MATH ECOLE

38e année

187

7e Rallye mathématique

Néo-Darwinisme et théorie des jeux

Comment nos élèves apprennent-ils ?

mai 1999

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 25.- compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 30.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 6.-
anciens numéros : CHF 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 18.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E–mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

38e année 5 numéros par an

187

mai 99

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Innovation. Regards sur le discours promotionnel

François Jaquet, IRDP

Sous le titre «Les maths nouvelles arrivent», un article de la Tribune de Genève (01.03 99) a vraisemblablement retenu l'attention de nombreux lecteurs. L'auteure, Liliane Palandella, y présente l'état des innovations romandes dans cette discipline, où une même conception d'ensemble préside aux nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques, de la première année à la neuvième. Elle décrit ensuite le déroulement d'une activité et sa correction collective, puis elle relève les changements majeurs apportés par les nouveaux ouvrages romands, dans les attitudes de l'élève, le rôle du maître et les conceptions de l'apprentissage.

L'article, court et bien étayé, va à l'essentiel. Les termes choisis sont très positifs : on parle de jeu, de plaisir, de tâche passionnante, d'enthousiasme des maîtres, de recherche de sens, de désir de résoudre des problèmes, d'enseignement différencié adapté au développement des élèves. Nous sommes les premiers à nous réjouir de voir paraître cette présentation dans la presse romande.

Ce plaisir ne nous dispense toutefois pas de notre devoir de vigilance envers toute information sur l'innovation et nous nous permettons de livrer ici quelques considérations d'ordre général, qui ne concernent pas seulement l'article cité précédemment mais de nombreux autres discours et textes promotionnels de l'innovation.

Notre première remarque concerne le titre de l'article. Le lecteur qui apprend que «les maths nouvelles arrivent» est en droit de penser que les «nouvelles» vont remplacer les «modernes» introduites il y a une trentaine d'années qui s'étaient substituées elles-mêmes aux «classiques» ou «traditionnelles».

Et de là à se dire que nos enfants vont apprendre des choses qu'on ignore soi-même, il n'y a qu'un pas. L'article entretient d'ailleurs cette impression lorsqu'on lit que «il est vrai que les «problèmes» ne ressemblent plus guère à ceux d'autrefois».

On est ici en présence d'une confusion qu'il faut dissiper : il n'y a pas de mathématiques «nouvelles», ni «modernes», ni «classiques». Il y a une seule science, vivante, qui produit des savoirs en permanence et les intègre afin de les rendre universels. C'est important de le dire et de le répéter pour que chacun sache que son bagage mathématique, d'hier ou d'une époque plus lointaine, mais bien construit, doit lui permettre de résoudre la plupart des problèmes, ceux d'autrefois comme ceux d'aujourd'hui.

Si l'on tient absolument à parler de nouveauté, c'est à propos des conceptions de l'apprentissage qu'il faut le faire, pour autant qu'on considère le socio-constructivisme, au-delà du terme lui-même, comme une approche nouvelle pour tous.

Une deuxième remarque concerne le rapport entre les procédures de résolution d'un problème et la validation de sa solution. Nous voyons ici, non pas une confusion, mais un danger de «glissement», perceptible dans de nombreux discours sur l'innovation actuelle.

Lorsqu'il lit que «L'accent est d'abord mis sur le *comment*, sur la façon de procéder, bien avant de savoir si *c'est juste ou faux*, chacun expose ses idées et ses trouvailles. ... », le lecteur pourrait imaginer que c'est plus important d'expliquer ses idées et ses démarches que d'aboutir à la réponse juste. Il est vrai que, dans une perspective d'évaluation formative, on s'intéresse maintenant beaucoup à la phase de recherche dans la résolution d'un problème, afin de connaître les chemins empruntés par l'élève pour arriver à la réponse ainsi que les représentations qu'il se fait de la tâche. Il est vrai aussi qu'on n'enseigne plus une seule méthode de résolution pour chaque type de problèmes et qu'on accepte différentes procédures. Mais on les admet pour autant qu'elles conduisent à la bonne réponse. Car les mathématiques ont toujours pour objet la recherche d'une vérité partagée, et dans le cas particulier de la résolution de problème, l'obtention de la(les) solution(s).

L'article ne dit pas que le juste ou le faux n'ont pas d'importance, mais il donne clairement aux manières de procéder la priorité sur la solution exacte. Or cet ordre n'est que strictement temporel. La solution du problème est la finalité du processus «conjecture - essai - vérification - justification» de la démarche scientifique : c'est elle qui détermine les conjectures, c'est par rapport à elle que sont dirigés les essais, c'est le critère des vérifications, c'est l'objet des justifications ou validations. La nuance est fine, mais capitale. Plutôt que de faire passer le «comment» avant le «juste ou faux», nous proposerions une formule moins ambiguë, du genre : «il n'y a pas que la réponse qui compte, mais aussi sa justification» tout en sachant que cette dernière est souvent établie à partir de l'histoire et de la manière dont on a trouvé la solution.

En bref, on peut trouver originale, ingénieuse, créative, ... une démarche d'élève absolument inattendue, mais il ne faut pas oublier que le but est de savoir si elle conduit à la réponse juste. A trop vouloir discuter, on pourrait oublier l'essentiel. Nous sommes en cela entièrement d'accord avec Philippe Meirieu qui, dans un récent entretien[1] estime que «... sur la question du rapport au savoir, on en reste, à mon sens, trop souvent à des constats sociologiques, sans travailler sur les méthodes pédagogiques qui permettent de faire de ce rapport au savoir une recherche de la vérité. Ce que l'école doit apprendre, c'est la construction du rapport à la vérité. ...»

Notre troisième remarque se rapporte au travail d'entraînement des connaissances et outils, en calcul particulièrement.

Lorsqu'il lit, après une référence au plaisir et à l'inventivité des enfants, que «... le matériel est plein d'activités et de jeux, de suggestions, d'illustrations, au point que les élèves oublient qu'ils *font du calcul* en exerçant les tables et les nombres à travers une chasse au trésors !», le lecteur pourrait assimiler les nouveaux moyens d'enseignement à une méthode miracle du genre : «Apprenez le javanais en 15 leçons, en dormant !».

Ce serait certes merveilleux d'acquérir ses maîtrises opératoires et de mémoriser ses répertoires, sans effort et de manière inconsciente. Mais c'est utopique. On pense, actuellement, que les connaissances se *construisent*, et qu'elle ne tombent pas du ciel. Et ceci n'est pas spécifique aux mathématiques.

Les innovations dans l'enseignement des mathématiques proposent que l'élève s'engage de manière plus autonome dans la construction de ses connaissances, qu'il y trouve du sens, qu'il y prenne plus de res-

[1] In *Sciences humaines (La dynamique des savoirs)*. Hors série no 24, mars-avril 1999, pp. 41-43

ponsabilités. Mais les outils de calcul figurent toujours dans les plans d'études : les répertoires mémorisés, les algorithmes, le calcul réfléchi, même si la calculatrice, sous contrôle du calcul d'estimations, vient s'y ajouter. Et l'acquisition des savoir-faire et des maîtrises qui y sont liés est aussi un des aspects du concept de nombre, comme l'a illustré M. Mante dernièrement, à Neuchâtel[2]. Si les élèves «oublient» ces objectifs de calcul, pourront-ils consentir les efforts nécessaires pour les atteindre ? Qu'on l'appelle consolidation, renforcement, actualisation, stabilisation, un minimum d'entraînement et d'exercice reste indispensable.

En conclusion, nous aimerions répéter que nous ne remettons pas en cause l'article qui a inspiré ces quelques lignes. Nous voulions simplement rappeler que le discours de promotion d'une innovation doit se garder d'aller au-delà de ses espérances réelles. Cette règle n'est pas toujours facile à observer, surtout pour ceux qui s'engagent personnellement en faveur des conceptions sur lesquelles reposent les nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques. Nous sommes, à *Math-Ecole,* les premiers exposés à sa transgression. C'est pourquoi nous nous permettons de rappeler parfois ce devoir de vigilance. Il en va de la rigueur et de la crédibilité d'une innovation dans laquelle nous placons beaucoup d'espoirs.

[2] Voir M. Mante. *Comment nos élèvent apprennent-ils ? Qu'est-ce qui peut favoriser l'apprentissage ?* Dans ce numéro de Math-Ecole, p. 5.

Comment nos élèves apprennent-ils ? Qu'est-ce qui peut favoriser l'apprentissage ?[1]

Michel Mante, IUFM de Lyon

Voici deux questions qui sont capitales pour nous enseignants. Depuis de nombreuses années, des recherches en psychologie et en didactique essaient d'apporter des éléments de réponse. Certaines recherches sont plus centrées sur la première question qui renvoie à l'apprentissage : ce sont essentiellement des recherches en psychologie qui peuvent être séparées en deux grands courants : le courant behavioriste (cf. § 2) et le courant cognitiviste (cf. § 3).

D'autres recherches sont plus centrées sur la seconde question qui renvoie à l'enseignement : ce sont des «recherches» (et/ou innovations) pédagogiques qui ont donné en particulier naissance aux grands courants pédagogiques : pédagogie Freinet, par exemple.

Suivant la question qui est abordée et les fondements théoriques de ces recherches les réponses sont très diverses.

Nous-mêmes, enseignants, même si nous n'apportons pas de réponse explicite à ces questions, les décisions que nous prenons avant, pendant et après un cours sont fonction de réponses implicites. Il en est bien sûr de même pour les auteurs de programmes et de moyens d'enseignement.

Ici, plutôt que de nous livrer à une présentation exhaustive des réponses apportées par les différents courants de recherche nous présenterons trois types de réponses qui associent l'apprentissage et l'enseignement. Ce choix est fait en fonction de l'évolution des pratiques pédagogiques de ces dernières années.

Précisons qu'il ne s'agit pas ici de montrer qu'une réponse est plus performante qu'une autre mais plutôt de caractériser ces différentes réponses, que nous appellerons **conceptions de l'apprentissage / enseignement** et d'en montrer les avantages et les limites. Cela peut permettre à chacun de repérer celle sur laquelle il a tendance à appuyer son enseignement et d'élargir l'éventail de ses choix dans sa pratique de classe.

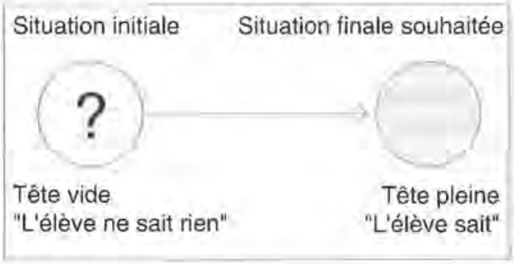
1 – Un premier type de réponse : L'approche transmissive

Cette approche qui ne s'appuie sur aucune recherche (ni pédagogique, ni psychologique) est pourtant très naturelle à toute per-

[1] [ndlr] Michel Mante a donné une conférence sur ce thème le 21 avril 1999, à Neuchâtel, dans le cadre de «Espace BEJUNE». Nous le remercions, au nom des lecteurs de *Math-Ecole* et des très nombreux collègues ayant suivi son exposé, de nous offrir la possibilité de publier son texte. (La «conférence» a débuté par un travail pratique consistant à analyser trois séquences visant le même objectif pédagogique - repérage et signification du chiffre des unités et des dizaines dans un nombre de deux chiffres - selon différentes conceptions de l'apprentissage. Il n'est malheureusement pas possible de reproduire ces trois séquences ici, ni les commentaires et la discussion qui ont suivi ce travail pratique et qui ont servi d'introduction à la conférence. Il est toutefois nécessaire de donner cette information pour les lecteurs n'ayant pas assisté à l'exposé de Michel Mante, afin qu'ils perçoivent quelques éléments du contexte dans lequel il s'est déroulé - éléments importants lorsqu'on parle de conceptions de l'apprentissage.)

sonne qui a à charge d'enseigner un savoir ou savoir-faire. Elle s'appuie sur l'hypothèse que l'apprenant à qui on s'adresse ne sait rien concernant le contenu enseigné et cherche à remplir cette « tête vide » en expliquant ou en montrant le savoir ou le savoir-faire.

Cette approche peut être schématisée de la façon suivante :



C'est sur cette conception que s'appuie la pratique du cours magistral, c'est également sur cette conception que l'on s'appuie lorsque face à une erreur d'élève nous apportons des explications «Non ! écoute; je vais t'expliquer» ou bien «Non ! regarde; je vais te montrer».

Dans cette conception, le rôle du professeur est donc de communiquer le savoir (le plus clairement possible, on va donc insister sur la clarté des explications, sur la voix, ...), celui de l'élève sera d'écouter ou de regarder attentivement. La pratique pédagogique qui s'appuie sur cette conception de l'enseignement / apprentissage permet d'acquérir des connaissances. En effet, pour beaucoup d'entre nous c'est la pratique sur laquelle se sont appuyés nos enseignants. Mais cette pratique suppose que les apprenants soient attentifs et qu'ils aient les prérequis nécessaires à la compréhension du discours de l'enseignant. Ces deux conditions ne sont pas toujours réunies !

Enfin, nous avons tous fait l'expérience d'utiliser cette pratique avec des apprenants très attentifs qui, a priori, avaient les prérequis nécessaires pour nous entendre et qui pourtant faisaient ensuite des erreurs. N'est-ce pas dû au fait que, contrairement à l'hypothèse sur laquelle s'appuie cette conception, la tête de l'élève n'est pas vide ? Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie.

2 – Un deuxième type de réponse : L'approche behavioriste[2]

Contrairement au premier type de réponse, cette conception s'appuie sur un courant de recherche en psychologie qui s'est développé au début du XXe siècle : le «behaviorisme». Ce courant ne s'intéresse pas aux états mentaux des individus mais uniquement aux comportements observables. Pour les tenants de cette théorie, apprendre c'est acquérir un comportement nouveau. Il est acquis uniquement par l'expérience de l'apprenant (il n'y a pas de comportement inné), à partir de stimuli qui se reproduisent et de renforcements. Ce processus d'apprentissage correspond au conditionnement.

Ce courant a donné lieu à une théorie de l'apprentissage qui consiste à créer les stimuli et renforcements adéquats pour obtenir les comportements (ou modifications des comportements) souhaités.

Le rôle de l'enseignant dans cette approche est de :

- définir des objectifs en terme de comportements observables : «L'élève doit être capable de ...»;
- classer ces objectifs du simple au complexe. Si un objectif est trop complexe, il doit être décomposé en objectifs plus élémentaires;

[2] Ce terme est tiré du mot anglais «behavior» qui signifie «comportement»

- trouver des situations pour permettre à l'élève de réaliser le comportement souhaité et ce sans faire d'erreurs (ces dernières sont supposées laisser des traces indélébiles). Cette condition suppose que l'élève soit guidé vers la bonne réponse. Dans cette approche, l'induction joue un rôle fondamental.

Cette conception peut être schématisée de la façon suivante :

Cette conception de l'apprentissage est présente derrière le courant pédagogique appelé «pédagogie de maîtrise» ou derrière les nombreuses fiches de découverte des manuels scolaires.

La pratique pédagogique s'appuyant sur cette conception présente des avantages :

- elle est centrée sur l'apprenant,
- elle rationalise la préparation des cours et l'évaluation,
- elle permet à l'élève une certaine forme de réussite (les activités proposées sont conçues pour cela),
- elle semble opérationnelle pour l'acquisition d'automatismes.

Mais elle présente des inconvénients :

- Ce n'est pas parce que l'élève a atteint les objectifs intermédiaires qu'il atteint l'objectif général : savoir débrayer, savoir accélérer, savoir freiner, savoir tourner le volant ne signifie pas que l'on sache conduire !
- D'autre part, on s'aperçoit, en utilisant cette méthode, que, même si l'élève a atteint l'objectif général, il a beaucoup de peine à transférer les nouveaux comportements à un domaine nouveau : dès qu'on lui lâche la main, l'élève ne sait plus où aller.
- Les élèves ont de la peine à donner du sens aux notions ainsi acquises.

3 – Un troisième type de réponse : L'approche socio-constructiviste

Cette approche s'appuie sur les recherches en psychologie cognitive. Ce courant, qui s'est développé en réaction au courant behavioriste, fait l'hypothèse que les comportements mentaux jouent un rôle fondamental dans l'étude du comportement humain et en particulier dans l'apprentissage.

Empruntant à différents courants de recherche en psychologie cognitive (psychologie génétique de Piaget, psychologie sociale génétique de Perret-Clermont, Doise, Mugny, ...) le courant français de recherche en didactique des mathématiques a élaboré une conception de l'apprentissage appelée «socio-constructiviste».

