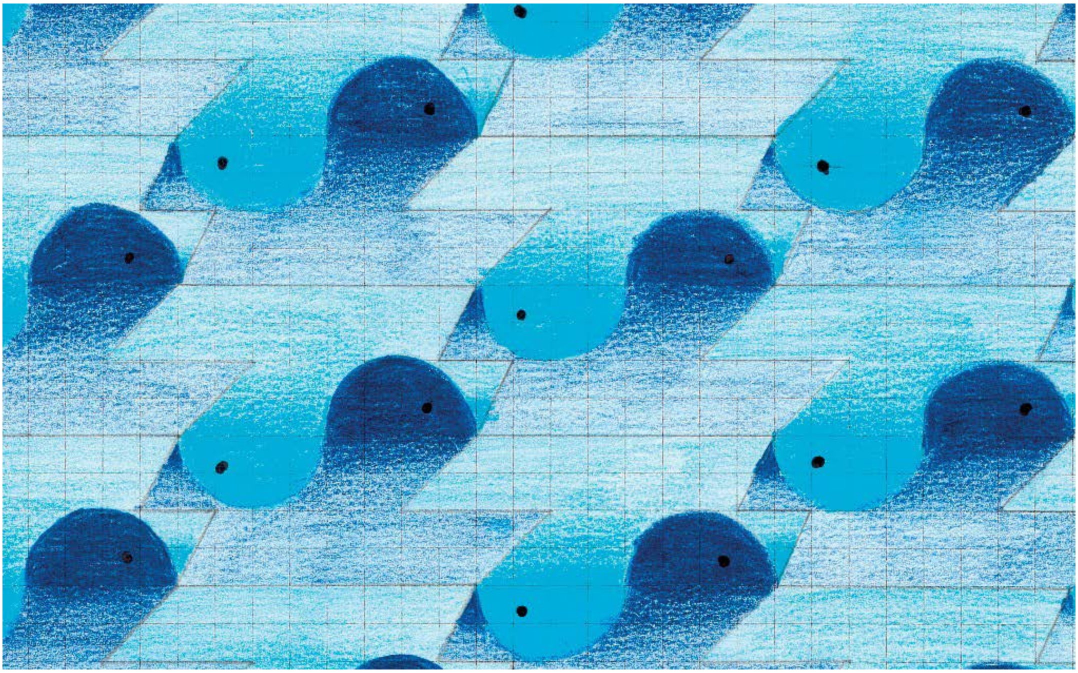
MATH-ÉCOLE 219

Avril 2013



MATH-ECOLE

219
Avril 2013

sommaire

Editorial

Céline Vendeira Maréchal

Après une période de latence de 6 ans, la revue Math-Ecole a repris son activité avec la parution du numéro spécial 218 lors du dernier colloque EMF (Espace Mathématique Francophone) qui s'est déroulé à Genève en février 2012.

La Revue Math-Ecole sera dorénavant publiée deux fois par année, sous forme électronique. Une fois tous les deux ans, un numéro spécial sera édité en version papier. Il est possible d'être régulièrement informé en s'inscrivant sur le site via un formulaire.

La revue s'adresse aux enseignants suisses romands du primaire et du secondaire, y compris de l'enseignement spécialisé, qui enseignent les mathématiques, aux formateurs de terrain ou universitaires, aux chercheurs en didactique des mathématiques et aux étudiants en formation initiale, mais aussi à toute personne désireuse de s'informer sur les travaux récents ou de partager des expériences touchant à l'enseignement et à la didactique des mathématiques. Au-delà de la Suisse Romande, la revue se veut ouverte sur le monde francophone. De plus, la revue peut également accueillir des articles concernant l'enseignement des sciences de la nature.

La sélection des articles est attentive à permettre une représentation des différents niveaux d'enseignement (primaire, secondaire inférieur et secondaire supérieur, enseignement spécialisé) et des auteurs (chercheurs, formateurs, enseignants, étudiants), et s'attache à varier les types de textes proposés (propositions d'activités, résultats de recherche, articles d'actualité, etc.).

A cet effet un comité éditorial de cinq personnes ainsi qu'un comité de rédaction regroupant onze personnes ont été constitués. Les différentes personnes impliquées sont représentatives des différentes HEP suisses romandes (Hautes Ecoles Pédagogiques), de l'équipe DiMaGe (Didactique des Mathématiques Genève) à l'Université de Genève, de l'IRDP (Institut de recherche et de documentation pédagogique) et du comité de la SSRDM (Société Suisse pour la Recherche en Didactique des Mathématiques).

Nous espérons que vous pourrez vous enrichir de la lecture de Math-Ecole et même que vous contribuerez à cette revue en proposant des articles.

Toutes les informations concernant les appels d'offres, les dates de parution des prochains numéros ou la politique éditoriale figurent sur le site de Math-Ecole :

http://www.math-ecole.ch/mathecole/

Les numéros 50 à 218 de la revue sont consultables en ligne gratuitement.

L'appel d'offres est d'ores et déjà lancé pour le numéro suivant. Alors si vous souhaitez contribuer au numéro 220, merci d'envoyer votre texte d'ici au 15 juillet 2013**.**

Transposition didactique de quelques critères de divisibilité dans le manuel de 6P (8Harmos)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Dans ma thèse de doctorat (Del Notaro, 2010), j'ai proposé une tâche portant sur les critères de divisibilité par 4, figurant dans un cahier genevois à destination des enseignants primaires (voir figure 1), pour réaliser mes expérimentations. Ces dernières consistaient à donner à des élèves de 11-12 ans, la possibilité d'effectuer des expériences à propos du nombre avant tout, mais aussi de leur faire faire une expérience de recherche à propos de diverses relations de divisibilité. Dans une perspective épistémologique, j'ai cherché à comprendre comment les connaissances se forment, poussant l'investigation du milieu le plus loin possible.

Un temps nécessaire à la constitution de l'expérience est indispensable à la construction des connaissances, afin que celles-ci puissent s'adapter entre elles et aboutir au savoir. En effet, l'élève doit pouvoir disposer d'un bagage expérientiel dans lequel puiser, ce qui se construit peu à peu dans l'exploration d'un contenu mathématique ; par exemple, avoir l'occasion de se poser des questions élémentaires, mais néanmoins fondamentales (est-ce que 222 est plus pair que 112 ? Un nombre pair, c'est un multiple de 2 ? Etc.). Ces questions semblent banales, et pourtant… S'interroger et investiguer le milieu, sans subir la pression du savoir censé être acquis – comme par exemple ce que l'on peut lire dans la figure 2 : « *les élèves savent déjà reconnaître un multiple de 2 (nombres pairs)* » – est un gage de dévolution[1].

L'étude et l'expérimentation de la tâche retenue dans ma recherche (situation Charrière) m'a permis d'effectuer un bon nombre de constats, dont l'un des plus saillants a été la question de la dévolution. Lorsque j'ai découvert dans le manuel de 6P l'énoncé de l'exercice 19 (voir figure 3), si proche de la situation que j'avais traitée, j'ai été immédiatement intéressée à les comparer du point de vue de la dévolution et de la transposition didactique.

Nous verrons que cet exercice 19 s'avère très fermé, alors qu'à première vue, il semble être une situation ouverte laissant de la place à la recherche par l'élève. La situation Charrière ne sera pas discutée ici, sa présence dans ces lignes n'étant due qu'à sa ressemblance avec l'exercice 19. Toutefois, pour faciliter la lecture, voici son énoncé :

2	.	7	.	: 4
milliers	centaines	dizaines	unités	

A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.

B. Remplace le 7 des dizaines par d'autres chiffres (1, 2, 3, ...);
- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?

Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 1 : énoncé de la situation Charrière (1991), p.214.

Je vais considérer en premier lieu ce que la méthodologie préconise à propos des critères de divisibilité et faire ensuite une analyse de l'exercice 19 du point de vue de sa transposition didactique, pour en montrer les contenus sous-jacents (Figure 2).

Il apparaît que c'est le choix du calcul qui a été fait, au détriment de l'étude du nombre et de ses diverses relations. Le sens de l'enseignement des critères est lié à leur « utilité » et l'on peut même supposer une hiérarchie : si l'on s'en tient à la formulation du début de la page 105, il y aurait des critères de divisibilité plus ou moins « *efficaces* », plus ou moins « *rentables* » au sens de l'enseignement d'un *truc*. En effet, l'introduction des critères de 2, 5, 10 et 100 en premier lieu permet de penser qu'ils sont aux premières loges du point de vue de

1 *Proposer une tâche et faire accepter à l'élève la responsabilité du problème à résoudre.*

Les critères de divisibilités sont utiles en calcul réfléchi. Les élèves savent déjà reconnaître des multiples de 2 (nombres pairs), de 5 (nombres se terminant par 0 ou 5), de 10, de 100 et peut-être de 50 et de 25. En sixième, les critères permettant de reconnaître ces multiples peuvent être formulés à peu près correctement.

Mais là encore, dans l'esprit du thème, ce n'est pas la formulation qui compte, mais la méthode qui a permis la découverte des critères : une hypothèse, sa vérification sur de très nombreux exemples puis, en cas de confirmation systématique de l'hypothèse, son adoption comme règle.

Les critères de divisibilité par 3 et par 9 sont caractéristiques de cette démarche hypothético-déductive, mais leur justifiation n'entre pas en ligne de compte en sixième année.

Même si un critère ne peut être « saisi » par tous, il peut se révéler fort pratique et d'un usage facile. L'élève qui n'arrive pas à le découvrir pourra au moins le vérifier. Dans l'activité 20 par exemple, certains constateront la relation entre la somme des chiffres d'un nombre et le reste de la division par 9 ; d'autres ne feront qu'un simple exercice destiné à consolider les notions de dividende, diviseur, quotient et reste.

Figure 2 : extrait de la méthodologie 6P

l'efficacité ; viennent ensuite ceux de 25 et 50, puis enfin, ceux de 3 et 9, qui sont destinés à une démarche « hypothético-déductive », ce qui laisse sous-entendre qu'ils sont plus à même d'être proposés en recherche pour les élèves. Les critères de 4 et de 6 ou encore de 7 et de 8 ne sont pas même évoqués, car ils ne sont pas très « pratiques », pour reprendre ce terme utilisé par les auteurs (première ligne, dernier paragraphe).

Pour terminer le commentaire de cette page 105, la question se pose, parmi d'autres, de savoir si l'on admet qu'un critère que l'élève découvre est un critère que l'élève « saisit ». C'est sur cette ambiguïté que se sont construites mes expérimentations, afin de tordre le cou à ce genre d'idées reçues qui induisent les enseignants en erreur.

Dans cet environnement méthodologique, l'exercice 19 se présente en effet comme un problème relativement ouvert, mais nous allons voir qu'il ne l'est pas.

Il y a quatre parties à considérer dans le dessin ci-après :

- En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs ?
- 3732 est-il un multiple de 4 ?

$$\begin{array}{r|l} 3732 & 4 \\ \hline 32 & 8 \end{array}$$

- Mais M'sieur, on peut reconnaître un multiple de 4 sans effectuer la division !!! Il suffit d'observer les deux derniers chiffres du nombre !
- Évidemment ! D'ailleurs on peut aussi reconnaître de cette façon les multiples de 20, 25 et de 50 !!!

L'énoncé de l'exercice 19 semble ouvrir vers une exploration du nombre, mais les propos contenus dans la caricature l'excluent aussitôt : elle contient à la fois les réponses et la marche à suivre.

C'est le seul spécimen traitant des critères de divisibilité dans les manuels officiels.

L'exercice qui vient juste après propose quant à lui, une simple application de quelques autres critères.

Le choix se porte donc clairement vers le calcul[2], l'apprentissage d'un truc.

Or ce *truc* est la partie visible du critère, qui reste magique si l'on ne peut approcher les maths qui se trouvent cachées derrière. Le dessin renforce encore cette idée.

2 cf. méthodologie de 6P, p. 105 : Les critères de divisibilité sont utiles en calcul réfléchi

Figure 3 : exercice 19, p. 48, livre de l'élève 6ème année

Partie (1) : Cette première partie ne se rapporte pas au contenu de l'illustration ; on pourrait la considérer comme une sorte de mise en train proposée à l'enseignant, un rappel concernant les multiples de 2 et de 5, censés être connus[3].

En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs ?

Autrement dit : existe-t-il un critère qui consiste à regarder le dernier chiffre du nombre [et le comparer au diviseur], tel que ce critère soit un moyen de savoir si un nombre possède ou pas tel ou tel diviseur?

La réponse est oui : en ne regardant que le dernier chiffre, on peut savoir si un nombre est divisible par 2 ou par 5. En termes de puissances, on peut écrire 2 comme 2^1 et 5 comme 5^1. C'est l'exposant qui indique le nombre de chiffres à considérer dans le nombre. Ici l'exposant est 1, on regarde 1 chiffre. Concernant la divisibilité par 4, on peut factoriser 4 en facteurs premiers[4], ce qui donne 2^2 ; l'exposant 2 indique que l'on considère les deux derniers chiffres.

Partie (2) :

3732 est-il un multiple de 4 ?

