L'ESCALIER – UNE ACTIVITÉ SUR LES MULTIPLES ET DIVISEURS EN FIN DE PRIMAIRE

Lucie Passaplan et Sébastien Toninato[1]

Dans le but d'observer les stratégies usitées dans la résolution d'un problème mathématique, nous avons proposé à des élèves de 7ème Harmos, âgés de 10-11 ans, l'activité « l'escalier » qui prend place dans le domaine numérique des nombres naturels, sous le thème « multiples et diviseurs ».

Cet exercice comporte deux parties de résolution : la première définissant la longueur de l'escalier et la deuxième, comportant plusieurs items, décline différentes façons de gravir ledit escalier.

ANALYSE A PRIORI

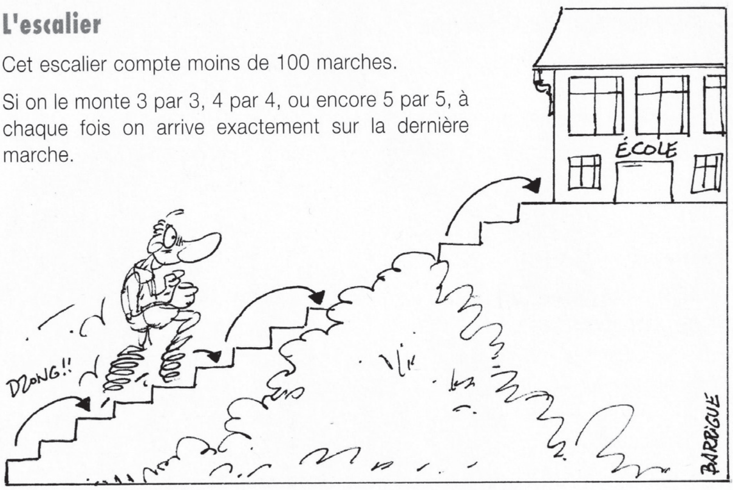
Connaissances pré-requises

Les connaissances en jeu pour la réalisation de cette activité touchent à l'établissement de suites numériques de multiples et à leur utilisation. Ainsi, afin d'être capables de résoudre ce problème, les élèves doivent connaître les livrets et savoir établir une liste de multiples. Ils peuvent également utiliser leurs connaissances des règles de divisibilité. En outre, cette activité exige aussi de leur part la compréhension du problème, l'élaboration d'une stratégie, ainsi que la communication et l'explication du résultat ; plus encore que les connaissances mathématiques mobilisées sur les multiples, elle permet de tester la recherche et la mise en œuvre d'une démarche de résolution.

11. L'escalier

Cet escalier compte moins de 100 marches.

Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche.



Arriverait-on exactement sur la dernière marche de cet escalier si on le montait :

a) en sautant 6 marches à la fois ?
b) en sautant 8 marches à la fois ?
c) en sautant 5 marches, puis 7, à nouveau 5, puis 7, et ainsi de suite ?
d) en sautant 3 marches, puis 4, à nouveau 3, puis 4, et ainsi de suite ? et en sautant d'abord 4 marches ?

1 Etudiants FEP (Formation enseignement primaire) – Université de Genève.

Description des variables didactiques et leurs effets attendus

En étudiant l'activité, nous avons pu dégager plusieurs variables didactiques :

- le nombre de marches de l'escalier : dans l'énoncé, il est spécifié que le nombre de marches est inférieur à 100. Cette variable peu élevée permet d'entreprendre une démarche additive et n'incite pas les élèves à utiliser la multiplication et la division, ni les règles de divisibilité. Le choix de limiter la grandeur de l'escalier à 100 marches restreint également le nombre d'escaliers possibles. Ici, en particulier, il n'y a qu'une seule possibilité.

- le nombre de marches à monter par enjambée : il correspond au nombre de marches enjambées à chaque pas et représente, mathématiquement, la donnée qui sert à l'établissement de la liste des multiples, ces derniers permettant, in fine, de définir le nombre de marches de l'escalier grâce à la recherche du multiple commun.

