Fonder l'algèbre élémentaire : programmes de calculs, formules, calculatrice

Ruhal Floris

Université de Genève

Les programmes évoluent, sous l'effet de ce que Chevallard (1985, 1994) a appelé la transposition didactique, résultante de tous les facteurs qui influent sur leur élaboration par des « experts » devant trouver un compromis entre la rigueur mathématique, l'inertie du passé (les programmes existants), ce qu'il est possible d'enseigner dans tel ou tel degré et les propositions provenant d'expérimentations didactiques. Ceci conduit lentement mais sûrement à un changement de paradigme dans le domaine de ce qu'on appelle le calcul littéral. Cette évolution n'a que partiellement été prise en compte dans le PER (Plan d'Etudes Romand[1]) où le terme calcul littéral n'apparaît plus comme titre et fait place à un thème fonctions et algèbre (FA), changement nous semble-t-il significatif. Dans cet article, nous apportons un éclairage sur ces changements en nous intéressant au rôle des outils de calculs tel que la calculatrice ou le tableur. Nous nous référons principalement au document du ministère français de l'Education, intitulé « Du numérique au littéral au collège » (Eduscol, 2008) ainsi qu'à la synthèse de recherches récentes dans un numéro hors-série de la revue RDM[2] (Coulange et al., 2012). On trouvera aussi dans les travaux du groupe Sesames de Lyon des développements complémentaires et approfondis (Alves, 2013).

Les programmes des années 60-70 avaient mis l'accent sur les structures algébriques et les propriétés des ensembles de nombres. Les principes du calcul littéral en étaient déduits et ce calcul travaillé isolément. L'évolution en cours propose par contre une dialectique entre le numérique et l'algébrique, dans laquelle le calcul littéral est considéré à la fois comme un outil de production de suites de nombre et comme un outil de description des propriétés du calcul numérique (par exemple, pour n entier, les expressions 2n et 2n+1 peuvent produire des suites de nombres pairs, respectivement impairs, et ainsi décrire la parité). De son côté, le numérique peut exprimer certaines propriétés de nature algébrique : $25 = 5^2$ exprime le fait que 25 est un carré.

Mais même si l'aspect structural ensembliste a disparu, dans les faits, le travail algébrique formel n'a que peu évolué, et les activités motivantes initiales, fondées sur les formules d'aires et de périmètres restent peu exploitées dans la suite de l'étude du thème. L'étude des techniques de calcul prédomine encore, conduisant une partie des élèves à voir le calcul algébrique comme une suite de règles ou de lois, dénuées de signification et peu articulées avec le cadre numérique (Grugeon et al., 2012 ainsi que Pilet, 2012).

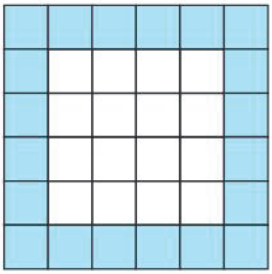
Dans la nouvelle perspective la notion de programme de calcul semble devenir un élément clé pour l'enseignement de ce thème. Le terme de programme de calcul (plutôt que de formule) permet de mettre l'accent sur la dialectique entre le numérique et l'algébrique (Chevallard et Bosch, 2012). L'idée est au cœur de l'activité dite des « carrés bordés », (qui était déjà considérée comme une activité « phare » dans Mathématiques 7-8-9, Calcul littéral, Méthodologie et commentaires, 2003, page 4). On trouvera dans Eduscol (2008) et dans Combier (1996) des analyses détaillées de cette activité, reprise[3] dans le livre de Mathématiques de 10ème année paru en 2012 et actuellement utilisé dans le secondaire inférieur romand. Rappelons qu'il s'agit d'établir une méthode permettant de trouver le nombre de petits carreaux colorés quelle que soit la dimension du carré :

1 http://www.plandetude.ch/

2 *Recherches en didactique de mathématiques.*

3 *Activité FA177 « De petits carreaux ». Tous les exemples de cet article sont tirés du livre de 10ème année.*

5.



Quatre bords colorés

Image 1

Cette activité peut être proposée à divers moments de l'étude du calcul littéral. Même si les auteurs des Mathématiques 7-8-9 se défendent d'une présentation progressive, une variante de cette activité est proposée en début de travail du thème concerné, alors que dans les nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques romands l'activité est placée pratiquement à la fin du thème FA (fonctions et algèbre), en tant qu' « entraînement » comme cela est précisé dans le commentaire pour le maître de cette activité[4] :

- Utiliser les expressions littérales pour exprimer un dénombrement de carreaux dans un quadrillage (Utilisation du calcul littéral comme outil pour établir des formules) (Entraînement).
- Modéliser une situation en utilisant le calcul littéral.