3732	*4*
32	*8*

Remarque : On aura relevé l'erreur contenue dans cette opération ?!

Si l'on effectuait cet algorithme, le quotient commencerait par 9 (9x4=36) et non par 8 et l'on soustrairait 36 de 37, et non pas 32.

La question, telle qu'elle est disposée dans le dessin, avec l'algorithme situé juste en dessous, implique un changement de perspective : on ne demande plus de réfléchir sur les nombres, mais d'effectuer un algorithme, autre moyen de savoir, évidemment, si un nombre est divisible.

Il est probable que l'on veuille rappeler

3 *Ibid. : Les élèves savent déjà reconnaître des multiples de 2 (nombres pairs), de 5 (nombres se terminant par 0 ou 5), de 10, de 100 et peut-être aussi de 50 et de 25. En sixième, les critères permettant de reconnaître ces multiples peuvent être formulés à peu près correctement.*

4 *Rappelons ici l'importance de la base 10 dans tous critères de divisibilité (si l'on envisage les critères de divisibilité par 3, par 4 en base 8, on comprendra que c'est bien parce que 10 = 2x5 (décomposition en facteurs premiers) que l'on va s'intéresser d'une manière privilégiée aux exposants de 2 et de 5.*

l'algorithme dans cette partie du dessin, même sous forme erronée et humoristique, dans le but de montrer toutes les façons de répondre à cette question. L'algorithme de la division étant un moyen calculatoire de procéder, c'est comme si la seule observation des nombres était « risquée », comme si l'on craignait que le calcul en pâtisse ; on le rappelle du reste dans la méthodologie par cette phrase, déjà évoquée : *les critères de divisibilité sont utiles en calcul réfléchi*. Quant à l'erreur relevée, on peut se demander s'il s'agissait de montrer la faillibilité de l'algorithme ou alors, si c'est une manière de rappeler que 32 (deux derniers chiffres de 3732) est un multiple de 4. Une autre interprétation possible encore, allant dans le sens de mes observations en classe, serait que l'illustrateur a été victime lui aussi de l'abondance des informations et des connaissances mises en jeu dans cet exercice : il n'a considéré que les deux derniers chiffres, comme le veut le critère, mais a appliqué cette règle à sa propre résolution de la division, qu'il commence par la droite, comme s'il s'agissait de l'une des trois autres opérations (addition, soustraction ou multiplication). Ceci permet de relever une influence possible de l'illustration sur les procédures des élèves et la question se pose de savoir si ces dessins font partie du problème ou non.

Partie (3) :

Mais M'sieur, on peut reconnaître un ***multiple de 4*** *sans effectuer la division !!! Il suffit d'observer les* ***deux derniers chiffres du nombre !***
De même que pour la partie (1), c'est l'exposant qui indique le nombre de chiffres à considérer dans le nombre : ici, on regarde les deux derniers chiffres, mais cela tombe d'on ne sait où…

Partie (4) :

Évidemment ! D'ailleurs on peut aussi reconnaître de cette façon les multiples de 20, 25 et de 50 !!!
On considère donc les deux derniers chiffres là aussi, étant donné les exposants 2 (25 peut s'écrire 5^2 ; 20 peut s'écrire $5x2^2$ et 50, $2x5^2$).

Ainsi, pour les multiples de 2 (2^1) et de 5 (5^1), on regarde le dernier chiffre du nombre alors que pour les multiples de 4 (2^2), de 25 (5^2), de 20 (5.2^2) et de 50 (2.5^2), on considère les deux derniers chiffres.

Cette partie (4) est une sorte de généralisation de l'ensemble des critères de divisibilité qui consistent à regarder le-s dernier-s chiffre-s d'un nombre pour savoir si celui-ci est divisible par un autre ; cette généralisation indique le nombre de derniers chiffres à regarder. Pour les multiples inférieurs à 10, cela concerne les multiples de 2, 4, 5 et 8 (8 obéit également à la règle)[5]. Pour les multiples de 3, de 6 et de 9, le critère s'exprime différemment[6] et pour les multiples de 7, il y a d'autres méthodes[7].

Dans notre exemple, la généralisation s'exprime par le lien entretenu entre l'écriture d'un nombre en facteurs premiers 2 et/ou 5 et leur exposant.

L'exercice est construit de la façon suivante : on pose la question à propos de 2 et de 5, on établit qu'il s'agit de 2^1 et de 5^1, l'illustration évoque ensuite 2^2 et 5^2, et la dernière partie représente encore 5.2^2 et 2.5^2, qui sont des compositions de ces deux premiers nombres.

Le savoir mathématique caché derrière la formulation de l'exercice 19 est pour le moins opaque, du point de vue de la transposition didactique. L'analyse de cet exercice montre que le sens des critères, la façon de les trouver, ce à quoi ils servent, pourquoi on les apprend, etc. sont autant de questions éludées ici, au profit de l'aspect calculatoire.

En consultant les programmes et plans d'études, du primaire jusqu'au secondaire inférieur, j'ai constaté que les propriétés structurelles des entiers relatifs n'étaient

5 *Le nombre 8 peut s'écrire 2^3, son critère de divisibilité est effectivement de regarder les trois derniers chiffres du nombre, qui doivent former un multiple de 8.*

6 *Pour 3 et 9, si la somme des chiffres d'un nombre est un multiple de 3 ou de 9, alors ce nombre est un multiple, respectivement de 3 ou de 9. Pour 6, le nombre doit être pair et multiple de 3.*

7 *Pour 7, il y a trois méthodes, dont l'une est : on prend tous les chiffres sauf le dernier, on soustrait 2 fois le dernier, on vérifie si le résultat est divisible par 7*

pas un objet d'enseignement, du moins, au moment où j'ai mené ma recherche. Entre, d'une part, la volonté du Cycle d'Orientation de ne pas étudier les critères de divisibilité comme un chapitre de la théorie des nombres et d'autre part, celle du primaire de les utiliser pour le calcul réfléchi, c'est le choix du calcul qui est clairement fait et stipulé. Au primaire, l'étude de ce chapitre semble vouloir s'ouvrir vers l'étude du nombre sous des aspects très variés, mais il s'étrique soudainement pour se conformer à la clause de l'utilité. Par ailleurs, cette clause apparaît de manière très marquée au secondaire inférieur où, par exemple, le critère de 4 sera éliminé car considéré comme trop compliqué à retenir, au profit des critères de 2, 5, 10, 3, considérés comme utiles. On constatera tout de même avec étonnement que le critère de 3 n'est pas associé à ceux de 6 et 9.

Avec le récent PER, le secondaire inférieur a pallié quelque peu ce manque, ce qui transparaît dans l'item MSN32 où il est fait référence à ces critères : « *Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres….* ». Le secondaire se trouve ainsi plus en lien avec une théorie des nombres qu'au primaire, où ils sont situés dans MSN23 « *Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs …*» renforçant le lien avec la calculation comme déjà évoqué.

Dans la discussion de la partie (1) de l'exercice 19 avec des élèves, ce dont on s'aperçoit, et qui est tout à fait intéressant, c'est que les élèves en *savent trop* dans le sens où ils ne parviennent pas à considérer l'énoncé dans sa plus simple expression. Ces élèves en sont plus loin dans leur réflexion à propos des critères, ce qui les empêche de comprendre l'énoncé au plus simple : ils pensent déjà aux deux ou trois derniers chiffres.

Les propos de l'élève 1 montrent que quand il regarde 448, il sait déjà que c'est un multiple de 4 et de 8. Lorsque l'élève 2 lui répond Avec 458, *on peut dire la même chose, mais ça ne marche pas*, il veut dire que ça ne marche pas pour 4 et 8, dont il sait également qu'il n'est pas multiple de 4, ni de 8.

La question est interprétée ainsi : est-ce qu'en regardant le 8 de 458 ou 448, je peux inférer que ces nombres possèdent les diviseurs 4 et 8 (sachant que la réponse est affirmative) alors que la question est tout simplement, pour reprendre les mêmes termes : « est-ce qu'en regardant le 8 de 458 ou 448,

L'expérimentateur (Exp.) propose d'écrire quelques nombres au hasard et de tenter de répondre à la question

E1 : Ça dépend, on ne peut pas savoir. Par exemple avec 448, on peut dire en regardant le 8 qu'il possède les diviseurs de 1, 2, 4, 8 ; ça marche.

E2 : Avec 458, on peut dire la même chose, mais ça ne marche pas

E3 : Avec 689, aucun diviseur, sauf 1 et 689 mais si on regarde le dernier chiffre, on répondrait 3, 9.

Exp. propose 237

E2. : Avec 237, on dirait 1 et 7, et en fait c'est un multiple de 3 en plus. En regardant que 7, on dirait que non.

E3 : 237 n'est pas un M7 car 37 n'est pas dans le livret de 7 (Il utilise les critères de 4)

E2 : 237 se divise pas par 3

Exp. : Tu te souviens du critère de 3 ? On additionne les chiffres.

E2 : Ah oui alors ça fait 12

E3 : Mais ça nous sert pas de voir que ça fait 12

E2 : En regardant le 7, je peux pas dire si c'est un M4 mais c'est un M4 car 12 est M4 (addition des chiffres du nombre).

E3 : En fait c'est une mauvaise technique de regarder le dernier chiffre parce que ça marche une fois sur deux.

Je cherche à repérer ce que les élèves comprennent de cet énoncé.
L'illustration brouille les pistes, notamment sur le fait que l'on dévie sur les multiples de 4.
La question porte en effet sur le dernier chiffre et non pas sur les deux derniers chiffres, comme suggéré par l'image.
Les élèves disent d'emblée que ce n'est pas « *En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre…* » mais ils rectifient « *En observant les deux derniers chiffres d'un nombre…* ».
La question posée par l'énoncé leur échappe puisqu'ils la transforment aussitôt.
Je rectifie à mon tour, en répétant la question.

Discussion de la partie (1) de l'exercice 19 avec des élèves

je peux savoir si ces nombres possèdent ou non certains diviseurs ». La réponse est : oui, le 2.

Cet exercice vient après que les élèves aient expérimenté et formulé énormément de connaissances à propos des critères, justes ou fausses, qui ont néanmoins guidé leurs représentations des rapports de divisibilité.

En conclusion, on constate que les explorations des élèves les amènent beaucoup plus loin que ce que le manuel préconise de manière figée dans cet exercice, mais pour ce faire, ils doivent avoir du temps pour chercher, tâtonner, se tromper, recommencer, etc.

L'expérience se constitue sur un temps long (*cuisson lente*) et les résultats de ma recherche ont montré l'intérêt de laisser cette *cuisson* se faire, pour que les connaissances puissent se constituer. Le travail de la dévolution s'avère extrêmement long également : la difficulté en classe réside dans le transfert de responsabilités du professeur aux élèves.

La question se pose enfin de savoir si l'on accepte vraiment cette idée de totale dévolution du problème et ses conséquences ; c'est-à-dire, les actions mathématiques qu'on laisse faire ou non aux élèves : ils peuvent parfois nous emmener sur un terrain mouvant, où l'on n'aurait pas forcément pensé aller *a priori*…

Références

Charrière, G. et al. (1991). *Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique,* Département de l'instruction publique, Genève.

Chastellain, M. (2002). *Mathématiques sixième année. Méthodologie – commentaire, Livre et Fichier de l'élève.* COROME, Neuchâtel.

Del Notaro, C. (2010). *Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité.* Thèse de doctorat, Genève. http://archive-ouverte.unige.ch/unige:11825

Les brochures de mathématiques BAC-CH

Jean-Claude Bossel[1]

Maître de mathématiques au Gymnase Auguste-Piccard de Lausanne

En tant que participant au colloque EMF2012 organisé à l'Université de Genève en février de l'année dernière, c'est avec un grand plaisir que je réponds ici à l'appel à contribution lancé il y a quelques mois par le nouveau comité de la revue MATH-ECOLE. Dans cet esprit, je vous propose ci-dessous une présentation de mes brochures d'exercices de mathématiques BAC-CH ainsi qu'une brève description du projet VIDéomath qui avait fait l'objet d'un poster exposé lors du colloque EMF2012 mentionné ci-dessus.

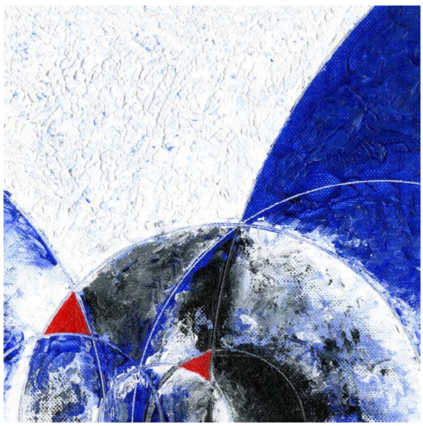
Les brochures BAC-CH proposent de nombreux exercices de mathématiques, classés par thèmes, avec solutions rédigées, aux élèves dès la fin du niveau secondaire obligatoire en Suisse Romande. A ce jour, cinq brochures BAC-CH ont déjà été publiées : les brochures portant les numéros 0, 1, 2, 3 et 6 (voir le site www.bac-ch.ch). Comportant chacune 144 pages, brochées avec anneaux métal offrant un usage très souple et agréable à l'utilisateur, ces brochures d'exercices favorisent un travail indépendant et autonome de l'élève. Les solutions rédigées des exercices sont mises en page en face des données (pas de perte de temps : l'élève peut utiliser on non, selon ses besoins, ces solutions rédigées !). De plus, de nombreux renvois sont proposés, qui permettent de retrouver facilement les notions de base, notamment les notions techniques (résolution d'équations, de systèmes, formules de trigonométrie, etc.), sur lesquelles repose la résolution d'un exercice ou d'un problème de mathématiques.