La première partie de l'exercice demande l'établissement de listes de multiples, afin de trouver un multiple commun répondant aux critères, c'est-à-dire un multiple commun à 3, 4 et 5. A noter que ces trois nombres sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun (mis à part 1). Ainsi, leur plus petit commun multiple (ppcm) est leur produit, c'est-à-dire 60, qui correspond au nombre de marches de l'escalier. Les élèves de 10 – 11 ans n'ont probablement pas les connaissances pour appréhender cette stratégie experte, qui d'ailleurs ne leur sera pas expliquée. Ils peuvent par contre travailler à partir de listes des multiples communs ; dans ce cas, le facteur 5 facilite la recherche du multiple commun, étant donné qu'il ne peut s'agir que d'un nombre se terminant par 0 ou par 5 ; aussi, comme les multiples de 4 sont toujours pairs, ils peuvent déduire que le nombre de marches d'escalier se terminera par un 0. De ce fait, le champ de la recherche se retrouve déjà bien limité et ne nécessite pas, s'ils s'y prennent bien, l'écriture complète des trois listes de multiples.

Concernant la 2ème partie, pour les items a) et b), la réponse peut être trouvée en effectuant simplement une division euclidienne, à savoir 60 : 6 et 60 : 8 ; si le reste est zéro, cela signifie qu'il est possible de gravir les marches et d'atteindre la dernière ; par contre, si le reste n'est pas nul, cela signifie qu'il n'est pas possible de parvenir à la dernière marche en montant par enjambée ce nombre de marches. Cette méthode est valable pour n'importe quelle autre valeur de la variable « nombre de marches à monter par enjambée ». Une autre façon de faire est de chercher si 60 est dans la liste des multiples de 6 (respectivement de 8) ; c'est une méthode valable, mais plus longue, plus risquée (possibilité d'erreurs dans les livrets) et moins experte.

L'item c) présente une nouvelle difficulté, puisqu'il faut effectuer une suite inégale de pas, 5 puis 7, toujours dans cet ordre. Une première approche consiste à ne considérer que la succession, c'est-à-dire l'addition, des deux enjambées. Ainsi, s'il est possible de monter l'escalier de 12 en 12 (5 + 7), et c'est le cas, la réponse est oui. Dans cette situation, n'importe quel choix de deux nombres dont la somme égale 12 (ou à tout autre diviseur de 60) peut être résolu par ce même raisonnement et l'ordre des nombres à additionner ne porte pas à conséquence.

Par contre, dans le cas où la somme des deux nombres n'est pas un diviseur de 60, comme pour l'item d), il n'est pas correct de répondre immédiatement par la négative : il faut, en effet, vérifier s'il est possible d'atteindre ou non la dernière marche avec un nombre impair d'enjambée. Par exemple, pour les valeurs 3 puis 4, la somme faisant 7, nous constatons qu'il n'est pas possible d'arriver sur la 60ème marche, car 7 n'est pas un diviseur de 60. Par contre, après huit enjambées de 3 et de 4, la 56ème marche (8 x 7 = 56)est atteinte, mais le pas suivant étant 3, ceci nous amène sur la

59ème : il ne sera donc pas possible d'arriver exactement sur la 60ème marche. En revanche, si l'enjambement est d'abord de 4 marches, après 8 enjambées de 4 et 8 enjambées de 3, la 56ème marche est atteinte et l'enjambée de 4 mène exactement sur la dernière marche.

Néanmoins, cet item peut aussi être résolu en effectuant des additions successives des termes, en respectant, comme déjà mentionné, l'ordre des enjambées ; cette stratégie est possible, car 60 est un nombre assez petit. A noter qu'au niveau des élèves interrogés, ce sera sûrement le seul moyen correct mis en œuvre.

Le fait de choisir ces valeurs (3 + 4 et 4 + 3) est très judicieux. En effet, il n'y a que peu de nombres possibles qui permettent une réponse affirmative et une réponse négative à la question avec deux diviseurs de 60. Un autre couple possible aurait été 6 et 2, mais l'écart est plus grand : 3 et 4 sont donc le meilleur choix.

- l'organisation sociale : cette tâche peut être présentée aux élèves de manière individuelle ou en groupe. Nous avons opté pour la deuxième solution, qui permet une confrontation des stratégies résultant d'un conflit cognitif des élèves du même groupe.