Nous allons essayer d'expliciter les hypothèses sur lesquelles s'appuie cette conception à l'aide de la métaphore suivante : *Imaginons un bricoleur confronté à un problème de bricolage qui est nouveau pour lui. Sa première réaction, face à ce problème nouveau, est d'ouvrir sa boîte à outils et d'essayer de trouver l'outil qui lui semble le plus adapté à la situation. Si cet outil ne convient pas (c'est-à-dire s'il ne lui permet pas de résoudre son problème ou si l'utilisation de l'outil risque d'être très coûteuse en temps) il va alors en chercher un autre et l'essayer ... C'est seulement après plusieurs tentatives infructueuses qu'il va prendre conscience que, dans sa boîte à outils, il n'y a pas l'outil adéquat et qu'en conséquence il* *va falloir, pour résoudre son problème, construire un outil nouveau, ou bien s'approprier celui que lui proposera un ami ou un spécialiste* !

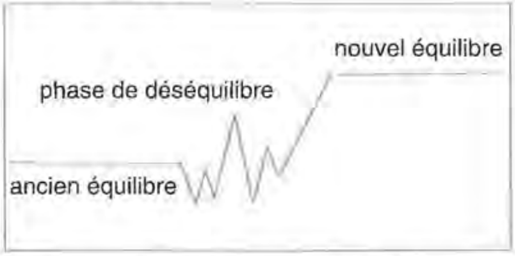
Cette métaphore permet d'expliciter un certain nombre d'hypothèses du modèle socioconstructiviste :

- Tout d'abord, contrairement à ce qu'on pourrait penser spontanément, la tête de l'élève n'est jamais vide de connaissances (de même que la boîte à outils du bricoleur n'est pas vide). Comme le dit Bachelard : *«Quel que soit son âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreinte.»* (Cf. Bachelard). L'élève se construit une certaine représentation (ou conception) de toutes les notions qu'on lui enseigne.

- L'apprentissage de connaissances ne se fait pas par empilement de connaissances, ni de manière linéaire : tant que l'élève, par rapport à une notion donnée, ne prend pas conscience de l'insuffisance de ses conceptions, il les gardera. Même si on réussit à lui vendre un nouvel outil (même s'il donne l'impression de l'avoir acquis), il reviendra à l'ancien plus économique pour lui (au sens de «plus sûr») s'il n'a pas pris lui-même conscience de son insuffisance. Voici deux citations qui résument bien cette hypothèse : *«On connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites»* (Cf. Bachelard), *«Apprendre c'est autant perdre les idées qu'on se faisait qu'en acquérir de nouvelles.»* (Hameline).

  Quand on prend conscience de l'insuffisance de ses connaissances par rapport à un problème donné, il y a généralement une phase de régression. L'acquisition d'un nouvel outil oblige à une réorganisation de la boîte à outils.

On peut illustrer ces hypothèses à l'aide du schéma suivant :



- Le bricoleur (pardon l'élève) n'arrive véritablement à ***donner du sens*** à un outil (un concept) que s'il lui apparaît nécessaire, c'est-à-dire s'il lui apparaît d'abord comme un outil qui lui permet de résoudre un problème qu'il s'est approprié.

- Enfin, dernière hypothèse qui n'est pas mise en évidence à travers la métaphore précédente : la mise en place de conflits, portant sur des connaissances, entre les élèves peut faciliter leur acquisition. On parle ici de ***conflits socio-cognitifs***. Nous reprenons ici les résultats des travaux de l'école genevoise de psychologie sociale génétique (cf. W. Doise). Le travail de groupe peut favoriser la mise en place de ces conflits.

Apprendre, c'est donc passer d'une conception ancienne à une nouvelle conception plus performante (car elle permet à l'élève de résoudre davantage de problèmes). Ce passage se fait par une remise en cause des connaissances anciennes qui sont des obstacles.

La stratégie consiste à provoquer chez l'élève un **conflit cognitif interne**. Ce conflit est provoqué par une **contradiction** entre une **anticipation** (élaborée à partir de ses connaissances anciennes) et un **démenti**. Ce démenti peut être apporté par le milieu ou par les autres (**conflit socio-cognitif**). Les situations de classe qui favorisent la mise en place de ce processus sont appelées des **situations-problèmes** (cf. G. Brousseau, R. Douady).

Une situation-problème se caractérise par :

- **un type de problème** qui permet à l'élève de :

  1e phase : s'engager dans la résolution du problème en investissant ses conceptions anciennes.

  2e phase : prendre conscience de l'insuffisance de ses conceptions. Lui seul peut en prendre conscience. Cela suppose que l'élève ait pris en charge la responsabilité de la résolution du problème (**dévolution** du problème à l'élève).

  3e phase : construire une nouvelle connaissance, qui lui permette de résoudre le problème.

- **une gestion de la classe** : Généralement cette gestion se caractérise par les étapes suivantes[3] :

  1e phase : Travail individuel. Cette première phase peut être précédée d'une phase de familiarisation pour permettre à tous les élèves de s'approprier le problème (ce qui ne signifie pas savoir le résoudre, mais comprendre les consignes et le but à atteindre).

  2e phase : Travail de groupe, qui se termine par une production commune du groupe.

  3e phase : Mise en commun et débat.

  4e phase : Institutionnalisation des connaissances. Au cours de cette phase, l'enseignant officialise parmi toutes les connaissances que les élèves ont rencontrées, celles qu'ils doivent maintenant apprendre et savoir utiliser.

On peut distinguer deux types de situations-problèmes :

- les situations-problèmes qui visent à dépasser un obstacle (cf. l'activité *Puzzle* en annexe);
- les situations-problèmes qui visent à donner du sens à un concept en permettant à l'élève de prendre conscience que les outils qu'il a à sa disposition sont très lourds et source d'erreurs (sans pour autant être faux). C'est par exemple le cas de l'activité *Les plaques de chocolat*[4] dans les nouveaux moyens d'enseignement romands.

Les principaux avantages de l'approche socio-constructiviste sont les suivants :

- c'est la seule approche qui prend réellement en compte les erreurs des élèves;
- c'est la seule approche qui pose le problème du sens des connaissances;
- le développement historique des connaissances suit un mouvement analogue au développement des connaissances mis en évidence dans l'approche socio-constructiviste[5] (cf. Bachelard, Lakatos).

Les inconvénients existent aussi :

- on ne connaît pas forcément des situations-problèmes pour tous les concepts;

[3] Ce n'est bien sûr pas toujours le cas, cela dépend de la nature du problème.

[4] Voir «Mathématiques 2P» (p. 146). Cette activité est inspirée de *Carrelages* (ERMEL CP) qui a fait l'objet d'une des trois séquences analysées en «travail pratique» pour introduire l'exposé.

[5] Certains pourraient ici douter de cet avantage en avançant le fait qu'a priori il n'y a pas forcément de lien entre le développement des connaissances chez l'individu et le point de vue historique.

- cette approche est plus complexe à gérer en classe. Nous allons d'ailleurs préciser le rôle de l'enseignant dans la gestion d'une situation-problème.

4 – Le rôle de l'enseignant dans la gestion d'une situation-problème

On entend parfois dire que l'enseignant ne doit pas intervenir au cours d'une situation-problème, qu'en est-il exactement ?

Il est évident que si l'enseignant intervient trop fortement au cours des phases de recherche, les élèves risquent de ne produire des réponses qu'en fonction des attentes supposées de l'enseignant, ce qui les empêchera d'investir leurs connaissances «anciennes» et donc de prendre conscience de leur insuffisance. Cela signifie-t-il qu'une fois qu'il a donné les consignes et l'énoncé l'enseignant ne doit jamais intervenir ? Je ne le pense pas, reprenons les différentes phases définies ci-dessus :

- dans la 1e phase (recherche individuelle), il est indispensable que tous les élèves s'approprient la situation c'est-à-dire puissent comprendre les données du problèmes et le but à atteindre. Il est donc nécessaire qu'au cours de cette phase l'enseignant observe le travail des élèves et en cas de difficultés de compréhension de l'énoncé qu'il reprécise le sens de certaines données. Mais cette intervention ne doit apporter aucune indication sur la façon de résoudre le problème. Si l'on pense a priori que les élèves risquent de rencontrer des difficultés, il est préférable de mettre en place une phase de familiarisation avant de proposer la situation-problème.

- dans la 2e phase (recherche en groupe et production commune) il ne doit pas intervenir sur le contenu (donc en particulier ne pas préciser si les productions sont justes ou fausses, ne pas guider les élèves vers la bonne solution), par contre il faut qu'il s'assure que les groupes fonctionnent correctement, c'est-à-dire par exemple que tous cherchent, que tous les avis soient pris en compte dans le groupe, etc. Il peut donc être amené à intervenir par rapport aux consignes qu'il a données.

- dans la 3e phase (mise en commun et débat), il anime le débat en essayant d'être le plus neutre possible sur le contenu mathématique. A l'issue de cette phase, il peut conclure par la phase d'institutionnalisation ou bien proposer un nouveau temps de recherche en groupe.

- dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant reprend l'initiative concernant le contenu mathématique. Cette phase est indispensable dans la mesure où l'élève a traversé une situation très riche, au cours de laquelle il a fait des essais, il a conjecturé des solutions, il a utilisé de nombreux savoirs et savoir-faire, certains étant des savoirs anciens d'autres sont des savoirs nouveaux dont il n'est pas forcément conscient[6], il a été confronté à d'autres solutions, il en a validé certaines, invalidé d'autres. Il ne peut pas savoir parmi toutes les connaissances auxquelles il a été confronté celles qui sont importantes (c'est-à-dire celles qui sont à connaître pour la suite du cours de mathématiques, celles dont il pourra se resservir), seul l'enseignant le sait. Cette phase est indispensable pour que les élèves puissent transférer ces connaissances dans des situations nouvelles.

Donc contrairement à ce qu'on entend parfois dire, dans une approche socio-constructiviste l'enseignant est très présent et doit intervenir au cours de la situation-problème. Mais son rôle est délicat puisque pendant un moment il doit assurer le transfert de la

6 On parle de savoir en acte.

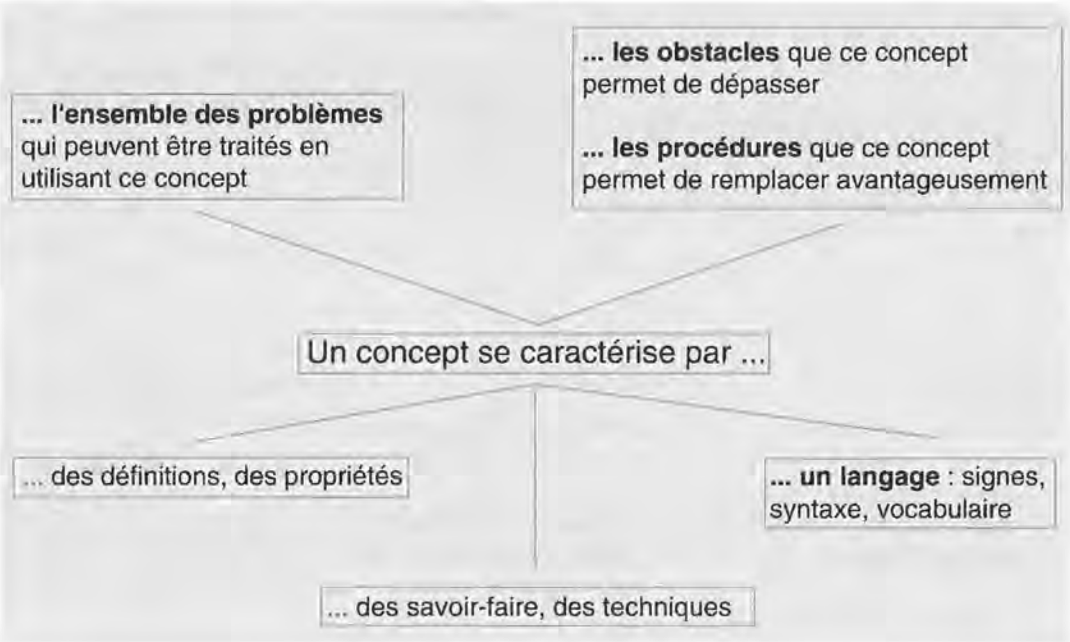
responsabilité de la recherche et de la validation aux élèves et donc ne pas intervenir sur les procédures des élèves.

Mais une(des) situation(s)-problème(s) suffis(en)t-elle(s) pour permettre à un élève de s'approprier un concept nouveau ?

5 – Situation-problème et acquisition d'un concept

Répondre à la question précédente suppose qu'au préalable on soit capable de répondre à la question : « Qu'est-ce qu'acquérir un concept ? », ce qui revient à savoir ce qui caractérise un concept[7].

Un concept peut se caractériser par cinq aspects qui sont représentés par le schéma ci-dessous[8] :



Ainsi **comprendre un concept** peut revenir à :

- maîtriser le langage associé à ce concept,
- connaître les définitions et propriétés relatives à ce concept,
- maîtriser les savoir-faire associés à ce concept,
- avoir dépassé les obstacles liés à ce concept,
- savoir résoudre les problèmes en utilisant ce concept.

7 Nous ne parlons pas ici des «concepts catégoriels» tel que le concept d»'oiseaux» par exemple, mais des concepts dits «scientifiques» ou «relationnels» qui sont définis par les relations qu'ils entretiennent avec les autres. Par exemple, le concept de «nombre» ou de «proportionnalité».

8 Ce schéma s'inspire du travail réalisé par G. Vergnaud et R. Charnay.

Commençons de remplir cette grille avec le concept de nombre entier à l'école :

Comprendre le nombre entier c'est ...

... **être capable de résoudre les problèmes** suivants :

- problèmes de mémorisation de quantité : par exemple pour constituer une collection équipotente, pour comparer deux collections,
- problèmes d'anticipation et de calculs.

... **dépasser les obstacles suivants :**

- certaines techniques de dénombrement qui évitent le nombre : par exemple la correspondance terme à terme ou l'estimation pour construire des collections équipollentes,
- le recours à une représentation «figurée» de la situation pour résoudre des problèmes additifs,
- penser que 12 et 21 sont les mêmes nombres parce qu'ils sont formés des mêmes chiffres,
- ...

... connaître :

- la comptine de 1 à ...
- le successeur ou le prédecesseur des nombres de 1 à100,
- la table d'addition des nombres de 1 à 9,

... savoir faire :

- dénombrer une collection de 100 éléments,
- repérer le chiffre des dizaines et le nombre des dizaines d'un nombre,
- effectuer une addition de deux nombres de deux chiffres,
- ...

... maîtriser les termes suivants :

- unités, dizaines, ...
- addition, somme, retenue, ...
- ...

Enseigner un concept suppose donc de faire le choix d'une entrée (entrée par les problèmes, par les obstacles, par le vocabulaire, ...). Il y a semble-t-il une corrélation entre la conception de l'apprentissage/enseignement sur laquelle on s'appuie et cette entrée :

- l'entrée par les problèmes ou les obstacles est en corrélation étroite avec l'approche socio-constructiviste;
- l'entrée par le vocabulaire et les propriétés est en corrélation avec l'approche transmissive[9];

[9] Cette corrélation est certainement moins forte que la précédente, on peut en effet utiliser des situations problèmes pour que les élèves sentent la nécessité d'un vocabulaire nouveau, même si bien sûr ils n'inventeront pas ce vocabulaire.

- l'entrée par les savoir-faire est en corrélation étroite avec l'approche behavioriste.

Mais quelle que soit l'entrée que l'on privilégie pour introduire un concept, il est indispensable d'aborder les autres aspects, tous sont indispensables pour l'acquisition d'un concept. Or l'on constate en regardant l'évolution des programmes depuis les années 1945 qu'ils ont tendance à privilégier un aspect au détriment des autres : schématiquement on pourrait dire que jusqu'à la fin des années 60, c'était le vocabulaire et les propriétés qui étaient privilégiés; à partir des années 70 jusqu'à l'arrivée des nouveaux moyens d'enseignement, c'était les savoir-faire au détriment des problèmes. Avec les nouveaux moyens d'enseignement ce sont les problèmes.

Alors attention à ne pas en rester qu'au problème et à ne pas penser, qu'après avoir introduit un concept à l'aide d'une situation-problème (ou plus simplement d'un problème), l'élève a acquis le concept. On ne peut pas résoudre des problèmes si l'on ne maîtrise pas un minimum de vocabulaire (ce vocabulaire est en particulier important pour transférer ses connaissances) et si l'on n'a pas de savoir-faire automatisés (sinon les phénomènes de surcharge cognitive empêcheront les élèves de résoudre des problèmes).

6 - Conclusion

Ainsi une situation-problème, voire une série de situations-problèmes ne peu(ven)t à elle(s) seule(s) suffire pour que l'élève acquiert un concept. Il est nécessaire qu'il acquiert certains automatismes et connaisse parfaitement certaines définitions, propriétés et le vocabulaire associé aux concepts.

Reste à déterminer les automatismes, définitions, propriétés, vocabulaire que l'élève doit acquérir et le temps que l'on consacre à ces acquisitions.

