UNE SITUATION-PROBLEME MOTIVANTE AUTOUR DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Salek OUAILAL, Noura BOUSSAA, Naceur ACHTAICH

Laboratoire d'Analyse, Modélisation et Simulation ; Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca (Maroc)

INTRODUCTION

« Logarithme et Exponentielle mangent au resto… Qui règle l'addition ? Exponentielle, car Logarithme ne-paie-rien (népérien) ». Cette blague a été évoquée par un professeur stagiaire de mathématiques au lycée, lors de son introduction du chapitre de la fonction exponentielle. Interrogé à ce propos, dans une séance de régulation tenue à notre centre de formation[1], il a répondu : « à cette époque 'morte' de l'année scolaire, la motivation observée au début a tendance à diminuer ; alors on cherche des stimulants pour animer la classe ». Ce constat, partagé par la plupart des enseignants expérimentés, nécessite à notre avis une discussion sérieuse pour combattre la routine que revêt l'opération d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

En général, la motivation pour le travail scolaire baisse à l'adolescence (Gurtner et al, 2006). Néanmoins, vu la diversité des facteurs influençant sa dynamique (groupe de classe, environnement scolaire, famille, approches pédagogiques, société, …), nous allons préciser le cadre théorique pour inscrire notre contribution dans un dispositif d'apprentissage, que nous nommons *situation-problème motivante*. Plus précisément, nous retenons la théorie de l'autodétermination, selon laquelle l'apprenant est censé désirer être actif (Decy & Ryan, 2002). Pour autant, pour encourager le passage à l'action par différentes approches, que ce soit psychologique, sociologique ou anthropologique, la littérature soutient qu'il faut dépasser les débats sur l'importance attribuée à un facteur ou à un autre de la problématique de la motivation (Bourgeois, 2006 ; Vallerand & Thill, 1993). Nous avons déjà essayé d'exhiber quelques émergences du rôle didactique de certains de ces facteurs dans des situations particulières à savoir la *situation-problème historique* (Ouailal, 2015) et la *situation-problème étonnante* (Ouailal Achtaich, 2017). Notre objectif, ici, à travers des tâches d'apprentissage, est de présenter des outils mathématiques d'une manière non habituelle et ludique dans le but d'incarner un nouveau sentiment positif envers les mathématiques chez les lycéens. L'expérimentation que nous avons menée traite le thème de la fonction exponentielle et permet de discuter et d'analyser les impressions des apprenants qui ont compris nos suggestions.

VOULOIR AU LIEU DE FALLOIR FAIRE DES MATHÉMATIQUES : LA THÉORIE DE L'AUTO-DÉTERMINATION

La définition de la motivation que nous adoptons s'appuie sur une approche socio-cognitive et est proposée par Pintrich et Schunk (2002) comme « un processus qui suscite une action dirigée vers un but ». Dans cette ligne, la théorie de l'auto-détermination fait le point sur la dynamique motivationnelle responsable de l'engagement ou non de l'individu dans une activité[2]. Un de ses principes est que chaque être humain a une tendance innée à chercher continuellement le

[1] Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation où les professeurs stagiaires suivent une année de qualification dont ils bénéficient de 12 semaines d'étude théorique et 14 semaines de pratique.

[2] Nous entendons par "activité", une situation de recherche pour la classe.

développement de son potentiel humain. Cette théorie subdivise la motivation en d'autres types selon un continuum plutôt qu'une dichotomie. Plus les motifs d'une activité sont internalisés, plus les comportements de l'individu sont autodéterminés. La non-autodétermination est située à l'extrémité gauche d'un segment (voir la fig. 1).

