De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés

Marie-Jeanne Perrin-Glorian[1], Marc Godin[2]

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot et Université d'Artois

Introduction

Les recherches en didactique des mathématiques (voir par exemple Berthelot et Salin, 1994) aussi bien que l'expérience des professeurs soulignent une rupture entre la géométrie de l'école primaire où la validation des propriétés des figures se fait par des procédures matérielles à l'aide d'instruments, ce que nous appellerons géométrie physique et la géométrie du secondaire où la validation se fait par des démonstrations qui supposent la manipulation d'énoncés, que nous appellerons géométrie théorique. Par ailleurs, il faut distinguer la simple perception de la vérification de propriétés avec des instruments[3]. Trois étapes semblent ainsi se dessiner : la reconnaissance perceptive des formes et l'introduction d'un vocabulaire pour les désigner, l'identification de propriétés qu'on vérifie ou qu'on produit avec des instruments, la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes. C'est dans le passage de la deuxième à la troisième étape qu'est souvent identifiée une rupture alors que le passage de la première à la deuxième étape semble peu questionné et l'apprentissage de l'usage des instruments souvent considéré comme l'acquisition d'une technique de manipulation. Le but du présent article est d'interroger la possibilité de penser cette évolution dans sa continuité et de proposer quelques jalons pour une approche de la géométrie permettant une progression cohérente de l'enseignement de 6 ans à 13 ans environ.

Formes et Figures planes Quelques repères

Evolution des moyens de reconnaissance des formes

La géométrie plane est l'étude (à différents niveaux) des formes planes et des figures qu'on peut tracer sur une surface plane. Mais qu'appelle-t-on figure ? Le sens qu'on peut donner à ce mot évolue au cours de la scolarité.

Au tout début de la scolarité : reconnaissance perceptive et premiers tracés de figures simples

A l'école maternelle et au tout début du primaire, on parle en général de formes géométriques pour des objets matériels qu'on peut déplacer, retourner et assembler dans des puzzles par exemple. Ce sont des objets plats de l'espace (en fait des cylindres de faible hauteur avec des bases de formes variées) qu'on peut reconnaître perceptivement par leur forme et leur taille. La géométrie permettra de caractériser de plus en plus précisément ces formes et leur taille. En utilisant ces objets comme gabarits dont on repasse le contour avec un crayon, on peut dessiner ce que nous appellerons des figures simples. La figure est ainsi la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord ; ce bord peut présenter des points anguleux qu'on appellera sommets ; entre deux sommets, le bord peut être arrondi ou droit. De telles figures simples peuvent aussi être obtenues en traçant le contour intérieur d'un pochoir (forme évidée) ; deux objets différents (le gabarit et le pochoir dans lequel s'emboîte exactement le gabarit) laissent la même trace. On peut faire des assemblages de figures simples en utilisant plusieurs gabarits ou plusieurs fois le même gabarit, par exemple en faisant coïncider des sommets et des bords droits. On obtient ainsi des figures contenant des lignes intérieures au contour. Ces tracés et assemblages demandent le développement à la fois d'habiletés motrices et de techniques

1 marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

2 marc.godin@654321.fr

3 *Les programmes de 2002 pour l'école primaire en France parlaient du passage d'une géométrie de la perception à une géométrie instrumentée.*

liées à de premières connaissances sur les objets, en particulier la reconnaissance de sommets, de bord droits, d'égalité de longueur … Nous ne développerons pas cet aspect ici. Retenons seulement que des comparaisons directes peuvent déjà être effectuées, des propriétés identifiées, en s'appuyant sur la perception. Le langage est le langage courant.

Les figures dans la géométrie théorique

Dans la géométrie du secondaire, une figure est un objet géométrique défini par des propriétés avec une axiomatique sous-jacente, même si elle n'est pas toujours explicitée. Les propriétés sont énoncées en langage mathématique ou codées sur la figure et expriment des relations entre des points et des lignes (droites ou cercles). Faire de la géométrie consiste à déduire des propriétés nouvelles à partir d'axiomes, de théorèmes et des propriétés données pour définir la figure. Formuler une preuve, argumenter, rédiger une démonstration en langage géométrique présentent des difficultés étudiées par de nombreuses recherches. Cependant, ces recherches se sont plus rarement intéressées au regard qu'il faut porter sur les figures pour trouver la solution. Il est en général nécessaire d'isoler des sous-figures, de reconnaître des sous-figures identiques dans des positions différentes, de faire intervenir des lignes ou des points qui ne sont pas donnés dans la description initiale, pas tracés sur la figure. A travers les figures matérielles qui représentent le problème, qu'elles soient tracées sur du papier ou sur un écran d'ordinateur, il faut voir les objets géométriques sur lesquels doit porter le raisonnement. Comment un tel regard géométrique sur les figures peut-il se construire ?