Si la dérive qui consiste à se contenter de quelques problèmes pour enseigner un concept existe, la dérive du «tout automatisation» est encore plus forte pour au moins trois raisons :

- c'était celle qui était privilégiée jusqu'à présent;
- il est plus facile de faire acquérir des automatismes à des élèves que des stratégies de résolution de problèmes;
- il est plus facile d'évaluer l'acquisition de savoir-faire que l'acquisition de stratégies de résolution de problèmes.

Comme toujours la dérive est présente dès que l'excès est là. La vérité est certainement du côté de la variété : variété des conceptions de l'apprentissage/enseignement, variété des approches d'un concept. Cette variété est d'autant plus importante qu'ici nous avons analysé les conceptions de l'apprentissage/enseignement en faisant comme si tous les élèves étaient identiques, apprenaient de la même façon. Or des recherches nous montrent qu'il n'en est rien (cf. les recherches sur les «profils pédagogiques» La Garanderie, Bruner, Huteau, ...).

Cette variété doit être consciente et pensée : «Dans cette situation je suis conscient de ce que je fais, j'en connais les avantages et les inconvénients et je suis capable de justifier les choix que j'ai faits».

Bibliographie

Bachelard, G. (1983). *La formation de l'esprit scientifique*. Ed Vrin (12ème édition).

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.

RDM Vol 7 n° 2. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Charnay, R. (1996). *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* Ed ESF.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outils objets. *RDM Vol 7 n° 2*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations* Ed. Hermann

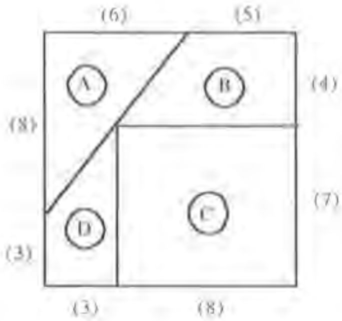
Doise, W.; Mugny, G. (1981). *Développement social de l'intelligence*. Edition Inter Editions.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *RDM Vol 10 n° 2 – 3*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Annexe

Un exemple de situation-problème dont l'objectif est de permettre aux élèves d'acquérir le concept d'agrandissement d'une figure géométrique en dépassant l'obstacle du modèle additif : «Pour agrandir il faut ajouter».

Le puzzle suivant est remis à chaque groupe (un seul exemplaire par groupe). Un exemplaire est affiché au tableau.[10]



[10] Entre parenthèses figurent les dimensions des pièces.

Le puzzle est découpé, chaque élève reçoit une pièce. Il doit en mesurer les dimensions et les noter sur la pièce. Vérification collective des mesurages.

- Consigne (le maître dispose d'un agrandissement correct du puzzle, coefficient 1,5 non communiqué aux élèves) : «J'ai fait un agrandissement de ce puzzle, le voilà. Vous devez faire le même agrandissement de votre puzzle, dans chaque groupe. Chaque élève fera l'agrandissement de sa pièce. Attention, à la fin, il faut pouvoir reconstituer le carré agrandi. Je vous donne une seule information : «ce» côté (il montre le côté correspondant) qui mesure 4 cm sur votre puzzle devra mesurer 6 cm sur le puzzle agrandi».

- Dans un premier temps, les élèves de chaque groupe doivent se concerter; puis chaque élève réalise seul sa pièce agrandie; enfin le groupe essaie de reconstituer le carré.

- Dans un second temps, les élèves sont invités, à l'intérieur de chaque groupe à discuter du résultat obtenu et de la méthode utilisée par chacun d'eux ... et en cas d'échec à rechercher ensemble une nouvelle méthode commune à tous les élèves du groupe. Un nouvel essai de reconstitution du puzzle est tenté.

  Une première mise en commun, rapide, permet d'officialiser le fait que «ajouter 2 à chaque côté» ne permet pas d'aboutir.

- Troisième temps : les groupes qui n'ont pas abouti précédemment doivent rediscuter entre eux et réaliser une nouvelle tentative. Le maître peut les inciter à écrire les dimensions sous forme de tableau. Les autres groupes passent à la phase 2.

Phase 2, par groupes de 4

Chaque groupe doit décrire sur une affiche la méthode qu'il a finalement utilisée et dire si elle a abouti ou non.

Phase 3, collectif

Un porte-parole par groupe explique aux autres la méthode utilisée. Les diverses méthodes sont toutes affichées. Des demandes de renseignements peuvent être faites, des contradictions apportées. Discussion collective sur ces méthodes, celles qui réussissent, celles qui échouent, celles qui paraissent se ressembler. Le maître n'en privilégie aucune.

L'explicitation des diverses méthodes utilisées, leur classement conduit à quelques conclusions ou remarques formulées collectivement :

- certains ont utilisé un coefficient multiplicatif (un codage de celui-ci est proposé par l'enseignant);
- d'autres une règle du type : $x \rightarrow x + (x/2)$ (un codage en est également proposé);
- d'autres ont utilisé des propriétés de la proportionnalité (celles-ci sont formulées et codées sur les tableaux réalisés); par exemple :

4	8	2	6	1
6	12	3	9	1,5

- etc.

- on a remarqué que agrandir, ce n'est pas ajouter le même nombre à toutes les dimensions.

Phase 4, par groupe de 4

Agrandir le même puzzle, mais le côté qui mesurait 4 doit maintenant mesurer 10. Les méthodes précédentes sont toujours affichées. Même déroulement que pour l'agrandissement précédent.

Phase 5, collectif

Une synthèse collective est faite à partir des méthodes utilisées pour les deux puzzles précédents :

- utilisation de tableaux de nombres;
- méthodes utilisant un coefficient multiplicatif;
- méthodes utilisant les propriétés de la linéarité;
- méthodes du type :

$$x \rightarrow x + x/2$$

ou

$$x \rightarrow (x \times 2) + x/2$$

Le maître indique que de tels tableaux sont appelés tableaux de proportionnalité.

Phase 6, individuel

Autre puzzle dont il faut trouver les dimensions de son agrandissement (ex : 6 devient 8, ou 4 devient 7).

JEUX

Martine Simonet, Ecole Normale, NE

LA BANQUE

Compétences développées :

– comparer des nombres entre eux ;

– dénombrer une collection.

Âge : 6 / 7 ans

Nombre de joueurs : 4 à 6

Matériel :

- un jeu de cinquante-deux cartes dont on retire les valets, dames et rois pour ne conserver que les cartes de 1 (As) à 10;
- des jetons (environ 20 par joueur).

Le jeu

Chaque joueur reçoit des jetons et un donneur est désigné.

Les jetons du donneur deviennent «la banque», et lui le banquier.

Celui-ci distribue, une par une, trois cartes aux autres joueurs. Les cartes restantes constituent le «talon».

Au vu de son jeu, chacun annonce s'il joue ou s'il passe.

Ensuite le banquier retourne la première carte du talon.

Chacun doit pouvoir alors présenter en abattant son jeu une carte supérieure et de même "couleur" (coeur, trèfle, carreau ou pique) que celle retournée par le banquier.

- Le joueur qui possède une telle carte reçoit 2 jetons du banquier.
- Le joueur qui a une carte de même couleur mais de valeur inférieure donne 1 jeton au banquier.
- Le joueur qui n'a pas de carte de même couleur, doit payer 2 jetons au banquier (même s'il possède une carte de valeur supérieure dans une autre couleur).

Les cartes utilisées sont mises de côté et le joueur suivant devient le banquier.

Lorsque le talon est épuisé, on brasse les cartes et on en constitue un nouveau.

Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'un des joueurs n'ait plus de jetons.

Remarque: Il peut arriver que tous les joueurs décident de passer. Dans ce cas, le banquier reprend les cartes, les mélange au talon, puis distribue trois nouvelles cartes à chaque joueur.

Variables

- Le jeu se termine lorsque chaque joueur a été trois fois le banquier. Celui qui possède alors le plus de jetons est le gagnant.
- La valeur des cartes peut être adaptée aux compétences numériques des élèves.

A louer !

Michel Chastellain, SPES (VD)

Que ce soit lors de la construction d'une figure géométrique, dans la transcription d'une marche à suivre permettant de réaliser une figure ou, lorsqu'il s'agit de communiquer un résultat, les élèves doivent apprendre progressivement ***à utiliser un langage précis*** *et suffisamment clair pour éviter les ambiguïtés.*

L'activité, ainsi que les propos qui suivent, illustrent une démarche, parmi d'autres, qui s'efforce d'atteindre cet objectif.

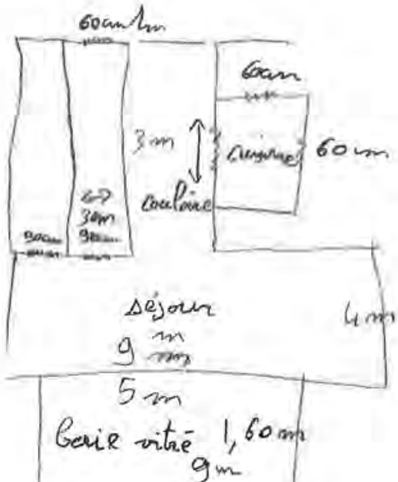
Amélie visite un appartement situé au rez-de-chaussée d'une maison campagnarde.

Pourrais-tu l'aider à dessiner un croquis de l'environnement qu'elle découvre ?

- La porte d'entrée, située sur la façade nord de l'habitation, mesure 1 m de largeur.
- Elle ouvre sur un couloir de 3 m de profondeur, en direction du sud.
- Le long de celui-ci, exactement au milieu de la paroi de gauche en entrant, se situe l'entrée dans une cuisine de forme carrée.
- La cuisine est illuminée par deux fenêtres de 60 cm de largeur, l'une située dans le mur de la porte d'entrée et l'autre dans la paroi est.
- A l'extrémité du couloir, Amélie débouche sur le séjour rectangulaire, d'une longueur de 9 m dans le sens ouest-est et d'une largeur de 4m.
- Une grande baie vitrée de 5m x 1,60 m laisse entrer le soleil du matin au soir.
- Le mur, situé au nord du séjour et à l'ouest du couloir, débute et se termine par deux portes de 90 cm :
  - la première donne accès sur une chambre à coucher occupant la longueur du couloir, large de 3 m et qui donne, par l'intermédiaire d'une fenêtre de 60 x 60 cm, en direction du nord ;
  - la seconde, permettant d'entrer dans la salle d'eau borgne, avec WC, est aussi allongée que la chambre à coucher.
- La surface totale de l'appartement forme un rectangle de 63 m².

Cette activité de groupe représente un point de départ privilégié pour aborder les constructions géométriques «classiques». Lorsque celles-ci sont décrites avec formalisme et rigueur – soulignons à ce propos que la symbolique adoptée n'est pas universelle, mais généralement propre à chaque enseignant – elles requièrent, de la part des élèves, une compréhension de la terminologie utilisée qui peut constituer un obstacle non négligeable, obstacle qui ne sera souvent surmonté qu'ultérieurement, après un certain temps d'assimilation. Cependant, si l'on entend communiquer sans ambiguïté sur l'allure d'une figure ou décrire, pas à pas, la marche à suivre pour la construire, il convient tout de même de se mettre d'accord sur la nécessité d'utiliser des notations précises, ainsi qu'une expression orale ou écrite suffisamment concise. Autrement dit, il y lieu de sensibiliser les élèves à l'apprentissage d'un langage approprié, ce qui constitue l'objectif prioritaire de cette activité. Au cours de celle-ci, les élèves vont être amenés successivement à :

- décoder les consignes pour s'en faire une première représentation à l'aide d'un schéma (à ce propos, il y aura lieu d'insister sur la différence à faire entre un croquis et une construction précise) ;

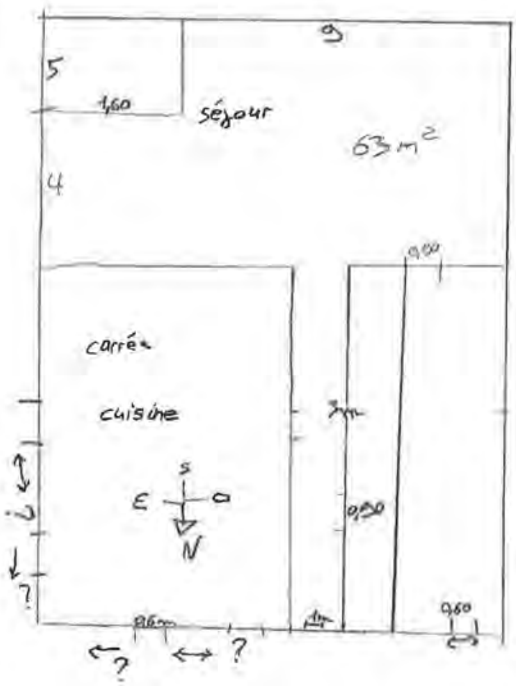


- prendre conscience des ambiguïtés propres à l'énoncé (par exemple, il n'est pas précisé où se situe «latéralement parlant» chacune des fenêtres de la cuisine ou encore, il existe deux interprétations possibles pour placer la chambre à coucher) ;

- se référer à un système de repérage (Nord-Sud) ;

- opérer des choix qu'il s'agira peut-être de modifier par la suite (l'information d'une aire totale au sol de forme rectangulaire intervient en fin d'énoncé, ce qui conduira probablement quelques groupes à devoir réorganiser leur plan) ;

- adopter une échelle (par exemple, le segment ├──┤ représente un mètre) et l'utiliser lors de l'élaboration du plan.



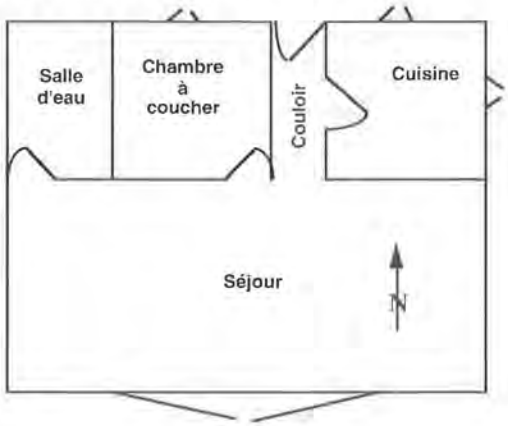
L'activité favorise l'autonomie des élèves, notamment :

- grâce à la dernière information qui précise que la surface de l'appartement doit être un rectangle de 63 m² ;

- par la confrontation des résultats obtenus qui souligne les imprécisions ou les erreurs commises.

Une synthèse finale, comme phase de validation, offre aux élèves la possibilité de décrire leur démarche et d'expliciter les connaissances mises en œuvre ou apparues au cours de la recherche. A cette occasion, le maître pourra institutionnaliser le rôle fondamental d'une description précise, nécessaire à l'élaboration de toute construction et souligner l'intérêt du recours à un langage concis permettant d'éviter l'écriture d'un texte fastidieux.

En définitive, cette activité vise à atteindre l'un des objectifs comportementaux définis par CIRCE III, à savoir développer un langage précis, c'est-à-dire mettre sans cesse en évidence les conditions nécessaires à la bonne qualité d'un message, transmis sous des contraintes diverses.



L'activité pourrait être prolongée par une représentation précise d'un plan de l'appartement. Dans cette construction, l'échelle est de 1:100, mais elle sera variable suivant les productions des élèves : ⇨

Neuchâtel 98

CIEAEM 50

CIEAEM 50 - Les actes de la rencontre en souscription

Les actes de la 50e rencontre de la CIEAEM, tenue à Neuchâtel en août 1998, vont paraître prochainement, en juin 1999.

L'ouvrage contient les textes des conférences plénières, présentations en parallèle, ateliers, sessions spéciales, affiches de la «foire» aux idées et expositions, sur le thème de la rencontre :

- liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques ses sous-thèmes ;
  - finalités de l'enseignement des mathématiques,
  - communication et collaboration entre praticiens et chercheurs,
  - recherche en didactique des mathématiques et formation des maîtres,
  - spécificités de la recherche en didactique des mathématiques,
  - la prise en compte de résultats de la recherche dans les moyens et les outils pour l'enseignement,
- les aspects historiques de la CIEAEM.

90 articles (50 en français, 40 en anglais), 520 pages (format 24 x 17)

Les lecteurs de Math-Ecole peuvent obtenir ces actes de la rencontre au prix de souscription de 28.- CHF l'exemplaire (+ frais d'expédition et facturation de 5,50 CHF pour la Suisse, 10.- CHF pour l'étranger). Après le 30 juin 1999, les actes seront vendus 35.- CHF l'exemplaire.

