ENUMERATION ET ORGANISATION

Michaël CHALVERAT, Ricardo SERIGADO

Etudiants, Université de Genève

Cet article vise à résumer une recherche effectuée dans le cadre de notre formation en didactique des mathématiques à l'Université de Genève. À travers une articulation entre les différents contenus proposés dans la formation et les discussions entre les acteurs de cette recherche, nous avons tout d'abord construit une analyse a priori d'une activité de 5H (en annexe). Nous avons ensuite eu l'opportunité de la confronter au terrain en nous rendant dans une classe genevoise. À l'aide des productions d'élèves récoltées lors de cette expérimentation, nous avons élaboré quelques pistes de réflexion sur la manière dont les élèves s'organisent afin d'atteindre l'exhaustivité des réponses.

QUESTION DE RECHERCHE

Avant de penser à l'énumération, nous devions nous poser la question de savoir si les élèves sont en mesure de construire un nouveau système, c'est-à-dire passer « d'un système "réel" complexe à un modèle mathématique épuré » (Burgermeister & Dorier, 2012, p.11). Cela signifie que l'élève, dans l'activité qui lui sera proposée, doit trouver le moyen de partir du problème concret — comment puis-je affranchir une lettre à 70 centimes à l'aide de sept types de timbres ? — afin de le transformer en un problème mathématique — quels sont les outils mathématiques dont je vais avoir besoin pour arriver à résoudre mon problème —, ce qui revient à élaborer, pour l'élève, un nouveau système. Comme Burgermeister et Dorier (2012) l'affirment, « […] l'activité de modélisation peut faire intervenir plusieurs modèles concurrents entre lesquels il faut essayer de déterminer le plus approprié pour la réalisation du problème initial. » (p.7) C'est pourquoi, nous avons décidé d'introduire, dans cette tâche, du matériel manipulable — des multicubes — qui se trouvent généralement dans les écoles du Canton. Le but pour nous est, dans un premier temps, d'observer si les élèves arrivent à passer de ce matériel manipulable au papier-crayon, c'est-à-dire d'un système « réel » — les timbres représentés par les multicubes — à un système mathématique (ou autre). Au vu de la difficulté apparente, selon nous, d'atteindre l'exhaustivité des solutions sur ce genre de problèmes, nous avons opté pour une observation sur ce passage à l'abstraction, car ce type de processus doit généralement être assimilé à ce stade de la scolarité par un élève de 5H. Dans un deuxième temps, si ce passage est réussi, nous analysons les différentes stratégies que les élèves mettent en place afin d'atteindre l'exhaustivité des réponses.

Notre étude interroge ainsi les stratégies des élèves. Elle s'intéresse à leur activité lorsque, pour résoudre un problème concret, ils doivent passer d'une manipulation de matériel fourni par l'enseignant à une représentation papier-crayon, le but final étant d'arriver à trouver toutes les réponses possibles. Dans ce cadre, notre question de recherche s'articule selon les trois sous-questions, ces dernières allant dans un ordre progressif de difficultés pour l'élève :

- Est-ce que l'élève cherchera à garder une trace visible des résultats qu'il a déjà obtenus à l'aide des multicubes ?
- S'il garde une trace visible, quelle est la méthode/technique qu'il utilisera (dessin dans son cahier, nombres, etc.) ?
- Quelle est l'organisation qu'il choisira afin d'atteindre l'exhaustivité des résultats (méthode de l'arbre, selon le nombre de timbres, etc.) ?

ANALYSE A PRIORI

L'activité choisie est issue des moyens d'enseignement COROME présents dans les écoles du canton de Genève. Il s'agit de la tâche Recherche 70 (Fig. 1) proposée dans le livre de l'élève pour le degré

5H (Danalet et al. 1998), c'est-à-dire pour des élèves de 8-9 ans. Cet exercice se situe dans le module 1 — Problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement —, dans le domaine de l'énumération. Ce choix de domaine a été motivé par le fait que nous souhaitons analyser de plus près l'activité des élèves lorsqu'ils doivent s'organiser afin de dénombrer toutes les combinaisons possibles pour atteindre l'exhaustivité. Pour rappel, énumérer est l'action de « passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule » (Briand et al., 1999, p.9). L'activité Recherche 70, dans laquelle il s'agit de trouver toutes les manières d'affranchir une lettre à 70 centimes à l'aide des sept différents types de timbres, se prête parfaitement à notre observation, du fait que l'élève ne peut plus compter sur une règle potentiellement induite, comme cela a pu être le cas lors d'activités présentes au cycle 1 (« Les feux » en 3H ou « Les tours » en 4H), mais doit trouver d'autres méthodes pour réussir la tâche demandée.