Dans le cadre de la sensibilisation au calcul littéral on peut aussi proposer l'activité en fin de 9ème ou au début de 10ème. On demande alors aux élèves de prévoir le nombre de petits carreaux colorés pour un carré de côtés 6, 11, 37, 88, voire 1012 carreaux. L'augmentation des valeurs (saut informationnel) conduit les élèves à abandonner les procédures basées sur le comptage. L'objectif à ce niveau n'est pas obligatoirement de fournir une recette en français pour permettre à l'enseignant d'introduire la lettre. Pour un carré de 37 carreaux de côtés, il peut se limiter à obtenir des écritures du type : 4x37-4 ou 37+37+35+35 ou 37+36+36+35 ou 36+36+36+36. Pour les valeurs numériques dépassant la dizaine, la calculatrice peut être autorisée. On peut demander aux élèves de trouver le plus possible de calculs différents puis d'expliquer pourquoi les résultats sont tous égaux. On s'attend à des explications du type 37+37+35+35 = 37+36+36+35 ou 37+37+37+37-4 = 36+36+36+36 en passant si possible par l'écriture (37-1)+(37-1)+(37-1)+(37-1). La calculatrice permet de valider les réponses.

Avec la variation des données, ces écritures peuvent prendre le statut de programme de calcul, autrement dit de « modèle » ou « schéma » de calcul, en associant à chaque calcul un schéma du type suivant :

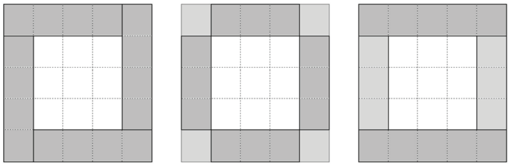


Image 2

Les enseignants pourraient alors introduire la lettre :

> *« La production d'une formule apparait comme une réponse à la question de la description générale d'une situation faisant intervenir des valeurs numériques particulières et l'utilisation de lettres permet de résoudre le problème de la désignation des variables en jeu dans la situation ».* (Eduscol, 2008)

Mais il n'est pas obligatoire de procéder tout de suite à cette introduction. S'il ne veut pas passer en force, comme nous l'avons parfois observé en classe, l'enseignant a la possibilité de conclure provisoirement sur l'équivalence des expressions numériques et de prolonger le travail sur ces écritures, par exemple en étudiant les propriétés de sommes de nombres consécutifs, en restant dans le numérique : la somme de trois nombres consécutifs est le triple du second nombre car 88+89+90 = (89-1) + 89 + (89+1) = 89+89+89 -1+1 = 3x89. Lobjectif de ces activités est d'instaurer une perspective algébrique déjà dans les expressions numériques, en accord avec l'idée de modélisation, que le PER a mis au centre du domaine MSN[5]. Ce point rejoint la nécessaire dialectique numérique-algébrique dont la faiblesse est liée aux difficultés de

4 *Accessible en ligne pour les enseignants uniquement.*

5 *Mathématiques et Sciences Naturelles, dans le PER.*

nombreux élèves (Grugeon et al., 2012 ; Pilet, 2012). Dans les moyens d'enseignement actuels (2013), ce travail sur les écritures est introduit, un peu timidement, dans le thème Nombres et Opérations (NO 77 par exemple) alors que les formules apparaissent dans le thème FA. La calculatrice de type scientifique[6], avec un affichage conservant les écritures des calculs proposés facilite ce travail :

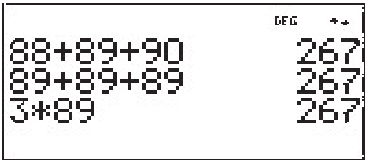
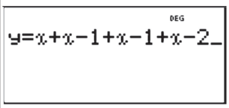
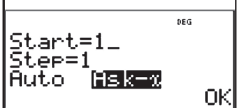
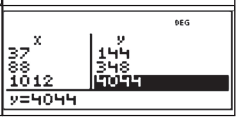


Image 3

Il est fondamental d'associer à ce travail sur les écritures numériques des phases en mode papier/crayon dans un contexte de formulation de résultats voire de petits concours entre groupes d'élèves[7]. Par sa fonctionnalité, un tel dispositif peut favoriser l'émergence de formules littérales en tant que codes permettant de trouver rapidement la réponse à la question du nombre de carreaux au bord du carré et à d'autres.

Il est alors opportun d'exploiter la calculatrice si celle-ci dispose, comme la TI30X, d'une touche [table] permettant d'introduire une formule et de faire calculer le résultat obtenu pour certaines valeurs de x.

