EMPILER DES CUBES

Pierre Audin

Unité « mathématiques » du Palais de la découverte, à Paris

Je travaille au Palais de la découverte depuis bientôt vingt ans. Auparavant, j'étais professeur de mathématiques, en France, dans le secondaire, c'est-à-dire pour des élèves de 11 à 18 ans. Juste avant que je ne devienne un « prof défroqué » l'éducation nationale s'est enrichie en France d'une nouvelle activité en classe de Seconde (élèves de 15-16 ans), prise sur les horaires officiels de la classe, les « modules ». Sur un horaire bizarre, ¾ d'heure par semaine, il fallait partager la classe en deux groupes, pas forcément équilibrés, et le partage pouvait varier d'une semaine à l'autre. On ne savait pas ce qu'il fallait y faire, il était seulement explicitement interdit de faire des « modules de soutien » en alternance avec des « modules d'approfondissement ». Sans doute cela devait être un espace de liberté pour les enseignants, et donc les consignes des inspecteurs étaient peu claires, puisqu'il n'est pas dans les habitudes françaises qu'un inspecteur laisse à un enseignant la liberté de faire ce qu'il veut. Un peu partout, il y a donc eu des modules de soutien et d'approfondissement, en alternance, modules qui ne disaient pas leurs noms : modules 1 et 2 ou A et B. De mon côté, j'ai cherché quelles activités je pouvais tenter, qui ne soient ni du soutien, ni de l'approfondissement, mais qui soient « autres ».

LA SITUATION

La lecture d'un article de Jan de Lange (1984) m'a laissé en arrêt et j'ai adapté une des situations dont il était question, à l'intention de deux moitiés de classe, les élèves étant triés par ordre alphabétique. Il s'agissait *a priori* de géométrie dans l'espace. L'activité a été un grand ratage, j'y reviendrai. Cependant, je l'ai reprise assez vite lorsque je suis arrivé au Palais de la découverte, où elle est plutôt réussie. A noter que désormais, il ne s'agit plus du tout de géométrie dans l'espace.

La situation est assez simple, puisque tout le monde sait ce qu'est un cube, et tout le monde a joué avec des cubes depuis le plus jeune âge, souvent même avant de savoir marcher. Les élèves connaissent, le public connaît, pas de problème d'accessibilité à cet objet. Là, on demande de reconstituer, avec le moins de cubes possible, un empilement de cubes dont on a deux vues, l'une de face, l'autre de profil, sans préciser de quel profil il s'agit, d'ailleurs. La solution n'est pas aussi simple qu'on peut l'imaginer à première vue, parce qu'il faut quand même comprendre qu'il s'agit de projections, et que si l'on voit un carré, on ne sait pas à quelle profondeur se situe le cube qu'il représente. Voici les deux vues proposées.

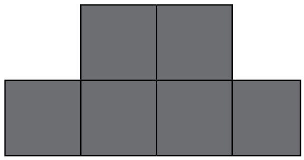


Figure n°1 : vue de face

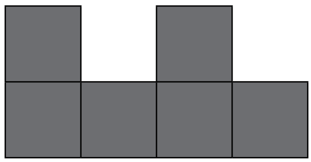


Figure n°2 : vue de profil

La question n'est pas seulement de trouver un empilement de cubes qui donne ces deux vues, mais de trouver ceux qui nécessitent un minimum de cubes. La stratégie de tout un chacun est pourtant de commencer par trouver un empilement de cubes qui donne les deux vues. Lorsque j'insiste sur la question de minimiser le nombre de cubes utilisés, la stratégie se poursuit en tentant d'enlever les cubes inutiles de l'empilement trouvé.

EN CLASSE

Lors de l'activité en classe, la recherche a été collective, chaque élève dessinant sur sa feuille un empilement en perspective, pendant qu'un élève le faisait au tableau, ce qui permettait les discussions entre élèves. Evidemment, la représentation en perspective n'est pas chose simple pour les élèves, elle était remplacée par un quadrillage de quatre cases sur quatre, utilisant un codage de type « bataille navale » : dans une direction, on utilise les lettres A, B, C, D, et dans l'autre les chiffres 1, 2, 3, 4 (voir la figure 3).