Commandes par le bulletin de la page 3 de couverture, par fax :

(0)/(++41)32 889 69 71, ou par internet : http://www.irdp.ch/math-eco/

Néo-Darwinisme et théorie des jeux

J.-P. Antonietti[1]

Proposez à vos élèves un nouveau jeu de pure réflexion qui se joue à deux et à découvert. Incitez-les à rencontrer un maximum d'adversaires. Dans ces conditions, il y a fort à parier que leur façon de jouer va se modifier. Si initialement toutes les actions permises par les règles du jeu leur paraissent équivalentes, avec l'expérience certains choix leur sembleront plus judicieux que d'autres. Ils découvriront que certains coups leur assurent la victoire alors que d'autres les condamnent irrémédiablement à la défaite. Comment pourrait-on schématiquement décrire l'évolution de leurs connaissances du jeu et rendre compte de l'amélioration de leurs stratégies ? Nous allons dans cet article tenter de répondre à cette question.

Toutes proportions gardées, cette interrogation est analogue à celle qui fut à l'origine de toute l'oeuvre de Piaget et l'on sait quelle solution il proposa. A l'instar de l'auteur de *Biologie et Connaissance* nous recourrons à la notion fondamentale d'adaptation qu'il faut interpréter comme «[...] le produit de réponses actives, autrement dit de régulations compensatrices opérant par recombinaisons constructives et par ajustement de réponses efficaces données aux problèmes soulevés par le milieu.» (Piaget, 1967, p. 68).

A cette fin nous représenterons les diverses stratégies des élèves par des chromosomes qui, ensemble, constitueront une population susceptible d'évoluer. Les transformations que subira la population de génération en génération, seront une imitation des mécanismes génétiques naturels dont les principaux sont la reproduction, le croisement et la mutation.

La reproduction est l'opérateur le plus important, c'est par son entremise que s'effectue la sélection. Les individus les plus aptes, ceux dont les performances sont les meilleures, ceux qui, en l'occurrence, gagnent le plus souvent, auront plus de chance de se reproduire; les moins bons disparaîtront. Mais cet opérateur, bien que primordial, ne peut pas créer de nouveaux individus. Afin de générer au sein de la population une certaine variété il est nécessaire de recourir au croisement. Un croisement s'effectue en deux temps. Des couples de chromosomes sont formés aléatoirement puis s'échangent au hasard des fragments d'information (voir fig. 1).

«Parents»	**«Enfants»**
x-o-o-x-o-o-x-x-x-o	x-o-o-0-X-X-0-0-X-0
0-X-X-0-X-X-0-0-X-0	0-X-X-o-o-o-x-x-x-o
↑ lieu du croisement	

fig. 1: le croisement

1 Institut de Mathématiques Appliquées, Faculté des SSP, Université de Lausanne, BFSH 2,CH-1015 Lausanne, *jean-philippe.antonietti@ip.unil.ch*.

Suite au jeu de la reproduction et du croisement, il arrive parfois que certaines informations potentiellement utiles disparaissent du pool génétique de la population; ces dernières peuvent être éventuellement réintroduites grâce à une mutation. Ce troisième opérateur, qui ne se déclenche que très rarement, modifie aléatoirement l'un ou l'autre des gènes d'un chromosome.

Nous usons ainsi d'une métaphore biologique en comparant l'évolution de la compréhension qu'ont les élèves d'un jeu à l'évolution des espèces. Nous nous référons donc directement au néo-darwinisme[2]. Cette théorie synthétique de l'évolution est une intégration du darwinisme de Darwin à la théorie génétique moderne, telle qu'elle résulte des lois de Mendel. C'est ce qui constitue le champ d'investigation de la «génétique des populations», créée à peu près simultanément par Wright et Fisher, qui fournirent un certain nombre de modèles mathématiques rendant compte de l'évolution en utilisant d'une part les lois de Mendel, et d'autre part des coefficients de sélection. Cette approche consiste à reconnaître que les caractères sont déterminés par des gènes et que ces gènes peuvent subir des mutations. Ainsi apparaissent un certain nombre de différences entre individus d'une même espèce. A travers le polymorphisme ainsi créé, la sélection naturelle opère en éliminant ou au contraire privilégiant tel individu porteur de tel gène. Cela suppose donc que la mutation précède la sélection, mais n'implique aucun lien entre l'agent mutagène et les conditions de la sélection. L'intervention de la sélection naturelle dans les processus évolutifs se fait donc, répétons-le, en deux temps : diversification génétique (par mutations, recombinaisons ou autres événements aléatoires), puis mise en ordre de la variabilité par la sélection proprement dite. Dans le premier temps, le hasard joue le rôle principal : les variations qui apparaissent ne sont pas systématiquement adaptatives et leur apparition elle-même est indépendante des conditions du milieu. Au cours de la deuxième étape s'opère la sélection proprement dite, agent organisateur extrinsèque. Dans une population de milliers ou de millions d'individus tous différents, certains génotypes sont particulièrement avantageux dans les conditions écologiques du moment : statistiquement, ils ont plus de chances que les autres de survivre et d'engendrer une descendance. C'est dans ce deuxième temps que l'évolution trouve son orientation : les fréquences des gènes, ou des combinaisons de gènes les plus favorables, à un instant donné et en un lieu donné, augmentent, l'adaptation de la population au milieu dans lequel elle vit se perfectionne; ainsi apparaissent des spécialisations; ainsi se développent des radiations adaptatives; ainsi se réalise ce qu'on a l'habitude d'appeler le progrès évolutif. L'idée de créer de tels systèmes artificiels fondés sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique est due à Holland. C'est dans son livre originel intitulé *Adaptation in natural and artificial systems*, publié en 1975, qu'il posa le cadre général de l'étude de ce que l'on nomme actuellement les algorithmes génétiques[3].

2 L'expression néo-darwinisme renvoie à deux acceptions distinctes : le néo-darwinisme historique, qui correspond à la révision de la théorie darwinienne par August Weismann, et le néo-darwinisme contemporain, qui correspond à la "théorie synthétique de l'évolution". C'est de ce néo-darwinisme contemporain qu'il sera question ici (Chapeville et al., 1979).

3 Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'exploration robustes. Ces derniers maintiennent une population de structures, qui évoluent en fonction des règles de sélection et autres opérateurs génétiques. Les individus de la population sont représentés par des *chromosomes* qui sont en fait des chaînes de caractères simulant les chromosomes biologiques. Les individus ainsi schématisés sont soumis à un processus d'évolution qui crée des individus plus ou moins adaptés à leur environnement. Ceux qui possèdent une meilleure adéquation ont plus de chances de survivre et de transmettre leur patrimoine génétique.

Afin d'être plus explicite, appliquons ce modèle à l'étude du jeu des triplets (Gardner, 1986, p. 105). Ce jeu se joue sur une bande formée de *n* cases avec des pions d'un seul type. Les joueurs A et B déposent chacun à leur tour un pion sur une case jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne en alignant trois pions adjacents.

La figure 2 montre une partie gagnée par B sur un terrain formé de 6 cases.

Configuration 0

Situation initiale: le damier est vide. C'est à **A** de jouer.

Configuration 1

Lorsque le nombre de pions sur le damier est impair, c'est à **B** de jouer

Configuration 2

Lorsque le nombre de pions sur le damier est pair, c'est à **A** de jouer.

Configuration 3

Configuration 4

Les trois cases adjacentes 4, 5 et 6 sont occupées: la partie est terminée.

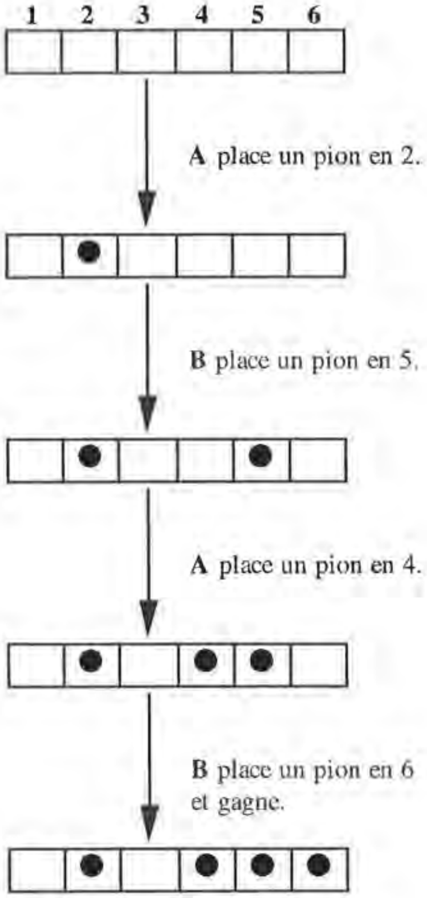


fig. 2

Comment définir les stratégies puis conséquemment les chromosomes ? Pour définir une stratégie, il suffit simplement de préciser pour chaque situation que peut rencontrer un joueur l'action qu'il exécuterait. Comment transformer cette information en un semblant de chromosome ? Rappelons qu'un chromosome est une très longue molécule d'acide désoxyribonucléique (ADN) qui renferme toute l'information génétique de la cellule et que cette information est codée linéairement à l'aide de quatre types de bases nucléotidiques : l'adénine (A), la cytosine (C), la guanine (G) et la thymine (T). Formellement, un chromosome n'est donc rien d'autre qu'une chaîne de caractères, un très long mot, composé à l'aide d'un alphabet restreint de quatre lettres. Pour donner à une stratégie une forme analogue, il faut commencer par définir un alphabet. Dans notre exemple, celui-ci sera constitué par les nombres 1 à n qui correspondent au coup permis. Puis il suffit de concaténer autant de caractères que de configurations possibles du jeu. Dans une cellule le code génétique s'exprime en deux étapes : dans un premier temps, la séquence des bases nucléotidiques d'un brin de la double hélice d'ADN est transcrite en un brin complémentaire d'acide ribonucléique (ARN) messager; dans un second temps, l'ARN messager est traduit en protéine. Pour extraire l'information d'un «chromosome-stratégie», il faut recourir à une table de conversion qui assigne à chaque position du chromosome une configuration possible du jeu. Chaque caractère définit le coup à exécuter dans la situation définie par la position du caractère. Considérons à titre d'exemple le cas $n = 6$. Le joueur A, qui commence, peut rencontrer 22 situations différentes. Représentons-en quelques-unes (voir fig. 3).

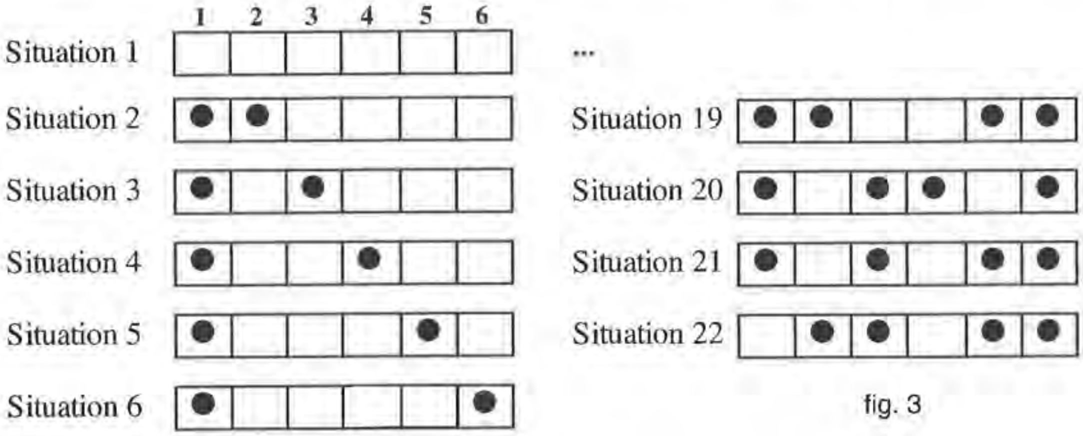


fig. 3

La première situation à laquelle le joueur A peut être confronté est un damier vide, les 15 suivantes sont des damiers recouverts de 2 pions, les 6 suivantes sont des damiers recouverts de 4 pions.

Dans la situation 1, A peut choisir entre 6 actions : jouer en 1, en 2, en 3, en 4, en 5, ou en 6.

Dans les situations 2 à 17, A a le choix entre 4 actions.

Dans les situations 18 à 22, il ne lui reste chaque fois que deux possibilités.

Pour définir sans aucune ambiguïté la stratégie d'un joueur qui commence, il suffit d'indiquer la manière dont il jouerait dans chacune des 22 situations qu'il est susceptible de rencontrer.

Pour $n = 6$, le premier joueur a donc le choix, sans tenir compte de la symétrie, entre

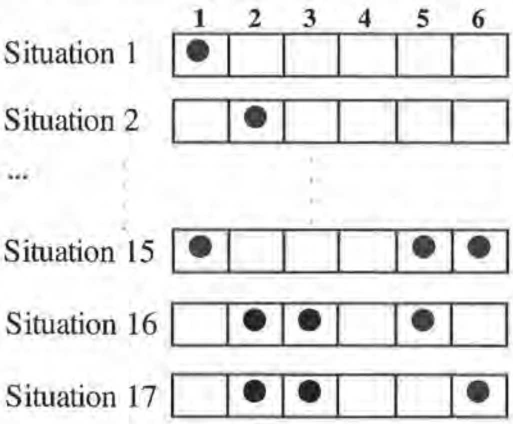
$$6^1 \times 4^{15} \times 2^6 = 412'316'860'416$$

stratégies différentes.

Le joueur B peut lui aussi lors d'un partie rencontrer 22 situations différentes (voir fig. 4).

Les 6 premières situations auxquelles B peut être confronté sont des damiers recouverts d'un seul pion, les 16 autres sont des terrains recouverts de 3 pions.

Lorsqu'il n'y a qu'un pion sur le damier, B a le choix entre 5 actions; lorsqu'il y en a 3, il a le choix entre 3 actions.



Le joueur B a donc à sa disposition $5^6 \times 3^{16}$ = 672'605'015'625 stratégies différentes.

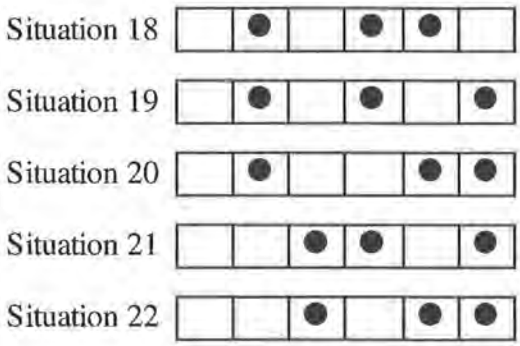


fig. 4

Supposons que les stratégies des joueurs A et B soient définies par les deux chromosomes suivants (voir fig. 5) :

Chromosome-stratégie A

Nucléotides	1	3	2	2	4	5	1	3	6	4	2	4	5	6	5	3	6	5	3	5	4	1
Positions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Chromosome-stratégie B

Nucléotides	6	5	6	1	2	3	3	3	5	5	2	2	3	5	2	4	4	3	3	4	2	4
Positions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

fig. 5 : exemples de génotypes

Ces deux chromosomes représentent le génotype des joueurs A et B. S'ils s'affrontent voici leurs échanges (voir fig. 6) :

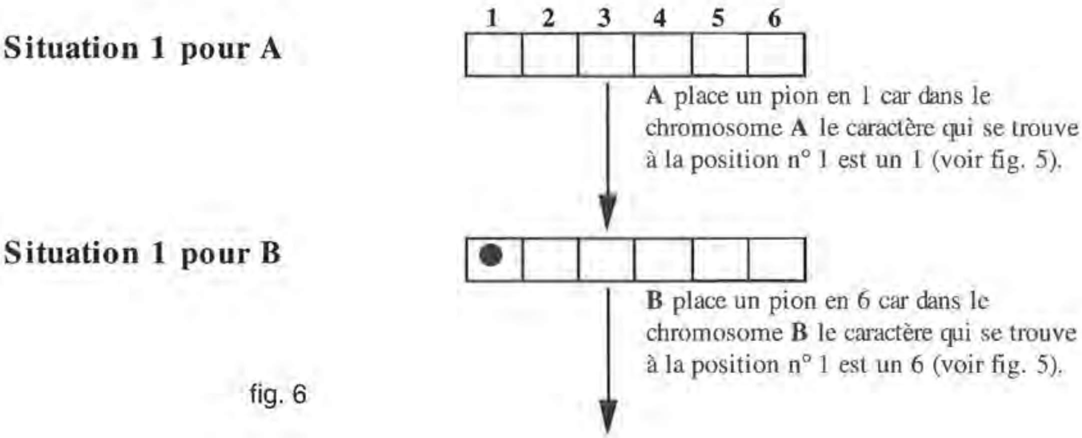


fig. 6

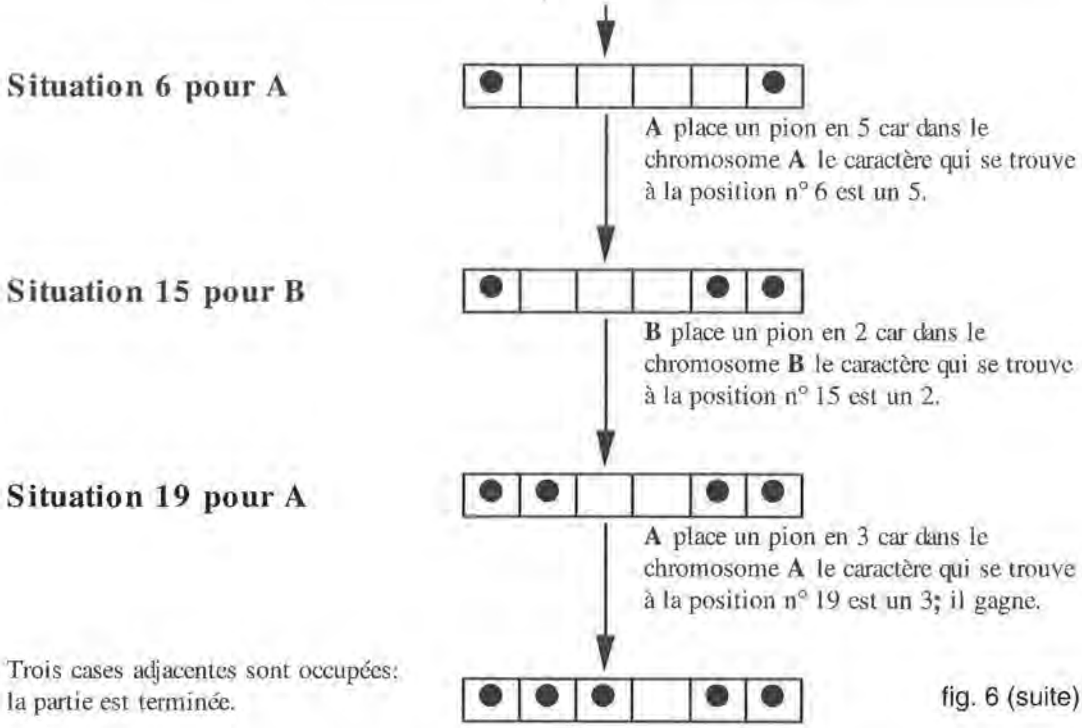


fig. 6 (suite)

Cette partie est l'expression de l'information portée par leur génotype, elle représente ce que nous pourrions nommer les phénotypes des joueurs A et B.