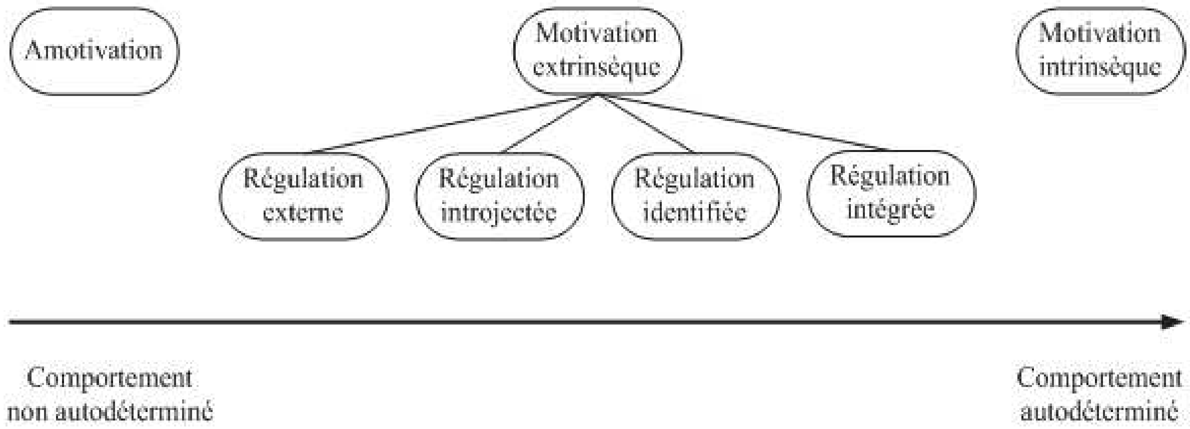

Fig. 1 : Le continuum de la motivation selon la théorie de l'autodétermination de Deci et Ryan (1985, 2000).

CARACTÉRISTIQUES D'UNE SITUATION-PROBLÈME MOTIVANTE (SPM) ET MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE

Afin de motiver un apprenant de façon intrinsèque, nous mettons en place une stratégie d'apprentissage, qui maximise la persévérance de l'élève adolescent dans l'apprentissage des mathématiques. On appellera cette stratégie la situation-problème motivante (SPM). Précisons d'emblée que qu'une SPM, doit être proposée en fin d'apprentissage à la différence de la situation-problème au sens de Brousseau (1998) qui s'utilise au début de l'apprentissage.

Les caractéristiques de la SPM

Une situation-problème motivante devrait :

- être liée à une notion mathématique précise ;
- correspondre à trois situations : une première déclenchante se basant sur un phénomène observable, amusant ou créatif qui participe à l'exploitation de la notion mathématique abordée. Une deuxième auxiliaire qui ne détient pas de difficultés dans les consignes, qui fait émerger des liens possibles entre langue naturelle et symbolisation mathématique et/ou sur l'utilisation des outils de la logique propositionnelle. Enfin, une troisième qui donne des éléments de réponse à la situation déclenchante ;
- être ouverte sur plusieurs méthodes de résolution y compris le changement de cadres (Douady, 1986), et ce, pour donner plus de contrôlabilité à la tâche d'apprentissage.

Modalités de mise en œuvre de la SPM

Nous suggérons que la SPM soit mise en action dans une séance complémentaire, tout en profitant du travail en petits groupes, situation dans laquelle l'adolescent est en test de compétences avec autrui. Ainsi, l'enseignant devrait :

- Etre attentif à son langage : les expressions de respect et de confiance sont recommandées, car l'adolescent est sensible aux paroles des adultes ;

- Proposer, au début de la séance, un tirage au sort pour constituer des petits groupes. Chaque groupe crée une charte du travail (donner des noms aux groupes, préciser l'élève qui va exposer les processus et les dialogues de son groupe, …) ;
- Introduire l'émergence historique des outils mathématiques : ceci va permettre aux élèves de réaliser que « les mathématiques » sont un produit qui a nécessité des siècles de recherches et que les mathématiciens ont rencontré des obstacles et des controverses pendant leurs recherches.

Énoncé de la SPM

L'enseignant distribue la situation suivante :

Partie 1 : Un défi amusant... Peut-on rouler avec une bicyclette à pneus carrés ?

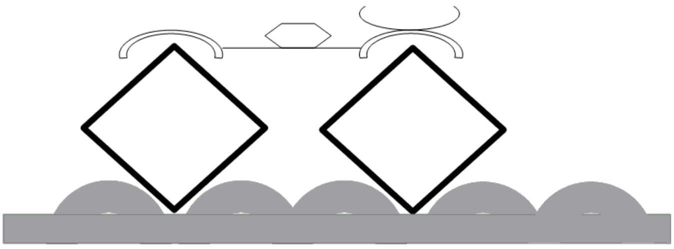

Fig. 2 : La bicyclette à pneus carrés

Le but de cette activité est d'étudier une fonction générée à partir de la fonction exponentielle, d'exploiter son graphique pour favoriser une modélisation de la courbe sur laquelle on peut dérouler un carré. Pour faire vivre le défi annoncé ci-dessus, on propose à la fin une séquence vidéo mettant en scène sa réalisation concrète.

