Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-géométrique » ?

Marie-Hélène Salin

Maître de conférences honoraire
Université de Bordeaux

Les standards nationaux de la formation adoptés par la CDIP[1] distinguent un domaine de compétences « Espace » (s'orienter, utiliser des plans, etc.) et un autre appelé « Géométrie » (propriétés géométriques, figures planes, etc.)

Le module MSN 21 du plan d'études romand, destiné aux élèves entre 8 et 12 ans, a pour titre : « Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace ». Les attentes fondamentales pour ce cycle y sont précisées ainsi que les champs auxquels s'applique la résolution de problèmes. Une remarque apparaît en conclusion :

> *« Veiller à proposer des problèmes de géométrie et de repérage dans différents espaces, non seulement dans le « micro-espace » mais aussi dans le « méso-espace » voire dans le « macro-espace » »*

Les observations dont il est rendu compte dans la suite de cet article peuvent éclairer cette dernière remarque et ouvrent un questionnement sur la « qualité » des apprentissages géométriques quand ils sont limités à la résolution de problèmes dans la feuille de papier.

L'adaptation a des élèves de 11 ans d'un problème de « la vie courante »

Supposez que vous ayez à transporter un très lourd tapis de gymnastique rectangulaire à l'autre bout d'un gymnase, dans un espace très limité, que vous ne puissiez pas agrandir et dont vous n'êtes pas sûr qu'il puisse être suffisant pour contenir le tapis :

- si l'effort physique ne vous fait pas peur, vous pouvez faire un essai,
- une autre sorte d'essai, un peu plus élaboré, consisterait à confectionner un gabarit du tapis dans des feuilles de journaux, par collage et découpage,
- si par contre, vous préférez réfléchir avant d'agir, vous allez vous munir d'un mètre pliant, d'une équerre ou de quelque chose en tenant lieu, prendre les dimensions du tapis, et soit dessiner un futur contour soit marquer seulement l'endroit où les sommets du rectangle seront placés.

Pour savoir dans quelle mesure des élèves étaient capables de réinvestir des connaissances sur le rectangle semblant bien maîtrisées dans l'espace graphique, nous[2] avons transformé ce problème spatial et nous avons réalisé des observations individuelles de 38 élèves scolarisés en France en CM2[3] (7è HarmoS).

Un tapis de sol (rectangulaire) de 1,5 m sur 90 cm environ est posé à plat sur le sol à un bout de la pièce (description image 1) ; l'expérimentateur (E) propose à l'élève de prévoir (et de marquer par des pastilles) les endroits précis où se placeront les quatre « coins » du tapis lorsqu'on le déplacera à l'autre bout de la pièce (en rendant impossible une position où un côté serait parallèle au mur ou au mobilier).

Voici la consigne précise :

> *« Regarde, j'ai mis 4 pastilles, sous le tapis, une à chaque coin du tapis. »*

Puis E amène l'élève près de la zone déjà dessinée et dit :

> *« Maintenant viens voir ce que je vais te demander : tout à l'heure, nous allons déplacer le tapis ici. J'ai déjà posé une pastille, tu vas poser les 3 autres, mais pas dans le même ordre que moi : il faut d'abord poser les pastilles, ensuite le tapis. Et il faut qu'une deuxième pastille soit dans la zone que j'ai dessinée. Sur la table, ici, tu as des instruments que tu*

1 *Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique.*

2 *Le « nous » désigne l'équipe formée avec R. Berthelot pour mener nos recherches sur l'enseignement de la géométrie et de l'espace.*

3 *Élèves de 10-11 ans.*

peux utiliser si tu penses en avoir besoin. Quand tu auras fini, comment allons-nous vérifier que c'est réussi ? ».

La vérification se fait en déplaçant le tapis sur la position prévue. Les élèves disposent des instruments usuels de géométrie utilisés au tableau par le maître, de craies, de mètres déroulants. Après vérification, un deuxième essai est proposé.