Dans un second temps, une innovation devrait accompagner les différentes brochures de la collection BAC-CH, sous forme de petites vidéos présentant des exemples de résolution d'exercices de mathématiques en complément aux solutions rédigées dans les brochures BAC-CH. Le moment venu (voir le site www.videomath.ch), ces vidéos pédagogiques seront mises en ligne sur la chaîne Youtube associée à la collection BAC-CH.

Mon travail de publication ne se limite toutefois pas à la seule pédagogie des mathématiques. En effet, j'ai élaboré la collection BAC-CH de manière à ce qu'elle puisse aussi être considérée comme une partie d'un projet multimédia plus vaste intitulé PERLES DE VERRE, inspiré du roman *Le jeu des perles de verre* de Hermann Hesse.

Je reviendrai sur ce projet interdisciplinaire (associant géométrie, musique, peinture et fiction théâtre & cinéma) dans un article plus détaillé, à paraître dans le prochain numéro de la revue MATH-ECOLE.

«Congruences IV» (inversion de deux triangles non-euclidiens). Acrylique, 1995. Tableau de Jean-Claude Bossel. Cette image est utilisée (dans une version en noir et blanc) sur la page de couverture des brochures de mathématiques BAC-CH.



1 *Site internet : www.jcb-concept.ch*

Engager des élèves et des enseignantes de classes spéciales dans des pratiques mathématiques (partie 2)

Jean-Michel Favre

CFPS du Château de Seedorf & groupe DDMES

Préambule

La première partie de ce texte a été publiée dans le numéro spécial de Math-école, paru en février 2012, dans le cadre du congrès EMF (Espace Mathématique Francophone). Je rappelle que ce texte a été rédigé en 2005, à la demande de la direction de la Fondation de Vernand[1] qui souhaitait rendre compte à l'ensemble de ses collaborateurs, du travail qui se menait dans les classes d'enseignement spécialisé où je me rendais une matinée par semaine. Il devait initialement être diffusé dans le bulletin interne de la Fondation, mais il n'a finalement fait l'objet que d'un tiré à part, en raison de sa longueur jugée trop importante. Ce texte illustre déjà, à sa manière, les idées de «jeux de tâches» (Favre, 2008) et de «narration» (Cange, 2012) que nous développons au sein du groupe ddmes[2].

Faire faire des mathématiques aux élèves et aux enseignantes

Les choses ne sont évidemment jamais gagnées d'avance et il arrive naturellement que des élèves restent à la porte, renoncent ou ne parviennent pas à entrer dans les tâches que je leur soumets. Il me revient, dans ce cas, de chercher d'autres entrées, en proposant d'autres tâches ou en engageant une enseignante dans l'activité pour essayer de la faire rebondir. Il arrive aussi fréquemment que je sois surpris, déconcerté par ce que produisent les élèves et je m'essaie moi aussi, en retour, à leur jouer des surprises, partant de celles qu'ils m'ont occasionnées.

J'utilise pour cela une grande variété de supports. Cela passe par des bandes de papier-mesure de 1 m que l'on trouve dans tous les magasins de meubles, des feuilles de papier-brouillon usagées pour faire des pliages, des découpages et des dessins, des casse-tête que l'on trouve dans le commerce ou encore la calculette qui a été oubliée dans le fond d'un tiroir. Je recours aussi abondamment à du matériel (multicubes, polydrons, tangram,…), à certaines propositions d'activités et à différents jeux tirés des moyens d'enseignement mathématiques romands. J'essaie de faire interagir les élèves et les enseignantes avec ces différents supports en leur proposant des tâches que j'estime à leur mesure, mais j'essaie également de faire interagir les supports entre eux. Réaliser une croix avec des post-it, des multicubes, des polydrons ou encore en pliant et découpant une feuille de papier aboutira certes (en principe) à chaque fois à une croix ; pourtant, le support utilisé, tantôt facilitant, tantôt résistant, n'occasionnera pas pour celui qui l'utilise, à chaque fois la même expérience de croix, ni ne lui en fera découvrir les mêmes facettes.

Dans toutes les activités que je propose, je cherche le plus possible, même si cela est parfois difficile, à me distancer, pour agir, de l'aspect performance ou réussite de l'activité. C'est en effet avant tout l'investissement des personnes dans la tâche qui me sert tout à la fois de guide pour mes interventions et d'appréciation rétrospective de ce qui s'est passé durant la séquence. Lorsqu'un élève est intéressé à dessiner des croix sur un quadrillage, je l'encourage à en dessiner le plus possible, ou bien à en des-

1 La Fondation de Vernand est une fondation d'utilité publique au service de près de six-cents enfants et adultes présentant une déficience intellectuelle et/ou des troubles de la personnalité. Son siège social est à Cheseaux-sur-Lausanne (http://www.fondation-de-vernand.ch).

2 Le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) est un groupe composé de chercheurs, de formateurs et d'enseignants. Il est aujourd'hui subventionné par l'AVOP : Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté (http://www.avop.ch).

siner des plus petites, des plus grandes ou même à dessiner la plus grande croix possible. Mais si le support du dessin ne lui plaît pas, je lui proposerai plutôt d'utiliser des multicubes pour construire une croix, dont on pourra ensuite faire le tour avec un stylo pour la dessiner sur du papier ; ou bien des polydrons qui, lorsqu'on relèvera les bords de la croix ainsi formée, permettra de fabriquer un cube qu'il sera ensuite possible de dessiner ou de copier en le reproduisant avec des multicubes.

Par ailleurs, lorsque je parle d'investissement, il s'agit bien de l'investissement qui a pu se produire durant la séquence et qui s'observe à l'aune de la durée, de l'intensité et de la diversité des interactions produites par telle ou telle tâche avec le support proposé. Cela advient, par exemple, lorsqu'une élève s'y prend à quatre ou cinq reprises pour plier un carré de papier et parvenir avec un seul coup de ciseau à obtenir une croix régulière ; ou alors quand deux enseignantes essaient de dessiner le maximum de croix sur une feuille A4 quadrillée (2 fois 2 cm) et qu'elles se mettent ensuite à discuter entre elles pour définir une stratégie qui pourrait être plus efficace. Mais l'investissement peut également avoir lieu en dehors de la séquence, ce qui lui donne une assise bien meilleure encore. Quand, par exemple, une enseignante reprend un jeu ou une activité avec les mêmes ou d'autres élèves[3] ; lorsqu'un élève essaie et parvient, durant la semaine, à trouver le nombre de points figurant sur un dé à douze faces ou qu'un autre me demande de pouvoir rejouer au jeu de la course à vingt[4], parce qu'il s'y est entraîné durant la semaine avec son cousin et qu'il est cette fois-ci certain de pouvoir gagner. Et c'est encore le cas quand une enseignante me fait découvrir un nouveau jeu qu'elle vient d'acheter pour la classe (cela s'est produit à plusieurs reprises cette année à Chavannes) ou qu'une autre me signale, alors que je visite une exposition en fin d'année scolaire, la présence de multiples étoiles à cinq branches (qu'ils avaient apprises à dessiner dans l'une de nos rencontres) dans les dessins libres que les élèves ont réalisés en écoutant de la musique.

Narration d'une séquence à Chavannes

De manière à rendre les choses plus parlantes, je vais maintenant procéder au récit d'une séquence qui s'est déroulée en cette fin d'année à Chavannes.

Un mercredi, je suis arrivé en classe avec une boîte remplie de pièces de monnaie. Pendant la récréation, j'ai trié les pièces de 5 et 10 centimes et laissé les autres en vrac dans la boîte. J'ai placé celles de 5 centimes dans un panier sur le pupitre des enseignantes et j'ai construit avec les pièces de 10 un grand triangle sur le sous-main d'un élève. Dans la salle de classe sont peu à peu arrivés six élèves, âgés de huit à onze ans, que je rencontrais pour la troisième fois. Ils provenaient de deux classes différentes et manifestaient des « niveaux » - comme on a l'habitude de dire dans l'enseignement spécialisé - très hétérogènes. J'avais déjà pu observer qu'une des filles ne savait pas bien compter au-delà de cinq, alors même qu'une autre était capable d'additionner, oralement et sans se tromper, des nombres représentant des francs et des centimes écrits sur des tickets de caisse. J'avais également pu remarquer qu'un des garçons désespérait de ne pas savoir lire les nombres au-delà de vingt (parce qu'il ne parvenait pas à mémoriser les mots trente, quarante, cinquante, soixante, septante, etc.), mais qu'il écrivait pourtant le nombre 2005 sur toutes les feuilles qu'on lui présentait. Il y avait également deux filles qui savaient à peu près compter jusqu'à 10 et un autre garçon qui connaissait très bien les nombres jusqu'à 100 et même au-delà.

3 Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les reprises ne vont pas d'elles-mêmes. Le temps d'enseignement est très occupé dans l'enseignement spécialisé et il n'est pas toujours facile, dans le quotidien de la classe, de parvenir à en dégager pour y insérer des activités imprévues.

4 Il s'agit d'un jeu qui a été abondamment pratiqué et étudié par Guy Brousseau dans le cadre du COREM à Bordeaux (Brousseau, 1998, pp.25-43). L'une des nombreuses versions de la course à vingt se joue à deux joueurs. Le but du jeu est, partant de 0, et en jouant à tour de rôle +1 ou + 2, d'être le premier des deux joueurs à atteindre 20.

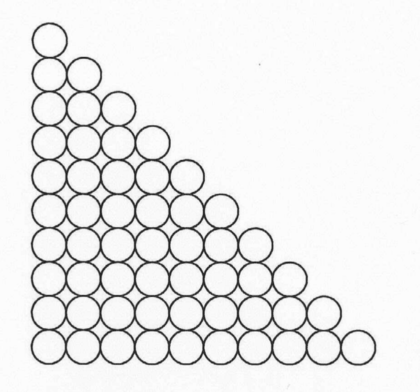


Figure n°1 : Triangle composé de pièces de dix centimes

A l'arrivée des enseignantes en classe, on m'a signalé qu'une des filles (celle qui savait très bien compter avec la monnaie) n'était pas là, car en stage dans une autre classe, en prévision d'une possible intégration l'an prochain. Il y avait aussi un garçon en plus, que je connaissais déjà pour avoir travaillé avec lui dans un autre groupe en début d'année scolaire, et qui était lui aussi en stage dans cette nouvelle classe.

Je n'ai pas commencé la séquence en montrant aux six élèves le triangle de pièces de 10 centimes, mais en leur faisant lire des nombres au tableau que j'écrivais au fur et à mesure :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, qu'ils connaissaient presque tous,

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, que seul un d'entre eux connaissait,

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, qu'ils ne connaissaient pas, que je leur lisais et qu'ils répétaient après moi,

1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000, qu'ils ne connaissaient pas non plus, mais qu'ils ont exercé plusieurs fois, parce que l'envie de lire des grands nombres était très forte et qu'ils avaient compris, pour certains, qu'ils pouvaient s'appuyer sur la comptine des un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix pour le faire.

J'ai même posé au tableau 2000, 2001, 2002, 2003, 2004 et surtout 2005 qui, une fois qu'il a été écrit, a fait dire à l'un des garçons : « Ah, ça c'est l'année… ».

Ensuite, j'ai donné à chacun une bande de papier-mesure de 1 m (qui comprend tous les nombres de 0 à 100) en leur demandant de retrouver et d'entourer tous les nombres qui comprenaient (au moins) un 0 (c'est-à-dire 0,10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100). Cette tâche n'a pas eu le même retentissement pour tous les élèves. D.[5] y est allé très progressivement, dans l'ordre, et à chaque fois qu'il trouvait un nombre, il me demandait si c'était juste, avant de partir à la recherche du suivant. A. a pris beaucoup de temps pour entrer dans une activité qui ne paraissait pas l'intéresser outre mesure et ce n'est qu'avec l'intervention répétée de son enseignante qu'elle a fini par s'y mettre. K. qui connaissait très bien les nombres jusqu'à 100 s'est mis en demeure d'aider V. Pourtant, cela n'a pas été sans poser quelques problèmes, car à chaque fois que V. découvrait un nouveau nombre, K. lui nommait le suivant à rechercher, ce qui n'aidait pas beaucoup V., vu qu'elle ne connaissait pas leur nom. J'ai donc suggéré à K. de passer par l'écrit pour désigner à V. les nouveaux nombres à découvrir, mais il n'a pas semblé trouver que l'idée était bonne et a poursuivi comme il l'entendait. Quant à H. et T., ils se sont débrouillés seuls, la seconde prenant beaucoup de temps et d'application pour le faire (cela lui a pris toute la période), ce qui a passablement surpris son enseignante, du fait qu'elle a habituellement de la peine à mener seule une activité dans la durée.

