Labo-maths - Du cube à la pyramide

Thierry Dias

HEP Vaud & DDMES

L'objectif de cette rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherche mathématique à partir d'un contexte (ici celui de l'articulation entre la géométrie plane et l'espace) afin qu'ils puissent conduire de véritables explorations avec leurs élèves. Il ne s'agit donc pas de faire « faire des problèmes » au sens où on l'entend habituellement. Ainsi, si le contexte de la recherche est imposé (sous forme d'un jeu avec quelques règles, ou d'une énigme), les questions à poser et les démarches de travail envisagées peuvent être diverses et donc adaptées à plusieurs niveaux de classe. Il n'y a pas systématiquement de consigne imposée qui laisserait entendre qu'il existe une réponse attendue relativement unique. Les situations proposent en effet des recherches qui peuvent conduire à une multiplicité de découvertes et donc de « réponses ».

La formulation d'un ou plusieurs résultats prend également ses distances avec une traditionnelle « phrase réponse ». Nous engageons plutôt les enseignants à faire produire à leurs élèves de petits récits racontant leurs recherches tant pour les moments de découverte que de doutes. Nous préférons l'emploi de la terminologie de résultat ou découverte en lieu et place de celle de réponse.

La rubrique propose des situations d'investigations pour lesquelles il n'est pas non plus fourni d'*analyse a priori*. Nous entendons cette terminologie d'investigation en référence à la diversité des processus de raisonnement convoqués : inductif, déductif et expérimental. Nous engageons donc les enseignants à faire faire des expériences et des découvertes mathématiques à leurs élèves en parcourant parfois des chemins inattendus, les menant parfois dans des impasses provisoires. Toute action menée par les élèves est en effet susceptible de révéler leurs connaissances. Il s'agit de privilégier des espaces de recherche dans lesquels les élèves se sentent suffisamment autonomes pour mener de véritables expériences personnelles avec les objets, qu'il s'agisse d'objets sensibles ou d'objets de pensée. On peut en effet imaginer que des expériences conduites par exemple sur les nombres ne nécessitent pas forcément l'emploi de jetons ou de cubes.

L'enseignant doit privilégier un rôle d'accompagnateur de la résolution, en essayant de ne pas prendre de responsabilité directe dans les choix mis en œuvre par les élèves. Il pourra lui aussi être surpris par les découvertes mais sera avant tout un témoin privilégié du potentiel de ses élèves à construire des connaissances mathématiques.

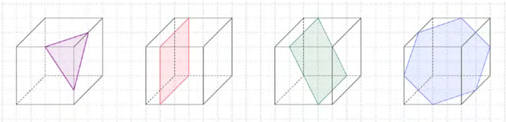
La finalité de la rubrique tient également dans la possibilité d'une communication entre les enseignants. Nous proposons effectivement à celles et ceux qui le souhaitent de témoigner de leurs expériences en racontant leurs découvertes, leurs surprises et les difficultés rencontrées. Ainsi un enseignant peut expliquer comment il a posé le problème, avec quelle(s) consigne(s) et pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres. Il pourra également témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves, analyser le dialogue en classe ou présenter les perspectives qui résultent de ses expériences mathématiques.

Les problèmes de cette rubrique « labo-maths » peuvent se résoudre collectivement au sein de véritables petits laboratoires de mathématiques. Ils ne doivent pas donner lieu à une compétition quelle qu'elle soit, ce sont plutôt des occasions de mener des recherches collaboratives.

Du cube à la pyramide

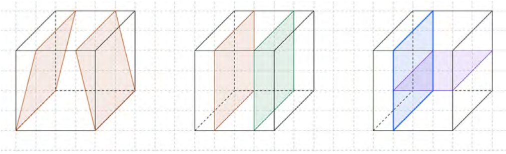
La recherche

Il existe de nombreuses façons de section-



ner un cube : selon une coupe triangulaire, carrée, rectangulaire ou hexagonale. On peut ainsi le décomposer en deux polyèdres identiques ou non.

En utilisant plusieurs plans de coupe, on peut également décomposer ce cube en plus que 2 polyèdres.



La question de ce labo-maths est la suivante :

Est-il possible de découper un cube en 6 pyramides identiques ?

Selon le niveau scolaire et l'âge de vos élèves vous pouvez lancer la recherche dans des environnements matériels différents. Sur papier en utilisant des dessins en perspective, ou en volume grâce à l'emploi de blocs cubiques de sagex et d'une petite scie à fil chauffant par exemple, éventuellement en utilisant des baguettes de bois, des connecteurs et des pelotes/fils de laine. Un temps d'exploration de la tâche sera sans doute nécessaire pour que les élèves expérimentent la notion de section par un plan (puis plusieurs) afin qu'ils se rendent compte progressivement des contraintes de la tâche.

