Comment les activités géométriques pourraient-elles contribuer au développement de la résolution de problèmes arithmétiques ?

Lucie DeBlois, Annette Braconne-Michoux, Sylvie Tremblay

Université Laval, Université de Montréal, Université Laval

Résumé

En classe, nous avons l'habitude de proposer des activités géométriques à certains moments et des activités arithmétiques à d'autres. Rarement, nous réfléchissons à la contribution du premier domaine mathématique au deuxième. Nous avons posé une réflexion sur les difficultés des élèves en résolution de problèmes arithmétiques pour ensuite étudier l'apport des activités géométriques. En effet, certaines activités géométriques semblent particulièrement intéressantes pour familiariser les élèves à une véritable activité mathématique, activité qui pourrait être mobilisée dans la résolution de problèmes arithmétiques : raisonner à partir d'expériences immédiates, valider grâce à la rétroaction du milieu, anticiper un résultat par la création de représentations mentales, agir pour reconnaître des invariants opératoires, interpréter par la mise en place d'un vocabulaire. En somme, en nous appuyant sur des exemples issus de la recherche en didactique de la géométrie, nous étudions comment pourrait être articulée une réflexion à ce sujet.

Introduction

Il arrive de se questionner sur l'intérêt de proposer aux élèves du primaire des activités géométriques puisqu'elles reposent souvent sur des explorations et des observations. À l'instar de Casey et coll. (1992) et de Newcombe et Frick, (2010), nous formulons l'hypothèse suivante : les activités géométriques pourraient favoriser l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques par la familiarité qu'elles suscitent chez les élèves avec l'activité mathématique. Une recension des recherches effectuées auprès d'élèves d'âges variés tend à montrer que, dès les premières activités géométriques, les élèves privilégient le raisonnement (Bilinski, 2008) à la recherche de mots-repères ou à l'application d'une suite d'étapes. De tels résultats nous confortent à étudier l'apport des activités géométriques pour surmonter les obstacles répertoriés par la littérature en résolution de problèmes comme la « fausse réalité », l'absence de rétroaction du milieu ou la nature des énoncés (Tremblay, 2013).

Des expériences immédiates pour raisonner

Berté et coll. (2006) reconnaissent que les conditions dans lesquelles des élèves du secondaire se trouvent au moment de résoudre un problème sont plus importantes que le contexte évoqué dans le problème. Résoudre un problème dans la réalité ou en mathématiques n'amène pas les mêmes démarches puisque certaines contraintes sont ignorées en mathématiques. Des contenus mathématiques, bien qu'inscrits dans des situations concrètes, priveraient les élèves d'une véritable activité mathématique à cause de l'absence de réalité immédiate, ce que nous appelons « fausse réalité ». Une activité d'apparence géométrique comme calculer le périmètre d'une clôture est en fait une activité arithmétique et peut conduire les élèves à appliquer une formule sans pour autant sentir la nécessité de contrôler le résultat. En effet, les élèves ne poseront pas la clôture. En outre, poser cette clôture pourrait les inviter à privilégier d'autres procédures. Bien que la pose d'une clôture soit une activité de la vie courante, le contexte du problème donné aux élèves est fictif.

Au contraire, certaines activités géométriques peuvent contribuer à faire vivre, dès le primaire, une expérience immédiate. Par exemple, Dias (2009) et Bacher (2006) proposent des problèmes ouverts tels que la construction de polyèdres réguliers à partir de polygones réguliers. Bien que le nombre de polyèdres à trouver soit inconnu des élèves, l'activité de construction leur permet de vérifier la régularité des polyèdres. Ils ont la possibilité d'explorer des constructions irrégulières, voire impossibles. Après diverses tentatives, les élèves constatent et acceptent l'impossibilité de construire un polyèdre régulier avec certaines formes géométriques. De plus, les discussions entre pairs demandent le développement d'arguments et favorisent ainsi la formulation de raisonnements. Les élèves entrent alors dans une véritable activité mathématique au sens où leurs préoccupations portent sur les arguments servant à convaincre plutôt que sur la reproduction d'une procédure qu'elle soit de calcul ou autre. L'obstacle de la « fausse réalité » pourrait donc être contourné par le biais des expériences immédiates.

La rétroaction du milieu pour valider une solution

Lépine (1996-1997) reconnaît que tout problème ouvert ne favorise pas nécessairement chez l'élève l'élaboration d'une validation. Ainsi, devant le problème suivant « Avec un récipient de trois litres et un autre de cinq litres, comment peut-on obtenir 4 litres ? », la majorité des élèves de 14 ans d'une classe ont manifesté des difficultés à amorcer leur réflexion. Malgré l'illustration de flèches indiquant le mouvement de transvasement et le partage des idées en équipe, les élèves ont eu tendance à présenter des solutions erronées. En revanche en utilisant l'eau et les récipients, les élèves ont su éliminer les mauvaises solutions. Les effets de l'action auraient, dans ce cas, permis aux élèves de vivre une expérience de validation. Toutefois, sans l'invitation de l'intervenant, les élèves n'utilisent pas le matériel proposé.