Cette entrée en activité des élèves m'a permis, à certain moment, de montrer à K. le triangle que j'avais construit sur un sous-main et lui demander s'il saurait trouver le nombre total de pièces dont il se compose. J'ai ensuite donné à H. et à V. des cartes sur lesquelles figuraient les nombres de 1 à 10, en leur proposant d'abord de les ordonner, puis d'aller chercher, pour chaque carte, le nombre de pièces de 5 centimes qui correspondait à ce qui était écrit sur la carte, et enfin d'aligner sous chaque carte, les pièces qu'ils auraient prises. J'ai donné à D. des bandes de papier sur lesquelles étaient dessinées des pièces de 10 centimes et lui ai demandé de chercher pour chaque

5 Dans toute la suite de la narration, j'utiliserai pour désigner chaque élève l'initiale pointée de son prénom.

bande, à l'aide d'une calculette, le nombre parmi 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 auquel la somme des pièces correspondait. J'ai encore juste eu le temps de proposer à A. d'essayer d'ordonner les nombres de 11 à 20[6], alors que je n'ai rien pu donner de plus à faire à T. qui était toujours en train de chercher les nombres comprenant des 0 sur la bande de papier-mesure.

Après avoir essayé de dénombrer l'une après l'autre les pièces de 10 centimes du triangle, K. est venu me demander une calculette. Il m'a dit qu'il voulait additionner 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 et qu'il en avait besoin pour le faire. Je lui ai montré qu'on pouvait astucieusement regrouper tous ces nombres, en mettant le 1 avec le 9, le 2 avec le 8, le 3 avec le 7, le 4 avec le 6 (ce qui fait à chaque fois 10) et en laissant le 5 tout seul. Cela lui a d'abord permis de trouver 55 en additionnant à 10 les quatre 10, puis le 5 par oral (ce qu'il savait bien faire), puis de contrôler ce résultat avec la calculette. Je lui ai proposé de regarder ce qui se passerait si on supprimait une ligne du triangle, puis deux, puis, trois, et il s'est remis à la tâche.

H. et V. ont commencé par ordonner les cartes comprenant les nombres de 1 à 10 et en ont fait un tas sur leur table. J'ai d'abord cru qu'ils n'avaient pas touché les cartes, mais en les faisant défiler une par une, j'ai vu qu'elles avaient bel et bien été mises dans l'ordre. Je les ai étalées côte à côte (toujours dans l'ordre), en leur demandant d'aller chercher les pièces (dans la corbeille de pièces de 5 centimes qui se trouvait sur le pupitre) qui correspondaient au nombre écrit sur chaque carte. Tour à tour et patiemment, ils sont allés les chercher, ce qui leur a permis d'aboutir au triangle (encore incomplet) suivant :

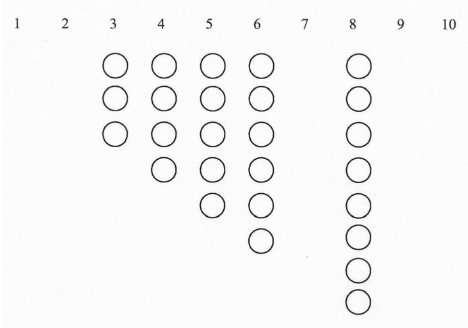


Figure n°2 : Triangle (incomplet) composé de pièces de cinq centimes

De son côté, D. a tout d'abord cherché à ordonner les étiquettes (avec les écritures des nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100), en s'aidant des nombres qu'il avait entourés sur la bande de papier-mesure. Ensuite, il s'est lancé dans les calculs à réaliser sur la calculette. Difficile au début d'additionner cinq 10 sans oublier d'appuyer sur la touche + entre chaque 10 et d'appuyer sur la touche = à la fin. Heureusement, son enseignante était à ses côtés pour lui montrer comment s'y prendre. Difficile aussi de contrôler le nombre de 10, surtout quand celui-ci dépasse quatre. Pourtant, la tâche avait l'air de lui plaire. Suffisamment en tous les cas, pour qu'on le voie, après quelques essais, déplacer avec application son doigt sur chaque pièce figurant sur la bande de papier, à chaque fois qu'il «entrait» un nouveau 10 dans la calculette.

Quant à A., impossible de l'amener à mettre les étiquettes de 10 à 20 dans l'ordre. Ni en lui proposant de s'aider de la bande de papier-mesure, ni en lui faisant cacher le 1 de chaque nombre (à l'exception du 20) pour lui permettre de s'appuyer sur l'ordre des nombres de 1 à 9. Cela ne semblait pas vraiment l'intéresser et elle semblait plus encline à regarder ce que D. était en train de faire sur la calculette…

Au terme de la séquence, une fois que les élèves étaient tous partis, j'ai encore montré aux enseignantes le lien entre toutes ces tâches et le triangle de pièces de 10 centimes. J'en ai profité pour les inviter à chercher le nombre de pièces que contiendrait un triangle de 47 lignes. Mais là non plus, je ne savais pas si la question allait les intéresser et s'il serait donc possible, la fois

6 Chacune des tâches pouvait occasionner une rencontre avec le nombre triangulaire/escalier de dimension 10. Ainsi, par exemple, la mise en ordre des nombres de 11 à 20 et leur traduction en pièces aboutit à un nombre trapèze (rectangle) de 155 pièces, auquel il est ensuite possible de retrancher un carré de 10 pièces sur 10 pour obtenir un triangle identique à celui composé des 55 pièces de 10 centimes.

suivante, de leur demander de montrer aux élèves comment elles s'y étaient prises pour le faire.

En guise de conclusion…

On m'avait demandé un texte court pour décrire ce que je fais chaque semaine dans les classes de la Fondation de Vernand. J'avais répondu que j'étais d'accord pour l'écriture d'un texte, mais qu'il me serait difficile de faire court. Toute description nécessite effectivement son pesant de mots et d'explicitations, tout en restant par essence imparfaite. La description d'une pratique peut-être encore plus que tout. J'espère néanmoins que les enseignantes avec qui j'ai travaillé ces trois dernières années y retrouvent un peu de ce que j'ai tenté de mettre en place dans leur classe et que cela contribue à alimenter le champ de questionnement qui a ainsi pu être amorcé vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques en classe spéciale.

Cette dernière question révèle d'ailleurs un enjeu qui dépasse largement le cadre de mes interventions hebdomadaires dans les classes de la Fondation de Vernand. Favoriser l'accès au domaine des nombres et des formes pour tous les élèves de l'enseignement spécialisé appelle effectivement un important travail de recherche concernant les supports, les tâches et les manières appropriées de les mettre en œuvre auprès des élèves et des enseignantes. Nous y travaillons résolument depuis plusieurs années dans le groupe ddmes qui constitue à la fois le cadre et le principal réservoir d'idées pour mes interventions dans les classes. Mais la tâche est immense et les possibilités de travail en classe très réduites. Être en mesure, l'an prochain, de poursuivre mes activités à Chavannes s'inscrit dans la continuité d'un tel projet et je remercie par avance les élèves et les enseignantes de leur bon accueil.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cange, Ch. (2012). *La narration : une opportunité pour l'enseignant spécialisé d'investiguer et de communiquer à propos de l'activité mathématique des élèves.* Texte inédit, disponible auprès du groupe ddmes.

Favre, J.M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Grand N, 82, 9-30.

Le Kasan Kurosu ou le jeu des sommes croisées (partie 1)[1]

Valentina Celi

Université de Bordeaux - IUFM d'Aquitaine - LACES, E3D

Le Kasan Kurosu[1] est un casse-tête qui, importé en 1980 des États-Unis, est toujours en vogue au Japon. Sous le nom de Kakuro, il n'est arrivé en Europe qu'en 2005. Comme un jeu dans le jeu, nous soulignons ici quelques caractéristiques mathématiques sous-jacentes au Kasan Kurosu, un casse-tête qui exploite avec désinvolture la « magie » des nombres entiers naturels.

Le *Kasan Kurosu* est un casse-tête constitué d'une grille partagée en cases **colorées** et **blanches**.

	1	2	3	4	5
A	22				
B	4				
C	2				
D	9				
E	7				
F	14	9	3	2	

Les cases **colorées** sont à leur tour partagées en demi-cases suivant une diagonale ; dans chacune de ces demi-cases, on peut trouver des nombres : par exemple, dans la grille ci-dessus, le 22 est situé dans la demi-case inférieure de la case A1 et le 14 dans la demi-case supérieure de la case F1.

Plusieurs cases **blanches** alignées verticalement ou horizontalement constituent une **série**, le nombre de cases par série étant supérieur ou égal à 2. Dans la grille ci-dessus, les quatre cases B1, C1, D1 et E1 forment une **série verticale** correspondant au 22 alors que les trois cases F2, F3 et F4 forment la **série horizontale** correspondant au 14.

L'objectif du jeu est de remplir les séries de cases blanches en respectant les règles que nous allons énoncer après avoir fourni quelques détails sur son histoire.

Un peu d'histoire

Lorsque l'on recherche les origines d'un jeu, il est difficile de distinguer les informations qui relèvent de la fantaisie de celles qui s'appuient effectivement sur la réalité des faits. Nous ne reportons ici que les éléments qui, au cours de nos recherches, revenaient le plus souvent et qui nous semblent les plus vraisemblables.

Connu d'abord sous le nom de *Cross Sums*, ce jeu est apparu aux États-Unis vers la fin des années 1960[2], la première grille ayant été publiée dans le *Dell Magazines*. Dans les années 1980, Maki Kaji, homme d'affaire japonais, fondateur et président de la maison d'édition *Nikoli Puzzles* de Tokyo, a emporté ce casse-tête au Japon où il est devenu célèbre – et encore en vogue – sous le nom de *Kasan Kurosu*, une locution qui lie le terme japonais « somme » avec une adaptation phonétique du terme anglais « cross » ; les Nippons le connaissent aussi sous le nom de *Kakro*.

En Europe, ce casse-tête est arrivé en 2005. Notamment, le 14 septembre 2005, *The Guardian*, journal britannique, a publié la première grille du célèbre casse-tête japonais sous le nom de *Kakuro* [3]. En Italie, c'est le 5 novembre 2005 que *Il Corriere della Sera* l'a fait connaître à ses lecteurs [4][3].

1 La deuxième partie de cet article paraîtra dans le prochain numéro de Math-Ecole

2 D'après [3], le jeu est apparu aux États-Unis en 1950 ; néanmoins, c'est la date que nous reportons ici qui est donnée dans la majeure partie des documents consultés.

3 Le Corriere della Sera a abandonné sa rubrique Kakuro en 2007. A la connaissance de la rédaction de Math-Ecole, ce jeu n'a pas été repris par les journaux de Suisse romande, mais il a paru dans la Neue Zürcher Zeitung en 2006.

Plus loin, nous vous proposons quelques grilles mais vous invitons à aller en découvrir d'autres dans les petits ouvrages vendus en librairie ; vous pouvez également vous promener sur le web : il y a de plus en plus de sites consacrés au *Kakuro*, en particulier, le site http://www.conceptispuzzles.com qui présente une variété de formes de grilles.

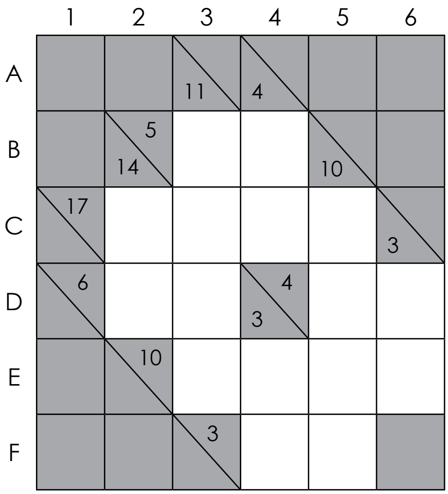
Les règles du jeu

Règle 1. Il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 (le zéro est exclu) dans une série de cases blanches, un seul nombre par case. La somme de ces nombres est égale au nombre figurant dans la demi-case colorée correspondante[4].

Règle 2. Tous les nombres de 1 à 9 sont utilisables mais, dans une série, un nombre n'apparaît qu'une seule fois.

Une grille à compléter

Munissez-vous d'un crayon à papier, d'une gomme, d'un peu de patience et, en tenant compte des conseils qui suivent, essayez de compléter la grille 6 x 6 ci-dessous.