CONTEXTE DE L'EXPERIMENTATION

Notre expérimentation a eu lieu avec 10 élèves, séparés en trois groupes homogènes quant à leur niveau mathématique. Précisons que ce genre d'exercice avec la recherche d'un ppcm avait déjà été exercé en classe auparavant. Pendant l'observation, qui s'est déroulée dans la salle de travaux manuels libre à ce moment, et en l'absence de l'enseignante titulaire, chaque étudiant a pris en charge un groupe et recueilli des informations sur son fonctionnement. Nous avions convenu d'intervenir le moins possible durant la résolution de l'exercice. A noter que nous avons donné des pistes pour les élèves qui ne comprenaient pas l'exercice, mais sommes restés en retrait pendant leurs discussions pour ne pas biaiser leurs recherches. Nous avions informé les élèves que, faisant suite à la résolution de l'exercice, une présentation de leur travail au rétroprojecteur était prévue, suivie d'une institutionnalisation.

ANALYSE A POSTERIORI

Avant tout, nous remarquons que les trois groupes ont rapidement compris qu'il s'agissait d'un problème concernant les multiples, ceci étant en plus favorisé par la connaissance du thème (thème 5 : multiples et diviseurs).

Pour la suite, nous analysons, en premier, les sources des erreurs ; puis, nous exposons les stratégies effectives des élèves.

Observation des erreurs

Les erreurs que nous avons constatées proviennent principalement d'une mauvaise lecture de l'énoncé et plus rarement de l'utilisation de stratégies erronées. Par exemple, un groupe n'a pas identifié que le nombre de marches de l'escalier n'était pas donné : pour eux, l'escalier comptait 100 marches. Dans ce cas particulier, l'observateur n'a rien précisé de suite, espérant qu'un élève se rende compte de cette mauvaise interprétation de l'énoncé ; comme ceci n'a pas été le cas, une intervention a été nécessaire pour la bonne réalisation de la suite de la tâche. Dans le même sens, certains élèves n'ont pas écrit les multiples jusqu'à 100 ; par chance pour eux, cet oubli n'a pas eu de conséquence, puisque le nombre de marches à trouver avait déjà été listé. De plus, d'autres élèves n'ont pas remarqué immédiatement que l'item d) comprenait deux questions ; cet oubli a été réparé lors de la mise au net précédant la présentation orale. Certains élèves n'ont pas saisi que le nombre de marches devait être commun à toutes les enjambées (3, 4 et 5) et n'ont identifié que $M3 \cap M4$, $M3 \cap M5$ ou $M4 \cap M5$ Cette erreur de lecture s'est corrigée d'elle-même par la coopération active au sein du groupe.

Nous pouvons aussi signaler quelques erreurs de calcul qui n'ont pas permis aux élèves une bonne réalisation de la tâche, spécialement pour les items c) et d) qui demandaient l'addition de termes successifs.

Stratégies effectives
Pour la résolution de la 1ère partie de l'exercice, les élèves ont établi les listes de multiples de 3, 4 et 5. Ensuite, ils ont repéré les multiples communs. Seul un groupe a sélectionné, dans les multiples de 3 et 4, ceux se terminant par 5 et 0, économisant ainsi l'établissement de la liste des multiples de 5 et de fait, des erreurs possibles.

Pour la 2ème partie, nous indiquons les stratégies employées pour chaque item :

a) Ils ont écrit une liste des multiples de 6 et contrôlé si le nombre 60 était dans cette liste. Il est intéressant de noter que lors de l'écriture sur le transparent, les groupes ont proposé une justification (6x10=60) se rapprochant plus de la stratégie visée : diviser 60 par 6.

b) Tous les élèves ont établi une liste des multiples de 8 et contrôlé si le nombre de 60 était dans cette liste. Par sa justification notée 7x8=56+8=64, un groupe s'est approché de la stratégie visée : diviser 60 par 8. En effet, par ce calcul, ils ont montré que 60 n'est pas un multiple de 8. A noter que cette écriture de justification est incorrecte, mais c'est une erreur classique qui porte sur la signification du signe « = ».

c) Ils ont additionné les termes 5 + 7 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Aucun n'a pensé à additionner les deux enjambées et à résoudre cet item avec le nombre 12.

d) Ils ont additionné les termes 3+4 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Ils ont fait de même pour 4+3.