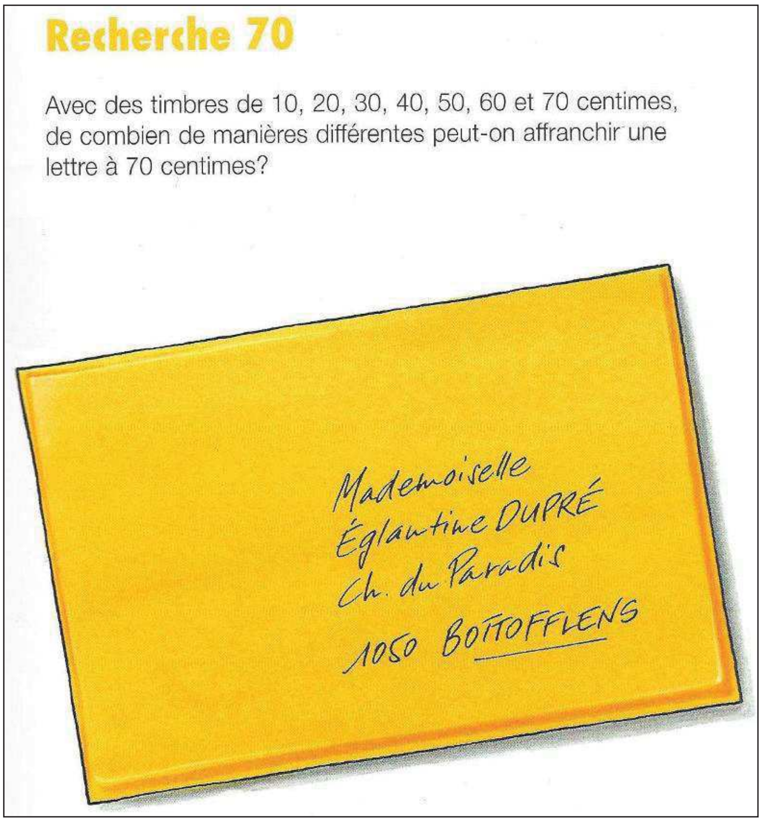

Fig. 1 : Énoncé de l'activité « Recherche 70 »

Dans l'analyse a priori, nous avons dégagé trois stratégies principales de résolution de cette activité pour l'élève.

Premièrement (Fig. 2), il est possible d'établir une liste selon le nombre de timbres utilisés (Fig. 2), cette liste allant d'un timbre (1x70) à sept timbres (7x10).

Nombre de timbres utilisés	Manières différentes d'affranchir la lettre à 70 centimes				total
1	70	-	-	-	1
2	60+10	50+20	43+30	-	3
3	50+10+10	40+20+10	30+20+20	30+30+10	4
4	40+10+10+10	30+20+10+10	20+20+20+10	-	3
5	30+10+10+10+10		20+20+10+10+10		2
6	20+10+10+10+10+10				1
7	10+10+10+10+10+10+10				1
Total					15

Fig. 2 : Stratégie 1

Deuxièmement (Fig. 3), il est possible de créer un arbre avec toutes les décompositions du nombre 70 (Fig. 3), c'est-à-dire partir des sept valeurs possibles et procéder à toutes les sous-décompositions possibles (exemple : 40+30/40+20+10/40+10+10+10, etc.).