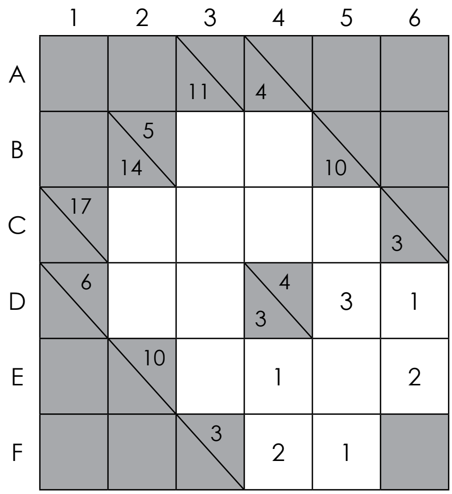
Grille 1

Repérez d'abord les nombres correspondant à des séries de deux cases, celles-ci étant en principe les plus simples à remplir. Notamment, ici, on précise que :

- dans la case colorée A4, le 4 correspond à une série verticale ;
- dans B2, le 5 correspond à une série horizontale et le 14 à une série verticale ;
- dans C6, le 3 correspond à une série verticale ;
- dans D1, le 6 correspond à une série horizontale ;
- dans D4, le 4 correspond à une série horizontale et le 3 à une série verticale ;
- dans F3, le 3 correspond à une série horizontale.

Parmi toutes ces cases, on peut choisir d'abord celles qui contiennent le 3 et le 4. En effet, dans le respect des règles, on s'aperçoit qu'il y a une seule possibilité de décomposer 3 en la somme de deux nombres, soit 1+2 ; de même, il y a une seule possibilité de décomposer 4 en la somme de deux nombres, soit 1+3 (2+2 étant une série non acceptable car, d'après la règle (2), dans une série, les nombres ne se répètent pas)[5].

La manière d'ordonner les nombres constituant ces séries a une importance (1+2 ou 2+1 ? 1+3 ou 3+1 ?) : si l'on commence, par exemple, en remplissant D5, D6 et E6, on s'aperçoit que, en D6, le seul nombre possible est le 1 car, dans les séries de deux cases correspondant à 3 et 4, le 1 est le seul nombre commun ; par conséquent, en D5, on placera le 3 et, en E6, le 2.



Grille 2

On pourrait ensuite observez que, en E4, on

4 *Par la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous serons amenés à identifier la demi-case colorée avec le nombre figurant dans celle-ci.*

5 *Nous approfondissons dans le chapitre « Analyse du jeu » la notion de série unique.*

ne peut placer que le nombre 1 … Ou alors s'intéresser aux séries correspondant aux deux 10 figurant respectivement dans E2 et B5 : comment décomposer 10 en la somme de quatre nombres différents ? Ou encore travailler sur les séries de cases correspondant à 14 (dans B2) et à 6 (dans D1) : ces deux nombres ont une case commune …

Analyse du jeu

Après avoir fourni les règles du *Kakuro* ainsi que quelques conseils sur la manière de commencer à remplir une grille donnée, nous vous proposons une promenade numérique, une sorte de jeu dans le jeu, durant laquelle nous mettrons en évidence quelques propriétés **P** mathématiques sous-jacentes.

P1. Le nombre de cases blanches correspondant à une demi-case colorée

Dans une grille, la série de cases blanches la plus courte peut être constituée de deux cases. Puisque l'on ne dispose que de neuf nombres qui ne peuvent pas se répéter, la série la plus longue est constituée de neuf cases.

Précisons qu'*une série de n cases blanches* correspondant à une demi-case colorée peut être constituée d'un des *arrangements*[6] *de n éléments de* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, avec 2≤n≤9.

P2. Le plus petit et le plus grand nombre contenus dans les cases colorées

Le plus petit nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée est le 3 : on exclut le 1 car les séries constituées d'une seule case n'existent pas et le 2 car la seule série de deux cases correspondant à 2 serait constituée de deux nombres qui se répètent.

La série la plus longue correspond au plus grand nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée : il s'agit donc du 45, somme des nombres de 1 à 9. Pour que le nombre 5 figure dans une des demi-cases colorées d'une grille, il faut donc que la grille ait au moins dix cases (sur la largeur ou sur la longueur).

P3. Le plus petit et le plus grand nombre que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases

Soit ***n*** le nombre de cases constituant une série. Suivant les règles du jeu, on a la plus petite série pour *n*=2 et la plus grande pour *n*=9 (cf. 1). Suivant les valeurs de *n* possibles, on peut déterminer :

a) le nombre *p* le plus petit que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases ;

b) le nombre *G* le plus grand que l'on peut trouver dans une demi-case colorée correspondant à une série de *n* cases ;

c) les valeurs de *n* pour lesquelles des nombres n'ont pas de séries correspondantes.

Le tableau 1 résume les résultats relatifs à *p* et *G*, *p* valant la somme des *n* premiers entiers naturels consécutifs non nuls pour *n* = 2, …9 et *G* valant la somme des n nombres précédents 10.

N	*p*	G
2	**3**=1+2	**17**=9+8
3	**6**=1+2+3	**24**=9+8+7
4	**10**=1+2+3+4	**30**=9+8+7+6
5	**15**=1+2+3+4+5	**35**=9+8+7+6+5
6	**21**=1+2+3+4+5+6	**39**=9+8+7+6+5+4
7	**28**=1+2+3+4+5+6+7	**39**=9+8+7+6+5+4+3
8	**36**=1+2+3+4+5+6+7+8	**44**=9+8+7+6+5+4+3+2
9	**45**=1+2+3+4+5+6+7+8+9	

Tableau 1 : valeurs de p et de G pour chaque valeur de n (nombre de cases)

Par exemple, 3 est le plus petit nombre correspondant à une série de 2 cases et 17 est le plus grand. Si N est le nombre ayant une série correspondante de *n* cases, on a :

- à aucun nombre N>17 ne correspond une série de 2 cases ;
- à aucun nombre N<6 et N>24 ne correspond une série de 3 cases ;
- à aucun nombre N<10 et N>30 ne correspond une série de 4 cases ;
- à aucun nombre N<15 et N>35 ne correspond une série de 5 cases ;

6 Un arrangement est une permutation de n éléments pris parmi k éléments distincts (n≤k). Les éléments sont pris sans répétitions et sont ordonnés. Ici, k=9 et 2≤n≤9.

- à aucun nombre N<21 et N>39 ne correspond une série de 6 cases ;
- à aucun nombre N<28 et N>42 ne correspond une série de 7 cases ;
- à aucun nombre N<36 et N>44 ne correspond une série de 8 cases ;
- à aucun nombre N<45 ne correspond une série de 9 cases.

Si le nombre 45 est le seul ayant une série correspondante de neuf cases, la série indiquée est la seule possible.

Grâce à ce tableau, nous pouvons identifier les intervalles pour lesquels les nombres ont des séries correspondantes de n cases. Le tableau 2 ci-après donne explicitement ces intervalles.

P4. Les séries uniques

Comme nous l'avons déjà souligné, une série de *n* cases correspondant à une demi-case colorée donnée peut être constituée d'un des arrangements de *n* nombres (2≤*n*≤9) pris parmi les éléments de l'ensemble E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Par exemple, la série de deux cases correspondant à 5 peut être constituée d'un des quatre arrangements 1+4, 4+1, 2+3 et 3+2. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre – et, alors, si l'on s'intéresse aux combinaisons[7] de *n* éléments de E – la série de deux cases correspondant à 5 équivaut aux deux combinaisons 1+4 et 2+3.

Finalement, pour réussir au *Kakuro*, il suffit de déterminer les combinaisons de nombres dont la somme est égale au nombre figurant dans une demi-case colorée, l'ordre de ces nombres sera alors donné par l'ensemble de la grille.

En outre, il est utile de mettre en évidence les nombres (figurant dans une demi-case colorée) correspondant à des séries uniques. Par exemple, la série de deux cases correspondant à 3 est constituée de la seule combinaison 1+2. Nous dirons qu'**une série** de *n* cases correspondant à une demi-case colorée donnée **est unique si elle n'équivaut qu'à une seule combinaison**.

n / N	2	3	4	5	6	7	8	9
3	U							
4	U							
5	0	U						
6	0	U						
7	0	0						
8	0	0						
9	0	0						
10	0	0	U					
11	0	0	U					
12	0	0	0					
13	0	0	0					
14	0	0	0					
15	0	0	0	U				
16	U	0	0	U				
17	U	0	0	0				
18		0	0	0				
19		0	0	0				
20		0	0	0				
21		0	0	0	U			
22		0	0	0	U			
23		U	0	0	0			
24		U	0	0	0			
25			0	0	0			
26			0	0	0			
27			0	0	0			
28			0	0	0	U		
29			U	0	0	U		
30			U	0	0	0		
31				0	0	0		
32				0	0	0		
33				0	0	0		
34				U	0	0		
35				U	0	0		
36					0	0	U	
37					0	0	U	
38					U	0	U	
39					U	0	U	
40						0	U	

7 Une combinaison de n éléments pris parmi les k éléments d'un ensemble E est un sous-ensemble de n éléments de E. Les éléments sont pris sans répétitions et ne sont pas ordonnés. Ici, k = 9 et 2 ≤ n ≤ 9.

41						U	U	
42						U	U	
43							U	
44							U	
45								U

Tableau 2 : nombres N ayant des séries correspondantes de n cases pour chaque valeur de 2 à 9

Dans le Tableau 2, tous les nombres *p* et *G* correspondent à des séries uniques mais ce ne sont pas les seuls ! Le Tableau 2 nous aide à déterminer tous les nombres correspondant à des séries uniques pour $2 \le n \le 7$: il s'agit des deux premiers plus petits et des deux derniers plus grands nombres correspondant à chacune des séries possibles[8].

Le tableau 2 donne les nombres *N* ayant des séries correspondantes de *n* cases pour chaque valeur de 2 à 9 : le « O » indique la présence de la série ; le « U » indique la présence de la série unique.

Par exemple, si l'on considère n=2, on a 3=1+2 : 1+2 est donc la seule série de deux nombres correspondant à 3. Pour passer de 3 à 4, on ajoute 1 : 4=3+1=1+2+1=1+(2+1)=1+3, la seule série de deux cases correspondant à 4 est 1+3 (le 1 que l'on ajoute à 3 pour passer à 4 ne peut être associé que d'une seule manière car si l'on considère 4=1+2+1=1+1+2=(1+1)+2, on obtient une série avec deux nombres qui se répètent).

On peut vérifier facilement que les séries des deux cases correspondant à 5 jusqu'à 15 ne sont pas uniques. Nous laissons cette vérification au lecteur, cet exercice étant utile pour remplir les grilles du *Kakuro*.

Pour que 16 soit la somme de deux nombres, si l'un des termes est 9, on aura 16=9+7 ; on ne considère pas 8 car, dans une série, les nombres ne doivent pas se répéter. Pour passer de 16 à 17, il suffit d'ajouter 1 (16+1=7+9+1) d'où la seule possibilité est 17=8+9.

Le tableau 2 donne tous les nombres *N* ayant des séries correspondantes de *n* cases pour chaque valeur de 2 à 9 : le « O » indique la présence de la série et le « U » indique la présence de la série unique.

Pour n=9, nous avons déjà signalé qu'il existe une seule combinaison possible, à savoir celle constituée des nombres de 1 à 9 dont la somme est égale à 45.

On passe de 45 à 44, en ôtant 1 : 44=45–1

=1+2+3+4+5+6+7+8+9–1=2+3+4+5+6+7+8+9 d'où l'on conclut que 44 correspond à une série unique de huit cases (on ne peut pas soustraire le 1 à aucun des autres nombres car, dans ce cas, on obtiendra un nombre qui apparaît déjà dans la série).

Avec un raisonnement analogue, on prouve que les nombres de 36 à 44 correspondent à des séries uniques de huit cases. En annexe I, nous résumons toutes les séries uniques correspondant aux nombres signalés dans le tableau 2.

P5. Les séries correspondant à deux cases blanches

Soit *n* le nombre de cases constituant une série. Nous ne considérons ici que la série en termes de combinaisons de nombres. Nous proposons de déterminer toutes les séries possibles correspondantes à 6 jusqu'à 15 lorsque n=2.

Cette analyse est utile car, en pratiquant ce jeu, on pourra s'appuyer sur celles-ci pour trouver les combinaisons de *n* nombres pour n>2.

On veut, par exemple, déterminer toutes les séries possibles correspondant à 21 lorsque n=3. On considère une première décomposition de 21 en la somme de deux nombres dont l'un constitué d'un seul chiffre (il s'agit, par exemple, d'un nombre déjà placé dans la série), soit 21=9+12=8+13=7+14=6+15

=5+16=4+17 (on s'arrête lorsque l'on trouve 17 car on sait que c'est le plus grand nombre correspondant à une série de deux cases).

Puisque 16 et 17 correspondent à des séries de deux cases uniques, on trouve tout de suite deux séries de trois cases correspondant à 21, soit 5+7+9 et 4+8+9.

Ensuite, 15 correspond aux séries 6+9 et 7+8. Cette dernière, associée à 6, fournit une autre série de trois cases correspondant à

8 Dans la suite de cet article, nous mettrons en évidence, entres autres, une curieuse symétrie à l'égard du nombre de séries possible suivant la valeur de n.

21, soit 6+7+8.

14 correspond aux séries 5+9 et 8+6 : dans ce cas, les séries de trois cases correspondant à 21 ont déjà été trouvées. De même pour 13 et 12.