Mise en commun – présentation des groupes
Comme prévu, les groupes ont présenté leurs résultats au rétroprojecteur les uns après les autres. Il n'y a pas eu de question, étant donné qu'ils avaient tous procédé de la même manière.

Mise en commun
L'un de nous s'est chargé de la mise en commun ayant lieu devant l'ensemble des élèves.

Les stratégies de chaque groupe utilisées pour la résolution de la 1ère partie ont été validées, à savoir établir la liste des multiples de 3, 4 et 5 et définir ceux qui sont communs (en l'occurrence 60). L'étudiant a également mis en évidence l'erreur d'un groupe qui avait compris que l'escalier faisait 100 marches et souligné l'importance d'une lecture précise de l'énoncé. Il a aussi discuté du fait qu'il n'y avait pas besoin d'écrire tous les multiples ; il suffisait d'écrire les multiples de 5, qui sont les plus faciles, puis d'entourer dans cette liste les multiples de 3 et ensuite ceux de 4: cette stratégie était moins coûteuse et il y avait moins de risque de faire une erreur.

a) Pour la deuxième partie de l'exercice, l'étudiant a d'abord validé les stratégies employées par les groupes, à savoir : établir la liste des multiples de 6 et voir si 60 y apparaît. Il a également mis en avant le risque de faire des erreurs en écrivant la liste. Puis, il a demandé aux élèves s'ils pensaient nécessaire d'établir la liste des multiples jusqu'à 100. Les élèves ont répondu que non alors que, dans l'exercice, la plupart l'ont fait. Il a aussi souligné que certains groupes avaient écrit une autre justification sur leur transparent que lors de la résolution : « c'est possible, car 10x6 = 60 ». En partant de cette justification, il a alors demandé aux élèves de chercher une stratégie de résolution moins coûteuse que l'établissement de la liste de tous les multiples; mais les élèves n'y sont pas parvenus. Il a donc montré qu'en divisant le nombre de marches par la valeur des enjambées on peut savoir si c'est possible : « si on prend 60 et qu'on divise par 6, on trouve 10 et un reste de 0. Cela signifie qu'en 10 enjambées, on arrivera pile sur la dernière marche ». Les élèves ont semblé comprendre cette stratégie.

b) Après une validation des stratégies proposées, l'étudiant a amené les élèves à transférer la technique institutionnalisée en a). Ceux-ci sont parvenus à dire qu'il suffisait de diviser 60 par 8 et voir si cela donne un reste de 0 ; si c'est le cas, cela fonctionne. Il a alors effectué la division au tableau en se faisant dicter le calcul par les élèves ; le reste étant de 4, ils ont conclu que le b) n'était pas possible.

c) L'étudiant a, une nouvelle fois, validé la stratégie des élèves tout en soulignant que le risque d'erreur était élevé. Il leur a ensuite demandé comment il était possible d'utiliser la nouvelle stratégie vue en a) et b) pour cet exercice. Les élèves ont proposé de diviser par 5 et de diviser par 7 et d'observer les restes. Cette stratégie n'étant pas correcte, l'étudiant a mis en évidence que faire une enjambée de 5, puis une enjambée de 7 correspond à faire une longue enjambée de 12. Les élèves n'ont pas compris cette affirmation. Il a alors noté la liste des sauts au tableau : 5, 12, 17, 24, 29, 36, 41, 48, 53, 60. Puis, il a entouré les multiples de 12 pour montrer qu'ils étaient tous présents. Finalement, il a ramené cela à la stratégie vue pour les items a) et b) : faire des sauts de 5, puis des sauts de 7 revient à faire des sauts de 12; alors, si le reste de la division de 60 par 12 est 0, on arrive pile sur la dernière marche. La plupart des élèves n'ont pas du tout compris cette stratégie. L'étudiant a alors pris un autre exemple : « un saut de 8, puis un saut de 4, puis un nouveau saut de 8, etc. Est-ce qu'on arrive sur la dernière marche ? » Il a demandé à un élève de répondre à cette question en utilisant la stratégie qui venait d'être expliquée. Ce dernier est parvenu à trouver la réponse avec un peu d'aide de la part de ses camarades.