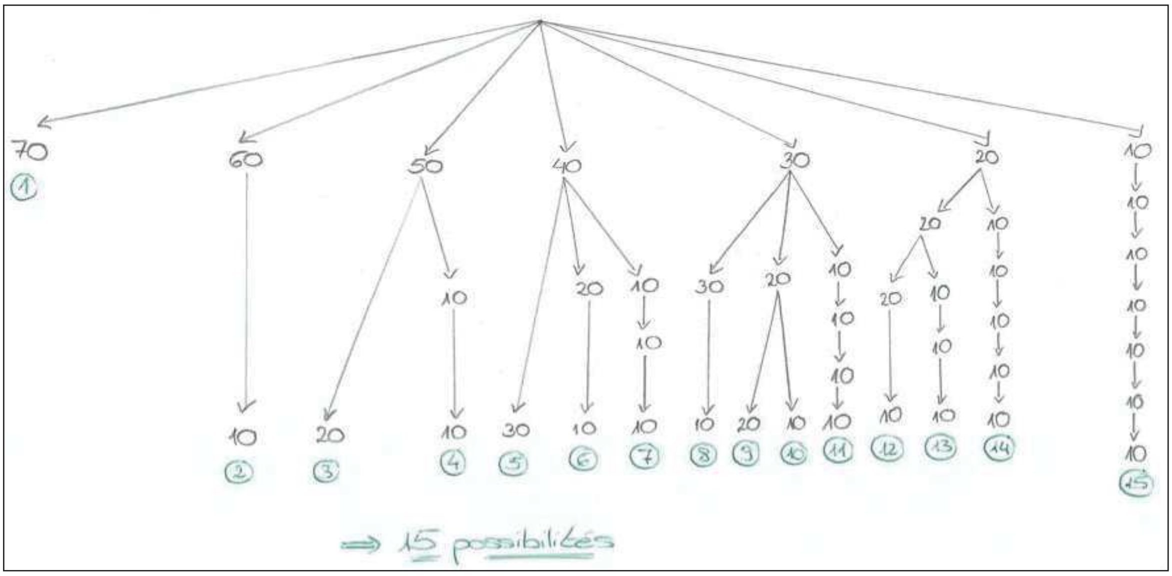

Fig. 3 : Stratégie 2

Finalement (Fig. 4), il est possible d'établir une liste organisée hiérarchiquement selon la plus grande valeur de timbre (Fig. 4), ce qui correspond à un schéma proche de celui en arbre.

<table>
<tr><td>Plus grande valeur de timbre utilisé</td><td colspan="6">Manières différentes d'affranchir la lettre à 70 centimes</td><td>total</td></tr>
<tr><td>70</td><td colspan="6">70</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60</td><td colspan="6">60+10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>50</td><td colspan="3">50+20</td><td colspan="3">50+10+10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>40</td><td>40+30</td><td colspan="2">40+20+10</td><td colspan="2">40+10+10+10</td><td>-</td><td>3</td></tr>
<tr><td>30</td><td>30+30+10</td><td colspan="2">30+20+20</td><td colspan="2">30+20+10+10</td><td>30+10+10+10+10</td><td>4</td></tr>
<tr><td>20</td><td colspan="2">20+20+20+10</td><td colspan="2">20+20+10+10+10</td><td colspan="2">20+10+10+10+10+10</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="6">10+10+10+10+10+10+10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="6"></td><td>15</td></tr>
</table>

Fig. 4 : Stratégie 3

Il est important de signaler que ces trois stratégies sont, selon nous, bien différentes du point de vue de leurs difficultés et qu'elles ne représentent pas une liste exhaustive de toutes les stratégies envisageables. Ainsi, nous laissons la porte ouverte à d'autres possibilités de résolution du problème.

Ensuite, nous nous sommes intéressés aux stratégies de base (ou erronées) et aux stratégies visées. En effet, dans ce genre d'activité, l'élève doit se préoccuper en priorité de deux choses : *ordonner* et *contrôler*. Cela signifie qu'à chaque fois qu'une nouvelle combinaison de timbres est trouvée afin d'affranchir la lettre, il faut nécessairement l'ordonner dans la collection des combinaisons déjà trouvées dans un premier temps — selon l'organisation choisie — et ensuite, il faut contrôler dans un deuxième temps si elle ne représente pas un doublon, c'est-à-dire une solution déjà trouvée précédemment. Comme l'affirme Briand (1999), « […] que ce soit dans le domaine de la construction des opérations arithmétiques, et plus tard, dans celui de l'analyse combinatoire, la question se pose toujours de contrôler les collections d'objets qu'il faudra dénombrer (…) » (p.9). C'est pourquoi, nous constatons que l'organisation — d'un point de vue « énumération » seulement — a une importance capitale dans les résultats trouvés et dans la présence ou non de doublons dans les productions d'élèves.