Plusieurs activités géométriques pourraient mettre les élèves en relation avec un milieu qui les conduit à vivre l'expérience de la validation. Une activité bien connue faisant intervenir la validation par la rétroaction du milieu est le problème du puzzle de Brousseau (1981) qui consiste à réaliser l'agrandissement d'une figure carrée, découpé en différentes pièces. Au départ il s'agit d'une activité de géométrie puisque les élèves doivent construire les pièces du puzzle. Mais au cours de la validation (la reconstitution du puzzle) la tâche devient numérique : les procédures additives sont mises en défaut, seul le raisonnement proportionnel permettra de résoudre le problème.

Les activités de visualisation au cours desquelles les élèves tournent les objets, les comparent à des dessins ou à des photos peuvent aussi être valorisées par des validations par rétroaction (Lismont et Rouche, 2001). Les activités de visualisation en géométrie dans l'espace sont définies par Belkhoja (2007) comme étant la capacité de se représenter mentalement des objets, des constructions géométriques et des représentations sans support matériel. Une activité géométrique permettant une rétroaction du milieu contribue ainsi à faire vivre une véritable activité mathématique aux élèves et, éventuellement, à la prise de conscience de la place de la validation dans la résolution de problèmes.

Des représentations mentales pour anticiper un résultat

Différentes fonctions sont attribuées aux représentations mentales : faciliter la mémorisation, interpréter une information, transformer un problème.

Bien que certains élèves soient en mesure d'illustrer un énoncé, il n'est pas rare de constater que l'exploitation qu'ils font des données, et les algorithmes qu'ils utilisent, peuvent être « déconnectés » de l'énoncé du problème. Dans ce cas, on pourrait dire que la représentation qu'ils se sont donnée du problème a été inefficace.

Pour Belkhodja (2007) la géométrie est un domaine mathématique qui favorise les représentations d'objets et de concepts parce que les occasions où l'on peut faire coïncider la manipulation avec différentes représentations sont plus nombreuses que dans d'autres domaines mathématiques. Par exemple, des illustrations à partir de descriptions (écrites, orales, consignes, etc.) peuvent modéliser une formule mathématique. Ainsi, le calcul de l'aire de deux rectangles mitoyens de même largeur permet de représenter la distributivité. Les activités de manipulation d'objets concrets (rotations, développements, constructions, etc.) permettent aussi aux élèves de faire des constructions ou des tracés géométriques, accédant ainsi à de nouvelles représentations.

Selon Marchand (2006) pour qu'une activité géométrique soit source d'apprentissage, celle-ci doit demander à l'élève d'anticiper le résultat de son action avant que celle-ci ne soit menée, donc de se donner une représentation mentale statique ou dynamique de l'objet ou de la situation. Les activités géométriques pourraient ainsi contribuer à faire vivre l'expérience des représentations mentales, un enjeu important (Davis, 1997) et un support à l'anticipation comme activité mathématique des élèves.

Interpréter le sens des mots

Nous connaissons les difficultés d'interprétation des élèves devant les problèmes qui leur sont proposés en mathématiques. Rappelons la variété de sens accordés à la notion de volume chez des élèves de 10 ans : le niveau du son ou du bruit, l'aire, la longueur ou l'épaisseur d'un dictionnaire (Anonyme, 1983). En outre, les problèmes présentés dans les manuels scolaires utilisent des énoncés (des phrases), des tableaux, des dessins, autant d'éléments que les élèves doivent interpréter. Bien que les mots accompagnant les nombres dans certains énoncés donnent des indices explicites, ils peuvent poser des défis particuliers. Certains mots faisant référence à des groupements peuvent être source de difficulté pour les élèves. C'est ainsi que les mots « mûre » et « banane » sont des « fruits », laissent émerger la relation d'inclusion présente, notamment, dans les problèmes de complément d'ensembles (DeBlois, 1997b). Les expressions « de plus » et « de moins » utilisées de façon inconsistante avec l'opération à réaliser dans les problèmes de comparaison demandent aux élèves de faire intervenir la relation d'implication « si…alors… » pour faire les inférences nécessaires (DeBlois, 1997a, Giroux et Ste-Marie, 2000).