d) Faute de temps, cette partie de l'exercice n'a pas pu faire l'objet d'une mise en commun. Nous pensons qu'il aurait été difficile pour les élèves de comprendre la stratégie adéquate : 3+4 ou 4+3 valent 7 et vu que le reste de la division de 60 par 7 est non-nul, les élèves auraient sans doute conclu qu'il n'était pas possible d'arriver sur la dernière marche. Nous estimons qu'il aurait été intéressant de réécrire la liste des sauts et d'entourer les multiples de 7 pour montrer qu'on passait bien par ces nombres. Toutefois, la stratégie optimale, qui consiste à s'approcher de la dernière marche par une multiplication, puis à rajouter l'enjambée aurait été difficile d'accès pour ces élèves en si peu de temps. De plus, il aurait fallu soulever le fait que le nombre de la première enjambée a une influence.

Synthèse
Les élèves ont su travailler seuls pour trouver le bon raisonnement et ont employé, la plupart du temps, la stratégie de base (à savoir l'établissement des listes de multiples). L'un des groupes a même utilisé la stratégie visée pour l'item a) (c'est-à-dire la division du nombre total de marches de l'escalier par le nombre de marches enjambées à chaque saut), mais au moment de la présentation, ils ont choisi de justifier leur réponse par la stratégie de base. Ceci démontre que la stratégie visée n'était peut-être pas encore très bien acquise. Au moment de la présentation, tous étaient d'accord sur les résultats, qui avaient été validés par l'ensemble du groupe avant le report sur l'acétate. Ainsi, ils ont été capables d'expliquer leur manière de procéder. Ils se sont écoutés et ont aidé leurs camarades qui avaient des difficultés; cela montre une réelle implication des élèves dans la tâche.

Durant la mise en commun, les élèves ont eu de la peine à comprendre les stratégies expertes que l'étudiant a proposées; elles n'avaient que peu de sens pour eux, car leurs méthodes de résolution étaient déjà bien intégrées et il était difficile, à ce moment, de leur en faire accepter d'autres. De plus, leurs méthodes avaient parfaitement fonctionné et les élèves ne cernaient donc pas l'utilité d'en changer. Si nous souhaitons les forcer à mobiliser une stratégie « experte », il convient d'agir sur les valeurs des variables de cet exercice : il serait tout à fait pertinent d'augmenter le nombre de marches de l'escalier tout en gardant les mêmes sauts. Avec un escalier de 600 marches par exemple, les élèves comprendraient que l'établissement de la liste des multiples est une stratégie trop coûteuse. En effet, ils réaliseraient qu'elle demande trop de temps et seraient contraints de trouver une autre façon de faire ; c'est de cette manière que les élèves vont, peu à peu, se rapprocher d'une stratégie « experte ».

CONCLUSION

L'exercice « l'escalier » est pensé dans une certaine progression et les valeurs des différentes enjambées sont parfaitement pertinentes. Par contre, un escalier de seulement 60 marches n'oblige par les élèves à chercher, ni à mobiliser d'autres stratégies que celles qu'ils maîtrisent déjà. Il serait donc intéressant de refaire l'activité dans les mêmes conditions, mais avec un escalier plus long, afin d'observer l'émergence de nouvelles stratégies.

Problème du 17ème rallye mathématique transalpin sélectionné par Thierry Dias

JEU D'ANNIVERSAIRE (CAT. 5,6,7)

Pour son anniversaire, Corinne invite cinq amies : Amandine, Béatrice, Danielle, Émilie et Francine.

Après le repas, elles décident de former des équipes de deux pour jouer aux cartes. Mais...

- Amandine ne veut être ni avec Francine ni avec Bétrice,
- Béatrice ne veut pas faire équipe avec Émilie,
- Corinne demande de faire équipe avec Francine ou avec Béatrice,
- Danielle n'accepte de faire équipe qu'avec Béatrice ou avec Corinne,
- Francine ne s'entend qu'avec Amandine, avec Corinne et avec Danielle.

Constituez les équipes de deux joueuses respectant les volontés de chacune.
Y a-t-il une seule façon de constituer les équipes ?
Expliquez votre réponse.