Transposition didactique de quelques critères de divisibilité dans le manuel de 6P (8Harmos)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Dans ma thèse de doctorat (Del Notaro, 2010), j'ai proposé une tâche portant sur les critères de divisibilité par 4, figurant dans un cahier genevois à destination des enseignants primaires (voir figure 1), pour réaliser mes expérimentations. Ces dernières consistaient à donner à des élèves de 11-12 ans, la possibilité d'effectuer des expériences à propos du nombre avant tout, mais aussi de leur faire faire une expérience de recherche à propos de diverses relations de divisibilité. Dans une perspective épistémologique, j'ai cherché à comprendre comment les connaissances se forment, poussant l'investigation du milieu le plus loin possible.

Un temps nécessaire à la constitution de l'expérience est indispensable à la construction des connaissances, afin que celles-ci puissent s'adapter entre elles et aboutir au savoir. En effet, l'élève doit pouvoir disposer d'un bagage expérientiel dans lequel puiser, ce qui se construit peu à peu dans l'exploration d'un contenu mathématique ; par exemple, avoir l'occasion de se poser des questions élémentaires, mais néanmoins fondamentales (est-ce que 222 est plus pair que 112 ? Un nombre pair, c'est un multiple de 2 ? Etc.). Ces questions semblent banales, et pourtant… S'interroger et investiguer le milieu, sans subir la pression du savoir censé être acquis – comme par exemple ce que l'on peut lire dans la figure 2 : « *les élèves savent déjà reconnaître un multiple de 2 (nombres pairs)* » – est un gage de dévolution[1].

L'étude et l'expérimentation de la tâche retenue dans ma recherche (situation Charrière) m'a permis d'effectuer un bon nombre de constats, dont l'un des plus saillants a été la question de la dévolution. Lorsque j'ai découvert dans le manuel de 6P l'énoncé de l'exercice 19 (voir figure 3), si proche de la situation que j'avais traitée, j'ai été immédiatement intéressée à les comparer du point de vue de la dévolution et de la transposition didactique.

Nous verrons que cet exercice 19 s'avère très fermé, alors qu'à première vue, il semble être une situation ouverte laissant de la place à la recherche par l'élève. La situation Charrière ne sera pas discutée ici, sa présence dans ces lignes n'étant due qu'à sa ressemblance avec l'exercice 19. Toutefois, pour faciliter la lecture, voici son énoncé :

2	.	7	.	: 4
milliers	centaines	dizaines	unités	

A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.

B. Remplace le 7 des dizaines par d'autres chiffres (1, 2, 3, ...);
- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?

Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 1 : énoncé de la situation Charrière (1991), p.214.

Je vais considérer en premier lieu ce que la méthodologie préconise à propos des critères de divisibilité et faire ensuite une analyse de l'exercice 19 du point de vue de sa transposition didactique, pour en montrer les contenus sous-jacents (Figure 2).

Il apparaît que c'est le choix du calcul qui a été fait, au détriment de l'étude du nombre et de ses diverses relations. Le sens de l'enseignement des critères est lié à leur « utilité » et l'on peut même supposer une hiérarchie : si l'on s'en tient à la formulation du début de la page 105, il y aurait des critères de divisibilité plus ou moins « *efficaces* », plus ou moins « *rentables* » au sens de l'enseignement d'un *truc*. En effet, l'introduction des critères de 2, 5, 10 et 100 en premier lieu permet de penser qu'ils sont aux premières loges du point de vue de

[1] *Proposer une tâche et faire accepter à l'élève la responsabilité du problème à résoudre.*

Les critères de divisibilités sont utiles en calcul réfléchi. Les élèves savent déjà reconnaître des multiples de 2 (nombres pairs), de 5 (nombres se terminant par 0 ou 5), de 10, de 100 et peut-être de 50 et de 25. En sixième, les critères permettant de reconnaître ces multiples peuvent être formulés à peu près correctement.