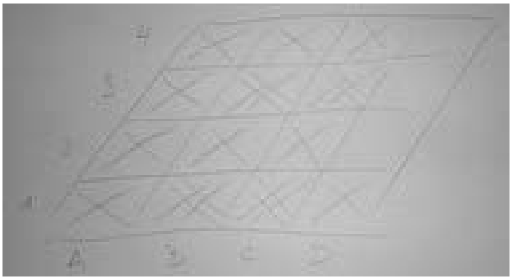


Figure n°3 : représentation en bataille navale

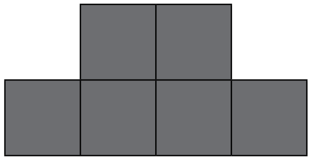
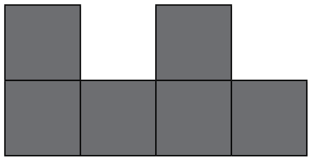
Dans les deux modules, la solution de départ utilisait vingt cubes, ce qui correspond au maximum. L'activité durait 1h30 dans chaque module, et elle s'est arrêtée sans qu'on sache quel était le minimum : la meilleure solution trouvée a été de onze cubes.

Cela se passait en 1993 dans une classe de Seconde d'un lycée parisien. C'était ma dernière année d'enseignement dans le secondaire, car à partir du 1er septembre, j'étais en poste au Palais de la découverte, dans le département de mathématiques.

Au Palais de la découverte

Pour une autre activité, les menuisiers du Palais de la découverte m'ont fabriqué des cubes de 3 cm de côté. Comme je disposais aussi de plateaux en bois plaqué de formica blanc quadrillé de lignes rouges donnant un pavage de carrés de côté 3 cm, la mémoire du problème précédent m'est revenue et j'ai proposé l'activité au public, puis aux groupes scolaires. Car désormais, l'activité n'était plus entravée par la question de la représentation en perspective plus ou moins réussie : disposant d'une cinquantaine de cubes de la bonne taille, l'expérimentation consiste bien à empiler des cubes et à contrôler si les vues sont les bonnes. Voici le mode d'emploi disponible, pour les élèves en visite en groupe, ou pour le public.

Figure n°4 : matériel disponible

> Essayez de construire, avec le moins de cubes possible, une forme géométrique en trois dimensions dont la vue de face est :
>
> 
>
> et celle de profil :
>
> 
>
> Combien faut-il de cubes au minimum pour la réaliser ?

Lorsque j'ai commencé cette activité, la stratégie était systématiquement la même qu'avec mes élèves (à une exception près) : d'abord la solution pléthorique, utilisant vingt cubes (Figure 7).

Mais en disposant effectivement de cubes et en pouvant les empiler effectivement, il y a désormais possibilité effective d'expérimenter. Assez rapidement, on se rend compte que certains cubes sont inutiles, et à force d'enlever des cubes on obtient une des trois solutions suivantes : dans 10% des cas, 8 cubes, dans 80% des cas, 7 cubes, dans 10% des cas, 6 cubes. Chaque fois, il n'est plus possible d'enlever un seul cube de l'empilement obtenu. Les onze cubes de mes élèves de Seconde sont largement battus.