Sur un autre plan, nous avons décidé — comme recommandé dans le manuel d'enseignement — de faire travailler les élèves en binômes. En effet, il nous semble pertinent et judicieux d'une part de ne pas laisser un élève seul face à la tâche et d'autre part, de les faire collaborer, dans le but d'atteindre l'exhaustivité. En effet, selon une idée répandue, il est souvent plus facile pour les élèves d'arriver à trouver la réponse s'ils sont en groupe. À ce stade de l'analyse, nous ne pouvons pas encore saisir l'impact que ce mode de travail aura sur la suite de nos résultats. En effet, nous nous sommes uniquement préoccupés des trois différentes méthodes de résolution de l'activité — exposées plus haut — que les élèves peuvent mettre en place (Fig. 2 à 4) et de leurs différentes stratégies (de base, erronées et visées).

Analyse a posteriori

Le premier constat qu'il est possible de faire à la suite de notre intervention dans une classe de 5H est que notre question de recherche doit se focaliser en particulier sur la troisième sous-question énoncée plus haut. En effet, suite à nos observations, tous les binômes — sauf un seul — ont réussi à se détacher du matériel manipulable afin de passer par la décomposition additive du nombre 70. Ainsi, pour répondre aux deux premières sous-questions :

- Tous les groupes ont gardé une trace visible de leurs résultats, un d'entre eux n'ayant pas utilisé les multicubes de toute l'activité.
- La technique employée afin de garder les résultats en mémoire a été la décomposition additive du nombre 70.

Dans la suite de ce développement, nous nous concentrerons donc sur la dernière sous-question et nous tenterons de répondre à la question suivante :

Après être passé à la décomposition numérique du nombre 70, comment l'élève s'organisera-t-il pour ordonner ses résultats de façon à atteindre l'exhaustivité des réponses (c'est-à-dire à trouver la dernière possibilité) ?

Tout d'abord, le point qui paraît essentiel à aborder et qui a été mis en évidence lors de notre intervention dans la classe est l'impact du travail en binôme. Lorsque nous sommes passés dans les rangs, il a été possible de remarquer différents modes d'organisation à l'intérieur même des groupes. Par exemple, certains binômes ont d'emblée décidé de travailler sur le même cahier, afin de ne pas se surcharger. Pour d'autres binômes, les élèves ont préféré travailler chacun sur leur cahier. Cependant, il est également possible de constater une différence au sein de cette catégorie. En effet, certains élèves ont fait le choix de s'appuyer sur une même organisation spatiale, alors que les autres ont choisi de travailler chacun pour soi. Ainsi, à l'aide des productions d'élèves récoltées à la fin de l'activité, nous avons classé les différents groupes (onze binômes en tout) et nous sommes arrivés au résultat suivant :

- Travail à deux sur le même cahier – 2 groupes (G/J)
- Travail à deux avec la même organisation spatiale – 4 groupes (A/E/F/H)
- Travail à deux avec deux organisations spatiales différentes – 5 groupes (B/C/D/I/K)

Comme émis précédemment, nous ne pouvions pas mesurer l'impact de ce mode de travail avant notre intervention dans la classe. Nous avons seulement pensé que le fait de travailler en binôme pouvait aider les élèves à atteindre l'exhaustivité des réponses. Nous n'avions ainsi pas pris en compte la possibilité que certains élèves rencontrent des difficultés à communiquer, à se partager les tâches ou encore à trouver un objectif commun. De plus, à l'aide du résultat explicité ci-dessus, nous remarquons également que la moitié des groupes a opté pour un travail plutôt individuel, malgré le fait que les élèves pouvaient collaborer par deux.