Mais là encore, dans l'esprit du thème, ce n'est pas la formulation qui compte, mais la méthode qui a permis la découverte des critères : une hypothèse, sa vérification sur de très nombreux exemples puis, en cas de confirmation systématique de l'hypothèse, son adoption comme règle.

Les critères de divisibilité par 3 et par 9 sont caractéristiques de cette démarche hypothético-déductive, mais leur justifiation n'entre pas en ligne de compte en sixième année.

Même si un critère ne peut être « saisi » par tous, il peut se révéler fort pratique et d'un usage facile. L'élève qui n'arrive pas à le découvrir pourra au moins le vérifier. Dans l'activité 20 par exemple, certains constateront la relation entre la somme des chiffres d'un nombre et le reste de la division par 9 ; d'autres ne feront qu'un simple exercice destiné à consolider les notions de dividende, diviseur, quotient et reste.

Figure 2 : extrait de la méthodologie 6P

l'efficacité ; viennent ensuite ceux de 25 et 50, puis enfin, ceux de 3 et 9, qui sont destinés à une démarche « hypothético-déductive », ce qui laisse sous-entendre qu'ils sont plus à même d'être proposés en recherche pour les élèves. Les critères de 4 et de 6 ou encore de 7 et de 8 ne sont pas même évoqués, car ils ne sont pas très « pratiques », pour reprendre ce terme utilisé par les auteurs (première ligne, dernier paragraphe).

Pour terminer le commentaire de cette page 105, la question se pose, parmi d'autres, de savoir si l'on admet qu'un critère que l'élève découvre est un critère que l'élève « saisit ». C'est sur cette ambiguïté que se sont construites mes expérimentations, afin de tordre le cou à ce genre d'idées reçues qui induisent les enseignants en erreur.

Dans cet environnement méthodologique, l'exercice 19 se présente en effet comme un problème relativement ouvert, mais nous allons voir qu'il ne l'est pas.

Il y a quatre parties à considérer dans le dessin ci-après :

- En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs ?
- 3732 est-il un multiple de 4 ?

$$\begin{array}{l|l} 3732 & 4 \\ \hline 32 & 8 \end{array}$$

- Mais M'sieur, on peut reconnaître un multiple de 4 sans effectuer la division !!! Il suffit d'observer les deux derniers chiffres du nombre !
- Évidemment ! D'ailleurs on peut aussi reconnaître de cette façon les multiples de 20, 25 et de 50 !!!

L'énoncé de l'exercice 19 semble ouvrir vers une exploration du nombre, mais les propos contenus dans la caricature l'excluent aussitôt : elle contient à la fois les réponses et la marche à suivre.

C'est le seul spécimen traitant des critères de divisibilité dans les manuels officiels.

L'exercice qui vient juste après propose quant à lui, une simple application de quelques autres critères.

Le choix se porte donc clairement vers le calcul[2], l'apprentissage d'un truc.

Or ce *truc* est la partie visible du critère, qui reste magique si l'on ne peut approcher les maths qui se trouvent cachées derrière. Le dessin renforce encore cette idée.

2 cf. méthodologie de 6P, p. 105 : Les critères de divisibilité sont utiles en calcul réfléchi

Figure 3 : exercice 19, p. 48, livre de l'élève 6ème année

Partie (1) : Cette première partie ne se rapporte pas au contenu de l'illustration ; on pourrait la considérer comme une sorte de mise en train proposée à l'enseignant, un rappel concernant les multiples de 2 et de 5, censés être connus[3].

> *En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs ?*

> Autrement dit : existe-t-il un critère qui consiste à regarder le dernier chiffre du nombre [et le comparer au diviseur], tel que ce critère soit un moyen de savoir si un nombre possède ou pas tel ou tel diviseur?

La réponse est oui : en ne regardant que le dernier chiffre, on peut savoir si un nombre est divisible par 2 ou par 5. En termes de puissances, on peut écrire 2 comme 2^1 et 5 comme 5^1. C'est l'exposant qui indique le nombre de chiffres à considérer dans le nombre. Ici l'exposant est 1, on regarde 1 chiffre. Concernant la divisibilité par 4, on peut factoriser 4 en facteurs premiers[4], ce qui donne 2^2 ; l'exposant 2 indique que l'on considère les deux derniers chiffres.