La touche [table] fait afficher un écran « y= » et on complète par une formule en utilisant la touche de variable ζ	
Initialisation de la table, le mode Auto permet l'affichage d'une suite (selon les valeurs de Start et de Step) et le mode Ask permet d'entrer une valeur de son choix. Utiliser les touches de direction et enter pour naviguer dans ce menu.	
Le mode choisi ici est Ask et on a demandé la valeur de la formule du carré bordé pour 37, 88 et 1012.	

6 *Nous nous référons ici au modèle TI30X Multiview distribué à tous les écoliers genevois.*
7 *Situations de formulation (1998, Introduction).*

Des programmes de calculs à la modélisation de propriétés arithmétiques

La dialectique du numérique et de l'algébrique peut être travaillée en lien avec la touche [table] de la calculatrice en demandant de produire des listes de nombres pairs, impairs, multiples d'un nombre donné. Ces modélisations avec formules peuvent mener à une réflexion de type logique sur des propriétés comme : la somme de nombres pairs est un nombre pair, la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair, etc.

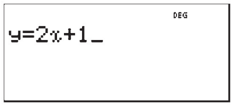


Image 4

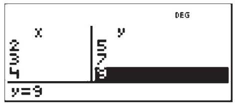
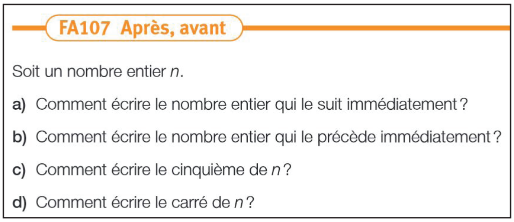


Image 5

Suite de nombres impairs avec [table]

On peut aussi proposer un travail sur les sommes de nombres consécutifs, avec utilisation des lettres cette fois. Il est intéressant de comparer ce travail, avec celui, a priori semblable, qui est proposé dans le livre de 10ème :



FA107 Après, avant

Soit un nombre entier *n*.

a) Comment écrire le nombre entier qui le suit immédiatement ?

b) Comment écrire le nombre entier qui le précède immédiatement ?

c) Comment écrire le cinquième de *n* ?

d) Comment écrire le carré de *n* ?

Image 6

Dans un tel énoncé, la dialectique de l'algébrique avec le numérique n'est pas explicitement intégrée. La décision de combiner la résolution de cette activité avec l'utilisation de la calculatrice, ou au moins de tableaux simulant la touche [table] est ici du ressort de l'enseignant.

Une autre exploitation de cette touche [table] est la comparaison de programmes de calcul. En revenant aux « carrés bordés » on peut introduire les différentes formules obtenues et observer si les valeurs de y sont les mêmes et motiver ainsi l'étude des transformations d'écritures littérales en lien avec leur justification sur la base des propriétés comme la distributivité, la commutativité, etc. Comme on peut ici le constater, le nouveau paradigme propose un rapport différent entre la technique et les propriétés qui la fondent.

Comme la fonction table ne permet l'introduction que d'une seule formule à la fois, ce travail passe nécessairement par la transcription de tables sur papier ou un travail à 2, 3 ou 4 élèves chacun programmant une formule différente. On peut penser qu'il serait alors judicieux d'utiliser un tableur, mais les formules de ces logiciels ne s'écrivent pas comme des polynômes en x d'où un travail de prise en main plus important de l'outil, sans compter le déplacement en salle informatique, à moins que l'on ne dispose de calculatrices graphiques, de tablettes ou d'ordinateurs portables.

Des programmes de calcul aux équations

Dans le paradigme de la dialectique numérique/algébrique, des problèmes du type « À quel nombre ai-je pensé ? » permettent de construire un lien vers la notion d'équation :

Je pense à un nombre, j'ajoute son double, divise le résultat par 3, ajoute 75. Je trouve 80 ! A quel nombre ai-je pensé ?

Ce problème peut bien sûr être traité dans un cadre uniquement arithmétique (en partant du résultat). Il permet de dévoluer le contexte aux élèves et on peut passer ensuite à un problème proposant une égalité de programmes de calcul et pour lesquels la résolution arithmétique ne fonctionne pas :

Je pense à un nombre. Je le multiplie par 3. J'ajoute 10. J'obtiens 7 fois le nombre auquel j'avais pensé, plus 30. A quel nombre avais-je pensé ? Pourquoi ?

Ce type de problème autorise une grande variation des énoncés et permet encore de travailler les propriétés numériques des écritures. On pourra aussi varier la consigne en proposant d'expliquer des tours de « mathé-magie » :

Pense un nombre, ajoute 2000, divise le résultat par 10, soustrait 200 et multiplie le tout par 20. Tu obtiens le nombre pensé ! Comment l'expliquer ?