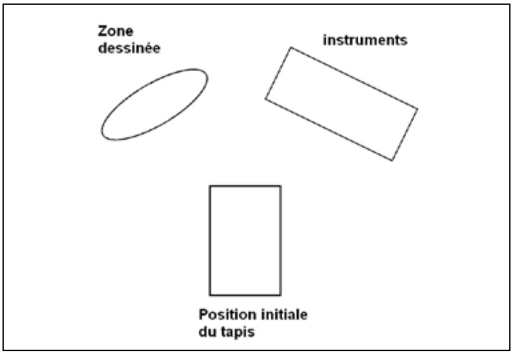

Image 1

C'est la contrainte (artificielle ici) de ne pas déplacer le tapis qui oblige à analyser la figure formée par le tapis et à recourir à ses propriétés géométriques pour pouvoir anticiper la position du tapis après déplacement.

Comment qualifier la tâche « prévoir la position du tapis ? »

Est-ce un problème de géométrie que les élèves ont à résoudre ?

Non, si on s'en tient à une définition stricte du mot « géométrie », celle à laquelle on veut introduire les élèves dans le cycle 3[4] : les situations de géométrie mettent un sujet « mathématicien » en interaction avec un milieu qui n'est pas l'espace physique et ses objets, mais un espace conceptualisé, que les figures matérielles[5] tracées par ce sujet ne font que représenter. La validité des déclarations n'est pas établie empiriquement, mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique.

Ici la validation de la solution est matérielle, il n'y a pas de démonstration à faire, il y a « seulement » à savoir mobiliser des connaissances de base sur le rectangle pour pouvoir les transférer dans une situation concrète. Ce n'est donc pas un problème de géométrie au sens strict. Il y a bien un problème pourtant, qu'on peut qualifier de problème spatial puisque la solution met en interaction le sujet avec l'espace sensible et que la validation de la solution est elle-même spatiale. Et il y a intervention de connaissances géométriques pour une résolution experte du problème. C'est pourquoi nous proposons de le qualifier de « spatio-géométrique »

Précisons de manière plus générale les caractéristiques des problèmes spatiaux :

- leur finalité concerne l'espace sensible ;

- ils peuvent porter sur la réalisation, soit d'actions (fabriquer, se déplacer, déplacer, dessiner, etc.), soit de communications à propos d'actions ou de constats ;

- le langage et les représentations spatiales permettent de communiquer des informations qui se substituent à la perception ;

- la réussite ou l'échec est déterminée par le sujet en comparant le résultat attendu avec le résultat obtenu.

Nous rencontrons une multiplicité de problèmes spatiaux au cours de notre vie, que nous résolvons avec des moyens plus ou moins élaborés, moyens acquis au fur et à mesure de notre développement et des apprentissages réalisés dans la famille, à l'école ou dans la pratique professionnelle. La maîtrise de l'espace, c'est à dire la possibilité d'un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l'espace sensible est facilitée s'il dispose des connaissances géométriques qui s'appliquent au problème qu'il a à résoudre. Dans la plupart des professions portant sur des situations spatiales pour lesquelles il faut anticiper des décisions, la modélisation géométrique constitue un instrument professionnel important.

Différents types de problèmes spatiaux

Selon la taille de l'espace dans lequel ils sont posés, la résolution des problèmes spatiaux usuels suppose des connaissances plus ou moins élaborées. Le micro-espace,

4 Cycle 3 élèves de 12 à 15 ans ans.

5 Voir dans l'article de Perrin et Godin dans ce même numéro la note 5.

un espace où les rapports spatiaux correspondent à la manipulation familière des petits objets, est associé à un domaine si familier au sujet que la plupart des problèmes qu'il y rencontre ne nécessitent pas de conceptualisation. Une action dirigée par les sens sur des objets qui demeurent sous le contrôle de la vue et de la préhension permet en effet de résoudre tous les problèmes courants d'identification, de déplacement, d'assemblage.