Partie (2) :

> *3732 est-il un multiple de 4 ?*
>
> | | |
> |---|---|
> | *3732* | *4* |
> | *32* | *8* |
>
> *Remarque : On aura relevé l'erreur contenue dans cette opération ?!*

> Si l'on effectuait cet algorithme, le quotient commencerait par 9 (9x4=36) et non par 8 et l'on soustrairait 36 de 37, et non pas 32.
>
> La question, telle qu'elle est disposée dans le dessin, avec l'algorithme situé juste en dessous, implique un changement de perspective : on ne demande plus de réfléchir sur les nombres, mais d'effectuer un algorithme, autre moyen de savoir, évidemment, si un nombre est divisible.

Il est probable que l'on veuille rappeler

3 *Ibid. : Les élèves savent déjà reconnaître des multiples de 2 (nombres pairs), de 5 (nombres se terminant par 0 ou 5), de 10, de 100 et peut-être aussi de 50 et de 25. En sixième, les critères permettant de reconnaître ces multiples peuvent être formulés à peu près correctement.*

4 *Rappelons ici l'importance de la base 10 dans tous critères de divisibilité (si l'on envisage les critères de divisibilité par 3, par 4 en base 8, on comprendra que c'est bien parce que 10 = 2x5 (décomposition en facteurs premiers) que l'on va s'intéresser d'une manière privilégiée aux exposants de 2 et de 5.*

l'algorithme dans cette partie du dessin, même sous forme erronée et humoristique, dans le but de montrer toutes les façons de répondre à cette question. L'algorithme de la division étant un moyen calculatoire de procéder, c'est comme si la seule observation des nombres était « risquée », comme si l'on craignait que le calcul en pâtisse ; on le rappelle du reste dans la méthodologie par cette phrase, déjà évoquée : *les critères de divisibilité sont utiles en calcul réfléchi*. Quant à l'erreur relevée, on peut se demander s'il s'agissait de montrer la faillibilité de l'algorithme ou alors, si c'est une manière de rappeler que 32 (deux derniers chiffres de 3732) est un multiple de 4. Une autre interprétation possible encore, allant dans le sens de mes observations en classe, serait que l'illustrateur a été victime lui aussi de l'abondance des informations et des connaissances mises en jeu dans cet exercice : il n'a considéré que les deux derniers chiffres, comme le veut le critère, mais a appliqué cette règle à sa propre résolution de la division, qu'il commence par la droite, comme s'il s'agissait de l'une des trois autres opérations (addition, soustraction ou multiplication). Ceci permet de relever une influence possible de l'illustration sur les procédures des élèves et la question se pose de savoir si ces dessins font partie du problème ou non.

Partie (3) :

*Mais M'sieur, on peut reconnaître un **multiple de 4** sans effectuer la division !!! Il suffit d'observer les **deux derniers chiffres du nombre !***
De même que pour la partie (1), c'est l'exposant qui indique le nombre de chiffres à considérer dans le nombre : ici, on regarde les deux derniers chiffres, mais cela tombe d'on ne sait où…

Partie (4) :

Évidemment ! D'ailleurs on peut aussi reconnaître de cette façon les multiples de 20, 25 et de 50 !!!
On considère donc les deux derniers chiffres là aussi, étant donné les exposants 2 (25 peut s'écrire 5^2 ; 20 peut s'écrire $5x2^2$ et 50, $2x5^2$).

Ainsi, pour les multiples de 2 (2^1) et de 5 (5^1), on regarde le dernier chiffre du nombre alors que pour les multiples de 4 (2^2), de 25 (5^2), de 20 (5.2^2) et de 50 (2.5^2), on considère les deux derniers chiffres.