Constituons maintenant deux échantillons aléatoires : le premier extrait des stratégies de A, le second de celles de B. Puis examinons comment évoluent ces deux populations, le passage d'une génération à la suivante s'effectuant par l'exécution d'un cycle complet composé des trois opérateurs génétiques préalablement définis. Nous suivrons les changements apparaissant dans les deux populations en évaluant régulièrement leur diversité respective. Cette diversité globale se détermine en moyennant les diversités locales. En une position donnée x la diversité $d(x)$ s'évalue par une entropie relative[4] :

$$d(x) = -\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i \ln f_i}{\ln m}$$

m : nombre d'actions différentes qu'il est possible de choisir lorsqu'on se trouve dans la situation x;

f_i : proportion des individus de la population optant dans la situation x pour l'action i.

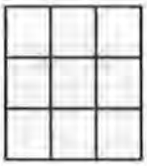
4 Les détails techniques importent peu; ce qui compte, c'est de savoir qu'il est possible grâce à la notion d'entropie de traduire précisément en termes mathématiques, ce que nous entendons intuitivement par le mot «désordre». Mon bureau est couvert d'une dizaine de piles de documents. Si je désire mettre la main sur un article particulier et que je sais dans quelle pile il se trouve, vous conviendrez qu'un ordre certain règne dans mon bureau, l'entropie y est donc faible. Si j'hésite entre deux piles, cela signifie que l'ordre n'est plus parfait, l'entropie est ici un peu plus élevée. Si à l'extrême, je n'ai aucune idée de la pile dans laquelle se trouve l'article, alors vous conclurez que mon bureau est véritablement en pagaïe et que l'entropie y est maximale. L'on voit à travers cet exemple que l'entropie est étroitement liée à l'ignorance. Plus le désordre est grand dans mon bureau, moins bien je connais l'emplacement de mes divers documents. Si l'entropie et l'ignorance sont covariantes, cela entraîne que l'entropie et l'information sont contra-variantes (lorsque l'une croît, l'autre décroît, et vice versa).

La diversité locale, $d(x)$, prend une valeur comprise entre 0 et 1. Si $d(x) = 0$, alors la diversité est nulle, tous les individus de la population choisissent dans la situation x la même action. Si $d(x) = 1$, alors la diversité est maximale, toutes les actions semblent équivalentes, aucune n'est préférée; dans ce cas, pour tout i: $f_i = 1/m$ [5].

5 Supposons que nous désirions peindre une grille de dimensions 3x3. Nous disposons de 3 couleurs: rouge, jaune et bleu.

a) Si nous décidons de n'employer que du bleu, nous ne pouvons composer qu'un seul motif

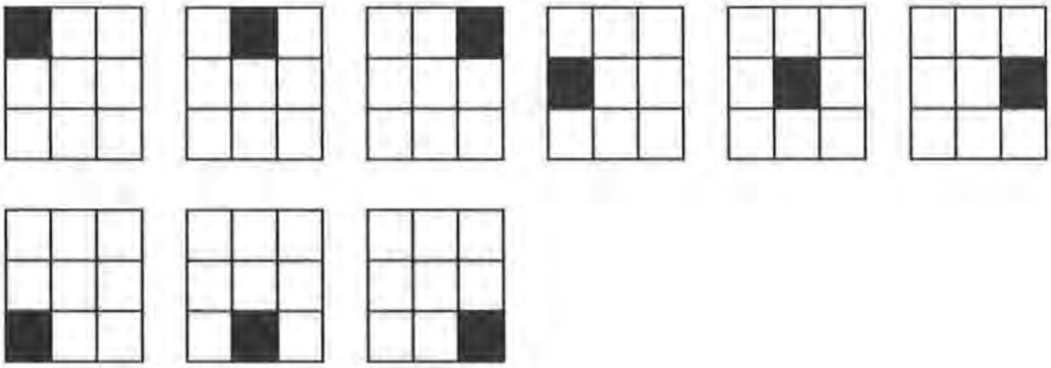
$\left(\frac{9!}{0!0!9!} = 1\right)$:



Couleur	Fréquence
Rouge	0/9
Jaune	0/9
Bleu	9/9

Dans cette situation la diversité vaut $\dfrac{\frac{0}{9}\ln\frac{0}{9} + \frac{0}{9}\ln\frac{0}{9} + \frac{9}{9}\ln\frac{9}{9}}{\ln 3} = 0$.

b) Si nous décidons de ne peindre qu'une case en rouge, et toutes les autres en jaune, nous avons le choix entre 9 motifs $\left(\frac{9!}{1!8!0!} = 9\right)$:



Couleur	Fréquence
Rouge	1/9
Jaune	8/9
Bleu	0/9

L'évaluation de la diversité nous fournira quelques indices de l'évolution des stratégies. En effet, si la diversité au sein d'une population diminue, cela signifie que certains individus ont réussi à s'imposer. Ils savent donc sûrement mettre en oeuvre de judicieux stratagèmes et toujours opter dans les situations délicates pour le bon coup. La diminution de la diversité au sein d'un population signale donc que la connaissance qu'ont les individus de leur environnement a augmenté.

A titre d'illustration[6] voyons, lorsque $n = 6$, comment évolue la diversité des populations A et B, formées chacune de 200 individus (voir fig. 7 à la page suivante).

5 (suite)

Dans cette situation la diversité vaut $\dfrac{\frac{1}{9}\ln\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\ln\frac{8}{9}+\frac{0}{9}\ln\frac{0}{9}}{\ln 3} = 0.318$.

c) Si nous décidons de peindre 3 cases en bleu, 3 cases en jaune et 3 cases en rouge, nous avons le choix entre $\dfrac{9\,!}{3\,!\,3\,!\,3\,!} = 1680$ motifs différents !

Couleur	Fréquence
Rouge	3/9
Jaune	3/9
Bleu	3/9

La diversité ici est maximale, elle vaut $\dfrac{\frac{3}{9}\ln\frac{3}{9}+\frac{3}{9}\ln\frac{3}{9}+\frac{3}{9}\ln\frac{3}{9}}{\ln 3} = 1$.

Nous voyons à travers cet exemple que la diversité d'un système est grosso modo proportionnelle au logarithme du nombre d'états différents qu'il peut occuper – dans notre exemple, au logarithme du nombre de motifs qu'il est possible de composer.

Nombre de motifs	Logarithme naturel du nombre de motifs	diversité
1	0.000	0.000
9	2.197	0.318
1680	7.427	1.000

6 Toutes nos simulations ont été réalisées avec *Mathematica*®.

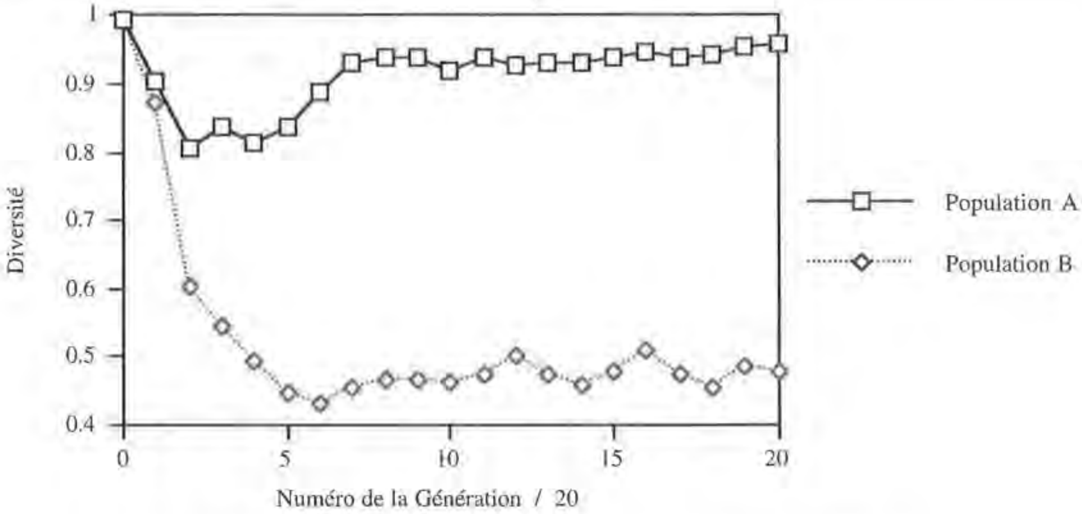


fig. 7 : Evolution de la diversité au sein des populations A et B, $n = 6$.

Au début la diversité est maximale dans les deux populations, aucune force sélective ne s'est encore exercée sur elles. Mais au cours du temps les deux populations se différencient très nettement. La diversité de la population A commence par diminuer légèrement, puis après quelques générations se met à croître pour finalement atteindre la diversité maximale. La diversité de la population B, quant à elle, décroît de manière quasi-monotone pour converger vers une valeur d'équilibre. En définitive seule la population B change, se spécifie.

Sur le plan du jeu comment interpréter ces résultats ? Remarquons que le jeu des triplets est un jeu à deux participants, du type duel, dont les caractéristiques sont les suivantes: (1) c'est un jeu «à découvert», c'est-à-dire que chaque joueur connaît tous les éléments du jeu à tout instant; (2) les deux joueurs jouent chacun à leur tour; (3) aucun élément de hasard n'intervient au cours du jeu; (4) le jeu se termine après un nombre fini de coups par la victoire de l'un des deux joueurs (aucune partie nulle n'est possible)[7] . Dans ces conditions, en vertu du théorème fondamental sur les jeux de combinaisons[8] , nous savons qu'il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

7 Le jeu des méandres, le jeu d'hex, le jeu de rex, le jeu de l'évite (Gardner, 1986), ainsi que les jeux de Nim qui ont été présentés en détails dans les colonnes de Math-Ecole (Jaquet, 1997; Genoud, 1999) sont d'autres exemples de jeux qui possèdent eux aussi ces caractéristiques.

8 Zermelo (1913) fut le premier à démontrer qu'aux échecs, ou bien les blancs peuvent gagner à coup sûr, ou bien les noirs peuvent gagner à coup sûr, ou bien chaque joueur peut assurer la partie nulle. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème plus général, qui énonce que dans tout jeu à deux joueurs de somme nulle où l'information est parfaite (c'est-à-dire où les joueurs interviennent alternativement et sont informés de la position exacte tout au long de la partie) et où aucune partie ne peut durer indéfiniment, alors ou bien l'un des joueurs peut gagner à coup sûr, ou bien les deux peuvent s'assurer la partie nulle. De Possel, qui le premier en France fit référence aux travaux de John von Neumann, publia en 1936 une démonstration lumineuse de ce théorème qu'il nomma le «théorème fondamental sur les jeux de combinaisons».

Au jeu des triplets, lorsque $n = 6$, c'est le joueur B qui possède cette stratégie. Ceci nous permet de comprendre l'évolution des populations A et B.

La population A peut, lorsque les individus de B sont encore néophytes, exploiter leurs erreurs et maladresses, sa variabilité diminue donc, jusqu'au moment où une majorité des individus de la population B découvrent une stratégie gagnante. Dès lors quoi que fassent les individus de la population A ceux de la population B gagnent. Alors que la pression adaptative s'exerce constamment sur la population B, plus aucune force sélective n'agit sur la population A qui va donc à nouveau se diversifier au maximum.

En puisant au coeur de la génétique, nous voulions proposer un modèle mathématique qui puisse rendre compte de l'évolution des stratégies d'un groupe d'élèves, c'est chose faite ! A vous maintenant, cher lecteur, de juger à l'aune de votre expérience la pertinence d'une telle proposition !

Post-scriptum

S'il est facile de montrer qu'au jeu des triplets le premier joueur peut toujours gagner lorsque n est impair, cela n'est plus aussi simple lorsque n est pair. Sur la plupart des terrains pairs le joueur qui commence semble pouvoir gagner, mais il y a des exceptions et celles-ci ne suivent aucune loi connue !

Bibliographie

- Chapeville, F. et al. (1979). Le darwinisme aujourd'hui. Paris : Seuil.
- De Possel, R. (1936). Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion. In H. Moulin, (1979), Fondation de la théorie des jeux (pp. 83-120). Paris : Hermann.
- Gardner, M. (1986). Le monde mathématique de Martin Gardner. Paris : Pour la science.
- Genoud, A. (1999). Les jeux de Nim. Math-Ecole, n° 186, 17–25.
- Holland, J. H. (1975). Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Ann Arbor : The University of Michigan Press.
- Jaquet, F. (1997). Jeux de NIM. Math-Ecole, n° 176, 25-34.
- Piaget, J. (1967). Intelligence et adaptation biologique. In Les processus d'adaptation: symposium de l'Association de psychologie scientifique de langue française, Marseille, 1965 (pp. 65-81). Paris : Presses Universitaires de France.
- Zermelo, E. (1913). Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Proceedings, Fifth International Congress of Mathematicians, 2, 501-504.

TABLE DE MULTIPLICATION[1]

Fiche pratique 187.1

Voici huit «photos» partielles de la table de multiplication des 100 premiers nombres naturels (101 lignes et 101 colonnes, avec les «entrées». A toi de les compléter.