Résultats observés sur la situation du tapis proposée à 38 élèves

Concernant la réalisation effective

Lors du premier essai, deux élèves seulement ne pensent pas à mesurer ; presque tous prennent les mesures des (4 ou 2) côtés, placent deux pastilles, et ajustent les deux autres par tâtonnement pour que les trois distances restantes correspondent aux longueurs. Sept élèves seulement contrôlent un angle droit entre les deux directions déterminées par trois pastilles consécutives.

Les élèves constatent donc un échec massif à la réalisation, lorsqu'on tente de placer les coins du tapis sur les marques faites au sol.Trente et un constatent le décalage, mais vingt l'imputent aux longueurs et ne savent pas comment le corriger (six d'entre eux essaient en vain de le faire à partir de la longueur des diagonales).

Moins de 50% des élèves sont donc capables soit de réussir directement en utilisant une équerre, soit d'interpréter leur échec en repérant le problème de l'angle droit entre les directions choisies pour les repérages.

A la fin de l'entretien, interrogés sur la forme du tapis, tous savent pourtant que c'est un rectangle.

Les difficultés à s'exprimer sur les causes de non-réussite

A la vue du décalage, deux réactions des élèves sont très fréquentes :

« *Je n'ai pas bien mesuré* » (pour placer les pastilles). Une rapide vérification leur montre que les longueurs de côté conviennent.

« *Ce n'est pas droit* ». Mais l'ambiguïté du terme « *droit* » est énorme, certains élèves confondent l'angle droit, les côtés droits et « *ce n'est pas droit* » car penché par rapport à l'environnement des murs.

Les nouveaux essais

Au cours du deuxième essai, certains élèves « découvrent » qu'il faut contrôler la direction de l'équerre, soit par visée, soit en ayant recours au support d'une règle.

Quelques réactions possibles

La plus simpliste serait l'affirmation : « *Ils n'ont rien appris ou si peu* ». Pourtant, presque tous ces élèves savent terminer le dessin d'un rectangle dont un angle est déjà tracé en biais par rapport aux côtés de la feuille en utilisant leur équerre à bon escient, avec une précision de moins d'1mm sur les longueurs des côtés. Et tous savent qu'un rectangle a 4 angles droits.

Une analyse plus réaliste consiste à dire : « *ils ne sont pas en mesure de mobiliser leurs connaissances dans cette situation précise* ». En effet, mais quelles sont donc les connaissances qu'il faut pouvoir mobiliser pour réussir ? Répondre à cette question demande une analyse plus détaillée de la situation des élèves interrogés.

Analyse de la situation

Etat initial : un ensemble de 5 objets matériels : le tapis et les 4 pastilles, dans une position 1.

Etat final visé : 4 autres pastilles devant occuper la même place par rapport au tapis dans une position 2, position en partie contrainte puisque deux des pastilles doivent être placées dans une zone empêchant le repérage avec l'espace environnant.

Quelles connaissances sont nécessaires pour réussir ?

Au moment de la prise d'informations, il faut faire un raisonnement en deux étapes :

Etape 1 :

La forme est invariante par déplacement ; ce sont des positions de points qui sont visées, les distances entre ces points sont les mêmes que les longueurs des côtés du tapis, il faut donc prendre en compte les dimensions du tapis et placer les 4 pastilles en respectant ces distances entre elles.

Etape 2 : Deux raisonnements sont possibles :

1) le tapis a la forme d'un quadrilatère, or la connaissance des longueurs de côté est insuffisante pour le reproduire[6], il faut prendre en compte en plus soit un angle, soit la longueur d'une diagonale, ou bien 3 côtés et deux angles ;

2) le tapis a la forme d'un rectangle, je le sais ou je le vois ou je le vérifie, il suffira de construire un rectangle de mêmes dimensions sur le sol ou de repérer les sommets d'un rectangle de mêmes dimensions.