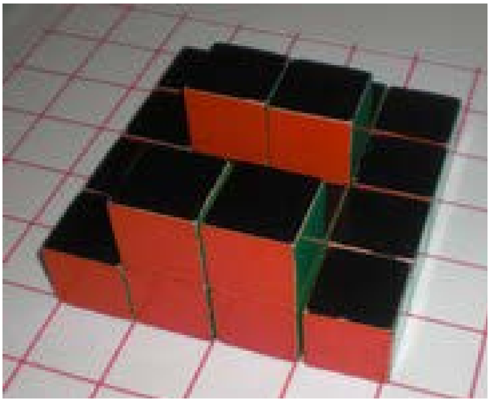


Figure n°7 : solution pléthorique

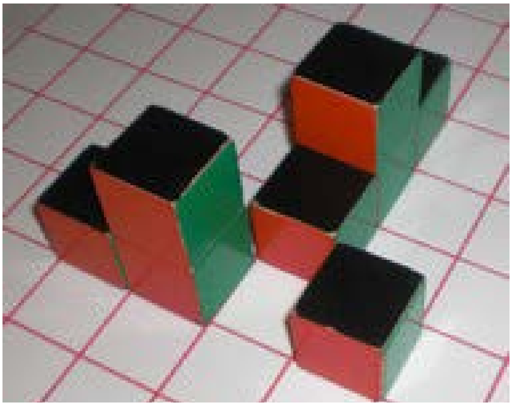


figure n°8 : solution avec 8 cubes

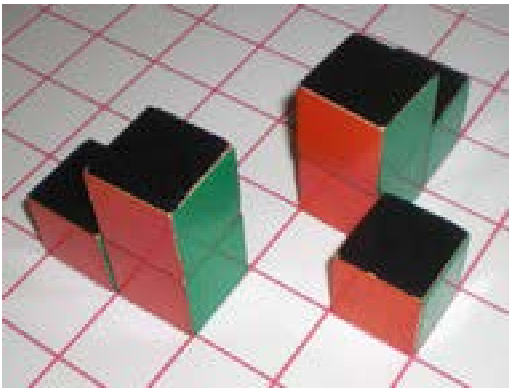


Figure n°9 : solution avec 7 cubes

L'exception notable concerne les élèves des lycées professionnels (pour une fois, ils sont valorisés dans une activité mathématique) qui usinent des pièces en atelier. Ils ont l'habitude de travailler des pièces avec

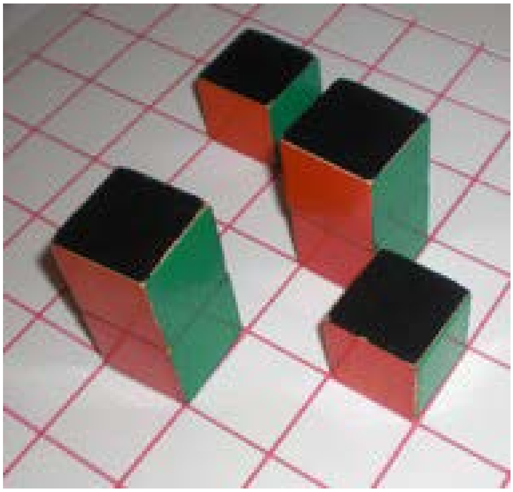


Figure n°10 : solution avec 6 cubes

des vues de face, de profil, de dessus ; ils posent six cubes de façon à se conformer aux deux vues simultanément, et ils sont assez fiers d'avoir réussi en quelques secondes.

Désormais et depuis plusieurs années, la première solution trouvée ne comporte que dix cubes (pauvres élèves de modules n'atteignant que le résultat de onze cubes ...). C'est vrai pour les visiteurs comme pour les élèves : la solution à dix cubes se construit avec d'abord six cubes en ligne, tels qu'on les voit sur la vue de face. Puis, quatre cubes complémentaires, cachés derrière une pile de deux cubes, viennent fournir la vue de profil (Figure 11).

Il y a clairement eu un changement de stratégie, dont j'ignore la raison. La source se trouve peut-être dans un jeu télévisé ou dans l'utilisation des téléphones mobiles ou des ordinateurs portables et autres tablettes graphiques, avec lesquels une grosse part de l'activité reste le jeu.

Qu'est-ce qui m'intéresse (et qui m'intéressait) dans cette activité ? Ce n'est pas la géométrie dans l'espace, assez élémentaire somme toute, puisqu'elle ne met en jeu que quelques cubes, à empiler sur seulement deux niveaux. C'est ce qui concerne la méthode utilisée pour s'assurer qu'on est bien au minimum. Et de faire comprendre aux élèves ou au public que la solution obtenue par une méthode est la solution que

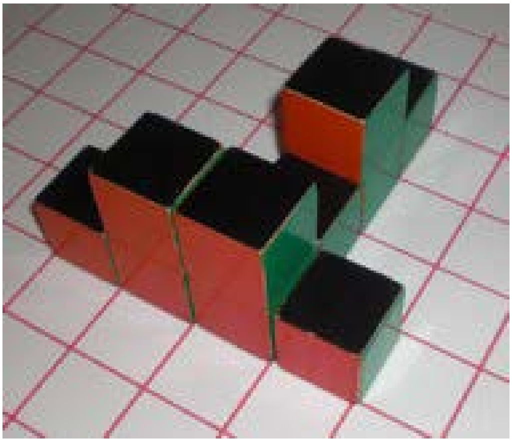


Figure n°11 : solution de départ, avec 10 cubes

la méthode permet d'obtenir, mais pas forcément « la » solution du problème étudié.