Nous avons ainsi déterminé toutes les séries de trois cases correspondant à 21 : 5+7+9, 6+7+8 et 4+8+9.

Conclusions

Notre promenade autour du *Kakuro* s'arrête ici. Nos analyses ne se veulent nullement exhaustives : nous avons simplement voulu partager avec vous quelques unes des réflexions mûries en découvrant et en pratiquant un peu ce casse-tête.

En général, nous avons intentionnellement adopté un langage simple et des procédures accessibles. En envisageant une utilisation dans vos classes, certains aspects mis en évidence peuvent vous aider à réaliser vous-mêmes des nouvelles grilles et à (re) formuler des questions qui s'adaptent au niveau de vos élèves.

Principales références

[1] Lighi, L. (traduit par) (2005). *Kakuro*. éd. Bompiani

[2] Memmott, C. (2005). *In a puzzling development, kakuro beckons*. En ligne http://www.usatoday.com/life/books/news/2005-12-07-kakuro_x.htm, consulté le 22 mars 2013

[3] Guardian.co.uk (2005). *The new grid on the block*. En ligne http://www.guardian.co.uk/g2/story/0,,1569223,00.html, consulté le 22 mars 2013.

[4] Serra, E. (2005), *Il gioco che sfida il Sudoku, ecco le regole*. En ligne sur le site web http://www.corriere.it/kakuro/, consulté le 22 mars 2013.

ANNEXE I. Les séries uniques (séries de n cases correspondant aux nombres N)

N \ n	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1+2							
4	1+3							
6		1+2+3						
7		1+2+4						
10			1+2+3+4					
11			1+2+3+5					
15				1+2+3+4 +5				
16	7+9			1+2+3+4 +6				
17	8+9							
21					1+2+3+4 +5+6			
22					1+2+3 +4+5+7			
23		6+8+9						
24		7+8+9						
28						1+2+3+4 +5+6+7		

29			5+7+8+9			1+2+3+4 +5+6+8		
30			6+7+8+9					
34				4+6+7+8 +9				
35				5+6+7+8 +9				
36							1+2+3+4 +5+6+8	
37							1+2+3+4 +5+6+7+9	
38					3+5+6+7 +8+9		1+2+3+4 +5+6+8+9	
39					4+5+6+7 +8+9		1+2+3+4 +5+7+8+9	
40							1+2+3+4 +6+7+8+9	
41						2+4+5+6 +7+8+9	1+2+3+5 +6+7+8+9	
42						3+4+5+6 +7+8+9	1+2+4+5 +6+7+8+9	
43							1+3+4+5 +6+7+8+9	
44							2+3+4+5 +6+7+8+9	
45								1+2+3+4+5 6+7+8+9

A propos des nombres décimaux (partie 1)[1]

André Scheibler

Introduction.

De quoi s'agit-il ?

Parler des nombres décimaux, c'est parler d'une écriture de nombres. Prenez les nombres entiers écrits en numération de position en base 10. Vous y ajoutez une virgule après le chiffre des unités, et le chiffre suivant indiquera le nombre de dixièmes de l'unité, le nombre suivant le nombre de dixièmes du dixième de l'unité, et ainsi de suite. Les enfants diront : « les nombres à virgule ! ». Nous pourrions dire aussi que les nombres décimaux dont il sera question ici sont les nombres rationnels écrits en écriture décimale, et dont la période est 0.

Pourquoi un article à propos des nombres décimaux ?

La description sommaire ci-dessus ne constitue pas, vous vous en doutez, une définition très rigoureuse. Cet article en présentera quelques-unes, ce qui devrait permettre d'éclairer quelques difficultés que l'on pourrait rencontrer dans l'usage ou l'enseignement de ces objets. Dans la vie courante et parmi toutes les écritures de nombres qui y apparaissent, les nombres décimaux occupent une place majoritaire. La plupart des situations de mesures de grandeurs vont utiliser des nombres décimaux. Il ne me paraît donc pas superflu de se pencher une fois de manière plus approfondie sur cet ensemble, de rechercher en quoi il se distingue d'autres ensembles de nombres.

A qui s'adresse cet article ?

Aux enseignantes et enseignants de mathématiques qui doivent enseigner les nombres et les calculs qui leurs sont associés, donc enseigner différentes écritures de nombres. Ils pourront alors comparer les définitions proposées ici avec celles décrites dans les moyens d'enseignement qu'ils utilisent, mais aussi avec les leurs propres. Les personnes chargées d'élaborer des moyens d'enseignement, les didacticiens, les mathématiciens pourraient également y trouver, je l'espère, un certain intérêt.

Contenu de l'article.

Quelques définitions des nombres décimaux, accompagnées de quelques commentaires, occuperont la plus grande partie de ce texte. S'y ajoutera une incursion dans le domaine du calcul, pour mettre en évidence quelques difficultés ou surprises que réservent une approche un peu plus approfondie de ces nombres.

Quelques définitions des nombres décimaux.

Simon Stevin (1548-1620).

La première définition des nombres décimaux en tant qu'objets mathématiques est attribuée à Simon Stevin qui publie, en 1585, un ouvrage écrit en flamand et intitulé « La Disme »[2]. Stevin, né à Bruges, a été employé de banque, ingénieur civil et militaire, précepteur de Maurice de Nassau, professeur de mathématiques à l'école d'ingénieurs de Leyde. Il eut une grande influence sur son temps, s'intéressant à de multiples domaines comme l'hydrostatique, la mécanique, l'astronomie, la navigation, la construction de digues, de moulins à vent, de fortifications.

Avant la parution de La Disme, les nombres rationnels utilisés dans la vie courante s'écrivaient la plupart du temps en juxtaposant à un nombre entier, généralement écrit en chiffres arabes, des rompus, c'est-à-dire des fractions de l'entier. Ces rompus étaient de toute nature, pas souvent des fractions décimales et variant selon le type de grandeur considéré. Mesurer la longueur d'une pièce de tissu, par exemple, pouvait se faire de manière fort différente de la mesure des dimensions d'un champ. Les règles de calcul, effrayantes avec de tels nombres, ont-elles incité Stevin, dont les multiples activités l'amenaient à les utiliser sans cesse, à produire un système plus général et beaucoup plus simple, nous n'en savons rien. Mais cela

1 *La deuxième partie de cet article paraîtra dans le prochain numéro de Math-Ecole.*

2 http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html

paraît bien vraisemblable à lire son introduction, dans laquelle il s'adresse à toutes sortes de corps de métiers[3], je le cite : « *astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, gavieurs[4], stéréométriens en général, et à tous les marchands* » pour leur vanter la simplicité de son système. Stevin présente les décimaux en deux parties : d'abord des définitions, puis les algorithmes d'opérations, addition, soustraction, multiplication, division, et leurs justifications.

Dans sa définition I, il baptise son système *Disme*, le situe comme « *permettant de gérer tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes* » par usage unique de nombres entiers écrits en base 10, soit sans faire appel aux rompus.

Il définit ensuite une écriture de ses nombres, par usage extensif de « *la dixième progression* », en baptisant tout entier de commencement, dont le signe est (0) puis en définissant un signe pour chaque dixième : (1) pour le dixième d'un commencement, appelé prime, (2) pour le dixième d'un dixième de commencement, appelé seconde, et ainsi de suite. Ainsi :

8(0)9(1)3(2)7(3)

désigne 8 commencement, 9 prime, 3 seconde et 7 tierce, soit ensemble :

8+9/10+3/100+7/1000

Nous dirions aujourd'hui 8 entiers 9 dixièmes 3 centièmes et 7 millièmes, que nous écrivons 8,937. L'écriture utilisée par Stevin est donc une écriture polynomiale, que nous pourrions traduire par :

$$8.10^0+9.10^{-1}+3.10^{-2}+7.10^{-3}$$

notation finalement très proche des rompus dont veut se défaire Stevin, mais faite exclusivement de dixièmes parties. Il prend soin de préciser :

- aucun nombre ne peut dépasser 9, sauf le commencement ;
- si un signe est « défaillant » (par exemple pas de tierce), il faudra noter 0 tierce, soit 0(3) dans l'écriture du nombre.

Toutes les démonstrations qu'il fera ensuite pour justifier les algorithmes qu'il propose seront basées sur la comparaison de ces deux écritures (rompus et Disme). Preuve est également faite, du même coup, que toutes les opérations sur des nombres de Disme se ramènent à traiter des nombres entiers, et à traiter ensuite le signe du dernier chiffre. Les démonstrations sont conduites sur un exemple, à charge au lecteur d'en saisir la généralité. Ainsi :

2/10 et 3/100 multipliés font 6/100,

donc 2(1) multiplié par 3(2) fait 6(3), (3) est obtenu par (1) + (2).

L'objet « *nombre décimal* », chez Stevin, est donc essentiellement à chercher dans l'écriture polynomiale qu'il définit :

8(0)9(1)3(2)7(3)

s'écrit en effet aujourd'hui :

$$8.10^0+9.10^{-1}+3.10^{-2}+7.10^{-3}$$

Il est alors facile de calculer avec de telles écritures, et c'est bien l'objectif visé. Stevin peut alors proposer à toutes sortes de corps de métier de l'époque, comme il le dit dans son introduction, des méthodes de calcul simples et rapides.

Implicitement, Stevin procède donc par extension des nombres entiers, chaque nombre de Disme étant en fait déterminé par un couple d'entiers, le premier formé de tous les chiffres utilisés, dans l'ordre, sans omettre de zéro en cas de défaillance d'un signe, le second étant le signe du dernier chiffre.

8(0)9(1)3(2)7(3)

est traité comme le couple (8937 ; 3)[5].

Mais Stevin ne l'explicite jamais de cette manière.

Ses nombres de Disme sont-ils plongés dans un ensemble plus grand ? Stevin nous donne quelques indications à ce sujet en considérant la division 4(1) divisé par 3(2) :

> *« Alors le quotient ne pourra s'expliquer par nombres entiers, il apparaît qu'il y en sortira infiniment des trois, restant toujours un tiers. En tel accident, l'on peut approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu. Il est bien vrai que*
>
> *13(0)3(1)3.1/3(2), ou 13(0)3(1)3(2)3.1/3(3), etc.*

3 *Sur les mathématiques de l'ingénieur à l'époque, voir l'article de C. Goldstein (2012).*

4 *Mesureurs de capacité, en particulier pour le vin*

5 *Soit 8937 millièmes.*

ferait le parfait requis, mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc., [...] cette imperfection est plus utile que telle perfection. »

Stevin laisse donc cette « *perfection* » à d'autres, en imposant de « *n'opérer que par nombres tous entiers* ». Il est donc parfaitement conscient qu'un ensemble de nombres plus grand, dont « *les parfaits requis* », contient la Disme. Mais il en définit bien les contours, en précisant d'opérer que par nombres tous entiers. Cette Disme se dirait donc aujourd'hui ensemble des nombres décimaux limités, ensemble désigné par ID, et sur lequel nous reviendrons plus loin.

Henri Lebesgue (1875-1941).

Une description des nombres est proposée par Henri Lebesgue dans un livre qu'il écrit au début du 20e siècle : « *Sur la mesure des grandeurs* ». Dans son introduction, il précise s'adresser à de futurs professeurs de l'enseignement secondaire, son propos sera donc :

« pédagogique, si j'ose employer ce qualificatif qui suffit ordinairement pour faire fuir les mathématiciens ».

Cette boutade est-elle encore aujourd'hui d'actualité ? Il va préciser d'emblée que la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques, « *cette mesure fournissant le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse* ». Il insiste sur la nécessité non pas de définir un objet, trop souvent chargé de métaphysique, mais plutôt de ce que l'on en fait. Son approche est donc expérimentale, assurant ainsi un sens aigu de la réalité, à éveiller chez les jeunes, « *après, mais après seulement, le passage à l'abstrait peut être profitable* ». Il considère donc « *l'Arithmétique comme une science expérimentale au même titre qu'une autre* », et cette Arithmétique s'est édifiée « *parce que nous disposons d'une définition complète du nombre : la description de l'opération qui le fournit* ». Il passera donc, dans sa construction, directement du nombre entier écrit en numération décimale, « *car nous avons la chance unique d'avoir à notre disposition une langue universelle, la numération décimale écrite* », au nombre le plus général. Je reproduis ci-dessous la phase fondamentale de cette construction.

« Dans cet exposé, après avoir indiqué des besoins qui ont pu conduire les hommes à comparer des distances, à définir les mots distances égales ou inégales, je décrirai le procédé de comparaison : soit à comparer AB et le segment U, appelé l'unité.

Portons U sur la demi-droite AB, à partir de A en Aa, puis à la suite en ab, etc. Et soit A1 la dernière extrémité ainsi atteinte avant de dépasser B. Si on a atteint A en portant 3 fois U on dira que la longueur de AB (sous-entendu avec l'unité U) est 3 si A1 est en B; dans le cas contraire, on dira que la longueur de AB est supérieure à 3 et inférieure à 4. Exprimant par-là que B est toujours l'un des points du segment A1B1 d'origine A1 et égal à U, mais n'est jamais le point B1.