Le premier « raisonnement » de l'étape 2 a peu de chance d'apparaître, les élèves ne connaissent pas cette propriété, qui n'est d'ailleurs pas enseignée. On peut penser que la plupart des élèves observés qui ont réussi, ont implicitement fait le deuxième raisonnement.

Au moment du positionnement des pastilles

Plusieurs solutions sont possibles, il faut pouvoir contrôler 3 longueurs et 2 angles droits, ou les 4 longueurs et 1 angle droit.

La prise en compte des seules longueurs des côtés du tapis conduit à un placement aux sommets d'un parallélogramme. Si on ne dispose pas d'instruments adaptés, il est possible de s'en approcher par corrections successives. C'est ce que font la majorité des élèves qui arrivent assez bien à placer les pastilles aux sommets d'un parallélogramme, non tracé, respectant les distances entre les pastilles.

Avoir reconnu le rectangle et avoir l'intention de repérer ses sommets ne suffit pas aux élèves pour réussir : Pourquoi ?

Nos réponses sont plus des hypothèses que des certitudes, et devraient être étayées par davantage d'études que ce que nous avons pu faire. Deux caractères de la situation sont à prendre en compte.

Le problème posé ne demande pas de tracer le contour du tapis mais seulement de positionner les pastilles aux sommets.

De ce fait, les élèves ne « pensent » pas à tracer le rectangle. Pour un adulte avec une certaine culture mathématique, l'espace est homogène, l'existence des droites qui bordent la future position du tapis est assurée, même si elles ne sont pas tracées. Les tracer permet d'utiliser les instruments de manière presque aussi aisée que pour un tracé sur une feuille de papier. Ceci n'est pas encore conceptualisé par un élève de cet âge et les professeurs du début de l'enseignement secondaire savent le temps qu'il faut à leurs élèves pour tracer les droites supports de segments, et tracer des sur-figures. Aussi, ici, la tâche de l'élève est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît à première vue : il doit reconstruire mentalement tout le modèle géométrique : lignes joignant deux points (places des sommets), et contrôler la position relative des lignes avec des angles ; plus précisément, il faut concevoir qu'un rectangle peut être décomposé en 4 droites perpendiculaires. Ce n'est pas si simple.

Le passage de l'espace de la feuille de papier à un espace plus grand (ici le méso-espace) a deux conséquences :

D'une part, le contrôle global par la vue est difficile ; quand un élève de CM2 trace un rectangle sur une feuille de papier, soit il a appris à le faire avec une équerre, soit il y a recours quand il s'aperçoit par un contrôle visuel que le rectangle n'en a pas l'air. Ici, le contrôle visuel n'est pas suffisant pour l'alerter.

D'autre part, l'usage des instruments est modifié par la taille de l'espace de travail. Le plus souvent, la taille de la figure n'oblige pas l'élève à contrôler que son équerre est bien positionnée, puisque le côté de l'équerre est plus grand que le côté du rectangle à tracer. Ici, la plupart des élèves qui, d'emblée, prennent une équerre car elle est associée pour eux au rectangle, la positionnent à un sommet mais ne contrôlent pas que son côté est dans l'alignement de l'autre sommet. Notons toutefois que les quelques-uns qui le font dans le deuxième

6 *Rappelons que deux quadrilatères dont les côtés sont respectivement isométriques ne sont en général pas superposables.*

essai réussissent.