Pour Record (1983), les ambiguïtés de formulation, les temps de conjugaison (l'emploi du conditionnel et du participe présent) peuvent nuire à la compréhension d'un problème. Le passage de langage oral au langage écrit peut aussi devenir un obstacle pour certains élèves. En effet, dire « Y en a combien ? » et lire « Combien y en a-t-il ? » exige une interprétation. Enfin, l'usage de certains qualificatifs ou un excès d'informations, peuvent faire obstacle à la compréhension. Par exemple, l'expression « les chemises rouges carmin à manches blanches et cols bleu horizon » pourrait embarrasser les élèves à cause de la juxtaposition des qualificatifs. Berté et coll. (2006) ajoutent que dans les problèmes proposés par les manuels, l'élève n'a souvent qu'à suivre des directives, comme « recopie … », « complète … », « dessine … », ou à se laisser diriger vers une réponse unique par des questions stéréotypées.

L'introduction de certaines activités géométriques peut être une occasion pour que les élèves donnent un sens aux mots et développent une interprétation qui favorise la communication. Par exemple, Javelas et Rimbourg (1993) ont demandé à des élèves de 9-10 ans de décrire une maquette à l'aide d'un tableau de description. Les élèves se sont heurtés au vocabulaire descriptif des faces. Devant la nécessité de communiquer à propos des formes, des figures ou des solides et de leurs caractéristiques les élèves ont ressenti le besoin de préciser leur vocabulaire. Grâce à une analyse de la composition des préfixes et des suffixes (gone=angle, èdre=face, plan), les élèves ont pu établir des liens entre les caractéristiques des objets géométriques et la composition de leurs noms. Braconne-Michoux et Juteau (2012) reconnaissent aussi qu'il est possible de passer de la reconnaissance globale de formes à l'école maternelle à des opérations sur les fractions en faisant l'acquisition d'un vocabulaire relatif aux formes géométriques. Une pièce du Tangram étant choisie comme valeur unité, on obtient des décompositions diverses et variées de différentes figures, qui se contrôlent par superposition des pièces, en utilisant les fractions. Les aires égales d'une part, les aires différentes, multiples de l'unité choisie ou fractions de l'unité choisie, donnent un sens aux opérations sur les fractions.

Agir pour reconnaitre des invariants opératoires

Les invariants opératoires allègent l'activité cognitive des élèves et servent de tremplin à de nouvelles procédures. La recherche de DeBlois (1997b) montre qu'il est nécessaire à une élève de 8 ans de répéter l'opération d'addition lorsque l'ordre des nombres est modifié. Les propriétés des opérations sont des invariants opératoires qui sont parfois difficiles à construire pour les élèves. En effet, préoccupés par la technique qui permet de réaliser l'algorithme d'une opération, les élèves perdent le sens de leur activité mathématique.

Les premières activités géométriques dans le monde sensible (Houdement et Kuzniack, 1998-1999) permettent aux élèves de faire l'expérience de l'observation de régularités pour dégager des invariants opératoires et ce, dès la maternelle. Aubertin et coll. (2007) observent aussi l'importance de laisser libre cours aux commentaires des élèves lors des expérimentations géométriques. Par exemple, ayant à leur disposition des triangles isocèles rectangles, des élèves de 4 à 6 ans sont invités à construire des carrés en utilisant 2 pièces. En plus de découvrir que deux triangles isocèles-rectangles forment un carré, les élèves observent que deux ou plusieurs triangles peuvent former un losange ou un polygone et que tous les polygones sont composés de plusieurs triangles (mais pas nécessairement isocèles rectangles !). Les activités de ces élèves montrent qu'ils élaborent des relations logico-mathématiques. Enfin, l'expérience de Janvier (1997) avec des élèves de 15 ans montre comment, par l'anticipation et la manipulation, l'expérience du dénombrement de morceaux de sucre permet non seulement de construire un sens à la formule du volume d'un prisme droit, mais aussi de reconnaître la commutativité et l'associativité de la multiplication.

Conclusion

Cette recension de résultats des recherches sur quelques activités géométriques révèle comment elles font vivre aux élèves l'expérience de l'anticipation, de l'interprétation, de l'action, du raisonnement et de la validation. Ces expériences développent une familiarité chez les élèves à poser une réflexion, un jugement et une argumentation à partir des relations logico-mathématiques, familiarité qui pourrait être réinvestie dans la résolution de problèmes arithmétiques. De plus, les activités géométriques offrent l'opportunité de prolongements sous la forme de situations-problèmes arithmétiques. L'attention des élèves, portée sur les relations plutôt que sur les nombres et sur un ensemble de techniques à mémoriser, contribuerait alors à construire un sens différent à l'expression « faire des mathématiques ».