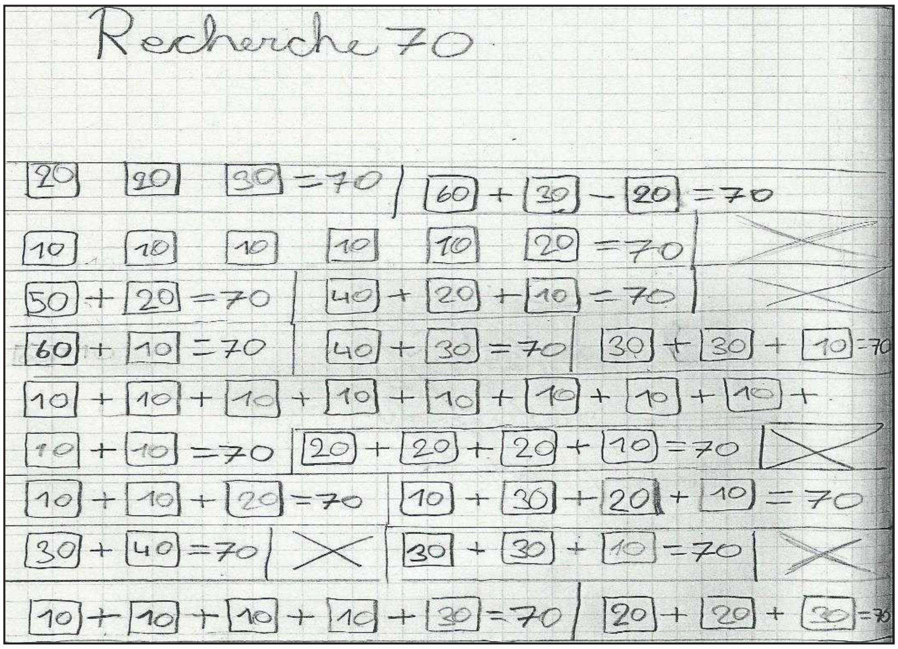

Fig. 5 : Exemple de travail à deux sur le même cahier

Ensuite, le deuxième point sur lequel nous devons nous concentrer lorsque nous analysons les productions d'élèves est les différentes méthodes utilisées dans la résolution de cette activité. Nous remarquons qu'il y a trois catégories de stratégies distinctes.

- Établir une liste selon le nombre de timbres utilisés – 7 groupes (A/C/D/E/F/I/K)
- Établir une liste organisée selon la valeur du plus grand timbre en premier – 2 groupes (B/H)
- Aucune organisation visible – 4 groupes (G/I/J/K)

Nous constatons que deux groupes — le I et le K — se trouvent dans deux catégories. Ce résultat n'est pas surprenant, car comme mentionné auparavant, ces deux groupes ont opté pour un travail individuel, ce qui se manifeste par deux stratégies différentes sur leurs productions. Malgré le fait que plus de la moitié des groupes ont utilisé la première méthode — établir une liste selon le nombre de timbres utilisés —, cela ne signifie néanmoins pas que cela soit la seule stratégie experte pour la résolution de ce problème. En effet, un autre groupe — le H — a réussi à trouver toutes les possibilités à l'aide d'une autre méthode. Par conséquent, nous sommes arrivés à la conclusion qu'il n'existe pas une « meilleure façon » d'atteindre l'exhaustivité dans ce type de problème, ce qui est certainement dû au fait qu'il n'y a pas de règles induites (c'est-à-dire que l'élève ne peut pas appliquer une règle mathématique afin de trouver le nombre de combinaisons possibles).

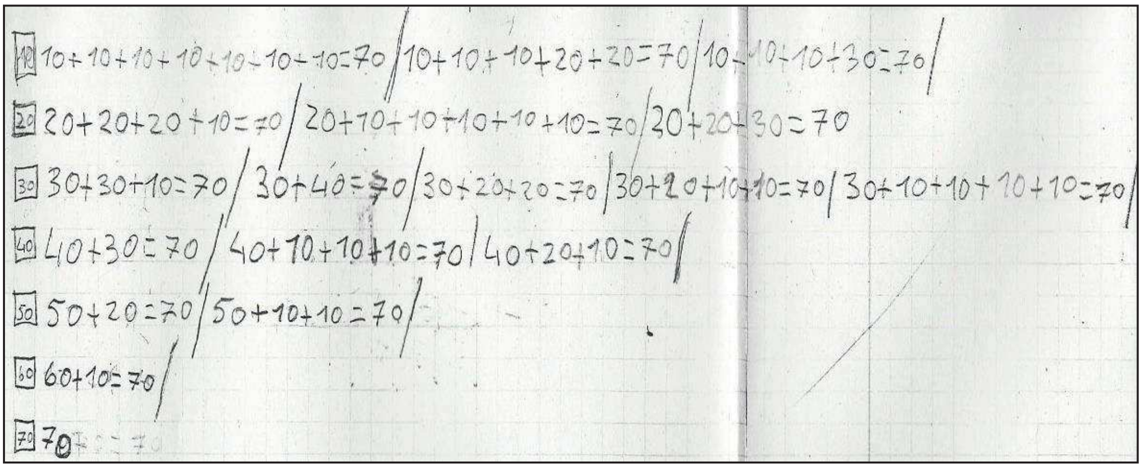

Fig. 6 : Établir une liste selon la présence du plus grand timbre en premier — Groupe H