Entre les deux : la géométrie avec les instruments

Au cours du primaire, sont introduits progressivement les instruments usuels (règle[4], équerre, compas) pour tracer des figures et vérifier leurs propriétés, donnant ainsi des moyens de reconnaître, décrire et reproduire plus précisément des figures. Nous considérons aussi non pas les instruments de mesure (règle graduée, rapporteur) qui demandent de passer par les nombres, mais des instruments qui permettent de reporter des grandeurs sans passer par les nombres (longueurs et angles principalement) et dont nous donnerons des exemples dans la suite. En effet, l'appui sur les grandeurs géométriques nous paraît essentiel pour construire le sens des nombres ; il est donc nécessaire de les travailler directement sans passer par la mesure et donc par les nombres.

Les instruments de tracé et de report de grandeurs permettent de produire des caractéristiques visuelles des figures dont certaines se traduisent par des propriétés géométriques (par exemple angle droit, parallélisme, égalité de longueur…). Inversement, les propriétés géométriques se représentent par des caractéristiques visuelles qu'on peut produire avec des instruments. Comment peut-on concevoir l'usage des instruments pour qu'il puisse aider à passer d'un regard ordinaire sur le dessin qui représente une figure géométrique à un regard géométrique sur ce même dessin[5] ? Avant d'aborder cette question plus précisément dans le cas des polygones, revenons sur les différents regards qu'on peut porter sur une figure.

Différentes visions des figures

Le géomètre expert (le professeur de mathématiques du secondaire par exemple) est capable, suivant les questions qu'il se pose, de changer de regard sur les figures, d'y voir des surfaces en même temps que des lignes et des points, d'imaginer et de définir de nouvelles lignes ou de nouveaux points à partir de ceux qui sont déjà définis. Ce n'est pas le cas d'un élève en cours d'apprentissage. Dans la poursuite des travaux de Duval (2005), de Duval et Godin (2006), nous distinguerons trois visions des figures suivant les regards qu'on est capable

4 *Dans tout le texte, il faut entendre règle non graduée quand nous parlons de règle sans préciser.*

5 *Nous utilisons le terme dessin dans cette phrase pour bien distinguer la figure géométrique de sa représentation, que nous préférons en général appeler figure matérielle car ce n'est pas n'importe quel dessin. Dans tout le présent texte, le terme « figure » désigne un dessin qui peut s'interpréter comme une figure matérielle représentant une figure géométrique.*

d'y porter :

- Dans une <u>*vision « surfaces » des figures*</u>, on voit un assemblage de figures simples, c'est-à-dire des surfaces juxtaposées ou à la rigueur superposées. Des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de superposition, des intersections de bords. On ne peut pas créer de nouvelles lignes sans déplacer de surface. Par exemple dans la Figure 1, on peut voir trois triangles juxtaposés ou deux triangles superposés dans un quadrilatère, leurs côtés, leurs sommets.

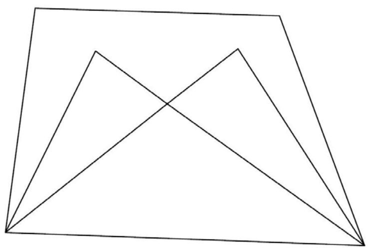

Figure 1

- Dans une <u>*vision « lignes » des figures*</u>, les lignes intérieures ont une existence propre. La figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle non graduée pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments ; le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes déjà tracées. On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points déjà présents. On ne peut pas créer de nouveaux points à partir de lignes qui ne sont pas tracées. Il peut rester difficile de prolonger des lignes pour définir des points dont le lien avec la figure n'est pas direct. Ainsi, sur l'exemple (Figure 2), on voit plus ou moins de droites supports des côtés et il est difficile d'imaginer la possibilité de prolonger les côtés du quadrilatère pour obtenir leur point d'intersection. Il en est de même des côtés des triangles qui ne sont pas portés par les diagonales du quadrilatère (Figure 2).

- Dans une <u>*vision « points » des figures*</u>, on peut créer des points par intersection de deux lignes qu'on trace à cet effet et les points peuvent définir des lignes : il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ; pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ; il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur.

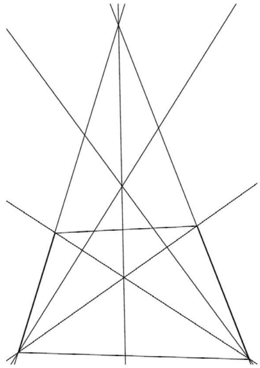

Figure 2

Sur l'exemple (Figure 3), on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes : la donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine E et F. Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles.