Trois remarques

L'enseignement usuel, en s'appuyant largement sur l'évidence perceptive, attribue implicitement un grand rôle aux représentations spontanées que les élèves ont de l'espace. Nos travaux nous ont permis de conforter l'hypothèse (Brousseau 2000) de l'existence, chez les élèves comme chez de nombreux adultes, d'une représentation spontanée hétérogène de l'espace. L'étude de ces représentations nous a permis de faire apparaître le décalage existant entre ces représentations et les notions géométriques visées. Les contraintes dues à la taille des espaces, dans lesquels se déroulent les interactions usuelles de la vie courante, structurent fortement les connaissances « naturelles » de l'espace en trois représentations : le micro-espace (qui correspond à la préhension), le méso-espace (qui correspond aux situations de déplacement dans l'espace domestique) et le macro-espace (qui correspond aux interactions avec des espaces inconnus urbains, maritimes ou ruraux). La représentation de l'espace issue de l'expérience courante extra-scolaire n'est pas homogène et est assez différente de la géométrie élémentaire. Lorsque les principales caractéristiques des rapports entre les sujets et l'espace peuvent être assimilées à celles des rapports usuels de manipulation des objets de petite taille, les élèves feraient appel à cette représentation micro-spatiale, interprétant les figures géométriques comme des objets du micro-espace, munis des propriétés (et des limitations) correspondantes. Ici, les élèves utilisent des procédures perceptives qui permettraient de réussir dans le micro-espace mais pas dans le méso-espace.

Le type de tâche présenté ci-dessus n'est pas proposé dans l'enseignement, ni primaire, ni secondaire, ni même professionnel. C'est pourtant bien à anticiper les résultats de son action que sert la géométrie pour le plus grand nombre (par exemple pour les métiers du bâtiment).

A quoi renvoie la surprise manifestée par la plupart des enseignants face à ces résultats ? Leur maîtrise du modèle fait qu'ils projettent leur connaissance de l'espace géométrique sur l'espace sensible sans difficultés, tout au moins dans des cas simples et que l'évidence de la solution les empêche de saisir tout le chemin que doit faire l'élève pour s'approprier les concepts géométriques et acquérir les compétences évoquées.

Quelques références de situations d'enseignement

Le questionnement sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire est aujourd'hui important, plusieurs équipes de recherche françaises ont publié des travaux touchant aux questions abordées ici.

1) Sur la résolution de problèmes posés dans le méso-espace, avec recours à la feuille de papier comme « laboratoire d'expérimentation graphique ». (Berthelot et Salin (2001) ; Gobert (2001) ; Maurin (2001) ; Bloch et Salin (2004)

Un exemple de cette démarche, concernant le rectangle, est donné par Maurin :

> *On propose [aux élèves] de construire un rectangle dans un espace dont la taille ne permet plus d'avoir recours à l'image mentale comme référent. Ils reviennent alors vers la feuille de papier pour interroger une figure réduite afin d'en tirer des propriétés qui puissent leur permettre de résoudre, dans l'action sur le terrain, le problème de construction posé.*

2) Sur l'élaboration de « *situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie* ». Je renvoie le lecteur à l'article de Perrin et Godin dans ce numéro.

3) L'équipe ERMEL a publié en 2006 un ouvrage présentant des « *propositions d'enseignement expérimentées privilégiant la construction des savoirs [...] à travers des situations de résolution de problèmes, la prise en compte des connaissances spatiales et géométriques des élèves, l'apprentissage progressif du vocabulaire, de l'usage des instruments, et des méthodes de validation.* »

Références

Berthelot, R., Salin, M.H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. In M.H. Salin et al. (Ed.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp.125-142). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bloch, I., Salin, M.H. (2004). Espace et géométrie : Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège, *Actes du 30ième Colloque de la COPIRELEM. (oo. 293-306)*. Avignon : IREM de Marseille.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire [Page Web]. Accès : /http://guy-brousseau.com/155/les-proprietes-didactiques-de-la-geometrie-elementaire/

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes,* Hatier.

Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse, Université Paris 7.

Maurin, C. (2001). La feuille de papier comme laboratoire d'expérimentation graphique In Commission interirem premier cycle et Commission Permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire (COPIRELEM), *Articulation école–collège : des activités géométriques,* IREM : Paris 7.

Perrin, M. J. & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole,* 222, 26-36.

Le problème des sept ponts de Königsberg (tiré de Wikipedia)

(solution dans ce numéro)

Le problème des sept ponts de Königsberg est un problème mathématique connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler, il se présente de la façon suivante :

La ville de Königsberg est construite autour de deux îles situées sur la rivière Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.