de dix, souvent négligées dans l'enseignement car elles semblent intuitives, mais il doit aussi développer chez l'élève le sens des nombres et le regard critique.

Encore d'autres obstacles viennent se greffer au RSQ…

En plus de l'obstacle dû à l'estimation évoqué ci-dessus, trois types principaux d'obstacles liés à l'apprentissage du RSQ sont à considérer.

Le premier se situe sur un plan conceptuel, à savoir la difficulté à se représenter les échelles de grandeurs, à établir des relations entre elles et à percevoir les grands et petits nombres (Tretter, *et al.*, 2006). Beaucoup d'élèves ont du mal avec ces concepts, notamment dans la compréhension et la comparaison des grandeurs très petites ou très grandes. Cela est confirmé par Jones *et al.* (2007) qui constatent qu'effectivement les élèves éprouvent de la difficulté avec des dimensions se situant en dehors de l'échelle humaine. La Fig. 4, ci-dessous, issue de l'étude que nous menons avec les élèves français de 15-16 ans illustre bien ces dires : il leur a été demandé de donner des noms d'objets de dimensions (ou des distances) exprimées en mètre correspondant aux puissances de 10 proposées. La figure fait très nettement apparaître la plus grande aisance dans les dimensions entre 1 mm et 1 km, même après l'enseignement d'une séquence sur le RSQ.

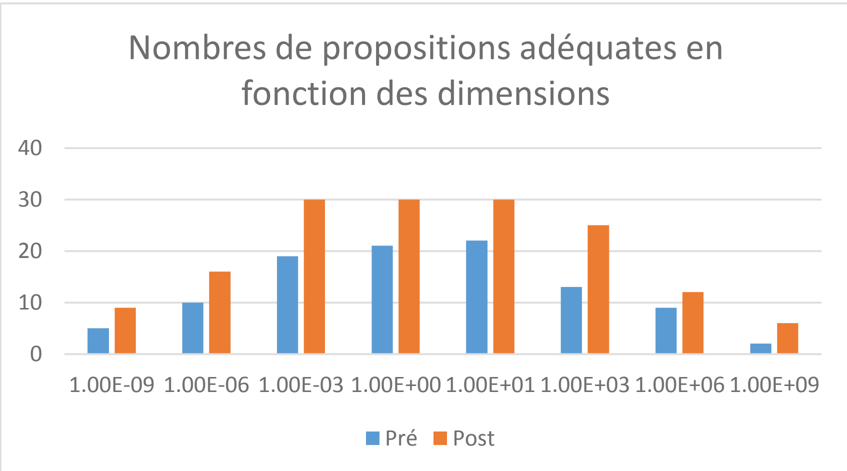

Fig. 4 : Nombre d'élèves (N = 64) de 15-16 ans choisissant des propositions adéquates

[2] Les compétences de calcul et le sens des nombres sont des composantes essentielles d'un curriculum, et la capacité d'estimer et le calcul mental sont plus importants que jamais.

Le second concerne des compétences plutôt techniques comme les changements d'unités, la maîtrise de la notation scientifique et les opérations avec des puissances de 10.

Finalement le troisième est la combinaison de ces deux premiers – obstacles conceptuels et obstacles techniques – dont l'effet est de créer une lourde charge, voire une surcharge cognitive chez les élèves (van Merriënboer & Sweller, 2005 ; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011). Dès que trop d'informations sont nécessaires dans la mémoire de travail à court terme si les élèves n'ont pas automatisé un certain nombre de procédures, ils se trouvent à devoir gérer trop de données, ce qui a souvent pour conséquence l'abandon de la tâche.

Les enjeux du RSQ pour l'apprentissage des sciences

En tant qu'enseignants, nous constatons que les élèves du secondaire I et II ne pratiquent pas ce type de raisonnement, car ils se sentent mal à l'aise face à des problèmes qui n'ont pas une réponse exacte ou pour lesquels ils ne disposent pas d'un algorithme qui les conduit à une solution indiscutable. De plus, les compétences définies plus haut trouvent trop peu de place dans les activités qui leur sont proposées. En effet, si les puissances de 10 et la notation scientifique sont effectivement enseignées, il existe peu de séquences concrètes d'enseignement scientifique faisant appel au RSQ.