Partie 2 : Le graphique ci-dessous est la courbe représentant une fonction numérique définie sur l'ensemble des réels dans un repère orthonormé :

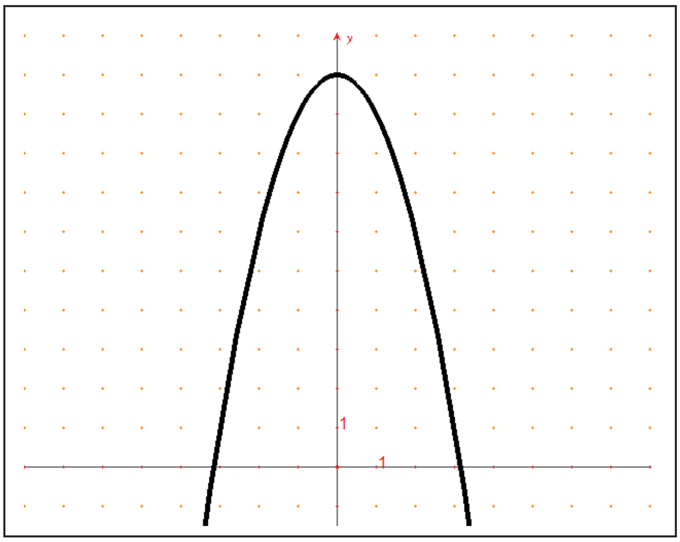

Fig. 3 : La fonction à étudier

1. Que dites-vous de la continuité et la monotonie de cette fonction ?
2. La fonction proposée admet-elle une fonction réciproque sur l'ensemble des réels ou seulement sur une partie ?

3. Calculez les images par la fonction réciproque – si elle existe – des points d'abscisse zéro, deux, moins un et moins trois.

Partie 3 : On considère la fonction numérique définie sur ℝ par : $b(x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$.

1. Étudiez la fonction numérique b sur son ensemble de définition, puis représentez sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Soit f la restriction de la fonction b sur [0;1000000], montrez que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à préciser.
3. Complétez le tableau suivant :

	La fonction f	La fonction réciproque
Ensemble de définition		
La continuité		
La monotonie		
Les tangentes		
Les asymptotes		

4. En déduire la représentation graphique de la fonction réciproquef^{-1}.

DÉROULEMENT PROPOSÉ

La première partie est composée d'une seule question qui a un sens concret pour les élèves. La discussion de la réponse pourrait se faire d'abord dans chaque groupe, puis par interaction entre les groupes. Dans ce cas, la technique du brainstorming est suggérée dans le but de faire émerger des idées originales. L'enseignant garde la solution jusqu'à la fin de la séance. Le but est d'une part, de sortir de la routine de la classe, d'autre part, de garder l'attention des élèves tout au long de l'activité car chacun d'eux va se forcer à s'engager cognitivement pour déchiffrer le défi.

Dans la deuxième partie, on a proposé un « simple » graphique (la parabole) fort connu par les élèves du lycée. En outre, comme ils peuvent aisément aborder les questions posées dans cette partie, l'objectif est de donner un sentiment de contrôlabilité de l'exercice. Le texte ne contient aucun signe mathématique, on s'est contenté d'utiliser un énoncé avec un langage naturel pour inviter l'apprenant à réfléchir sur la signification et l'utilisation de la symbolisation mathématique, et aussi sur le registre de représentation au sens de Duval (1993).

La troisième partie, est un sujet sur lequel les élèves n'ont pas l'habitude de travailler : remplir un tableau, utiliser la notation d'une fonction par la lettre b au lieu de f, écrire le « grand » nombre 1000000 au lieu de +∞. L'objectif est double, d'une part, offrir aux élèves des opportunités pour développer une pensée formaliste, initiant la transition vers la mathématique formelle du supérieur (Corriveau et Tanguay, 2006 ; Sackur et al, 2005) et, d'autre part insister sur les outils graphiques nécessaires pour construire le graphique d'une fonction numérique, le travail dans le cadre graphique étant peu traité en classe.

L'enseignant peut demander aux élèves de tracer, via un logiciel de géométrie dynamique, les deux graphiques des fonctions b et $x \mapsto x^2 + 1$ dans un même repère. Ces derniers ont tendance à avoir la même allure (cf. fig. 4), ce qui devrait permettre à l'apprenant de visualiser la convexité sous-jacente. Dans ce contexte, une variable didactique intéressante consiste à changer les valeurs de la constante C dans l'expression de la fonction B(x)=$\frac{e^{-Cx}+e^{CX}}{2}$, qui est responsable de la convexité du graphique.