Finalement, afin de répondre plus précisément à notre question de recherche, nous avons décidé d'affiner l'analyse de la stratégie consistant à établir une liste selon le nombre de timbres utilisés. En effet, nous avons été intrigués par une structure présente dans la plupart des groupes qui ont adopté cette technique. Lorsque nous observons le début de leur raisonnement, tous les élèves commencent par identifier les mêmes possibilités pour affranchir la lettre. Si nous essayons de résumer cela selon les étapes observées dans les productions d'élèves, nous arrivons au schéma suivant (du point de vue de l'élève) :

- Je peux, bien évidemment, affranchir la lettre à l'aide d'un seul timbre (70).
- Ensuite, je peux essayer de l'affranchir à l'aide de deux timbres (60+10/50+20/40+30).
- Finalement, si j'essaye de trouver la décomposition maximale, je peux affranchir ma lettre avec sept timbres au maximum (7x10).

Il est intéressant, de notre point de vue, de relever la « zone de flou » qui existe entre la présence de trois et six timbres. En effet, il existe, selon nous, des « incontournables », que nous avons listés ci-dessus. Ces derniers représentent les cinq possibilités les plus évidentes et les plus faciles à trouver lorsqu'il faut commencer l'exercice. Ainsi, il existe peu d'oublis ou de doublons pour ces résultats, comme il est possible de le voir ci-après sur la Fig. 7. Après les avoir énumérés, la tâche devient alors plus ardue, et c'est à ce moment précis que la plupart des doublons sont apparus. En effet, à partir de trois timbres utilisés, l'élève est obligé de s'organiser différemment et de trouver une stratégie efficace qui permettra de prendre en compte toutes les possibilités. À titre d'exemple de stratégie, si nous reprenons la Fig. 2, nous remarquons que l'élève peut s'appuyer sur les résultats trouvés pour deux timbres afin d'orienter son raisonnement. Il aurait ainsi pu trouver les « sous-décompositions » suivantes :

60+10 → (50+10)+10

50+20 → (40+10)+20 - (30+20)+20 -(50+10)+10

40+30 → (30+10)+30 - (20+20)+30 - (40+20)+10[1]

Cependant, au vu de la plupart de leurs productions, les élèves n'ont que très rarement pris appui sur les résultats qu'ils avaient trouvés précédemment, ce qui s'est manifesté par un nombre important de doublons. Il n'est alors pas étonnant de constater que ce type de stratégie peut présenter des difficultés quant à l'organisation, en particulier lorsque les deux élèves du même groupe travaillent chacun de leur côté. Selon notre analyse des productions, nous nous sommes également rendu compte que certains groupes n'avaient pas les mêmes doublons, ce qui vient appuyer notre constat selon lequel l'organisation à l'intérieur de chaque groupe a eu un rôle déterminant dans les résultats obtenus. Par conséquent, cette phase de « sous-décompositions » effectuées ci-dessus montre qu'il s'agit d'un enjeu d'apprentissage central lors d'exercices relatifs à l'énumération.