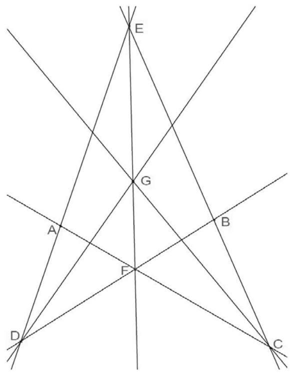

Figure 3

La vision « surfaces » est la vision première[6] des figures ; l'apprentissage de la géométrie va permettre d'enrichir cette vision naturelle d'une vision « lignes » et d'une vision « points ». Nous allons maintenant l'illustrer dans le cas de la reproduction d'un polygone.

6 *Naturelle pour les adultes comme pour les enfants, sauf peut-être pour les professeurs de mathématiques !*

Reconnaissance et caractérisation d'un polygone. Des jalons pour une progression

De la maternelle au secondaire, comment faire évoluer le regard sur les polygones ?

Du gabarit à la règle et au report de longueur

Avant même la scolarisation, le petit enfant peut réaliser des puzzles par encastrement à une pièce où il s'agit de loger une forme dans un trou ; il dispose alors du gabarit et du pochoir et doit reconnaître la pièce parmi d'autres et la tourner pour l'encastrer dans son logement. Si le recto et le verso ne sont pas distingués (par un petit bouton ou par une couleur), cela peut s'avérer difficile pour des pièces qui ne présentent aucun axe de symétrie (comme le parallélogramme du tangram). Considérons le moment, en début de primaire, où l'enfant sait réaliser le contour d'un gabarit ou d'un pochoir pour tracer la figure qui représente la forme et voyons comment, en jouant sur quelques variables didactiques, on peut aider l'élève à évoluer vers une vision « lignes » de la figure.

Gabarit grignoté

Une souris vient grignoter les gabarits et déchirer les pochoirs[7].

Il s'agit de reproduire une figure superposable à un modèle fourni (exemple en Figure 4) avec pour instruments ces gabarits grignotés et pochoirs déchirés.

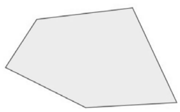

Figure 4

Les pochoirs se réduisent bientôt à une règle, c'est-à-dire une surface avec un bord droit.

- s'il manque un coin et si l'on ne dispose pas de la partie utile du pochoir (Figure 5) mais seulement d'une règle (Figure 6), il devient nécessaire de prolonger les traits pour obtenir le sommet comme intersection de deux droites (Figure 7). Mais si l'on veut obtenir le sommet sans déborder et sans gommer, un report de longueur est nécessaire (Figure 8).

7 Voir le site http://www.aider-ses-eleves.com/pour-les-5-12-ans

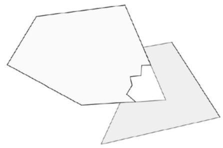

Figure 5

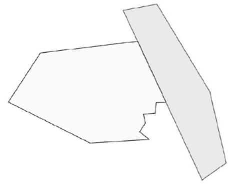

Figure 6

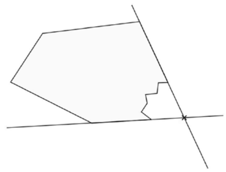

Figure 7

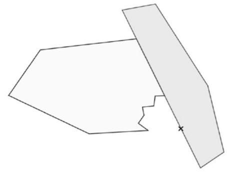

Figure 8

Nous entendons ici le report de longueur comme se faisant sur une droite déjà tracée, à partir d'un point déjà tracé, avec un instrument de report de longueur (bande de papier avec un bord droit sur lequel on peut écrire ou sur lequel il y a un repère coulissant), que nous appellerons un *réglet*. S'il n'y a pas de support droit, le report ne peut se faire dans le plan qu'avec un compas[8].

- s'il manque tout un côté du polygone, il faut reconstituer deux sommets limitant les côtés adjacents et le report de longueur devient nécessaire (Figure 9).

- s'il manque deux côtés, on peut faire deux reports de longueur pour trouver deux sommets manquants (Figure 10) mais comment trouver le troisième ?

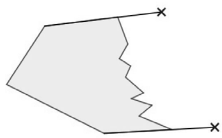

Figure 9

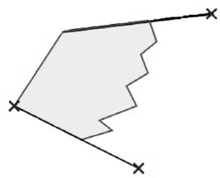

Figure 10

a) on peut trouver les directions des côtés manquants en reportant les angles (Figure 11) avec un morceau de papier : soit en le pliant, soit sans plier mais en écrivant sur le papier[9], que celui-ci soit transparent

8 Un réglet pouvant tourner autour d'une extrémité est en fait un compas ; nous y reviendrons.

9 Il serait trop long de développer ici les procédures de report des angles comme report simultané de deux directions. On peut se reporter aux différentes reproductions d'un triangle sur le site http://www.aider-ses-ele-

ou opaque…

b) on peut aussi reporter une seule direction et une troisième longueur (Figure 12).