Par ailleurs, l'anecdote historique sur l'étude des courbes « chaînettes[3]» peut être racontée, vu que les élèves peuvent voir des chaînettes réelles dans leur vie courante (ponts, arches, fils de téléphérique…). Pourtant c'est la clé du défi énoncé au début de notre situation-problème motivante !

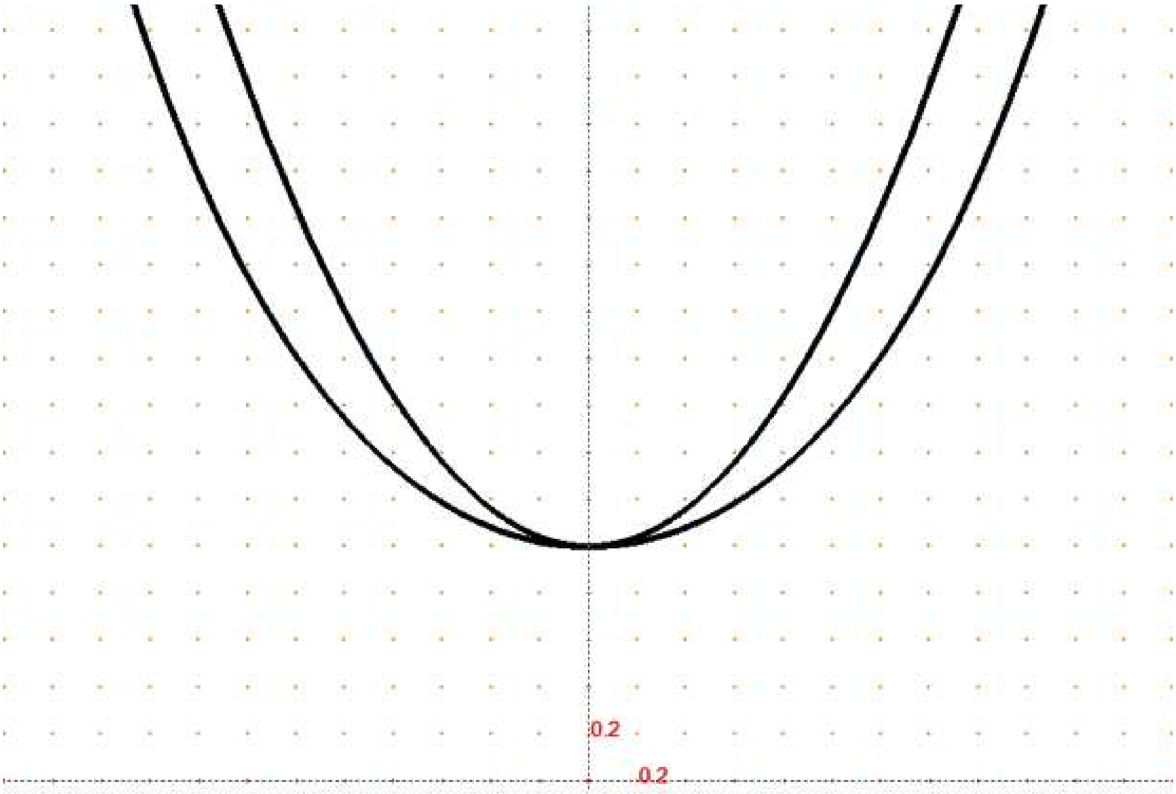

Fig. 4 : Graphiques des deux fonctions : x$\mapsto \frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$ et $x \longmapsto x^2+1$

EXPÉRIMENTATION DIDACTIQUE DE LA SPM

Le déroulement de l'expérimentation est programmé l'après-midi d'un mercredi, dans une séance complémentaire de mathématiques, obligatoire pour les élèves. Nous l'avons menée avec quinze classes. Chacune des classes comporte 35 élèves environ et est sous la responsabilité de deux professeurs stagiaires. Au total l'effectif est de 525 élèves de la dernière année du lycée, série scientifique. L'expérimentation s'est déroulée entre le mois de mars et le mois d'avril, selon le retard ou l'avance de chaque établissement dans le chapitre « La fonction exponentielle népérienne », cette période de l'année étant généralement caractérisée par le fait que les professeurs travaillent avec un rythme accéléré pour finir le programme. Dans une routine stressante, une partie des élèves se contente « d'avaler » les notions mathématiques.