1) L'angle supérieur gauche :

X	1	2	3		
1					
					15

2) Une partie du bord gauche :

				60	

3) Une partie du bord supérieur :

51					136

[1] Fiche créée par F. Jaquet

4) Autour de la ligne qui va de 51 à 136 :

51					136

5) Là où 224 est voisin de 225 :

			224	
		225		

6) Une partie où apparaît deux fois 144 :

			144		
	144				

7) Une zone autour de 361 :

		361	

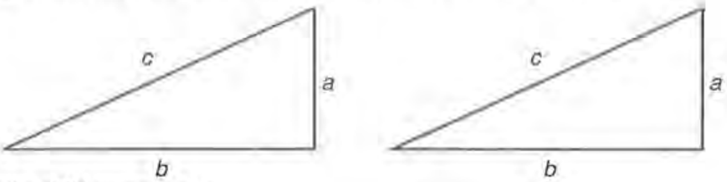
8) Dans la région de 342 à 360 :

					360
342					

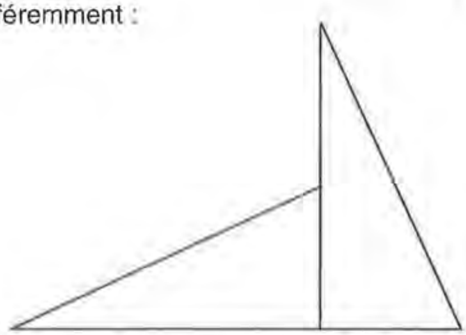
ÉLÉMENTAIRE, MON CHER ...[2]

Fiche pratique 187.2

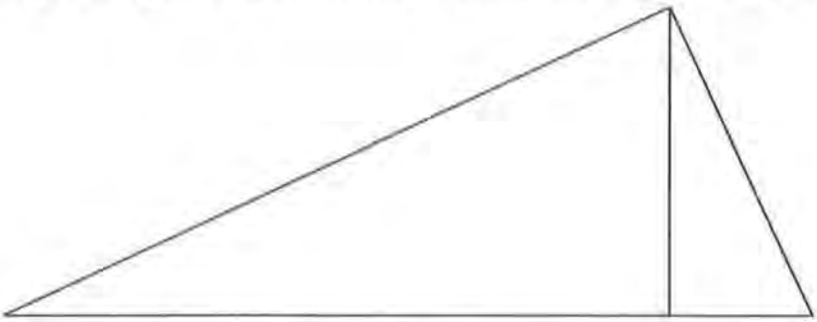
Voici deux triangles rectangles isométriques de dimensions *a*, *b* et *c* :



Les voici disposés différemment :

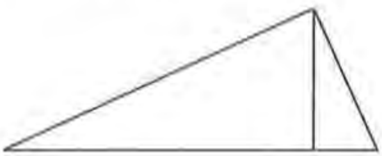


L'un des triangles est agrandi par homothétie pour ne former, avec l'autre, qu'un seul triangle :



Arriveras-tu à calculer l'aire de cette nouvelle figure - composée de deux triangles - en fonction de *a*, *b* et *c*, de deux manières différentes, et à retrouver ainsi un bon vieux théorème ?

Et ce calcul serait-il aussi possible si l'homothétie avait réduit l'un des triangles plutôt que de l'agrandir ?



[2] Fiche créée par D. Odiet, Ecole secondaire de Delémont. Voir la solution en page suivante, dans l'article «Elémentaire, mon cher ...».

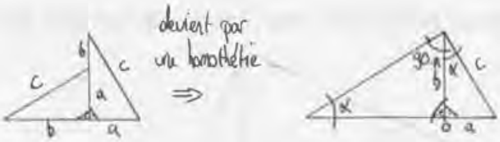
ÉLEMENTAIRE, MON CHER ... ,

La solution

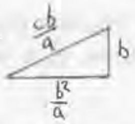
Voici une solution au problème de la fiche pratique précédente fournie par Arnaud et Christoph, élèves d'une classe de degré 9 (14-15 ans) et de niveau A (niveau supérieur en mathématiques) à qui j'ai présenté le problème, mais dans des conditions qu'il convient de préciser :

En effet, le texte faisant suite aux premiers schémas était fondamentalement différent. De conception plus «dirigée», les questions qui le composaient favorisaient – peut-être trop évidemment – la découverte du théorème de Pythagore. Le voici :

Où se situe le centre d'homothétie ? Que vaut son rapport ?
Quelle est la valeur de l'angle formé par les hypoténuses des triangles ? Pourquoi ?
Exprime la longueur des côtés du triangle agrandi.
Calcule l'aire de la figure obtenue de deux manières différentes.
Ces deux aires, exprimées littéralement, sont évidemment égales ...
Alors, ça y est, as-tu trouvé de quel théorème il s'agit ?



- Le centre d'homothétie est en o, elle a un rapport de $\frac{b}{a}$
- L'angle formé par les hypoténuses des triangles vaut 90°, car la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180°. On a déjà 90° + α, donc il manque l'angle 90 - α. Les deux triangles étant semblables, l'angle à côté de 90° - α vaut α, ce qui nous donne : 90° - α + α = 90°.
- Les mesures du triangle agrandi sont :



- Voici une façon de calculer l'aire du triangle obtenu :

$$\frac{c\,\frac{cb}{a}}{2} = \frac{c^2b}{a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{c^2b}{2a}$$

En voilà une autre :

$$\frac{\left(\frac{b^2}{a}+a\right)b}{2} = \frac{\frac{b^3}{a}+ab}{2} = \frac{\frac{b^3}{a}+\frac{a^2b}{a}}{2} = \frac{\frac{b^3+a^2b}{a}}{2} = \frac{\frac{b(b^2+a^2)}{a}}{2} = \frac{b(b^2+a^2)}{a}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{b(b^2+a^2)}{2a}$$

On utilise le fait que les deux aires sont égales pour démontrer :

$$\frac{b(b^2+a^2)}{2a} = \frac{c^2b}{2a} \quad \Big|\ \cdot 2a$$

$$b(b^2+a^2) = c^2b \quad \Big|\ : b$$

$$b^2+a^2 = c^2$$

Elémentaire, mon cher Pythagore ...

CABRidées :

Un repli stratégique !

Michel Chastellain, SPES (VD)

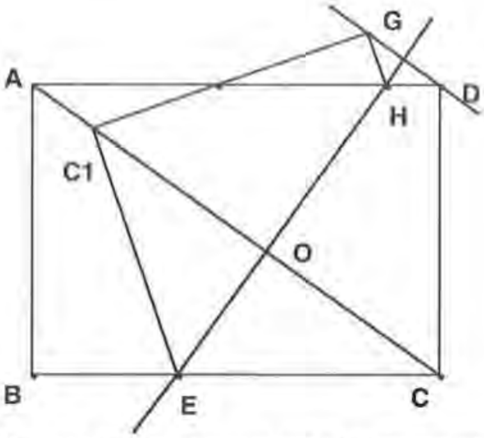
> *Plie une feuille de papierA4, de manière à juxtaposer deux sommets qui appartiennent à la même diagonale.*
>
> *Quelle est l'aire du pentagone ainsi formé ?*

Ce petit problème, découvert fortuitement au détour d'une lecture récente dont les références m'échappent totalement aujourd'hui, se révèle intéressant à plus d'un titre :

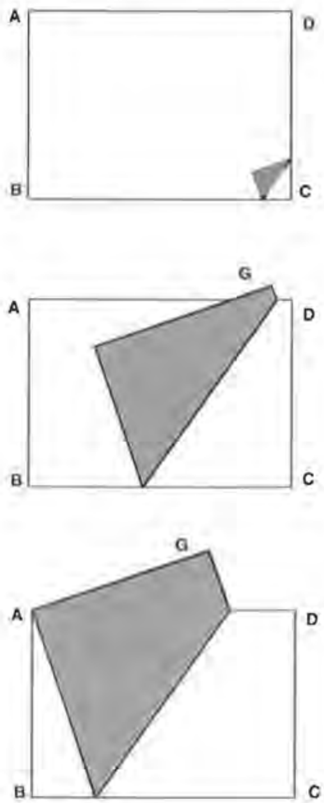
1. **Dans sa modélisation à l'aide de «Cabri-géomètre»**

Face une telle demande, la recherche débute par une phase de manipulation afin de faciliter la découverte – au travers d'une succession de pliages d'une feuille de papier de format A4 – des informations nécessaires à la construction d'une figure illustrant la situation. Une observation attentive permettra notamment de prendre conscience que :

- le sommet **C** se,« balade,» (**C_1**) sur la diagonale **CA**, jusqu'en **A** ;
- le pli **EH** est confondu avec la médiatrice du segment **CC_1** ;
- lorsque **C_1** est confondu avec **A**, le point **0** est le centre du rectangle ;
- l'image de **D** sera le point **G**, par une symétrie d'axe **EH** ;
- **HG** est l'image de **HD**, alors que **C_1G** est l'image de **CD**, par la même symétrie ;
- L'angle de sommet **C_1** est droit ;
- ...



C'est seulement lorsque ces différentes observations ont été établies – leur justification offrant l'occasion de créer une différenciation en fonction du niveau des élèves concernés – que l'on peut alors passer à la phase de construction, à proprement parler, et obtenir ainsi l'effet escompté :



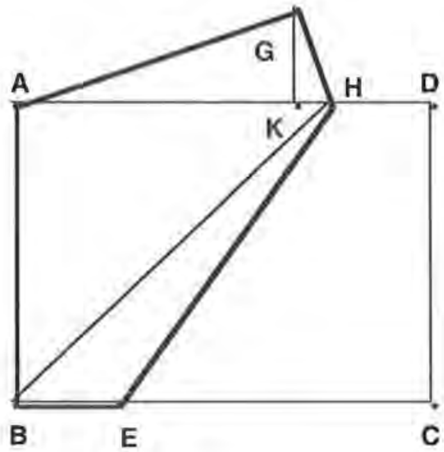
2. Au plan de la différenciation des procédure de résolution qu'il autorise

- Par mesurage «spontané»

Le pliage ayant été effectué correctement, (en amenant le sommet **C** sur le sommet **A**) les élèves mesurent les éléments nécessaires à leurs calculs. Par exemple :

AH ≅ 22,3 cm; **BE** ≅ 7,4 cm; **GK** = 7 cm

(**GK** étant la hauteur issue du sommet **G**, dans le triangle **AHG**). Ils déterminent alors l'aire du pentagone **ABEHG** en effectuant la somme des aires des trois triangles **AHG**, **ABH** et **BEH** (la largeur de la feuille A4 c'est-à-dire 21 cm, étant une hauteur des triangles **ABH** et **BEH**).



- Par mesurage «réfléchi»

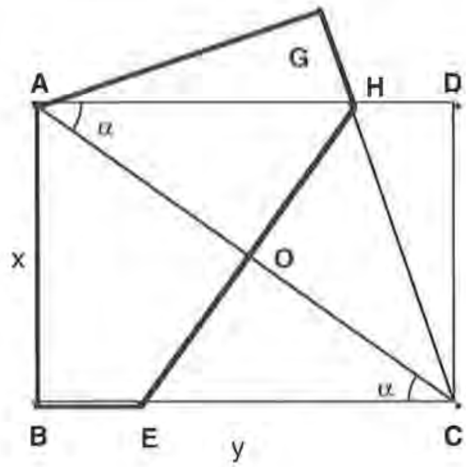
Cette deuxième démarche se fonde sur une observation du pentagone obtenu après pliage. Son analyse offre l'occasion rêvée d'entraîner l'apprentissage à la justification :

– **AB** est perpendiculaire aux deux segments parallèles **AH** et **BE** (par hypothèse, **ABCD** est un rectangle) ;

– **AG** est perpendiculaire à **HG**, parce qu'ils sont les côtés du rectangle de la feuille A4.

– le pentagone **ABEHG** se décompose donc en un trapèze rectangle **ABEH** et un triangle rectangle **AHG**, dont on obtient l'aire à l'aide de la seule mesure de **HG** (~ 7,4 cm).

- Par similitude et isométrie



Le triangle rectangle **ADC** est semblable au triangle rectangle **COE**, car :

– ∠ **DAC** = ∠ **BCA** = α, ces deux angles étant alternes internes, par hypothèse ;

– ∠ **ADC** = ∠ **COE** = 90° (par hypothèse et parce que **EH** est médiatrice de **AC**).

On peut donc en déduire que :

(avec, respectivement, x comme largeur et y comme longueur de la feuille de papier A4)

$$\frac{AC}{AD} = \frac{EC}{CO} \Rightarrow EC = \frac{AC}{AD} \cdot CO$$

$$EC = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \frac{x^2+y^2}{2y}$$

$$EC = \frac{\sqrt{21^2+29{,}7^2}^{\,2}}{29{,}7} \cong 22{,}27 \text{ cm.}$$

Par ailleurs, les triangles **AHG** et **CHD** sont isométriques (cas d'isométrie des triangles rectangles) car :

- $\angle$ **AGH** = $\angle$ **CDH** = 90° par hypothèse,
- $\angle$ **AHG** = $\angle$ **CHD** (opposés par le sommet),
- **AG** = **CD**, par hypothèse.

Donc, l'aire du pentagone **ABEHG** est égale à celle du rectangle **ABCD** diminuée de l'aire du triangle **ECH**, c'est-à-dire :

$$21 \cdot 29{,}7 - \frac{22{,}27 \cdot 21}{2} \cong 389{,}9\text{cm}^2$$

- Par trigonométrie

Dans le triangle rectangle **ACD** :

$$\tan\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{21}{29{,}7} = 0{,}707$$

$$\Rightarrow \alpha = 35{,}26^{\circ}$$

Or, par Pythagore :

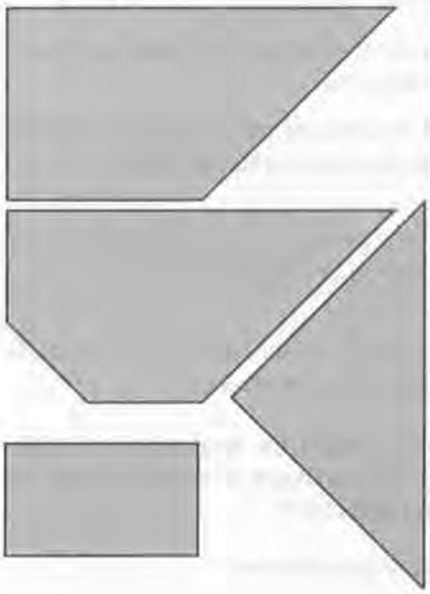
$$OC = \frac{\sqrt{21^2+29{,}7^2}}{2} = \frac{\sqrt{1323{,}09}}{2} \cong 18{,}19 \text{ cm.}$$

Finalement, dans le triangle rectangle **CEO**, on a :

$$EC = \frac{OC}{\cos\alpha} \cong \frac{18{,}19}{0{,}817} \cong 22{,}27 \text{ cm.}$$

La suite du calcul est alors identique à celle qui figure auparavant.

La maison



Découpez les cinq pièces de gauche et reconstituez une maison, inscrite dans un carré, selon le modèle ci-dessus, qui est à l'échelle mais, évidemment, n'est pas en vraie grandeur.

7e Rallye mathématique transalpin, deuxième épreuve

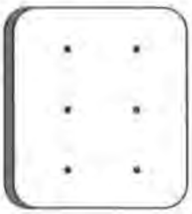
[ndlr] Après la première épreuve, présentée dans *Math-Ecole* 186, voici la deuxième épreuve du 7e RMT, qui se déroule toujours dans les mêmes conditions :

C'est le groupe classe qui a la charge de l'activité, de A à Z. En l'absence du maître, les élèves ont 50 minutes pour fournir une solution justifiée, pour la classe, de chaque problème de leur catégorie. C'est ce qui constitue, avec la résolution de problème, l'un des aspects les plus intéressants du Rallye : il faut se répartir les tâches, confronter les solutions des différents groupes engagés sur le même problème, coopérer, débattre, rédiger des justifications dont il est largement tenu compte dans l'évaluation.

La finale et d'autres commentaires paraîtront dans le numéro 188.

1. CLOUS ET ELASTIQUES (Cat 3 et 4)

Hélène et Mario ont planté six clous sur une planche comme le montre la figure. Les deux enfants essayent de former des triangles en tendant à chaque fois un élastique sur trois clous. Mario réussit à former 9 triangles. Quand Hélène essaie, elle obtient 18 triangles.



Et vous, combien de triangles réussirez-vous à former ?

Dessinez tous vos triangles.

2. GRENOUILLES ET CRAPAUDS (Cat 3, 4 et 5)

Dans un étang, il y a cinq pierres alignées. Celle du milieu est libre. Il y a une grenouille sur chacune des deux pierres de gauche et un crapaud sur chacune des deux pierres de droite.

Les grenouilles et les crapauds désirent échanger leurs places. Les grenouilles ne peuvent se déplacer que vers la droite :

- soit en sautant sur la pierre voisine, si elle est libre,
- soit en sautant par-dessus un crapaud si la pierre suivante est libre,

(on ne peut pas sauter par-dessus plus d'une grenouille ou un crapaud).

Les crapauds se déplacent de la même façon, mais dans l'autre sens.

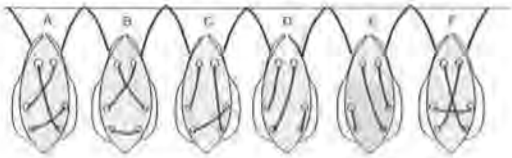
Combien faut-il de sauts pour que les grenouilles arrivent à droite et les crapauds à gauche ?

Justifiez votre réponse.

3. LES COCCINELLES PORTE-BONHEUR (Cat 3, 4 et 5)

Tonino vend des billets de loterie. Il a suspendu, au-dessus de son banc de vente, une longue file de coccinelles porte-bonheur, toutes pareilles et confectionnées dans du carton rouge et noir.

Pour les attacher et les suspendre, il a utilisé une seule ficelle qui passe dans des trous percés sur chaque coccinelle. Placé derrière son banc, Tonino ne voit que l'envers de ses coccinelles :



Mais les clients voient les coccinelles à l'endroit. Un client choisit celle-ci :

Parmi les coccinelles A, B, C, D, E ou F, lesquelles pourraient être celle que le client a choisie ?