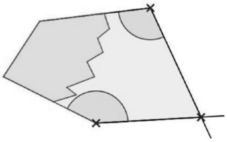

Figure 11

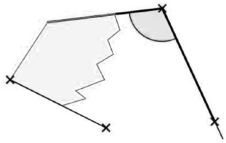

Figure 12

On peut enfin faire intervenir une ligne qui n'était pas tracée (une diagonale du polygone qui ferme le quadrilatère de la Figure 10). Il reste à construire un triangle sur cette diagonale. Ceci nous amène aux moyens de reproduire un triangle. Nous le ferons en passant d'abord par l'étude du carré.

Des figures particulières

On peut utiliser les propriétés des figures pour les reproduire plus facilement. Prenons l'exemple du carré : s'il manque tout un côté (Figure 13), on peut tracer un côté et les supports de deux autres et restaurer le carré en faisant pivoter le gabarit et en l'appuyant sur le côté déjà tracé et le support d'un autre (Figure 14).

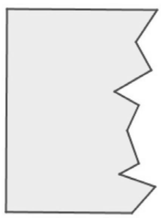

Figure 13

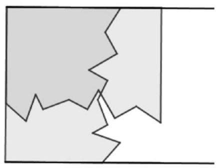

Figure 14

S'il reste un seul coin et aussi des morceaux de bords parallèles (Figure 15), on peut encore pivoter le gabarit et l'appuyer sur des lignes déjà tracées pour restaurer le carré (Figure 16).

S'il ne reste qu'un coin sans morceaux de bords parallèles, il devient nécessaire de faire des reports de longueur : après un premier report de longueur, un pivotement du gabarit et un deuxième report de longueur (Figure 17), on peut faire un deuxième pivotement ou un troisième report pour terminer.

On arrive ici à la construction classique du

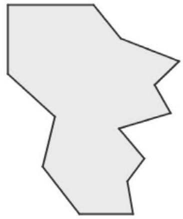

Figure 15

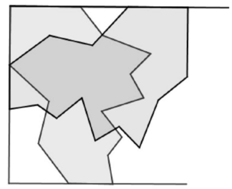

Figure 16

carré avec une équerre et un gabarit de longueur qui peut être remplacé par une règle graduée si l'on introduit les mesures et donc les nombres.

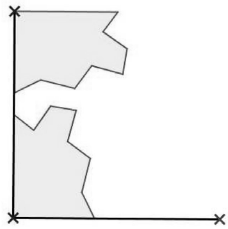

Figure 17

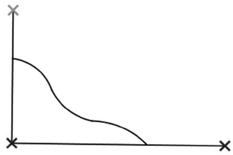

Figure 18

L'équerre est en effet un gabarit d'angle droit (un coin de carré) tout fait. Celles du commerce sont en fait des triangles rectangles : travailler d'abord avec un gabarit en carton avec un troisième côté déchiré aide à localiser l'angle droit. On est alors capable de reproduire un triangle rectangle avec une équerre et un outil de report de longueur pour les côtés de l'angle droit (Figure 18).

Retour au polygone quelconque

Quand on sait reproduire un triangle rectangle, on peut reproduire un triangle quelconque avec des reports de longueur et une équerre en le découpant en deux triangles rectangles (Figure 19) et donc un polygone quelconque en le décomposant en triangles (Figure 20). Il faut pour ces décompositions disposer de ce que nous avons appelé une vision « lignes » des figures puisqu'il faut faire intervenir des lignes qui ne sont pas des bords des surfaces à reproduire.

Nous disposons ainsi de deux manières de reproduire un polygone quelconque avec trois instruments : une règle non graduée, un instrument de report de longueur et soit un instrument de report des angles

ves.com/pour-les-5-12-ans

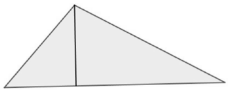

Figure 19

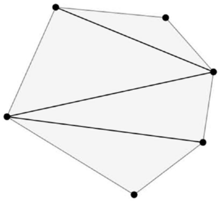

Figure 20

(Figures 11 et 12) soit une équerre (Figures 19 et 20). Dans le premier cas, une vision « surfaces » du polygone suffit : on reproduit son contour ; dans le second cas, une vision « lignes » est nécessaire : il faut créer de nouvelles lignes, des diagonales du polygone. Pour une construction à la règle et au compas auquel nous nous intéressons dans le paragraphe suivant, il faut disposer d'une vision « points ».