Cette partie (4) est une sorte de généralisation de l'ensemble des critères de divisibilité qui consistent à regarder le-s dernier-s chiffre-s d'un nombre pour savoir si celui-ci est divisible par un autre ; cette généralisation indique le nombre de derniers chiffres à regarder. Pour les multiples inférieurs à 10, cela concerne les multiples de 2, 4, 5 et 8 (8 obéit également à la règle)[5]. Pour les multiples de 3, de 6 et de 9, le critère s'exprime différemment[6] et pour les multiples de 7, il y a d'autres méthodes[7].

Dans notre exemple, la généralisation s'exprime par le lien entretenu entre l'écriture d'un nombre en facteurs premiers 2 et/ou 5 et leur exposant.

L'exercice est construit de la façon suivante : on pose la question à propos de 2 et de 5, on établit qu'il s'agit de 2^1 et de 5^1, l'illustration évoque ensuite 2^2 et 5^2, et la dernière partie représente encore 5.2^2 et 2.5^2, qui sont des compositions de ces deux premiers nombres.

Le savoir mathématique caché derrière la formulation de l'exercice 19 est pour le moins opaque, du point de vue de la transposition didactique. L'analyse de cet exercice montre que le sens des critères, la façon de les trouver, ce à quoi ils servent, pourquoi on les apprend, etc. sont autant de questions éludées ici, au profit de l'aspect calculatoire.

En consultant les programmes et plans d'études, du primaire jusqu'au secondaire inférieur, j'ai constaté que les propriétés structurelles des entiers relatifs n'étaient

5 *Le nombre 8 peut s'écrire 2^3, son critère de divisibilité est effectivement de regarder les trois derniers chiffres du nombre, qui doivent former un multiple de 8.*

6 *Pour 3 et 9, si la somme des chiffres d'un nombre est un multiple de 3 ou de 9, alors ce nombre est un multiple, respectivement de 3 ou de 9. Pour 6, le nombre doit être pair et multiple de 3.*

7 *Pour 7, il y a trois méthodes, dont l'une est : on prend tous les chiffres sauf le dernier, on soustrait 2 fois le dernier, on vérifie si le résultat est divisible par 7*

pas un objet d'enseignement, du moins, au moment où j'ai mené ma recherche. Entre, d'une part, la volonté du Cycle d'Orientation de ne pas étudier les critères de divisibilité comme un chapitre de la théorie des nombres et d'autre part, celle du primaire de les utiliser pour le calcul réfléchi, c'est le choix du calcul qui est clairement fait et stipulé. Au primaire, l'étude de ce chapitre semble vouloir s'ouvrir vers l'étude du nombre sous des aspects très variés, mais il s'étrique soudainement pour se conformer à la clause de l'utilité. Par ailleurs, cette clause apparaît de manière très marquée au secondaire inférieur où, par exemple, le critère de 4 sera éliminé car considéré comme trop compliqué à retenir, au profit des critères de 2, 5, 10, 3, considérés comme utiles. On constatera tout de même avec étonnement que le critère de 3 n'est pas associé à ceux de 6 et 9.

Avec le récent PER, le secondaire inférieur a pallié quelque peu ce manque, ce qui transparaît dans l'item MSN32 où il est fait référence à ces critères : « *Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres….* ». Le secondaire se trouve ainsi plus en lien avec une théorie des nombres qu'au primaire, où ils sont situés dans MSN23 « *Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs …*» renforçant le lien avec la calculation comme déjà évoqué.

Dans la discussion de la partie (1) de l'exercice 19 avec des élèves, ce dont on s'aperçoit, et qui est tout à fait intéressant, c'est que les élèves en *savent trop* dans le sens où ils ne parviennent pas à considérer l'énoncé dans sa plus simple expression. Ces élèves en sont plus loin dans leur réflexion à propos des critères, ce qui les empêche de comprendre l'énoncé au plus simple : ils pensent déjà aux deux ou trois derniers chiffres.

Les propos de l'élève 1 montrent que quand il regarde 448, il sait déjà que c'est un multiple de 4 et de 8. Lorsque l'élève 2 lui répond Avec 458, *on peut dire la même chose, mais ça ne marche pas*, il veut dire que ça ne marche pas pour 4 et 8, dont il sait également qu'il n'est pas multiple de 4, ni de 8.