Image 7

Ou

Pense un nombre entre 1 et 9. Multiplie-le par 2, ajoute 2 au résultat, multiplie le nouveau résultat par 5, ajoute 12, multiplie le nouveau résultat par 10, soustrais 220.

Le nombre que tu obtiens commence avec le nombre que tu avais pensé ! Pourquoi ?

Ces énoncés proposant les opérations en séquence permettent une traduction aisée vers les programmes de calcul. Dans le livre de 10ème l'activité FA150 « Droit au but » propose une version de ce type de problèmes (Image 7).

Cette activité est curieusement insérée de façon isolée parmi des exercices de travail technique du calcul littéral. Tout se passe comme si il y avait chez les auteurs hésitation entre ancien et nouveau paradigme.

Une variante de ce type de problème est proposée dans le « Document de liaison » interne destiné aux enseignants du CO genevois[8], comme activité de développement pour les élèves de la section LS de 10ème année, avec la curieuse motivation de mettre en défaut l'utilisation de la calculatrice pour la recherche de solution à des équations.

Activité « Le nombre perdu » :

je tape sur ma calculatrice la séquence suivante :

6	x	?	-	3	-	2	x	?	+	7	enter =

Sachant que les deux cases grisées cachent le même nombre (entier, décimal, fraction, ...) peux-tu trouver ce nombre si la calcultrice donne comme résultat 24 ?

Même chose si la calculatrice affiche 592 ?

Même chose si la calculatrice affiche 1,2 ?

Même chose si la calculatrice affiche 69,2 ?

Même chose si la calculatrice affiche -163,6

Même chose si la calculatrice affiche 88/9 ?

Effectivement, si cette activité est effectuée en faisant des essais avec la calculatrice (avec ou sans la touche table), à partir de la 3ème proposition (voir ci-dessus : « Même chose si la calculatrice affiche 1,2 ? »), la « pêche » peut être longue. En fait, cette activité permet de motiver judicieusement l'outil équation. La proposer pour mettre en défaut la calculatrice et les essais numériques met en évidence un positionnement didactique ne prenant pas en compte la dialectique numérique/algébrique.

Plus loin dans le même thème du livre de 10ème on retrouve des exercices de traduction plus complexes, proposé après le travail sur la résolution d'équations, comme le montre l'exemple ci-dessous :

FA204 Identifications

Traduis chacune des situations par une équation, puis détermine les solutions.

a) Si on ajoute 5 à mon quadruple, on obtient la moitié de mon triple.

b) Si on ajoute 15 à ma valeur, je deviens inférieur de 5 à mon double.

c) Si on m'enlève 6, je deviens égal à ma moitié.

d) Si on multiplie par 2 la moitié du quart d'un nombre, on obtient le quintuple du quart de ce nombre.

Image 9

Ainsi, dans l'énoncé du problème a) par exemple, il s'agit de lire jusqu'au mot « quadruple » puis d'interpréter (quadruple c'est fois 4) avant de pouvoir écrire l'expression correspondante… Quant au problème d), il semble bien complexe s'agissant de la première série de ce type de tâches : nécessité de lire plusieurs mots avant de pouvoir écrire l'expression qui exige de plus l'utilisation de fractions ! On pourra suggérer aux enseignants de ne proposer ce problème qu'après avoir travaillé des activités du type « je pense à un nombre »[9]. L'activité FA204 illustre ce que nous avons nommé « inertie du passé » parmi les contraintes de la transposition didactique. Nous retrouvons là des exercices très traditionnels du thème sur le calcul littéral.

Equations, égalités de programmes de calcul. Touche ω et tableur.

Avec les problèmes du type « je pense à un nombre », ou « le nombre perdu » la notion d'équation peut être introduite en maintenant la dialectique numérique/algébrique. Comment peut-on ici utiliser la calculatrice ? On l'a vu, la touche table n'autorise l'affichage que d'une seule colonne. Sur la calculatrice TI34X multiview, il existe en

8 http://www.ssrdm.ch/ressources/doc_admin_utiles/doc%20liaison%20math%202013.pdf.