LE TRAVAIL DES ÉLÈVES

D'un point de vue méthodologique, les séances sont retranscrites. Au début une feuille contenant les parties 1 et 2 de notre SPM[4], est distribuée aux élèves. Au bout de 5 minutes de réflexion, il y a des réactions à la situation déclenchante (partie 1), dont on présente quelques extraits ci-dessous.

[3] La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible, mince, homogène, inextensible, suspendu entre deux points, placé dans un champ de pesanteur uniforme ; Galilée pensait que c'était un arc de parabole, mais Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens ont montré en 1691, indépendamment, qu'il n'en était rien. (Voir www.mathcurve.com/courbes2d/chainette/chainette consulté le 12 juillet 2017)

- Pourquoi ne pas prendre des pneus triangulaires c'est plus économique !
- Pourquoi ne pas penser aux segments… les roues en forme de ski !
- Pourquoi ne pas penser à des véhicules et de coup prendre des roues carrées pour les moteurs rapides et des roues pentagonales pour des moteurs puissants …
- Qu'on est-il pour la stabilité du conducteur ? Les moyeux sont-ils à hauteur constante du sol ?

Ensuite, l'enseignant conclut avec les élèves la partie 1 en présentant une vidéo où l'expérience a été effectivement réalisée, puis il essaye d'orienter les discussions en se focalisant sur les propriétés de la fonction numérique, dont la parité qui est rapidement décelée. Un élève déclare que le parcours de la bicyclette est formé des demi cercles, la question discutée est alors : le cercle est-il le graphique d'une fonction numérique ?

Dans une deuxième séquence, chaque élève travaille individuellement pendant 12 minutes, Nous avons repéré en particulier dans leurs réponses les deux productions suivantes :

- Les courbes de la fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice… Mais quand je fais le dessin je trouve une courbe qui ne représente pas une fonction du fait qu'un point dispose de deux images ! c'est ce qu'on vu dans la première partie... Je pense que la fonction proposée n'admet pas de fonction réciproque !
- Du fait que les mesures sont positives… pour parler d'une fonction réciproque je pense qu'il faut se limiter à un intervalle positif !

Pour une troisième séquence, les élèves travaillent individuellement pour faire le tour des questions. Au bout de 5 minutes, ils se réunissent pour discuter puis écrire les réponses sur la feuille du groupe et doivent décider entre eux celui qui va expliciter à la classe leurs façons de répondre. Nous présentons ci-dessous une procédure mise en œuvre par un groupe autour du tracé du graphique de la fonction réciproque.

- Les éléments graphiques de la fonction réciproque b^{-1} sont facilement déduits de ceux de la fonction b en substituant y par x. Ainsi, l'équation de la tangente au point 0 est la droite horizontale $y = 1$ donc la tangente à b^{-1}est bien la droite verticale $x = 1$. On a aussi que (C_b) présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) au voisinage de +□ ($\lim b(x) = \infty$ et $\lim b(x)/x = 0$), donc $(C_{b^{-1}})$ admet l'axe (Oy) comme branche parabolique au voisinage de $+\infty$ ($\lim b^{-1}(x) = \infty$ et $\lim b^{-1}(x)/x = 0$).

LA MOTIVATION DES ÉLÈVES

Dans la section qui suit, nous revenons sur le retour de l'expérimentation et sa relation avec le cadre théorique adopté, à savoir la théorie de l'auto-détermination et l'approche socio-cognitive de la motivation. La grande surprise c'est que plus de la moitié des élèves (62%) a dit : « c'est tard » dans le sens que ces élèves font preuve d'un engagement autodéterminant pour travailler les mathématiques, mais le fait qu'il ne reste pas suffisamment de temps avant l'examen standardisé les renvoie à rentrer dans la routine habituelle de la préparation classique. Nous proposons de dresser le tableau ci-dessous, reliant les interprétations des séquences de l'expérience avec notre cadre théorique.

[4] Les exemples présentés sont des productions d'élèves relatives à chaque partie de la situation proposée.