Le minimum, ou un minimum ?

Comment être sûr que j'ai trouvé le minimum ? Si je trouve une solution à huit cubes, je sais que le minimum est huit, ou moins de huit, mais sûrement pas plus de huit. Si j'obtiens une solution à sept cubes, le minimum est sept ou moins. Si j'obtiens une solution à six cubes, le minimum est inférieur ou égal à six. Je n'obtiens pas une égalité mais une inégalité. Pour avoir finalement une égalité, j'ai besoin d'une autre inégalité. De toute évidence, d'après l'énoncé, si je vois six carrés, j'aurais besoin de six cubes ou plus, donc toute solution demandera au moins six cubes et le minimum est supérieur ou égal à six. Si j'ai une solution utilisant six cubes, je sais donc que le minimum de cubes à utiliser est à la fois inférieur ou égal et supérieur ou égal à six, ce qui ne peut se faire que si le minimum est égal à six.

En mathématiques, pour démontrer une égalité, il est souvent nécessaire de démontrer deux inégalités (de même, par exemple dans une recherche de « lieu de points », une égalité entre deux ensembles nécessite souvent d'établir deux inclusions entre ensembles). C'est la première « morale » méthodologique.

Problème de méthode

Passons à la deuxième « morale », qui concerne la stratégie utilisée pour résoudre le problème. Vous partez d'une solution et vous enlevez les cubes inutiles un par un. Il est clair qu'au moment où vous ne pouvez plus enlever un cube, vous avez toujours une solution, et si vous en enlevez encore un, n'importe lequel, ce n'est plus une solution. Le nombre de cubes obtenu est donc un minimum local, pour la fonction qui, à une disposition de cubes satisfaisant les conditions sur les vues de face et de profil associe le nombre de cubes de cette disposition.

Le fait de demander au public de faire un empilement de cubes avec le *moins* de cubes possible, ou quand le visiteur obtient une solution, lui demander si on ne peut pas en faire une autre avec *moins* de cubes, induit sans doute cette idée de retirer des cubes inutiles, sans penser à reprendre le problème à la manière des élèves de lycée professionnel par exemple.

La présence du médiateur scientifique que je suis, ou de l'enseignant que vous êtes, permet d'aider le visiteur ou l'élève à analyser la solution obtenue. Il est clair que dans la solution obtenue, il n'y a que deux cubes au niveau supérieur, chacun servant dans les deux vues, de face et de profil. Il est clair que ces deux cubes ne lévitent pas et sont donc obligatoirement portés chacun par un cube du niveau inférieur. Mais dans ce premier niveau, les cubes utilisés ne servent pas tous dans les deux directions, pour les deux vues (Figures 12 et 13).

Un cube, qui ne sert que de face, peut se trouver à n'importe quelle profondeur, tant qu'il est masqué par les autres cubes pour la vue de profil. Si je le déplace dans cette direction de la profondeur, il arrive à une position où il élimine un cube qui ne servait lui aussi que dans une direction, l'autre direction. Ce deuxième cube peut donc être supprimé. Pour réussir cette amélioration, il a fallu changer de méthode. C'est bien la preuve que le minimum obtenu était local, et qu'il était le résultat de la méthode utilisée et non « la » solution du problème posé. De façon surprenante pour le visiteur, en menant un autre raisonnement, il a obtenu une solution avec moins de cubes que ce qu'il croyait être le minimum précédemment.