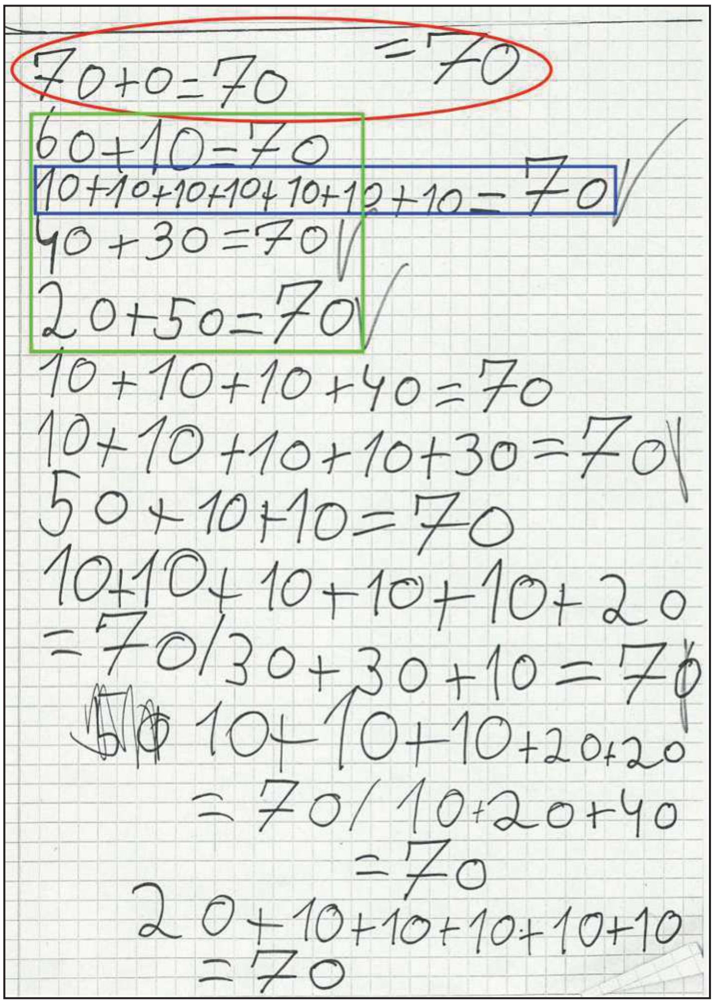

Fig. 7 : Les « incontournables » du groupe D

[1] Les trois décompositions soulignées représentent les doublons à supprimer.

Conclusion

Le but de notre recherche était d'observer et d'analyser une activité consistant à organiser ses résultats, l'objectif final étant d'atteindre l'exhaustivité des réponses pour l'élève.

L'analyse a priori de l'activité mathématique choisie ainsi que l'analyse a posteriori basée sur des productions d'élèves nous ont permis de repérer leur importance pour un enseignant. En effet, tout au long de nos discussions, il est possible d'extraire petit à petit des hypothèses sur le raisonnement des élèves qui nous sont utiles dans une éventuelle progression dans leurs apprentissages. À titre d'exemple, nous pensons qu'il est utile de proposer d'autres tâches aux élèves afin qu'ils puissent apprendre à mieux collaborer entre eux, dans le but de réussir plus aisément un problème du type « énumération ». Cela demande une certaine habitude du travail en groupe, ce dernier mode de travail devant être favorisé dès que c'est possible selon nous.

De plus, l'analyse plus fine des « incontournables » permet également de mettre en avant les différentes étapes intermédiaires nécessaires aux élèves pour atteindre l'exhaustivité. En effet, les différentes décompositions et sous-décompositions nécessitent une organisation spatiale et visuelle que l'élève doit entreprendre et également comprendre, dans le but d'être sûr de ses résultats et de sa méthode utilisée. Ainsi, des activités liées à des décompositions de nombre pourraient s'avérer utiles afin d'approfondir ce domaine pour les élèves.

Bibliographie

Briand, J., Lacave Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D. & Goua De Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, 66*, 7-22.

Burgermeister, P.-F., & Dorier, J.-L. (2012). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande. *Petit x, 91*, 5-24.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques, Troisième année, Fichier de l'élève.* Neuchâtel : COROME.

Annexe – Fiche pédagogique

1 – B

Recherche 70

Tâche

- Rechercher systématiquement les décompositions de 70 à l'aide de multiples de 10.

Recherche 70

Avec des timbres de 10, 20, 30, 40, 50, 60 et 70 centimes, de combien de manières différentes peut-on affranchir une lettre à 70 centimes?

55

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 55

Mise en œuvre

- Cette activité se prête bien à une présentation à la classe par affiches, transparents, etc. Dans ce cas, au terme de la recherche, les élèves peuvent se réunir par quatre afin de préparer une présentation de leurs solutions à la classe.

Déroulement

Relance

- L'enseignant renvoie à la consigne les élèves qui ne cherchent que les affranchissements constitués de deux timbres. Il peut aussi dire qu'il a trouvé d'autres manières encore d'affranchir.

Mise en commun

- Les élèves recensent les solutions obtenues[1].
- Ils confrontent leurs démarches. Ils examinent celles qui présentent la plus grande efficacité pour l'exhaustivité des solutions.

Démarches possibles de l'élève

- Établir une liste de réponses sans organisation.
- Établir une liste structurée en fonction de la présence de certains timbres
  - Réponses avec 1 fois 70, avec 1 fois 60, avec 1 fois 50, ...
  - Réponses avec 7 fois 10, avec 5 fois 10, avec 4 fois 10, ...
- Établir une liste structurée en fonction du nombre de timbres
  - Réponses avec 1 timbre, 2 timbres, ...
- ...

1 Information à l'usage des enseignants
Il y a 15 solutions

53