La question est interprétée ainsi : est-ce qu'en regardant le 8 de 458 ou 448, je peux inférer que ces nombres possèdent les diviseurs 4 et 8 (sachant que la réponse est affirmative) alors que la question est tout simplement, pour reprendre les mêmes termes : « est-ce qu'en regardant le 8 de 458 ou 448,

L'expérimentateur (Exp.) propose d'écrire quelques nombres au hasard et de tenter de répondre à la question

E1 : Ça dépend, on ne peut pas savoir. Par exemple avec 448, on peut dire en regardant le 8 qu'il possède les diviseurs de 1, 2, 4, 8 ; ça marche.

E2 : Avec 458, on peut dire la même chose, mais ça ne marche pas

E3 : Avec 689, aucun diviseur, sauf 1 et 689 mais si on regarde le dernier chiffre, on répondrait 3, 9.

Exp. propose 237

E2. : Avec 237, on dirait 1 et 7, et en fait c'est un multiple de 3 en plus. En regardant que 7, on dirait que non.

E3 : 237 n'est pas un M7 car 37 n'est pas dans le livret de 7 (Il utilise les critères de 4)

E2 : 237 se divise pas par 3

Exp. : Tu te souviens du critère de 3 ? On additionne les chiffres.

E2 : Ah oui alors ça fait 12

E3 : Mais ça nous sert pas de voir que ça fait 12

E2 : En regardant le 7, je peux pas dire si c'est un M4 mais c'est un M4 car 12 est M4 (addition des chiffres du nombre).

E3 : En fait c'est une mauvaise technique de regarder le dernier chiffre parce que ça marche une fois sur deux.

Je cherche à repérer ce que les élèves comprennent de cet énoncé.
L'illustration brouille les pistes, notamment sur le fait que l'on dévie sur les multiples de 4.
La question porte en effet sur le dernier chiffre et non pas sur les deux derniers chiffres, comme suggéré par l'image.
Les élèves disent d'emblée que ce n'est pas « *En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre…* » mais ils rectifient « *En observant les deux derniers chiffres d'un nombre…* ».
La question posée par l'énoncé leur échappe puisqu'ils la transforment aussitôt.
Je rectifie à mon tour, en répétant la question.

Discussion de la partie (1) de l'exercice 19 avec des élèves

je peux savoir si ces nombres possèdent ou non certains diviseurs ». La réponse est : oui, le 2.

Cet exercice vient après que les élèves aient expérimenté et formulé énormément de connaissances à propos des critères, justes ou fausses, qui ont néanmoins guidé leurs représentations des rapports de divisibilité.

En conclusion, on constate que les explorations des élèves les amènent beaucoup plus loin que ce que le manuel préconise de manière figée dans cet exercice, mais pour ce faire, ils doivent avoir du temps pour chercher, tâtonner, se tromper, recommencer, etc.

L'expérience se constitue sur un temps long (*cuisson lente*) et les résultats de ma recherche ont montré l'intérêt de laisser cette *cuisson* se faire, pour que les connaissances puissent se constituer. Le travail de la dévolution s'avère extrêmement long également : la difficulté en classe réside dans le transfert de responsabilités du professeur aux élèves.

La question se pose enfin de savoir si l'on accepte vraiment cette idée de totale dévolution du problème et ses conséquences ; c'est-à-dire, les actions mathématiques qu'on laisse faire ou non aux élèves : ils peuvent parfois nous emmener sur un terrain mouvant, où l'on n'aurait pas forcément pensé aller *a priori*…

Références

Charrière, G. et al. (1991). *Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique,* Département de l'instruction publique, Genève.

Chastellain, M. (2002). *Mathématiques sixième année. Méthodologie – commentaire, Livre et Fichier de l'élève.* COROME, Neuchâtel.

Del Notaro, C. (2010). *Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité.* Thèse de doctorat, Genève. http://archive-ouverte.unige.ch/unige:11825