L'idée de cette recherche provient d'un exercice des moyens d'enseignement de 9ème Harmos dont l'énoncé était le suivant :

> *Une pyramide a pour base une face d'un cube et pour sommet le centre de ce même cube. Dessine un de ses développements, puis construis la pyramide elle-même. Quel est son volume ?*

Dans le cadre de ce labo-maths nous vous proposons de profiter autrement de ce contexte en utilisant un questionnement différent par rapport à cette tâche. Il nous a semblé en effet un peu réducteur de donner d'emblée toutes les propriétés de la pyramide qui est recherchée. Il est en effet possible de trouver plusieurs types de pyramides en sectionnant un cube.

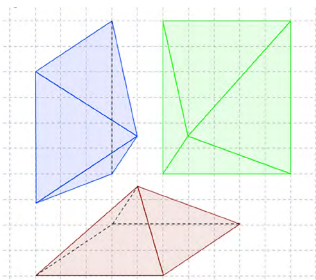
Lorsque la pyramide unité a été trouvée, vous pouvez lancer des recherches complémentaires. Les investigations mathématiques autour de ce polyèdre pyramidal sont riches car ses propriétés sont particulièrement intéressantes. Vous pouvez par exemple envisager les questions suivantes :

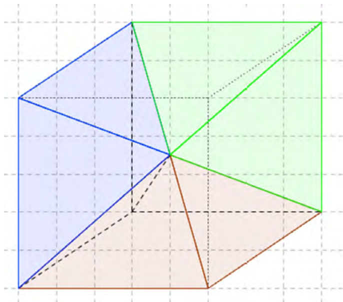
Mesure et grandeur :

- Quelles sont les dimensions d'une face triangulaire de la pyramide si l'arête du cube vaut 1 ? (Longueur des côtés, mesure des angles, surface).
- Quelle est la hauteur de cette pyramide si l'arête du cube vaut 1.
- Quel est le volume de cette pyramide si l'arête du cube vaut 1.

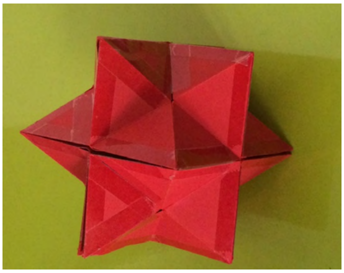
Constructions dans l'espace

- Dessiner plusieurs développements possibles de cette pyramide (dans l'environnement papier/crayon ou en utilisant un logiciel comme geogebra). Découper et reconstruire les pyramides à partir de chacun des développements trouvés, puis les assembler pour vérifier.
- Lorsque l'on assemble plusieurs de ces pyramides, quels sont les solides que l'on peut construire ? Avec 2 pyramides, avec 3 pyramides.
- En utilisant 3 pyramides que l'on assemble par leurs faces triangulaires, on peut obtenir un solide dont le volume est la moitié de celui du cube. Assembler trois pyramides pour construire ce solide.

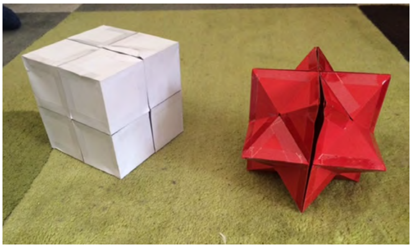


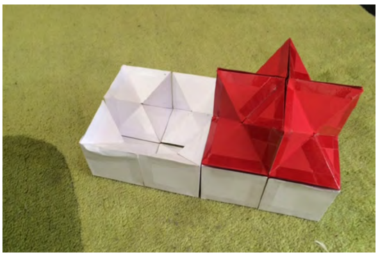


• Chercher un ou plusieurs développements de ce polyèdre.
• En construisant 8 fois le solide précédent et en assemblant ces 8 pièces, on peut obtenir le solide étoilé suivant :



Construisez-le. Combien a-t-il de faces ? de sommets ? d'arêtes ?
• Avec 8 exemplaires de ce même solide mais avec un assemblage différent, on peut aussi obtenir un cube creux qui contient exactement le solide étoilé qui a été construit juste auparavant.





Lorsque ces deux assemblages sont réalisés, il est même possible de les transformer l'un en l'autre par un astucieux placement de charnières. En quelques pliages vous transformerez l'étoile en cube puis le cube en étoile. Vous pouvez rechercher ce jeu de charnières et obtiendrez ainsi un très bel objet qui fera tout son effet auprès de vos amis !

Pilotage de la classe

Vous pouvez bien entendu permettre à vos élèves de travailler en petits groupes, mais vous êtes libre de choisir les dispositifs qui vous conviennent le mieux. Dans un premier temps, un travail individuel est aussi adapté à cette recherche.

Laissez les élèves s'organiser comme ils le souhaitent, mais conseillez-leur de bien garder les traces (dessins, constructions en papier ou même photos) de leurs différents essais ainsi que de leurs découvertes. Ces traces de recherche seront en effet essentielles pour partager les résultats entre chercheurs.