Références

Anonyme[1] (1983). Vous avez dit volume ?, *Grand N*, 30, 73-79.

Aubertin, J.-C., Bettinelli, B., Pedroletti, J.-C., Porcel, N. & Schubnel, Y. (2007). *De la géométrie à l'école maternelle, pourquoi pas ?*, France : Presses universitaires de Franche-Comté.

Bacher, R., Cartier, L., Grenier, D. & Schmitt, M.-J. (2006). Activité…autour des polyèdres de Platon, *Petit X*, 70, 73-79.

Belkhodja, M. (2007). *La visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école, tome 1*. Thèse de doctorat, Université Laval.

Berté, A., Chagneau, J., Desnavres, C., Lafourcade, J., Mauratille, M.-C. & Sageaux, C. (2006). Engager les élèves dans une réelle activité mathématique, Un exemple : le cercle circonscrit en 5e, *Petit X*, 70, 7-29.

Bilinski, R. (2008). Mathématique en mouvement en 1re année primaire. *Bulletin de l'AMQ*, 48 (1), 35-40.

Braconne-Michoux, A. & Juteau, M.-A. (2012). Des mathématiques au primaire. *Bulletin AMQ*, 52 (1), 43-60.

Brousseau, G. (1981). Problèmes didactiques des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.1, 87-127.

Casey, B., Nutall, R.L. & Pezaris, E. (1992). Spatial ability as a predictor of math achievement: The importance of handedness patterns, *Neuropsychologia*, 30(1), 35-45.

DeBlois, L. (1997a). Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (1), 67-96.

DeBlois, L. (1997b). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et Francophonie*, XXV (1) [Page Web]. Ac-

1 Une recherche de cet article vous conduira à observer qu'aucun auteur n'est indiqué.

cès : http://www.acelf.ca/c/revue/pdf/EF-25-1-111_DEBLOIS.pdf

Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques un exemple avec la situation des polyèdres, *Grand N*, 83, 63-83.

Giroux, J. & Ste-Marie, A. (2000). The solution of compare problems among first-grade students. *European Journal of Psychology of Education*, 16(2), 141-161.

Houdement, C. & Kuzniack, A. (1998-1999). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N* 64, 65-78.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin AMQ*, 37 (3), 28-41.

Javelas, R. & Rimbourg, Y. (1993). Modélisation géométrique d'un cristal et cristallisation d'un modèle, *Grand N*, 53, 79-118.

Lépine, L. (1996-1997). Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, 60, 43-55.

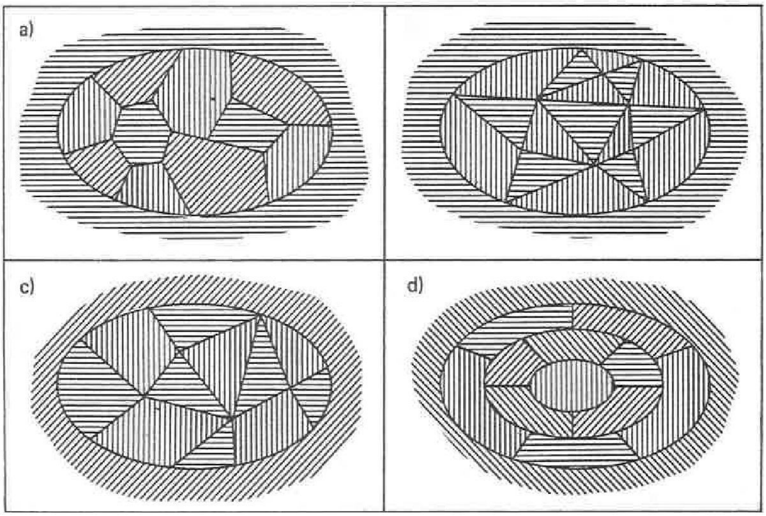
Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales reliées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 103-121.

Newcombe, N. & Frick, A. (2010). Early Education for Spatial Intelligence: Why, What, and How. *Mind, Brain and Education*, 4(3), 102-111.

Record, G. (1983). Langage et énoncés de problèmes, *Grand N*, 30, 27-42.

Tremblay, S. (2013). *Les activités géométriques pour une arithmétique plus significative*. Essai de maîtrise. Université Laval [Page Web]. Accès : http://www.bibl.ulaval.ca/doelec/essais/2014/3500-PPG6005-Sylvie_Tremblay.pdf

Solution du problème du coloriage des cartes (tiré de Burdet, 1972, Mathématique de notre temps à l'usage des enseignants)



a. 3 couleurs suffisent
b. 2 couleurs suffisent
c. 3 couleurs suffisent
d. 4 couleurs sont nécessaires