Divisons U en 10 parties égales; c'est-à-dire prenons un segment U1 avec lequel la mesure de U soit 10 et recommençons les opérations; nous arriverons à un segment A2B2 contenu dans A1B1 et la longueur de AA2 avec l'unité U1 sera comprise entre 30 et 39; soit, par exemple, 37. La longueur de AB avec l'unité U1 sera dite au moins égale à 37 et inférieure à 38.

En passant de même de U1 à un segment U2, on arrivera par exemple à 376 et 377; puis à 3760 et 3761; puis à 37602 et 37603, etc. »

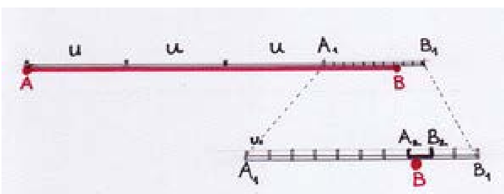


Figure 1

Il s'agit maintenant d'examiner un symbole, qu'on appellera *nombre et qui, étant le* ***compte rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations****, en pourra être dit le* *résultat*. On y arrive très facilement, par les remarques suivantes : A chaque stade de la mesure, on obtient deux entiers, 37 et 38, ou 37602 et 37603, qui diffèrent exactement d'une unité; donc il suffit de connaître la suite des entiers inférieurs obtenus à chaque stade.

Or cette suite, 3, 37, 376, 3760, 37602, ... est telle que chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du nombre précédent. Dès lors la connaissance d'un des nombres de la suite fournit tous ceux qui le précèdent. Si, du moins, on sait à quel stade le nombre connu a été obtenu [...].

On aboutirait ainsi à la notation ordinaire des nombres. Dans cette notation, les zéros placés à la gauche de l'entier obtenu au premier stade (lequel peut être zéro) n'ont aucune importance ; par analogie, lorsqu'il arrive que tous les chiffres de droite sont des zéros à partir de l'un d'eux, on convient volontiers de les omettre en conservant toutefois ceux de ces zéros qui seraient avant la virgule. Lebesgue dit alors qu'il s'agit d'un nombre décimal exact. Actuellement, l'appellation est simplement nombre décimal

On peut donc considérer les nombres ainsi construits par Lebesgue comme des nombres décimaux illimités, et ceux qui se terminent par une suite infinie de zéros sont les nombres décimaux exacts, ou limités.

La construction de Lebesgue permet donc de passer directement du nombre entier au nombre le plus général, qu'il soit décimal exact, rationnel ou même irrationnel. En effet, la comparaison qu'il propose entre un segment AB et une unité U est valable pour tout segment AB, il pourrait tout à fait être la diagonale d'un carré par exemple. Mais en mathématicien sérieux, encore doit-il s'assurer qu'inversement, toute suite de chiffres indéfinie vers la droite (ce qui veut dire qu'elle peut être infinie mais que l'on sait l'écrire aussi loin que l'on veut), et comportant une virgule, est la mesure d'un segment. Reprenons le texte de Lebesgue :

« Si, connaissant cette suite, on cherche à construire AB à partir de A sur une demi-droite AX, on obtient de suite les segments A1B1, A2B2, ... emboîtés les uns dans les autres.

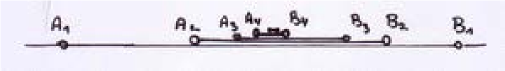


Figure 2

Des axiomes de la géométrie, il résulte qu'il existe un point B commun à tous ces segments selon l'axiome de continuité, et qu'il n'y en a qu'un seul selon l'axiome d'Archimède. On a donc un segment AB bien déterminé, mais la longueur de AB ne sera la suite de chiffres d'où on est parti que si B ne coïncide avec aucun des points Bi. On voit immédiatement que ce cas se présente si, et seulement si, tous les chiffres de la suite sont des 9 à partir d'un certain rang. De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres. »

Expliquons cela. On l'a vu au début, les points Ai sont toujours la dernière extrémité avant le point B, ou à la limite confondus avec B, AiB est donc toujours plus petit que Ui, ou nul, et Bi est ainsi toujours strictement à la droite de B, et ne peut jamais être confondu avec lui. Mais si la suite de nombres est formée d'une infinité de 9, tous les segments emboîtés auront comme point commun unique le point Bi, qui pourtant ne peut pas être B. Il y aurait contradiction avec la construction proposée par Lebesgue. Ce dernier élimine donc sans état d'âme un tel nombre comme pouvant appartenir à son ensemble. Nous reviendrons plus loin sur ce cas un peu étrange, et qui nous fait sentir tout le soin qu'il est nécessaire de prendre lorsque l'on s'approche de quantités infiniment petites ou infiniment grandes. Ces difficultés ne seront en fait vaincues que vers la moitié du 19e siècle.

Le nombre chez Lebesgue n'est donc pas prioritairement une écriture, comme chez Stevin, mais une sorte de protocole expérimental de mesure de toute grandeur. Soucieux d'une rigueur axiomatique, il fait appel à l'axiome de continuité et à l'axiome d'Archimède, sur lesquels nous reviendrons peut-être dans un prochain article, et règle de manière drastique le cas d'un périodique de période 9,comme le fameux 0,999..... D'autre part, il réglera la question de la mesure de deux segments isométriques distincts par la graduation de la droite numérique, en utilisant les déplacements laissant fixes cette droite : symétrie centrale autour d'un point de la droite et translation par un vecteur porté par la droite.

Il lui reste à définir l'opération d'addition : connaissant la longueur de deux segments, comment trouver celle du segment somme, et l'opération de multiplication. Pour cette dernière, il est intéressant d'observer la situation proposée par Lebesgue pour son traitement:

> *« On connaît la longueur, soit par exemple 37,425... d'un segment AB avec l'unité U, et la longueur de U par rapport à une unité V, soit 4,632..., quelle est la longueur de AB avec l'unité V ? »*

Lebesgue rappelle en note que

> *« la multiplication des entiers est supposée avoir été définie en termes analogues [...]; toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet: 5 sacs de 300 pommes; 2m.75 d'étoffe à 28fr.45 le mètre ».*

Il n'utilise donc pas la situation classique faisant intervenir une disposition d'objets selon un réseau rectangulaire ou celle de la détermination de l'aire d'un rectangle, notion qu'il traite dans un autre chapitre.

Nous laissons le lecteur apprécier cette approche de la multiplication proposée par Lebesgue, alors que nous sommes plutôt fort habitués à l'enseigner par le biais de la détermination de l'aire d'un rectangle.

Soulignons enfin l'association essentielle que fait Lebesgue entre géométrie, des segments sur une droite, et l'écriture de ses nombres traduisant un protocole de mesure de ces segments.

Références

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage, Grenoble.

Goldstein C. (2012). Les fractions décimales : un art d'ingénieur ? HAL : hal-00734932, version 1 cf *http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dhb78dii8ggjg8u43uq2lqhn23&view_this_doc=hal-00734932&version=1*

Lebesgue H-L. (1915). *Sur la mesure des grandeurs,* A. Kundig, Genève.

Le Lionnais F. et al.(1979). *Dictionnaire des mathématiques,* PUF, Paris.

Stevin S. (1585). *La Disme, http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html*

Aide mémoire 9-10-11 (2011). *Moyen d'enseignement romand.*

« Les jeux sont faits ! Hasard et probabilités » : une exposition étonnante

Shaula Fiorelli Vilmart[1] et Pierre-Alain Cherix[2]

Lorsqu'au printemps 2010, nous sommes allés rencontrer l'équipe du Musée d'histoire des sciences de Genève (MHS) pour leur proposer une collaboration pour la conception d'une exposition parlant de mathématiques, ils furent enthousiastes. Gilles Hernot, médiateur culturel dans cette institution, avait depuis longtemps l'envie d'organiser une exposition sur les probabilités, notre proposition venait donc à point nommé.

L'idée de développer une telle exposition est apparue dans le cadre de l'organisation du 5e Espace Mathématique Francophone (EMF), le plus grand congrès de didactique des mathématiques du monde francophone. Lors de ce congrès, nous étions coordinateurs, avec Pierre Audin[3], d'un groupe de travail sur la vulgarisation des mathématiques. Un participant, le mathématicien tunisien Madhi Abdeljaoaud, avait imaginé que Genève devienne, le temps du congrès, un lieu où le public irait à la rencontre des mathématiques. Comme il nous semblait important non seulement de parler de ce thème, mais aussi de le mettre en œuvre, nous avons pris son rêve (presque) au pied de la lettre en proposant cette idée au MHS.

Le MHS a pris le parti de développer des expositions temporaires ayant une forte partie interactive et ludique; cette exposition ne dérogeait pas à cette règle, puisqu'elle était composée de quinze postes de travail où le visiteur était invité à pratiquer une expérience. Qu'elle concerne le fait de jouer au casino, le paradoxe des anniversaires, le problème de Monty Hall, ou un biais statistique, on y retrouvait toujours trois niveaux d'interrogation :

- Le premier consistait en une expérience ludique que le public devait réaliser, il était possible de rester à ce niveau ;
- Le deuxième niveau était une réponse directe à la question posée par l'expérience, ainsi qu'une brève explication de celle-ci avec parfois une anecdote historique ou mathématique ;
- La troisième, appelée « Pour aller plus loin » offrait au public une description plus détaillée des outils mathématiques mis en jeu, ainsi que d'autres applications.

Deux expériences ludiques : des dés très particuliers et un jeu de pile ou face. (Philippe Wagneur © MHN / MHS)

Cette démarche était non seulement volontaire, mais indispensable tant était grande la gageure d'expliquer à un public généraliste des questions qui mettent régulièrement en difficulté des collégiens, voire des étudiants à l'université. Il fallait donc trouver un moyen de répondre aux aspirations de chacun en tenant compte de son niveau de connaissances.

Le choix des activités et leurs réponses directes ont résulté d'une synergie entre avec l'équipe du Musée (Laurence-Isaline Stahl-Gretch, Gilles Hernot, Stéphane Fischer et Maha Zein), Loren Coquille[4], Michel Kühne[5] et nous-mêmes.

Cette exposition était couplée avec une exposition de machines à calculer mécaniques, dont une Pascaline aimablement prêtée par le Muséum Henri-Lecoq de Clermont-Ferrant, ainsi que de nombreuses

1 shaula.fiorelli@unige.ch

2 pierre-alain.cherix@unige.ch

3 département de mathématiques d'Universcience – Palais de la découverte, Paris.

4 doctorante à la Section de Mathématiques de l'Université de Genève (UniGE)

5 enseignant au Collège Rousseau et à la Haute École de Gestion de Genève autres appartenant à la riche collection du musée. Ainsi apparaissaient dans un même lieu, les machines à calculer de la plus ancienne (la Pascaline) à la plus récente (la Curta).

La pascaline (Philippe Wagneur © MHN / MHS)

La machine Curta (Nol Aders)

Ces machines étaient non seulement belles, mais elles permettaient de montrer que les développements de la connaissance théorique et de l'ingénierie technique allaient de pair : les évolutions techniques ont suivi certaines avancées mathématiques et inversement. De plus, comme les probabilités ont été dès l'origine gourmandes en calcul, il était judicieux de relier ces deux aspects des mathématiques.

L'activité phare : la roulette (Philippe Wagneur © MHN / MHS)

L'exposition a été inaugurée le 1er février 2012 et devait se terminer le 7 janvier 2013, mais en raison de son succès, elle a été prolongée jusqu'au 7 avril 2013. Selon l'équipe du musée, la fréquentation de cette exposition a été excellente, le public est venu nombreux et est resté en moyenne plus longtemps que dans d'autres expositions temporaires. Quelques chiffres à présent, en 2012, 36'793 visiteurs sont venus au MHS et du 1er janvier au 7 avril 2013, il y a eu 8'714 visiteurs, ce qui montre bien que l'exposition a eu un fort retentissement auprès du public. Parmi ces 45'507 visiteurs, un bon nombre (8'702), étaient des élèves, collégiens ou apprentis, venus dans le cadre de leur cours de mathématiques. Il semble donc que les enseignants se sont approprié cette exposition pour l'utiliser dans un cadre scolaire. On ne peut que se féliciter de ces collaborations entre le département culturel de la ville de Genève et le monde scolaire. Pour avoir utilisé l'exposition dans le cadre de cours au collège, nous pouvons affirmer que le fait de toucher des activités concrètes a donné aux élèves une plus grande compréhension et a suscité chez eux un plus grand intérêt pour cette matière.

En conclusion, le fait que le public ait répondu présent face à une exposition parlant d'un sujet mathématique avancé montre bien que les mathématiques continuent à fasciner. Même si elles inquiètent parfois, elles n'en restent pas moins une science attrayante pour le public. Ce dernier est souvent surpris de voir que les mathématiques ne sont pas restées figées à celles qu'il avait étudié à l'école, mais qu'il s'agit d'une science vivante et dynamique et que son développement induit des changements profonds sur notre mode de vie. Il est donc important de continuer à faire de la médiation mathématique pour répondre à cet intérêt.