Justifiez votre réponse.

4. LE NEZ DE PINOCCHIO (Cat 3, 4 et 5)

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

5. GOURMANDS (Cat 3, 4 et 5)

Les quatre enfants Dupont ont tous eu un dessert différent aujourd'hui.

Sonia et les deux jumeaux n'ont pas voulu la glace aux fraises. Cécile a trempé le doigt dans le flan au caramel de sa soeur. Bernard, le petit dernier, a trouvé ça très rigolo. Un des garçons a renversé une partie de sa crème au chocolat en se disputant avec son frère.

Quel est le dessert que Frédéric a mangé ?

Qui a mangé la tarte aux pommes ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et pourquoi vous pensez qu'elles sont justes.

6. ETIQUETTES (Cat 3, 4 et 5)

Pascale emballe des oeufs de Pâques dans l'usine Cocorico.

Sur chaque oeuf, elle colle une étiquette rouge.

Lorsqu'elle a emballé 10 oeufs, elle les met dans une boîte, qu'elle ferme et sur laquelle elle colle une étiquette jaune.

Lorsqu'elle a rempli 10 boîtes, elle les met dans une caisse, qu'elle ferme et sur laquelle elle colle une étiquette verte.

Hier, Pascale a emballé 256 oeufs.

Combien a-t-elle collé d'étiquettes en tout ?

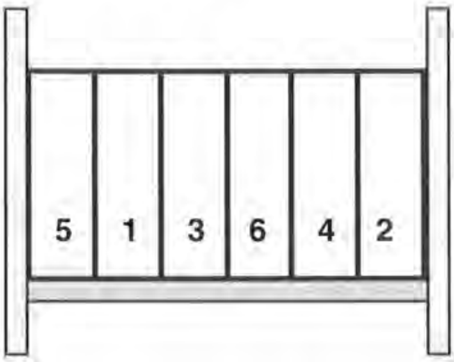
Expliquez votre raisonnement.

7. LIVRES EN DESORDRE (Cat 4, 5 et 6)

Carlo a laissé les six volumes de sa collection des *Journaux de Mickey* en désordre sur un rayon de sa bibliothèque. Il les remet dans l'ordre, du volume 1 à gauche, au volume 6 à droite, en échangeant à chaque fois la place de deux volumes voisins.

Combien d'échanges devra-t-il effectuer au minimum ?

Décrivez votre solution.



8. NOMBRES CROISES (Cat 5 et 6)

Remplissez cette grille de nombres, avec un chiffre par case, selon les indications suivantes :

Horizontalement

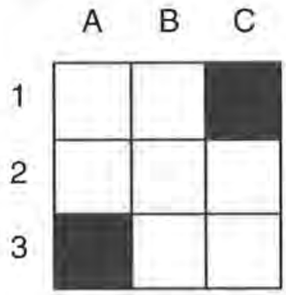
1. Multiple de 4
2. Les trois chiffres de ce nombre sont des nombres naturels consécutifs, qui se suivent dans l'ordre croissant.
3. Les deux chiffres de ce nombre sont des nombres dont la différence est un multiple de 2.

Verticalement

A. Les deux chiffres de ce nombre sont des nombres impairs consécutifs, qui se suivent dans l'ordre croissant

B. Multiple de 9

C. Multiple de 7 et de 11

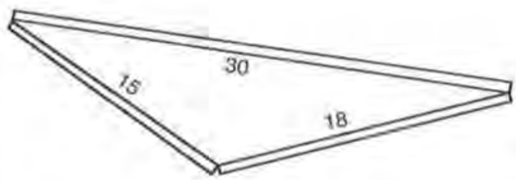


Expliquez comment vous avez procédé.

9. TRIANGLES (Cat 6 et 7)

Bérénice a sur son bureau cinq baguettes de 15, 18, 30, 33 et 46 cm de longueur. Elle en choisit trois et les dispose en triangle.

Voici, par exemple, ce qu'elle obtient avec celles de 15, 18 et 30 (le dessin est réduit)

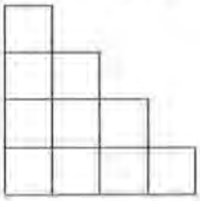


Combien de triangles différents pourrait-elle former avec ses cinq baguettes ?

Décrivez chacune de vos solutions.

10. MAUVAIS VOISINS (Cat 6, 7 et 8)

Placez les dix nombres de 1 à 10 dans les cases de ce tableau, un par case, en respectant les deux conditions suivantes : Dans deux cases qui ont un côté commun, on ne peut pas placer deux nombres qui se suivent (dont la différence est 1) ou deux nombres qui ont un diviseur commun autre que 1.



Notez une solution et expliquez comment vous l'avez trouvée.

11. LE CHIFFRE LE PLUS UTILISE (Cat 6, 7 et 8)

Dans un gros livre, la numérotation des pages commence à la page 7 et se termine à la page 413.

Quel chiffre a-t-il été utilisé le plus souvent pour numéroter toutes ces pages, et combien de fois ?

Expliquez votre démarche.

12. L'HORLOGE (Cat 6, 7 et 8)

Monsieur Dormeur a dormi longtemps dans sa chambre totalement obscurcie. Sur sa table de nuit se trouve une horloge qui indique les heures de 1 à 12. Mais, malheureusement, la petite lampe qui indique si c'est le matin (AM) ou l'après-midi (PM) ne fonctionne plus. Lorsqu'il se réveille, voici ce que voit M. Dormeur :

M. Dormeur s'aperçoit tout de suite que son horloge est retournée. (Parce que le «1» se retrouve à gauche de son petit rectangle, le «4» est devenu «h» et le «7» est devenu «L»)

A quels moments de la journée n'aurait-il pas pu s'en apercevoir ?

Expliquez votre raisonnement.

13. LES DEUX MAGOTS (Cat 6, 7 et 8)

La mère Michèle a un grand jardin rectangulaire entouré d'un haut mur. On y entre par l'angle sud-ouest. En suivant le mur depuis l'entrée, on trouve, à 120 mètres, un puits dans l'angle sud-est, puis, à 90 mètres de là, une cabane à outils dans l'angle nord-est, et finalement un vieux banc de pierre dans le dernier angle.

La mère Michèle aimait beaucoup l'argent et les bijoux, mais elle avait peur qu'on les lui vole, alors elle les enterrait dans son jardin.

A sa mort, ses deux héritiers ont lu ceci sur son testament :

Mathilde, je te lègue le coffre. Pour le trouver, pars de l'entrée du jardin et dirige-toi vers le puits en suivant le mur. Arrivée à la moitié du chemin, arrête-toi. Dirige-toi alors en ligne droite, vers le banc de pierre. Quand tu auras franchi un tiers de la distance qui te sépare du banc, creuses et tu trouveras le coffre.

Léon, tu auras le sac avec les bijoux du chat. De l'entrée du jardin, suis le mur en direction du banc de pierre. Arrivé à la moitié du chemin, dirige-toi en ligne droite vers le puits. Quand tu auras franchi un tiers de la distance qui te sépare du puits, creuses et tu trouveras le sac.»

Indiquez à quelle distance du mur Sud et du mur Ouest se trouvent les deux sacs.

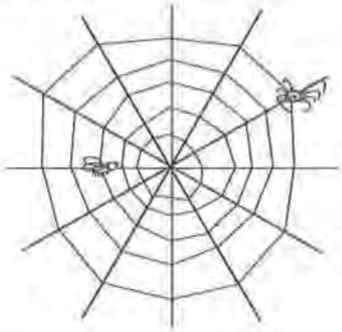
Indiquez comment vous avez procédé et justifiez vos réponses.

14. LA TOILE (Cat 7 et 8)

Typsy, l'araignée, se prépare à aller dévorer la mouche prise dans sa toile. Son itinéraire doit suivre les fils de la toile et passer par le moins de noeuds possible.

Combien de chemins «minimum» différents peut-elle suivre pour aller manger la mouche ?

Décrivez tous ces chemins.



15. LES MAJORETTES (Cat 7 et 8)

Lors du prochain Mundial de football, chaque nation présentera son équipe au son de son hymne national, accompagnée d'une chorégraphie de ses sympathiques majorettes tenant chacune un pompon dans chaque main. Le Sénégal se présentera avec 36 majorettes, dont certaines seront tout en jaune, d'autres en rouge et d'autres en vert. Le chorégraphe a décidé de disposer ses majorettes en cercle, ainsi :

- chaque majorette rouge sera toujours suivie immédiatement d'une seule majorette verte;
- les majorettes jaunes suivront toujours immédiatement une seule verte et précéderont une seule rouge;
- le nombre des majorettes jaunes sera le quart de celui des vertes.

Combien y aura-t-il de pompons jaunes ?

Expliquez votre réponse.

16. PALINDROMES (Cat 8)

Dans la famille ROTOR, le père OTTO, la mère ANNA et les enfants AMIMA et BOB lisent parfois de droite à gauche et parfois de gauche à droite. Ils disent que ça n'a pas d'importance pour eux et qu'on peut aussi effectuer les multiplications en lisant de droite à gauche, sans changer le résultat.

Par exemple, ils pensent

que 24 x 84 est égal à 48 x 42

que 62 x 39 est égal à 93 x 26, etc.

Et vous, qu'en pensez-vous ?

Si vous pensez que ça marche toujours, ou si vous êtes d'un avis contraire, expliquez pourquoi et donnez tous les produits de deux nombres de deux chiffres (où ne figure pas plus plus d'une fois le même chiffre) qui conviennent à la famille ROTOR.

DIGIT junior

Martine Simonet, Ecole Normale, NE

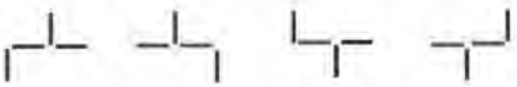
PROBLEME

Inspiré du jeu Digit (édité chez Carlit en 1987), ce problème de recherche débouche sur la création de cartes permettant de réaliser ce jeu dans une version plus simple que la version originale, puisqu'on n'utilise que 4 bâtonnets au lieu de 5.

Énoncé

De combien de manières différentes peut-on placer 4 allumettes horizontalement ou verticalement ? Il faut que les allumettes se touchent au moins par une extrémité.

Dans l'exemple ci-dessous, on considère ces 4 dispositions comme étant une seule et même solution :



(Réponse: il y a 16 dispositions possibles.)

JEU

Ce jeu permet d'entraîner les notions d'isométrie, symétries axiale et centrale et rotation en particulier.

Nombre de joueurs : 2 à 4

Âge : dès 11 ans

Matériel : 4 allumettes, les 16 cartes créées par les élèves (voir problème ci-dessus.)

But du jeu : se débarrasser de ses cartes en formant avec les allumettes un des motifs représentés sur celles-ci.

Préparatifs

Pour 2 ou 4 joueurs : Les allumettes sont disposées sur la table de manière à former un carré. Les cartes sont mélangées et réparties entre les joueurs. Le joueur qui possède la carte correspondant à la disposition des allumettes la dépose puis c'est au tour du joueur suivant.

Pour 3 joueurs : Les cartes sont mélangées et l'une d'entre elles, posée à l'endroit au milieu de la table, sert de carte-modèle. Les bâtonnets sont disposés conformément au schéma figurant sur la carte-modèle. Les 15 cartes restantes sont distribuées équitablement entre les joueurs.

Règles du jeu

À tour de rôle, chaque joueur déplace une allumette, en veillant à ce que toutes les allumettes se touchent. Il essaie de former un schéma identique à celui reproduit sur l'une de ses cartes.

Si le joueur y parvient, il dépose la carte correspondante sur celle exposée précédemment.

Remarque : la disposition obtenue par le joueur peut être dans une autre position que celle de la carte correspondante (selon l'exemple donné dans le problème). C'est au joueur de reconnaître l'égalité de sa disposition et de celle de la carte, à une isométrie près. Si le joueur ne peut former de schéma identique après avoir déplacé une allumette, il ne peut pas déposer de cartes. Lorsqu'un joueur a formé, par hasard, un schéma qui figure dans le jeu d'un de ses adversaires, celui-ci peut déposer sa carte.

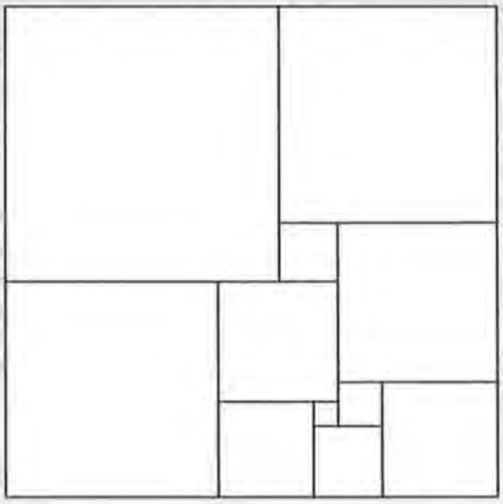
Le gagnant est le premier qui réussit à déposer toutes ses cartes.

Variable

On peut, comme dans le jeu original, jouer avec 5 allumettes. Le nombre de combinaisons est alors plus important et par conséquent la difficulté plus grande. Les règles sont également légèrement différentes.

Sur demande, *Math-Ecole* peut vous fournir les règles du jeu ainsi qu'un modèle des différents schémas en format "cartes de jeu".

Corine et Mathieu sont retournés au Sarconistan[1] acheter de nouveaux tapis pour leur chambre à coucher. Pour éviter les mésaventures de leur premier achat qui les avait contraint à de savants découpages, ils établissent un plan très précis du «tapissage» du sol de leur pièce. Ils constatent ainsi qu'il leur faudra juxtaposer exactement 11 tapis carrés, dont les mesures sont toutes des nombres entiers de centimètres, pour qu'il n'y ait ni espace vide ni superposition :



Chambre de M et C: ($\approx$ 14 m^2)

Mais, au fait, la chambre de Corine et Mathieu est-elle carrée ? Quelle est son aire ?

Et combien de couleurs de tapis au minimum, nos deux tourtereaux devront-ils choisir pour éviter que deux tapis adjacents ne soient de la même couleur ?

[1] Voir Math-Ecole 184 et 185

Voyage au centre de la géométrie (suite)

Le puzzle, un outil didactique au service des maths

G. Sarcone, M.J. Waeber

Nous allons reprendre ici en première partie, les dissections de carrés dont nous vous avions parlé dans Math-Ecole n°184. Nous traiterons de quelques cas particuliers de découpes géométriques qui pourraient constituer des exercices à réaliser en classe. Tout le monde sait ce qu'est un carré, c'est tout simple... 4 côtés égaux bien droits, et voilà le travail! On a l'impression de le connaître comme sa poche, et pourtant... le carré recèle des facettes cachées. C'est ce que nous allons découvrir ensemble.

Les trois coups ayant été frappés, levons le rideau ...

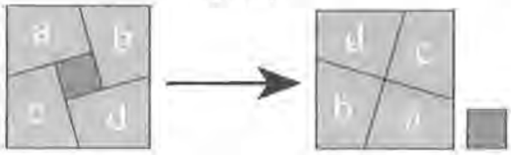
Macédoine de carrés ...

<u>Permutations qui ne tournent pas rond</u>

Les carrés des fig. 1.a) et b) sont identiques (isométriques), le premier est découpé de sorte qu'en permutant ses pièces (a<>d, c<>b) nous nous retrouvons avec deux carrés, un petit et un grand (Cf notre précédente rubrique dans Math-Ecole 184).

Voici la question : pourquoi donc, en permutant les pièces du carré 1.b), nous ne pouvons former un petit et un grand carré comme précédemment ? Question subsidiaire: seriez-vous à même de former un triangle équilatéral en utilisant 3 des 5 pièces du puzzle de la fig. 1.b)?

fig. 1a)



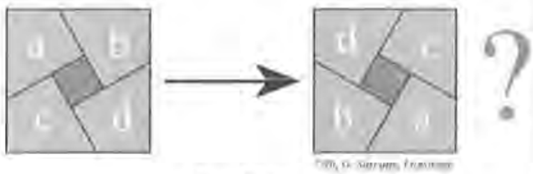


fig. 1b)

<u>Transformation: 2 carrés en 1</u>

Le puzzle de la fig. 2.a) a le plus petit nombre de pièces possibles pour transformer deux carrés en un seul. Il n'en existe pas d'autres aussi simple. Question subsidiaire : donnez la longueur des côtés du carré final de la fig 2.b).

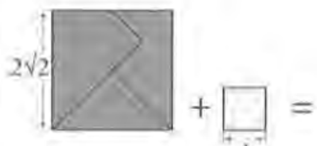


fig. 2a)

fig. 2b)

<u>Transformation de carrés en quasi rectangles d'Or.</u>

Les rectangles ainsi composés ont pour côtés deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci (2, 3 et 3, 5, voir fig. 3.a) et 3b)).