Du compas instrument pour tracer des cercles au compas instrument de report de longueur

Pour tracer un cercle avec un compas, on choisit deux points : un point où placer la pointe, un point où placer la mine ou bien un point et un écartement des branches. Dès que leur habileté motrice est suffisante, les élèves peuvent tracer des cercles avec un compas de cette manière mais, en fin de primaire (11ans), il ne réalisent pas nécessairement encore que cet écartement correspond à une longueur non matérialisée, la distance entre la mine et la pointe. On peut le vérifier en proposant aux élèves les deux situations réciproques suivantes :

- Placer une grande quantité de points à une distance donnée d'un point donné.

- Reconnaître dans un nuage de points ceux qui sont sur un même cercle de centre donné sans utiliser le compas.

Dans le premier cas, les élèves placent plusieurs points avant d'utiliser le compas pour tracer le cercle ; dans le second cas, ils sont bloqués et ne voient pas comment une règle graduée ou une bande de papier pourrait les aider. En effet, pour relier l'écartement des branches à la distance entre deux points, il faut voir des points sur la circonférence. L'explicitation du lien entre cercle et distance est nécessaire pour que le compas puisse être vu comme un instrument de report de distance.

Un moyen de relier cercle et distance est de considérer non le cercle seul mais tout le disque, par exemple dans le problème de la chèvre attachée à un piquet dans un grand pré : l'herbe qu'elle peut brouter se trouve dans un disque dont le bord est un cercle ; la distance d'un point du bord au centre (le piquet) est la longueur de la corde tendue. C'est cet écartement qu'il faut prendre pour tracer le cercle avec un compas.

Un autre moyen de relier cercle et distance est de donner un degré de liberté au réglet en lui permettant de tourner autour du point origine, on obtient alors un instrument qui permet de trouver des points du plan qui sont à une distance fixée d'un point donné, et, ce faisant, de tracer un cercle avec l'extrémité libre du réglet, qui devient ainsi compas.

Nous avons vu (Figures 8 à 18) le report d'une longueur sur une demi-droite déjà tracée avec un réglet. Ce report peut aussi se faire avec un compas : on a alors l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle centré à l'origine de la demi-droite, mais il n'est pas nécessaire de voir le cercle : le compas fonctionne ici comme un réglet et pourrait avoir deux pointes sèches. Cependant, si l'on n'a plus de droite support, le réglet tournant et traçant ou le compas permettent de tracer un cercle sur lequel se trouvent tous les points qui sont à la distance donnée du point origine. Par intersection de deux cercles, on peut alors trouver, s'ils existent, deux points qui sont à des distances données de deux points donnés, c'est-à-dire les sommets de deux triangles symétriques construits sur le segment reliant les deux points et dont les longueurs des autres côtés sont fixées.

De la reproduction à la construction de figures

Nous arrivons ici à un procédé de construction d'un triangle à la règle et au compas, connaissant les longueurs de ses côtés. Cette méthode, fondée sur le troisième cas d'isométrie des triangles, nécessite une vision « points » du triangle puisqu'il faut construire le troisième sommet comme intersection de lignes à créer. Chemin faisant, dans le paragraphe précédent, nous avons rencontré des constructions de triangles (en tant que polygones) avec des reports de longueurs et d'angles (un angle entre deux longueurs ou une longueur entre deux angles). Ces constructions correspondent aux deux premiers cas d'isométrie des triangles et sont compatibles avec une vision « surfaces » des triangles. Les cas d'isométrie donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour la superposition de deux triangles, avec ou sans retournement, base de la géométrie d'Euclide. Distinguer la nécessité ou non d'un retournement relève de l'étude de la symétrie que nous n'abordons pas ici.

Dans la géométrie théorique du secondaire, on a affaire non à des reproductions de figures mais à des constructions, que le procédé de construction soit algorithmisé ou à élaborer. Cependant, la problématique de la construction se pose aussi dans la géométrie physique, dès la construction d'un carré ou d'un rectangle, y compris avec une finalité pratique. Or, pour une construction, les propriétés de la figure à construire ne sont pas à identifier dans un modèle mais sont données sous forme de texte ou de figure à main levée codée. Si les connaissances de celui qui construit la figure ne lui permettent pas de répondre directement au problème, il est amené à rechercher les propriétés sur lesquelles peut s'appuyer la construction en faisant l'analyse d'un schéma codé (souvent à main levée) portant les propriétés à obtenir pour les relier à celles qui sont données et trouver celles qu'il sera possible d'utiliser pour la construction (phase d'analyse). Au cours de cette analyse, il est ainsi amené à enrichir la figure pour en rechercher d'autres propriétés à partir desquelles on pourrait mener la construction. Même si on est en géométrie physique, il est alors nécessaire de passer un minimum par la géométrie théorique dans cette phase d'analyse. Nous ne développons pas cet aspect ici mais nous l'abordons à travers un seul exemple : la construction d'un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et la longueur l de l'hypoténuse. Le côté de l'angle droit connu permet de tracer [AB] et la perpendiculaire à [AB] passant par A (Figure 21).