Prenez le temps nécessaire à discuter la consigne de ce problème avec les élèves qui n'entrent dans aucune action susceptible de révéler leurs connaissances. Il n'est en effet jamais souhaitable qu'un élève reste en situation de blocage prolongé quelle que soit l'activité qui est proposée. Cet étayage langagier vous donnera également l'occasion de vous assurer qu'aucune difficulté de compréhension (sémantique ou syntaxique) ne vient nuire inutilement au lancement de la recherche mathématique. Si la consigne de départ est trop ouverte, vous pouvez choisir de lancer le questionnement par une des tâches proposées dans les prolongements.

Nous vous rappelons cependant qu'il faut toujours éviter d'induire un résultat afin de laisser une liberté suffisante à l'expression des connaissances des élèves.

Quand les élèves commencent à appréhender le problème, chaque résultat trouvé nourrit la recherche et leur donne des idées pour trouver d'autres solutions. Laissez-leur un temps d'exploration suffisant pour qu'ils puissent dépasser les configurations les plus évidentes. Ils sauront sans aucun doute trouver de nouveaux assemblages intéressants même s'ils pensent parfois être «bloqués» un certain temps en croyant qu'il n'y a plus rien à trouver. Si certains de vos élèves sont en difficulté avec la prise de notes nécessaire à la compilation des essais et des découvertes, vous pouvez fournir une fiche comportant des dessins de cubes en perspective, ou mieux encore permettre la prise de photos.

Pensez à recueillir le travail des élèves, prenez des notes sur les interactions qui ont eu lieu, sur la variété des approches des élèves que vous avez observées dans votre classe. Toutes ces informations peuvent être utiles pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves mais aussi pour évaluer leurs connaissances et leur potentiel à apprendre en mathématiques. Dans votre réflexion sur votre expérience avec ce problème, gardez par exemple à l'esprit les questions suivantes:

- Quelles difficultés ont eu les élèves dans la compréhension du problème ?
- Comment les élèves ont-ils abordé cette tâche ?
- Quelles stratégies les élèves ont-ils essayées ?
- Y a-t-il des réponses d'élèves ou des interprétations qui vous ont surpris ?

Où sont les maths ?

Les connaissances mathématiques utiles pour effectuer les recherches proposées dans ce problème sont diverses et concernent essentiellement le domaine de la géométrie dans l'espace ainsi que celui de la mesure de grandeurs. Nous rappelons cependant à cette occasion en citant le Plan d'Études Romand que :

> *« Les mathématiques sont plus qu'une collection de concepts et de compétences à maitriser. Il s'agit plutôt d'un ensemble complexe d'idées incluant des méthodes d'investigation et de raisonnement, les techniques de communication et les questions de contexte. »*

Ainsi cette recherche concerne davantage les objectifs relatifs aux éléments pour la résolution de problèmes tels qu'ils sont énoncés dans le plan d'études. On peut retenir ici par exemple :

- La mise en œuvre d'une démarche de résolution en évaluant les critères suivants : est-elle explicite, adaptée, cohérente ?
- L'ajustement d'essais successifs, puisque les recherches consistent à construire des procédures se basant sur la mise en lien de résultats intermédiaires et temporaires.
- La vérification puis la communication d'une démarche, car les différentes étapes des recherches peuvent être plus ou moins superposées et que leur communication nécessitera souvent une mise en forme spécifique.

Quelques enjeux en termes de notions mathématiques sont également sous-jacents dans la résolution des problèmes suscités par l'énigme. En termes d'objets géométriques on peut citer par exemple :

Dans l'espace : cube, pyramide, plan, polyèdre, développement, face, arête, sommet.

Dans le plan : polygone, triangle, carré, côté, sommet, hauteur.

Quelques notions concernant les relations et les transformations géométriques peuvent également être abordées au cours des explorations : perpendicularité, parallélisme, symétrie(s) et autres transformations du plan.

Enfin, la construction de solides en papier ou carton nécessite de nombreux tracés et donc l'utilisation d'instruments appropriés.

Partagez vos expériences

Savoir comment vos élèves répondent à ce problème nous intéresse beaucoup. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves. Si vous êtes d'accord de les partager, nous serons donc ravis de recevoir vos idées et vos réflexions.

Vous pouvez ajouter à votre envoi toutes les informations concernant la manière (ou les manières) dont vous avez choisi de poser le problème, des travaux d'élèves et même des photos montrant vos petits chercheurs en action. Envoyez vos résultats en indiquant votre nom, le niveau de votre classe, ainsi que les coordonnées de votre établissement à l'adresse suivante : mathecole@ssrdm.ch

Avec votre accord, quelques-uns de vos envois seront publiés dans un numéro ultérieur de la revue Math-Ecole. Vos noms et coordonnées d'établissement seront bien entendu indiqués dans l'article correspondant.