Vous pouvez étendre la recherche à d'autres nombres consécutifs, si vous le souhaitez...

fig. 3a)

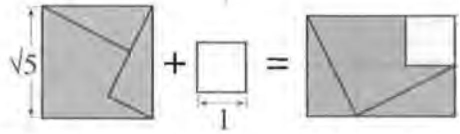
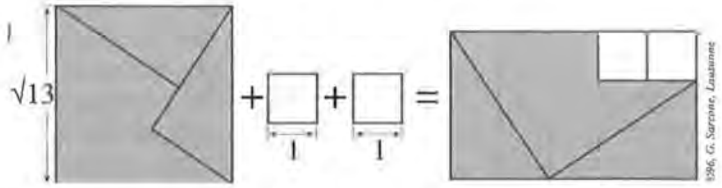


fig. 3b)



Que de carrés ... que de carrés ...

La case manquante

Dessinez un carré de 11 unités de côté. A l'aide du compas, tracez un segment oblique long de 12 unités, selon le dessin de la fig. 4.a). Avec une équerre, tracez ensuite une perpendiculaire (de 10 unités de longueur) à ce segment oblique. Mettez bien en évidence les marques de mesure. En modulant ses 3 pièces, le puzzle de 121 unités au carré (fig. 4.b) se métamorphose en un rectangle de 120 unités au carré (fig. 4.c). Où est passée l'unité manquante? Très bonne question...

fig. 4a)

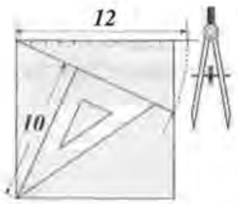


fig. 4b)

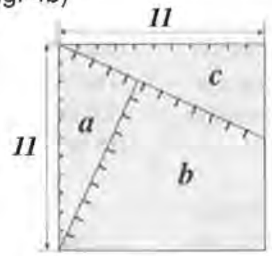
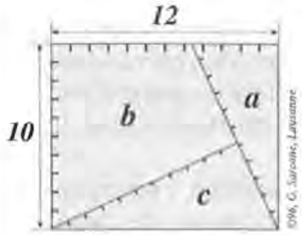


fig.4c)



Les ronds d'Oz

Voici un puzzle bien sympathique composé de 14 pièces (fig. 5.a, des chapelets de disques) disposées dans un cadre selon la fig. 5.b). Il s'agit ici d'imbriquer dans l'espace carré 3 disques supplémentaires sans modifier les dimensions du jeu. Nous avons une solution à la fig. 5.c), mais pouvez-vous dire combien de dispositions possibles nous pouvons effectuer ? Existe-t-il des dispositions qui permettent l'intégration de seulement un ou deux disques ?

fig. 5a)

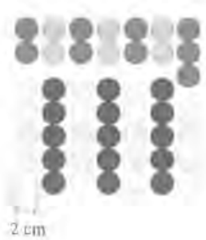


fig. 5b)

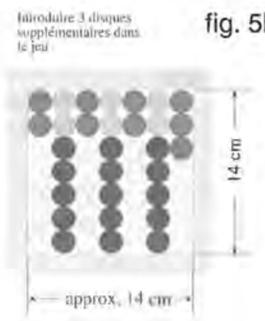
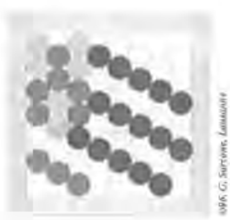


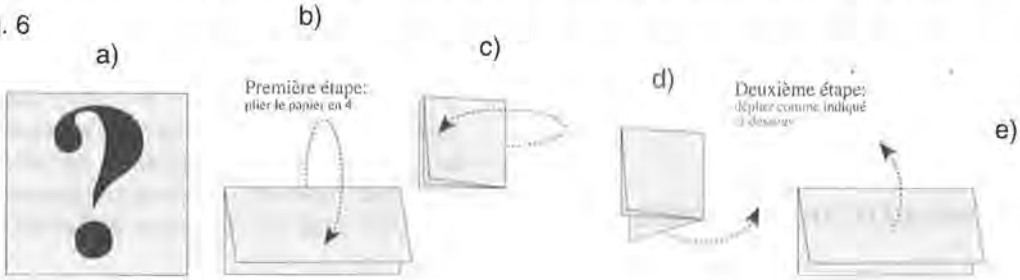
fig. 5c)



Le carré renversant

Un petit jeu de topologie (voir aussi Math-Ecole 179, pag. 9). Que se passe-t-il lorsque l'on plie une feuille carrée contenant une image comme illustré ci-dessous (de 6a) à 6e)) ?

fig. 6

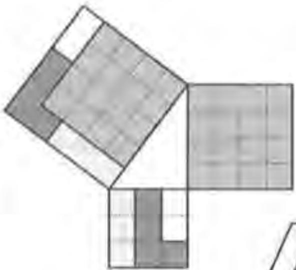


Pythagore, carrés et Cie

Jouons avec Pythagore

Tous connaissent le fameux théorème de Pythagore dont les carrés en sont les ingrédients de base. Nous savons que l'on peut utiliser d'autres polygones à la place des carrés pour illustrer ce théorème (généralisation des propriétés du théorème). Ce n'est pas simple à démontrer, mais les puzzles peuvent se révéler, dans ce cas, très efficaces. Nous avons ci-dessous un exemple canonique (fig. 7.a), suivi de deux exemples utilisant, l'un, des triangles équilatéraux (fig.7.b), l'autre, des hexagones (fig. 7.c). Inventez d'autres variations sur le même thème! Vous pouvez employer n'importe quel polygone pour imager ce théorème; cependant, pour rendre la démonstration plus "parlante", utilisez 3 polygones réguliers ayant pour côtés des «nombres de Pythagore» ou leurs multiples) réunis ici, pour vous, par groupes de trois: 3, 4, 5 - 5, 12, 13 - 7, 24, 25 - 8, 15, 17 - 9, 40, 41... etc.

fig. 7a)



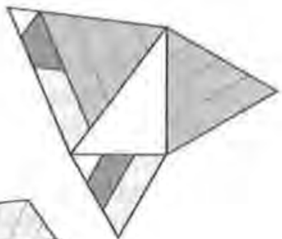


fig. 7b)

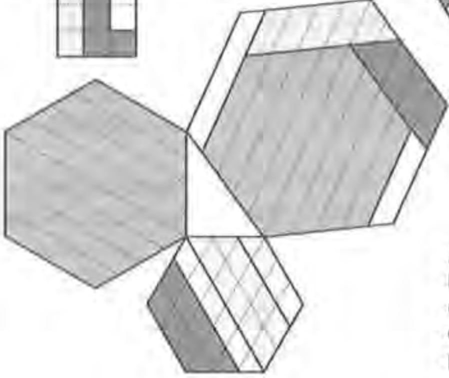


fig. 7c)

Agrandissez à la photocopieuse les dessins des puzzles ci-dessus que vous collerez ensuite sur du carton fort, avant d'en découper les pièces.

F. Jaquet

LE THÉORÈME DU PERROQUET

Denis Guedj, Editions du Seuil, 528 p.

Grosrouvre, exilé au coeur de la forêt d'Amazonie s'est constitué une bibliothèque à faire pâlir d'envie tout mathématicien. Il vient de mourir, brûlé dans sa maison : crime, accident ou suicide ? Une chose est certaine : avant sa mort, il a expédié tous ses livres, avec leur classement précis, à Paris, à son ancien ami Monsieur Ruche, un vieux libraire hémiplégique. C'est lui qui résoudra l'énigme, aidé par un enfant sourd, Max, deux jumeaux en pleine adolescence, Jonathan et Léa, leur mère, Perrette, et Nofutur, un perroquet, d'après les indices précieux tirés de la «bibliothèque de la forêt», installée dans l'arrière boutique de la librairie.

L'affaire avait commencé aux puces de Clignancourt, où Max avait « récupéré » ce perroquet que deux types bizarres tentaient de capturer. ... Si l'intention de l'auteur était de rendre les mathématiques vivantes, d'en présenter plus de 2500 ans d'histoire d'une manière agréable et facile à lire, sous la forme d'un roman policier, on peut affirmer que Denis Guedj a atteint son objectif.

Le théorème que le perroquet «raconte» et ne se contente pas de réciter par coeur, est celui de Thalès. Et Thalès prend vie, devient un personnage, un être humain, devant une tâche difficile : la mesure de la hauteur de la pyramide de Kheops.

On est confronté ensuite aux trois grands problèmes des Grecs : celui de la quadrature du cercle, de la trisection de l'angle ou de la duplication du cube. On rencontre Omar al-Khayyam, poète et mathématicien puis al-Khwarizmi inventeur de l'algèbre. On se passionne pour les formules de Tartaglia et Cardan, pour les nombres imaginaires de Bombelli, pour les malheurs de Galois.

L'auteur replace ainsi toutes les grandes inventions qui ont fait les mathématiques dans leur contexte historique, mais surtout humain, tout en se maintenant sur un fond d'intrigue dont les ficelles sont parfois un peu grosses, mais toujours en lien avec le thème : et les conjectures de Fermat et de Goldbach, Grosrouvre les avait-il effectivement prouvées ? et Nofutur, le sait-il ? est-il vraiment devenu amnésique ou refuse-t-il de dévoiler les découvertes de son ancien maître ?

A lire cet ouvrage remarquable, on se demande pourquoi on n'utilise pas plus l'histoire et le roman d'aventures pour permettre aux élèves d'établir un autre rapport avec les mathématiques, pour les leur faire connaître, pour se rendre compte de leur richesse, pour y voir de la passion, chez ceux qui les ont construites comme chez ceux qui les redécouvrent.

Denis GUEDJ, professeur d'Histoire des Sciences à Paris VIII, avait déjà écrit (entre autres) *L'empire des nombres*, paru dans la collection Découvertes Gallimard en 1996.

Destinataires : toute personne intéressée par l'histoire des mathématiques, les maîtres qui l'enseignent et les élèves du secondaire supérieur en particulier.

Mots clés : mathématiques et histoire.

POURQUOI ONT-ILS INVENTÉ LES FRACTIONS ?

Nicolas Rouche
Ellipses Ed. Coll. L'Esprit des sciences

«Les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité «réservée aux plus intelligents».

Alors pourquoi ont-ils inventé les fractions, si elles font tant de mal ? C'est qu'elles sont une clé des partages de grandeurs, des rapports et donc des mesures, des proportions, des figures semblables, des probabilités, du calcul des exposants, des notations algébriques...

Cet ouvrage s'adresse aux grands élèves, aux parents, aux enseignants, à toutes les personnes qui voudraient, en partant du bon sens et de l'univers quotidien, reconstruire leur savoir en s'appuyant à chaque pas sur le pourquoi des choses. Et reprendre en chemin confiance dans leur capacité à comprendre les mathématiques, à en apprécier la pertinence, le sens et la beauté.»

Le commentaire ci-dessus figure sur la couverture de ce petit livre (126 pages en 14,5 x 19, présentation sobre et claire, nombreuses figures, résumés de chaque chapitre, bibliographie, glossaire et index) publié récemment. Nous la reprenons à notre compte et encourageons vivement tous nos collègues à lire au plus vite *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* .

Nous connaissons bien Nicolas Rouche et apprécions sa grande culture mathématique comme son esprit de synthèse. Deux de ses ouvrages font référence pour de nombreux maîtres de mathématiques : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* et Le *sens de la mesure* (v. Math-Ecole 177) . Ce dernier ouvrage, sur les fractions, est de la même veine et constitue une synthèse magistrale du sujet.

L'auteur, en termes très simples, part des connaissances communes des gens d'aujourd'hui et des questions qui font sens pour eux, en confrontant à chaque étape les contraintes imposées par ces connaissances et celles de la construction mathématique. Il va du concret à l'abstrait et, au travers de nombreux exemples fort bien choisis, il nous montre toute la richesse, mais aussi les difficultés de notions fondamentales en mathématique.

Conjuguant les contraintes de la réalité, du bon sens et de la logique déductive, il explore et utilise bien des situations (partages, symétries des figures, polygones étoilés, problèmes de troc, figures semblables, situations de proportionnalité, probabilités, ...) dans une quête permanente du sens.
Par exemple à partir de la situation de «5 amis qui veulent se partager 3 tartes», il montre qu'il «est loin d'être évident que chacun recevra trois cinquièmes de tarte et donc que partager une tarte en 5 puis prélever 3 morceaux aboutit au même résultat que prendre 3 tartes, partager le lot en 5 parts égales et prélever une des parts. ... »; puis il examine les différents types d'explications de cette équivalence, de la «preuve paradigmatique» (sur un cas représentatif) à la démonstration au sens usuel.

N. Rouche nous conduit ainsi, pas à pas, aux calculs sur les fractions, non sans souligner que, les «fractions mesures» étant peu utilisées par rapport aux «mesures décimales», l'intérêt essentiel de ces calculs relève du calcul des probabilités, de leur caractère métaphorique (de modèle) par rapport aux fractions algébriques, et, enfin, de la construction des nombres rationnels.

Sept chapitres, chacun clos par un résumé des idées ou résultats clés :

1. Couper en parts égales (21 pages) (avec, comme partout ailleurs, des situations de tous ordres).
2. Multiplier, partager, prélever (8 pages).
3. Les rapports (20 pages).
4. Unités de commune mesure (où il est question de pavages de rectangles et d'algorithme d'Euclide) (9 pages).
5. Mesurage et rapports de mesures (11 pages).
6. La proportionnalité (12 pages).
7. Calculer avec les fractions (24 pages).

Chaque chapitre en soi est une synthèse remarquable, et l'ensemble permet de découvrir la richesse du champ des fractions. Certains se posent parfois la question : «les fractions, à quoi ça sert ? ». Ils y trouveront immédiatement la réponse dans ce petit chef-d'oeuvre.

Destinataires : maîtres de mathématiques du primaire au secondaire.

Mots clés : mathématiques, didactique, nombres rationnels ou fractions, secondaire.

LE DERNIER THEOREME DE FERMAT

Simon Singh, Ed. J-Cl Lattès

Le 23 juin 1993 à Cambridge Andrew Wiles propose une démonstration du théorème de Fermat, 358 ans après son énoncé. Simon Singh, journaliste scientifique et docteur en physique nucléaire, se propose en suivant une structure chronologique de relater la genèse de cet énoncé et les péripéties liées aux différentes recherches de démonstration.

Il décrit d'abord les différentes étapes au fil du temps des découvertes mathématiques portant sur les nombres en partant de Pythagore et des pythagoriciens jusqu'à Fermat en passant par Diophante. Ceci permet au lecteur de mieux comprendre la passion de Fermat pour les nombres, passion qui l'amène à formuler son fameux théorème. Les travaux d'Euler et de Sophie Germain pour valider ce théorème sont présentés accompagnés d'anecdotes concernant ces deux mathématiciens. Dans un langage quasi compréhensible pour un profane l'auteur explique les échecs d'un certain nombre de mathématiciens et les progrès accomplis dans la construction et la compréhension des mathématiques allant des certitudes d'Hilbert au théorème de Godel sans oublier le rôle d'Evariste Galois et sa courte vie agitée. L'auteur réussit à donner vie à ceux qui ne sont dans les dictionnaires que des noms de mathématiciens et à présenter simplement leurs idées; de plus il parvient à illustrer pour un non-mathématicien ce que sont les exigences de la preuve (conjecture d'Euler vraie jusqu'au rang 2 000 000. fausse au delà).

La fin de l'ouvrage est consacrée à la construction de la démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles. Il a l'idée d'associer deux domaines des mathématiques apparemment forts éloignés l'un de l'autre : les groupes cycliques créés par Galois et les fonctions elliptique recherches antérieures conduites par plusieurs mathématiciens contemporains : Tanyama Shimura entre autres.

Cet ouvrage devrait avoir sa place dans les bibliothèques de lycée : il est en grande partie accessible à des élèves de terminale

Michel LE BER *Bulletin APMEP* no 421

Destinataires : toute personne intéressée par l'histoire des mathématiques, maîtres de mathématiques, élèves du secondaire supérieur.

Mots clés : mathématiques, histoire.

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	......	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Histoire des Maths, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
La magie du calcul, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Pliages mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	......	(ex. à Fr. 25.-)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	......	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres.	......	(ex. à Fr. 6.-)
Actes de la CIEAEM, *prix de souscription*	......	(ex. à Fr. 28.-)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	......	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	......	(ex. à Fr. 25.-)
Panoramaths 96, APMEP	......	(ex. à Fr. 15.-)*
Problemi, che passione, Ed. Capitello.	......	(ex. à Fr. 9.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	.....	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Singe et la Calculatrice (n° 14)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
La Biroulette russe (n° 9)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Roi des Nuls (n°13)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Sabre d'Aladin (n° 15)	....	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7