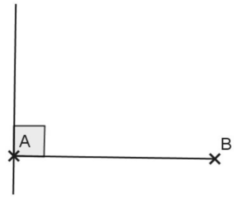

Figure 21

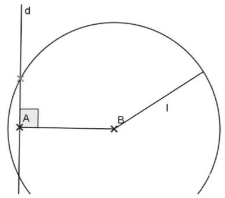

Figure 22

Pour terminer le triangle, il faut reconnaître que le dernier sommet C doit être sur cette droite et à la distance l du point B. C est donc à l'intersection de la droite (d) et du cercle de centre B de rayon l. Si l > AB, on trouve deux solutions (Figure 22). Ce type de construction relève du début du secondaire et demande une vision des figures beaucoup plus élaborée que la construction du triangle rectangle connaissant les côtés de l'angle droit. Il faut en effet ici une vision « points » des figures pour d'une part traduire la condition longueur de [AC] en termes de cercle de centre A et de rayon donné, et d'autre part voir le point C comme intersection de deux lignes à créer. De plus, dans un problème de construction, il devient presque nécessaire d'utiliser des notations et des codages, aspect que nous ne développons pas ici.

Un type de situation pour faire evoluer le regard des eleves sur la figure

La restauration de figure

En théorie des situations (Brousseau, 1998), une situation est définie par :

- Le problème et la règle du jeu ;
- Le milieu et les variables didactiques ;
- Les connaissances en jeu.

C'est selon ces dimensions que nous allons définir un type de situation visant à aider les élèves à changer leur regard sur la figure.

Le problème et la règle du jeu

Une restauration de figure est une reproduction de figure avec des contraintes particulières :

- Une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non).

- Une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations de type « surfaces » de la figure initiale, mais sans donner toute l'information comme le ferait un calque.

- On dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème ; les propriétés des figures sont vérifiables et réalisables avec les instruments à disposition.

- Le jeu consiste à restaurer la figure (compléter l'amorce pour retrouver la figure initiale) au moindre coût (on dépense le moins de points possible).

- Quand les élèves pensent avoir terminé, la validation se fait par superposition de la figure restaurée, disponible sur un transparent, sur la figure réalisée par l'élève.

- Une comparaison des coûts est menée en phase collective.

Le milieu et les variables didactiques

Le milieu est constitué des conditions objectives qui définissent le problème traité par les élèves et les moyens de vérifier le résultat de leurs actions. Il comprend ici le modèle, l'amorce, les instruments et leur coût. Certains éléments du milieu peuvent être choisis par le maître avec une intention didactique selon les connaissances qu'il cherche à développer chez les élèves. Ce sont les variables didactiques qui sont à fixer selon les objectifs, les connaissances préalables des élèves et en tenant compte du contrat didactique. Ce sont notamment ici : les propriétés du modèle, de l'amorce, les instruments à disposition et le barème donnant le coût d'utilisation de chacun d'eux.

Les connaissances en jeu

Elles sont à examiner dans chaque cas pour choisir le milieu et la règle du jeu en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Exemples de restauration

Repérer des alignements

Dans ce premier exemple[10], l'objectif est de favoriser le repérage d'alignements. Le problème consiste à restaurer la Figure 23 à partir de la pièce 1. On choisit un barème qui favorise les tracés à la règle (non graduée) et pénalise les reports de longueur, par exemple : tracé à la règle joignant des points de la figure gratuit ; prolongement d'un segment existant : 1 point ; report de longueur : 5 points.

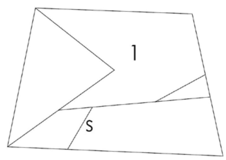

Figure 23

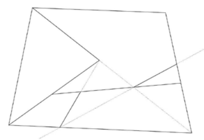

Figure 24

Avec une vision « surfaces » des figures, on peut reproduire le contour en prolongeant des segments et en reportant deux longueurs ; pour tracer le segment S, il faudrait encore deux reports de longueurs. Le repérage d'alignements qui amène à tracer des lignes qui ne sont pas des contours (on en trouve quelques-unes sur la Figure 24) permet de gagner beaucoup de reports ; si on repère tous les alignements, on peut même complètement se passer de reports de longueurs et se contenter d'un coût de 5 points (exercice laissé au lecteur).