A la vue de ce qui précède, il est donc essentiel de réagir et de proposer davantage d'activités d'enseignement qui pourraient permettre de développer l'outil puissant qu'est le RSQ. En effet, l'enjeu est grand, car les mathématiques sont une véritable porte d'entrée vers une compréhension profonde des sciences et un outil essentiel dans la communication scientifique. Dans un prochain article, nous proposerons une discussion autour d'une séquence d'enseignement « un voyage dans l'espace et le temps » qui développe le RSQ, dont voici le texte introductif :

> « Un simple regard depuis le hublot d'un avion permet d'apprécier le paysage, par exemple la forme d'une forêt, alors que pourtant seuls des arbres sont visibles depuis l'observation au sol. Les arbres sont certes importants, les détails sont importants, mais c'est souvent en s'éloignant d'eux qu'une structure plus grande devient visible. Il est souvent plus facile d'apprendre et de comprendre les détails une fois que la "grande image" a été perçue. Si tous les objets de l'Univers étaient très proches en matière de grandeurs diverses (dimensions, énergies, vitesses...), les détails seraient alors cruciaux et les approximations n'auraient pas lieu d'être. Pour notre plus grand plaisir, l'Univers présente des grandeurs variant sur des échelles extrêmement larges. D'un côté, le tout petit et de l'autre le très grand. Entre eux, les contrastes sont si spectaculaires que rechercher la précision dans un premier temps serait le meilleur moyen de faire fausse route. ».

Avec comme cerise sur le gâteau, la maitrise de cet outil associé à une composante éthique qui invitera les élèves à devenir des citoyens actifs, munis d'un regard critique sur l'information diffusée par les médias.

Bibliographie

AAAS (1989). *Project 2061: Science for all Americans*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E. & Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher, 23*, 297-302.

CDIP (2014). *HarmoS*. http://www.cdip.ch/dyn/11737.php (accès 28/09/17)

CIIP/DFJC (2012). Plan d'études romand (PER) – Complément vaudois au PER : Mathématiques et Physique. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC) du Canton du Vaud (Edts.) (accès 28/09/2017).

Delgado, C., Stevens, S. & Shin, N. (2008). *Development of a learning progression for students' conceptions of size and scale*. Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Conference, Baltimore, MD, April 2008.

Hattie, A.C. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* London, New York: Routledge.

Jones, M. G., Taylor, A., Minogue, J., Broadwell B., Wiebe, E. & Carter, G. (2007). *Journal of Science Education and Technology*, *16*(2), 191-202.

Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H. & Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical Thinking. *School Science and Mathematics, 112,* 171–178.

Loretan, C., Müller, A. & Weiss, L. (2017). Développement du raisonnement semi-quantitatif (RSQ) en classe avec comme outil pédagogique le « Worked-out example » (WE). Accepté pour publication.

NCTM (2014). *Statement of Beliefs*. http://www.nctm.org/beliefs.aspx, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM ed.). (accès 28/09/2017).

OCDE, Statistique Canada (2011). *La littératie, un atout pour la vie : Nouveaux résultats de l'Enquête sur la littératie et les compétences des adultes*. Éditions OCDE. http://www.statcan.gc.ca/pub/89-604-x/89-604-x2011001-fra.pdf, (accès 28/09/2017).

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J. & Wyatt, J. W. (1982). *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201.

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 197–212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Steen, L. A. (2004). "Everything I Needed to Know about Averages. . . I Learned in College." *Peer Review 6*(4), 4–8.

Swartz, C. (2003). *Back of the Envelope Physics.* Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory: Explorations in the learning sciences, instructional systems and performance technologies*. New York, NY: Springer.

Tretter, T. R., Jones, M. G., Andre, T., Negishi, A. & Minogue, J. (2006). Conceptual boundaries and distances: Students' and experts' concepts of the scale of scientific phenomena. *Journal of Research in Science Teaching, 43*(3), 282-319.

Van Merriënboer, J. (1997). Training Complex Cognitive Skills: a Four-Component Instructional Design Model for Technical Training. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Van Merriënboer, J.J.G., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent development and future directions. *Educational Psychology Review, 17*(2), 147–176.

Von Baeyer, H. C. (2001). *The Fermi Solution: Essays on Science*. New York: Dover.

Weiss, L. (2013). Les questions de Fermi. *Math-École 219,* 34-41.

Wolfram Alpha LLC. (2009). Wolfram|Alpha http://www.wolframalpha.com/input/?i=2%2B2 (accès 10/12/2017).

Weinstein, L. & Adam, J. A. (2008). *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton: Princeton University Press.