<table>
<tr><th colspan="2">Indicateurs / facteurs de la motivation</th><th>Indices vus dans l'expérience</th></tr>
<tr><td colspan="2">Amotivation / Choix</td><td>Certains élèves démotivés (7%) cherchent des stratégies d'évitement de la tâche d'apprentissage, ce comportement se manifeste par les déclarations suivantes :
« Monsieur, je peux sortir...? »
« Monsieur, on n'a pas été prévus pour cette activité ! »</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Motivation extrinsèque</td><td>Régulation introjectée / perception de l'adulte</td><td>Une partie des élèves (20%) ont participé à l'activité car leur professeur de classe leur a suggéré d'être présents, ces élèves ont une relation de confiance forte avec le professeur qui les a convaincus de l'intérêt de l'activité.</td></tr>
<tr><td>Régulation identifiée</td><td>Les élèves adhérents au club de mathématiques (8%) étaient parmi les premiers à venir à l'établissement, ils ont collaboré à faire circuler l'annonce de l'activité au lycée.
Les élèves en difficulté d'apprentissage des mathématiques (12%) ont volontairement participé, parce qu'ils ont cru qu'il s'agissait d'une séance de soutien.</td></tr>
<tr><td>Régulation intégrée</td><td>Des élèves sérieux (5%) qui veulent avoir un bon classement pour intégrer une grande école.
Des élèves (20%) veulent éviter une sanction de la part du professeur ou de l'administration.</td></tr>
<tr><td>Motivation intrinsèque</td><td>Perception de valeur</td><td>Un rapporteur d'un groupe a déclaré « Ma fonction préférée est la fonction exponentielle car elle possède des propriétés étonnantes : elle est définie sur tout IR, positive, continue, dérivable sa dérivée est elle-même, elle est facile à manipuler en calcul algébrique en utilisant les propriétés des puissances... »</td></tr>
<tr><td>Autodétermination</td><td colspan="2">Voici quelques déclarations des élèves à la fin de l'activité : «J'ai éprouvé du plaisir à découvrir en un après-midi le secret d'un problème historique » ; « Je suis heureux de développer mes compétences sur plusieurs points d'Analyse ».
Un élève a proposé d'exposer le programme Maple présentant une bicyclette à pneus carrés roulant sur une trajectoire en forme de « chaînette ».</td></tr>
</table>

CONCLUSION

Au regard des résultats issus des expériences faites nous pouvons nous rendre compte que, tout au long de l'année scolaire, il y a des moments pour installer une *situation problème motivante* dans le but de motiver des lycéens en mathématiques, et ce avant qu'il ne soit trop tard !

Un facteur important pour susciter la motivation scolaire dans la classe de mathématiques est le professeur, qui devrait connaître les fondements de la motivation pour choisir des critères convenables afin de faire vivre un projet pédagogique personnel motivant à sa classe.

Enfin, notre objectif dans ce travail est de convaincre l'enseignant que la motivation scolaire n'est pas une condition préliminaire pour l'action d'apprentissage. Mais que c'est à lui de chercher à tisser des liens entre les notions mathématiques et les facteurs de la motivation scolaire. Et comme le disait Rousseau en 1762 : "*Donnez à l'enfant la motivation à apprendre et toute méthode lui sera bonne* !"

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Bourgeois, E. (2006). La motivation à apprendre. In E. Bourgeois & G. Chapelle (Eds.). *Apprendre et faire apprendre.* (pp. 229-244). Paris : P.U.F.

Corriveau, C. & Tanguay, D. (2006). Arrimage secondaire-collégial, formalisme et démonstration. à paraître dans les *Actes du 49e Congrès de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ), Université de Sherbrooke.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2002). *Handbook of self-determination research*. Rochester: University of Rochester Press.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.

Duval, R. (1993) Registres de représentation et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et des sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Gurtner, J.-P., Gulfi, A., Monnard, I. & Schumacher, J. (2006). Est-il possible de prédire l'évolution de la motivation pour le travail scolaire de l'enfance à l'adolescence ? *Revue française de pédagogie, 155,* 21-33.

Ouailal, S. (2015). L'origine des nombres complexes. Une situation-problème pour motiver l'apprentissage. *Petit x*, *99*, 57-76.

Ouailal, S. & Achtaich, N. (2017). L'étonnement face à l'erreur scolaire. Une situation problème étonnante : Résolution des inéquations. *Revue de Mathématiques pour l'école, 227*, 20-28.

Pintrich, P. R. & Schunk, H. (2002). *Motivation in education. Theory, research, and applications.* New Jersey: Merill Prentice Hall.

Rousseau, J.-J. (1762). *Emile ou de l'éducation*, volume 4, tome premier, Collection complète des œuvres, Genève, 1780-1789, Récupéré du site de l'ouvrage : https://www.rousseauonline.ch/Text/volume-4-emile-ou-de-l-education-tome-premier.php

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *25*(1), 57-90.

Vallerand, R. J. & Thill, E. E. (1993). *Introduction au concept de motivation*. Laval : Editions Etudes Vivantes.