Restaurer un carré et un arc de cercle

Il s'agit de reproduire la Figure 25 à partir de l'amorce donnée par la Figure 26

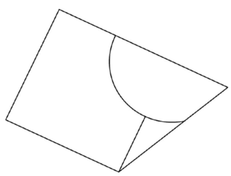

Figure 25

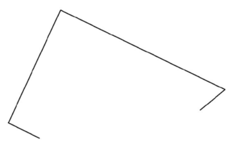

Figure 26

10 On trouvera une analyse détaillée de cet exemple avec différents choix des variables didactiques dans Keskessa et al. (2006).

Le barème est le suivant : équerre 1 point ; compas pour tracer un cercle 1 point ; report de longueur du modèle vers la figure 10 points. Les tracés sur le modèle sont gratuits ainsi que le tracé à la règle (non graduée) et le report de longueur interne à une figure.

L'analyse de la figure initiale et sa comparaison à l'amorce (Figure 27) montrent un carré et un triangle rectangle juxtaposés (ou un carré superposé à un trapèze) et l'arc porté par un demi-cercle superposé au tout.

On peut vérifier par report interne que le rayon du cercle est égal à la moitié du côté du carré.

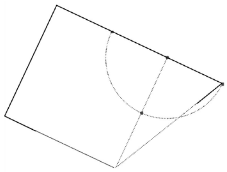

Figure 27

On peut restaurer le trapèze par des prolongements et le carré par un report de longueur interne ; cela permet de trouver, par différence entre la grande base du trapèze et le côté du carré, la longueur du demi-côté du carré qui est aussi le rayon du cercle ; le coût minimal est donc de 1 point. Le report de longueurs interne à la figure oblige à se servir des propriétés du carré et du cercle et des relations entre le carré, le trapèze (grande base une fois et demie le côté du carré) et le cercle (centre en un sommet du carré et rayon moitié du côté). Même s'il suffit d'une vision contour pour terminer le carré, le repérage des relations et en particulier du centre du cercle et de l'égalité de plusieurs rayons nous semble nécessiter une vision « points » de la figure. La construction de la figure à partir de la donnée du côté du carré nécessiterait la même analyse et en plus un moyen de construire des angles droits et le milieu d'un segment.

Restaurer un hexagone régulier

Les moyens de construire le milieu d'un segment autrement qu'en le mesurant sont variés et nous ne pouvons dans cet article évoquer tous ceux que l'on sera en mesure de justifier au début du secondaire. Le premier moyen à la disposition des élèves du primaire est bien sûr le pliage qui est en relation avec la symétrie axiale. Cependant, les élèves peuvent disposer de moyens de construction avec les instruments dès qu'ils savent tracer des parallèles ou construire deux triangles isocèles accolés par la base.

Ce dernier moyen (Figure 28) donne à la fois le milieu et une perpendiculaire puisqu'il donne l'axe de symétrie de la figure.

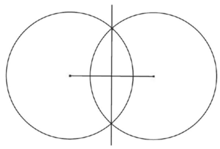

Figure 28

La restauration d'un hexagone régulier à partir de deux cercles sécants tels que le centre de l'un appartienne à l'autre et de la droite passant par les centres (Figure 29), permet de repérer des alignements et mène au pavage du plan par des triangles équilatéraux (Figure 30) pour peu qu'on choisisse un barème qui le favorise, par exemple : tracé à la règle gratuit, compas ou équerre 5 points, report de longueur sur une droite 2 points.

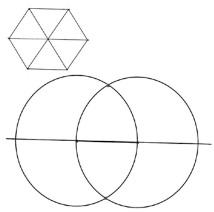

Figure 29

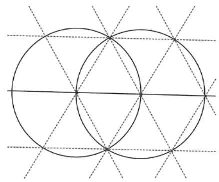

Figure 30

En effet, pour reproduire l'hexagone, les élèves[11] ont tendance à procéder triangle par triangle ; la donnée de l'amorce avec les deux cercles et du barème favorisant les tracés à la règle les incite à repérer des alignements et à construire de nouveaux points par intersection de lignes.

Apprentissages visés dans la restauration de figure

La restauration de figure vise des apprentissages géométriques liés à la pratique des objets géométriques et de leurs relations comme :

- Une droite peut toujours se prolonger ;
- Il faut un segment ou deux points pour dé-

11 CM2, soit 7^{e} HarmoS pour notre observation.

finir une droite ;

- Il faut un support rectiligne pour reporter une longueur à partir d'un point jusqu'à un autre point sinon il faut un compas qui donne tous les points à une distance fixée d'un point donné ;

- Il faut deux lignes qui se croisent pour déterminer un point.