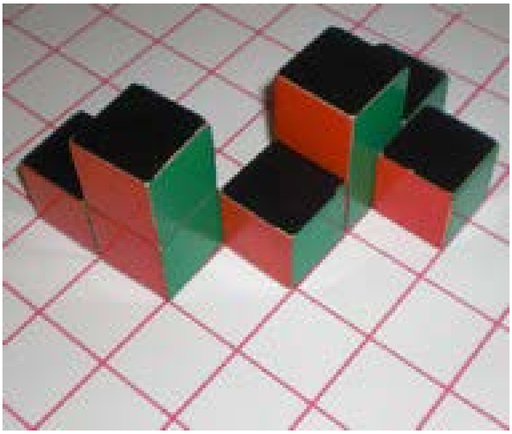


Figure n°12 : un des cubes change de profondeur

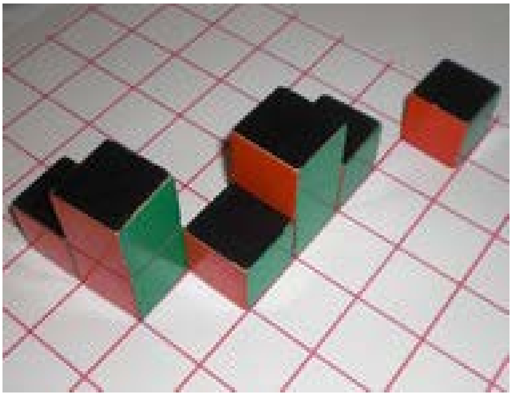


Figure n°13 : à cette profondeur, le cube n'est plus masqué par les autres

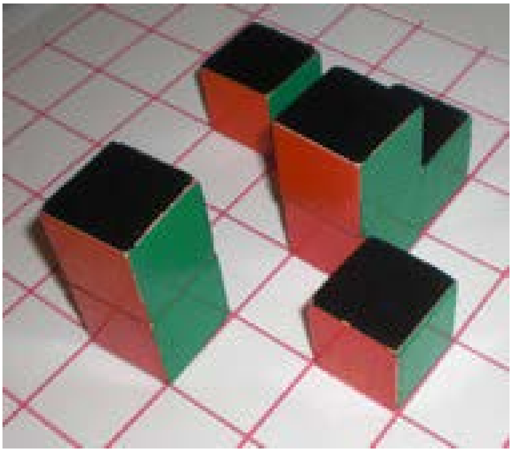


Figure n°14 : un autre cube va pouvoir être retiré

C'est la deuxième « morale » concernant cette activité. A notre époque, où il suffit de cliquer sur « Ok » pour qu'un ordinateur fasse le travail à notre place, il me semble utile de rappeler à mes visiteurs, à vos élèves, que l'ordinateur ne calculera que ce qu'il sait calculer et qu'il faut faire d'abord un peu de maths avant d'utiliser son secours.

Une bonne histoire a toujours trois morales

Si au cours de l'expérimentation, le visiteur croit successivement en un minimum de 10, puis de 8, puis de 7, puis de 6, la nécessité s'impose d'une démonstration que le minimum est bien 6 et qu'on ne trouvera pas une solution avec seulement 5 cubes. D'avoir un peu souffert pour obtenir une solution à six cubes lui permet aussi de vérifier cette dure réalité : quand on démontre une égalité par deux inégalités inverses l'une de l'autre, l'une des deux est souvent plus difficile à obtenir que l'autre. S'il était facile de savoir que le minimum était supérieur ou égal à six, l'inverse a pris beaucoup plus de temps et d'énergie.

Si, à première vue, la situation proposée semble être du domaine de la géométrie dans l'espace, elle n'est finalement qu'un prétexte pour mettre en place ou rappeler des principes utiles au raisonnement mathématique.

Et pour une activité qui semble si familière, si facile à imaginer -- empiler des cubes -- il s'avère que disposer du matériel et empiler effectivement les cubes, constitue une aide sérieuse. C'est la troisième « morale », d'ordre didactique : ne pas croire qu'on connaît bien ce qu'on est censé bien connaître. Oui, on empile des cubes dès le plus jeune âge, mais cette activité se passe beaucoup mieux lorsqu'on dispose concrètement des cubes qu'il est question d'empiler.

Références

De Lange, J. (1984). Geometry for all or: no geometry at all? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 84/3*, 90-97.