9 *Et nous avons pu observer des enseignants débutants ayant proposé cette activité se retrouver quelque peu désarçonnés par les difficultés des élèves.*

outre une touche qui permet d'activer un petit tableur : c'est la touche $\boldsymbol{\omega}$ (Image 10). Cependant, tant le tableur que cette dernière touche demandent une adaptation, puisque la symbolique utilisée est différente, ce qui a pour conséquence une utilisation quelque peu complexe. C'est un effort qui vaut la peine d'être fait en classe si l'on se propose d'exploiter la touche $\boldsymbol{\omega}$ pour d'autres utilisations : résolution numérique d'équations, proportionnalité, programmation d'une formule

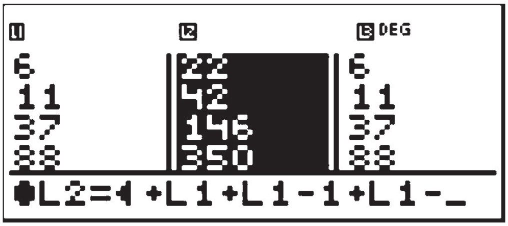


Image 10

Conclusions et conséquences pour l'enseignement

Nous avons examiné le PER et les moyens d'enseignement de mathématiques de 9ème et 10ème à la lumière du paradigme de la dialectique numérique/algébrique et de son association avec l'utilisation de la calculatrice. En ce qui concerne la dialectique numérique/algébrique, on peut constater qu'elle apparaît ça et là, et parfois de façon très isolée, dans les livres de mathématiques. A examiner les activités proposées en 10ème année, il ne semble pas que cette dialectique constitue un fil rouge susceptible de servir de guide pour l'enseignant. Le groupe SESAMES (Alves, 2013) a étudié les programmes français ainsi que certains manuels et tire une conclusion analogue, utilisant le terme « émiettement ». Le travail technique est prédominant, même si, ça et là, on trouve des activités qui pourraient favoriser la dialectique citée. Les commentaires pour le maître mentionnent l'importance de la notion de formule, mais pas le lien à faire avec le numérique, si ce n'est la tâche isolée de substitution des lettres par des nombres. Les notions de programmes de calcul ou de formule appellent fortement un lien avec les moyens de calcul tels que le tableur ou la calculatrice. Mais dans les ressources, le rôle de la calculatrice est pratiquement ignoré.

Répétons-le : ni le plan d'études ni les ressources ne proposent un choix déterminé, qui serait, en fait, un choix épistémologique (contrairement à la situation des années 70 où un tel choix était fait). Ce dernier est donc laissé à la responsabilité des enseignants. S'ils désirent faire travailler le calcul littéral dans la perspective de la dialectique du numérique et de l'algébrique, nous pensons qu'ils auront trouvé ici quelques éléments et des références utiles. En outre, selon nous, ne proposer que quelques activités « phares » ne suffit pas. Un travail sur le moyen terme est souhaitable, autour de problèmes de type « mathé-magie » ou d'autres, comme l'ont expérimenté les enseignants du groupe Sesames (Alves, 2013). Il serait particulièrement intéressant de travailler dans une perspective de fabrication de problèmes par les élèves (Sensevy, 1996). Et pour les élèves continuant à avoir des difficultés, ou pour les révisions inévitables au 11ème ou 12ème degré, signalons les propositions de diagnostic et de parcours différenciés de Pilet (2012).

Terminons en rappelant l'enjeu fondamental : il est de renforcer le sens du calcul littéral pour cette part non négligeable d'élèves qui n'y voient qu'un jeu formel.

Références

Alves, C. et al. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre en collège. *Repères-IREM*. 92. 9-30. www.univ-irem.fr/reperes/articles/92_article_615.pdf consulté le 12 mars 2014.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage*.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage, deuxième édition augmentée, 1991.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation In G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, A. Tiberghien (éds), *La transposition didactique à l'épreuve (pp.* 135-180). Grenoble : La Pensée sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf consulté le 12 mars 2014.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In

L. Coulange & al. *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives, Recherches en didactique de mathématiques. Hors Série.* (pp.13-33). Grenoble : La Pensée sauvage.

Combier, G., Pressiat, A. & Guillaume, J.-C. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège, Au pied de la lettre !* Editions INRP.

Coulange, L. & al. (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique de mathématiques. Hors Série*. Grenoble :La Pensée sauvage.

Eduscol (2008). *Du numérique au littéral, document d'accompagnement, Ministère de l'Education nationale*, Paris.http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf consulté le 12 mars 2014.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *In L. Coulange & al. Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives, Recherches en didactique de mathématiques. Hors Série.* (pp. 137-163). Grenoble : La Pensée sauvage.

Mathématiques 7-8-9 (2003). *Calcul littéral, Méthodologie et commentaire,* Lausanne : LEP.

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039, consulté le 12 mars 2014.

Sensevy, G. (1996). Fabrication de problèmes de fraction par des élèves à la fin de l'enseignement élémentaire. *Educational Studies in Mathematics 30*(3), 261-288.