La restauration d'une figure amène à enrichir cette figure avec des nouveaux tracés qu'on projette d'utiliser : ces éléments nouveaux doivent être reliés à ceux qu'on a déjà et à ceux qu'on cherche à obtenir. Elle contribue ainsi à augmenter l'épaisseur sémiotique de la figure qui devient porteuse d'informations qui ne sont pas visibles d'emblée, mais qu'il faut rechercher (on trouve de nouvelles relations entre les éléments présents, on identifie de nouveaux éléments pertinents). Pour les figures classiques, celles qui ont un nom spécifique, elle contribue aussi à enrichir l'épaisseur sémiotique du vocabulaire : par exemple un carré, un rectangle sera progressivement porteur de relations de plus en plus nombreuses non seulement entre ses angles, sommets, côtés, mais aussi entre ses éléments et ceux de la figure enrichie : diagonales, axes de symétrie etc.

Conclusion

L'objectif de cet article n'est pas de proposer de nouveaux programmes pour enseigner la géométrie en primaire mais de montrer que, à l'intérieur de programmes de géométrie élémentaire, quels qu'ils soient, on peut adopter une démarche appuyée sur des situations qui tiennent compte du développement cognitif des élèves. L'accent sur le regard à porter sur les figures (géométriques) matérielles et les moyens de le faire évoluer devrait aider à relier la géométrie physique aux concepts géométriques qui seront la base de la géométrie théorique. En effet, les propriétés apparaissent ici comme des nécessités pour réaliser avec les instruments au moindre coût une figure satisfaisant la demande, ce qu'on contrôle pour l'instant avec les instruments ou avec le transparent et qu'on contrôlera plus tard par les seuls énoncés. Une telle démarche devrait donc faciliter la transition entre le primaire et le secondaire mais nous pensons qu'elle permet aussi de rendre plus opérationnels les concepts géométriques dans la résolution de problèmes « spatio-géométriques », (pour un exemple simple, l'anticipation de la position d'un tapis rectangulaire après déplacement, voir Salin 2008, dans ce numéro). Le traitement de tels problèmes où le passage par la géométrie théorique intervient dans la modélisation d'un problème de la géométrie physique, au-delà de l'espace délimité par la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur, et où la figure peut être en relation à la fois avec le monde physique et avec la géométrie théorique (Perrin et al., 2013) est particulièrement important dans la perspective de l'enseignement professionnel qui concernera une bonne partie des élèves à l'issue de l'enseignement obligatoire.

Les quelques jalons que nous avons essayé de proposer pour une progression concernent l'évolution conjointe de la vision des figures (« surfaces », « lignes », « points ») et des instruments adaptés à cette vision. Les choix des conditions d'un jeu qu'il s'agit de gagner (dépenser le moins de points possible pour restaurer la figure) sont faits pour encourager la progression des connaissances des élèves mais il est nécessaire aussi de fixer les savoirs nouveaux à mesure qu'ils apparaissent pour qu'ils puissent servir à définir les conditions d'un nouveau jeu.

Les situations évoquées ici ont été expérimentées dans des classes mais non une progression complète de la géométrie dans cet esprit. La pratique de la restauration de figures telle que nous l'entendons suppose un changement du contrat didactique habituel de la géométrie de l'école élémentaire (au moins en France) et aussi de la formation des enseignants. Il est en effet souhaitable que ceux-ci puissent intégrer ces situations à leur enseignement ordinaire de la géométrie dans une démarche cohérente et non les juxtaposer à leur pratique ordinaire en les traitant comme des exceptions ludiques. Pour cela, il ne suffit pas d'une part de connaître les savoirs à enseigner, d'autre part d'avoir une pratique pédagogique efficace, il faut pouvoir utiliser les savoirs géométriques pour créer les conditions didactiques de leur apprentissage par les élèves ou au moins pouvoir comprendre et gérer ces conditions.

Références

Berthelot, R. & Salin, M-H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)*, textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x, 72, 6-39* et *Grand N*, 77, 7-34.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.C. & Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Salin, M.H. (2014). Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-graphique » ? *Math-Ecole*, 222, 2-7.

Salin, M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478, 647-670.

Le problème du coloriage des cartes (tiré de Burdet, 1972, Mathématique de notre temps à l'usage des enseignants) (solution dans ce numéro)

Parmi les cartes suivantes, quelles sont celles qui peuvent être colorées avec 2 couleurs seulement ? Et avec 3 couleurs seulement ?