Un autre axe de réflexion est de savoir comment de telles actions peuvent entrer dans le cadre scolaire. La participation des enseignants et des élèves montre que ce type d'activité est porteur, reste à savoir dans quelle mesure découvrir ces aspects des mathématiques permet d'aider dans leur pratique scolaire journalière, mais ceci est une autre histoire.

Reste le plaisir partagé avec toute l'équipe qui a mis sur pied cette exposition, les moments agréables (et parfois moins), mais toujours intéressants et enrichissants de la conception et du dialogue entre des acteurs venant de mondes différents (la muséographie, l'enseignement et la recherche) et la joie de voir que ce travail a répondu à une attente du public.

Si vous êtes intéressé à voir les problèmes et les questions posées dans l'exposition, vous pouvez retrouver tous les textes et la descriptions des questions sur le site de l'exposition au Musée d'Histoire des Sciences : *www.ville-ge.ch/mhs/expo_2012_jeux.php*

Réflexion de Claire Meljac sur une question d'actualité grandissante : Echec en maths ou dyscalculie : comment agir ?

Thierry Dias et Michel Deruaz

Le mardi 30 avril à la HEP Vaud, Claire Meljac, Dr en Psychologie, proposera une réflexion sur une question d'actualité grandissante : comment agir vis-à-vis des élèves en difficulté en mathématiques ? Son regard de psychologue, ses nombreux écrits sur le sujet et sa longue expérience de formation permettront une approche accessible à tout public. Elle nous résume ici le contenu de sa conférence.

Le domaine des apprentissages mathématiques est longtemps resté, pour les psychologues et leur « famille », à la fois inconnu et interdit.

La grande figure de Piaget en barrait d'une certaine façon l'entrée par une simple pancarte « épistémologie génétique » à laquelle rien, dans les cours standards de psychologie, ne préparait psychologues et autres « nouveaux » spécialistes (orthophonistes en France, logopèdes en Suisse).

Mes premiers travaux dans le champ des apprentissages mathématiques (datant du « tournant » des années 80 et coïncidant avec la disparition de Piaget) ont longtemps été considérés comme des incongruités.

Sous l'effet de différentes lois sociales reconnaissant les handicaps et les handicapés, d'une part, et proposant, en réponse, d'autre part, des possibilités de compensation, le paysage des obstacles à l'apprentissage, en France, a totalement changé. Les « dys » et, en particulier les « dyscalculiques » se multiplient, tandis que la « dyscalculie » devient une maladie répandue. L'épidémie gagne l'ensemble de la francophonie et, plus largement, les pays valorisant l'éducation et les apprentissages.

Avons-nous vraiment gagné au change ?

La présente intervention tentera d'évaluer les transformations en cours et d'apporter quelques solutions pratiques aux familles et aux enseignants désorientés.

Informations pratiques

Echec en Maths ou dyscalculie : comment agir ?

Des réflexions et des pistes à l'usage de tous : parents, enseignants, praticiens et rééducateurs

Mardi 30 avril 2013 à 17h15

Bain 21 – auditoire 308
Entrée libre

HEP Vaud

Tentative de définition de quelques pratiques enseignantes caractéristiques chez des enseignants « ordinaires » et spécialisés genevois

Céline Vendeira Maréchal

Université de Genève

Dans cet article nous nous proposons d'analyser quelques réponses à un questionnaire destiné à des enseignants primaires genevois du secteur « ordinaire » et du secteur spécialisé concernant leur enseignement des mathématiques. A l'origine, ce questionnaire fait partie d'une recherche plus large (Maréchal, 2010) qui s'intéresse aux contraintes institutionnelles pesant sur les enseignants du secteur spécialisé genevois et de leurs effets sur les pratiques enseignantes relativement à la discipline mathématique.

A partir de l'analyse de trois questions spécifiques[1], nous tentons d'identifier, dans cet article, si des pratiques caractéristiques peuvent se dégager en fonction du type d'établissement, à savoir les classes « ordinaires », les classes spécialisées et les classes des Centres de jour accueillant des élèves aux troubles de la personnalité et de l'apprentissage[2]. Nous considérons ainsi ces trois lieux d'enseignement genevois comme trois institutions différentes possédant chacune des particularités distinctes.

Analyses

Echantillon d'étude

Les analyses que nous présentons ci-dessous concernent trois questions relativement à l'enseignement de la discipline mathématique : quel emploi des moyens d'enseignement officiels ? Quel type de planification mathématique ? Quels critères de sélection des activités ?

En ce qui concerne notre échantillon d'étude[3], 36 enseignants de classes «ordinaires» ont répondu au questionnaire sur une centaine envoyés. L'année de la passation du questionnaire dans les classes (2007), il y avait 278 classes de troisième primaire Harmos à Genève[4], ce qui signifie qu'environ 13% des enseignants genevois ont répondu à notre questionnaire. En ce qui concerne les classes spécialisées, 10 enseignants sur 65 ont répondu[5], ce qui représente environ le 15%. Enfin, concernant les 13 Centres de jour accueillant des élèves aux troubles de la personnalité et de l'apprentissage, nous avons reçu 7 questionnaires en retour sur les 13 envoyés, ce qui représente plus de 50%.

Emploi des moyens d'enseignement officiels (COROME)

Nous nous intéressons tout d'abord aux réponses des enseignants relativement à l'emploi des moyens d'enseignement officiels de mathématiques dans leur classe.

1 Ces trois questions figurent en annexe directement sur le site de la revue Math-Ecole à l'adresse suivante : www.math-ecole.ch

2 Les élèves regroupés dans des classes spécialisées et des Centres de jours ne sont pas répartis dans des classes en fonction de critères de niveau scolaire de la même manière que dans les classes « ordinaires ». Les degrés tels qu'ils sont appliqués dans les classes « ordinaires » (1ère primaire, 2ème primaire, etc.) ne sont pas en vigueur dans le secteur spécialisé. « Certaines [classes spécialisées ou Centres de jour] répartissent leurs élèves selon des critères d'âge, d'autres privilégient le niveau scolaire, d'autres les composent selon des critères de comportement, d'affinités, voire de mixité » (Cange, 2005, p.103).

3 Notre travail de recherche plus large s'intéresse à l'enseignement de l'introduction de l'addition, c'est pourquoi les enseignants qui ont répondu au questionnaire sont des enseignants de troisième primaire Harmos et des enseignants spécialisés qui indiquent traiter ce thème avec leur élèves lors de l'année de notre recueil de données (2007).

4 Selon les chiffres du SRED (Service de la Recherche en Education) au 15 janvier 2007 (année de la passation du questionnaire dans les classes) concernant le nombre d'enseignants primaires de troisième primaire.

5 Bien que ces 65 enseignants ne traitent pas l'introduction de l'addition avec leurs élèves, nous effectuons toutefois notre pourcentage à partir de cette valeur étant donné qu'il n'a pas été possible de savoir le nombre précis de classes qui traitait réellement l'introduction de l'addition cette année là.

Cette information est importante étant donné que les contraintes institutionnelles entre le secteur « ordinaire » et spécialisé diffèrent. En effet, alors que les enseignants « ordinaires » sont fortement contraints d'utiliser les moyens d'enseignement officiels suisses romands, les enseignants spécialisés ont une certaine marge de manœuvre. C'est pourquoi il nous paraît particulièrement intéressant d'observer les choix adoptés. Le tableau ci-dessous synthétise les réponses des enseignants des 3 types d'institutions.

Type d'institutions	Utilisation des moyens d'enseignement officiels (COROME)			Total
	oui	non	parfois	
Classes « ordinaires »	34	1	1	36/36
Classes spécialisées	2	3	5	10/10
Centres de jour	4	0	3	7/7

Tableau 1 : Réponses relativement à l'emploi des moyens d'enseignement officiels dans les classes « ordinaires », spécialisées et Centres de jour du canton de Genève

Au regard de ce tableau, on remarque que la quasi-totalité (94%) des enseignants « ordinaires » emploient les moyens d'enseignement officiels régulièrement dans leur pratique quotidienne. Quant aux 7 enseignants des Centres de jour, bien que leurs réponses ne soient pas aussi concordantes que dans le cas des classes « ordinaires », on constate tout de même qu'ils disent tous employer les moyens COROME, au moins parfois. Ce qui n'est pas le cas des enseignants des classes spécialisées puisque 3 enseignants sur 10 indiquent ne pas les utiliser du tout.

Concernant les réponses des enseignants spécialisés, nous avons cherché à comprendre, à travers leurs éventuels commentaires, les raisons qui poussent certains d'entre eux à ne pas employer les activités proposées dans les moyens officiels. Les arguments invoqués montrent que les enseignants des classes spécialisées sont confrontés à l'échec préalable[6] de leurs élèves et que la prise en compte de ce facteur conduit certains d'entre eux à ne pas utiliser les moyens d'enseignement officiels. Ces enseignants considèrent en effet qu'il n'est pas pertinent de proposer aux élèves des activités qui ne leur ont pas permis de réussir par le passé dans le cursus « ordinaire ».

> - Etant donné que les élèves ont déjà fait ces activités plusieurs fois, nous varions avec d'autres moyens.
>
> - Les enfants arrivent dans notre classe alors qu'ils sont en échec. Nous cherchons d'autres moyens.

Il semblerait par contre que cette contrainte d'échec préalable n'agisse pas de cette même façon sur les enseignants des Centres de jour qui disent tous employer les moyens d'enseignement au moins partiellement.

Type de planification adopté

Le second tableau, ci-dessous, nous renseigne sur le type de planification adopté par les enseignants des trois types d'institutions concernant leur enseignement de la discipline mathématique durant une année scolaire. Les items proposés sont représentatifs de planifications soit sur une longue période (planification annuelle, par trimestre, de vacances en vacances), soit sur des périodes plus courtes (planification d'un module à l'autre, chaque quinzaine, d'une séance à l'autre). Les commentaires recensés chez les enseignants « ordinaires » mettent en évidence la tentative de suivre un plan annuel ou un « itinéraire d'enseignement » proposé soit directement dans les ouvrages COROME, soit construit par des enseignants ou formateurs et diffusé comme littérature grise dans divers établissements primaires genevois. Cette pratique est liée au souhait des enseignants de traiter un maximum des activités proposées dans les moyens d'enseignement officiels.

> - J'ai un planning que je suis à peu près au fil de l'année.
>
> - Je planifie en début d'année pour couvrir le maximum du classeur COROME et les fiches.
>
> - Planification en début d'année en fonction du fil rouge (*Le fil rouge propose un exemple « d'itinéraire d'enseignement » pour chaque secteur d'étude. Il propose entre autres à quel moment de l'année « un champ d'activité » peut être introduit.)*

6 Selon Favre (2005), il existe trois types d'échecs qui vont influencer d'une manière ou d'une autres les enseignants du secteur spécialisé : l'échec préalable qui a amené les élèves à intégrer le cursus spécialisé (ou à y rester), l'échec effectif qui correspond aux difficultés manifestes des élèves et l'échec potentiel qui est représenté par une anticipation des enseignants aux difficultés éventuelles de leurs élèves.

Type d'institutions	Type de planification					Total
	Planification au début de l'année pour toute l'année	en début d'année pour toute l'année et avant chaque nouveau module et/ou d'une séance à l'autre	par trimestre ou de vacances en vacances	avant chaque nouveau module (et d'une séance à l'autre)	d'une séance à l'autre et/ou par quinzaine	
Classes « ordinaires »	11	11	4	5	5	36/36
Classes spécialisées	2	1	0	5	1	9/10
Centres de jour	0	2	0	2	3	7/7

Tableau 2 : Réponses au questionnaire concernant la planification adoptée pour l'enseignement de la discipline mathématique durant une année scolaire

On ressent à travers ces quelques arguments la nécessité de se conformer au programme officiel en suivant autant que possible ce qui est proposé dans les moyens d'enseignement.

Quant aux classes spécialisées et aux Centres de jour, nous n'observons pas une homogénéité aussi évidente que dans les choix effectués par les enseignants « ordinaires ». On remarque toutefois une tendance à planifier plutôt à court terme.

Voici quelques propos recueillis dans les questionnaires pour les deux types d'institutions du secteur spécialisé :

- Avec les enfants du spécialisé, on avance à « tâtons » !

- Planification en début d'année, mais avec beaucoup de modifications.

- Planification à l'intérieur du module en fonction de l'évolution, des lacunes et besoins.

A travers ces quelques propos, on voit apparaître « les élèves » qui étaient absents dans les commentaires des enseignants « ordinaires ». On constate donc chez les enseignants de ces deux types d'institutions, la nécessité première de prendre en compte l'élève plutôt que de se conformer aux programmes officiels.

Ainsi, alors que les enseignants « ordinaires » semblent fortement contraints par un suivi conforme aux moyens d'enseignement afin de respecter les instructions officielles, les enseignants des deux types d'institutions du secteur spécialisé sont davantage tournés vers les besoins de leurs élèves.

Critères de sélection des activités

La suite des analyses a pour objectif de faire émerger en fonction de quels critères les enseignants des trois types d'institutions sélectionnent leurs activités pour faire leurs leçons de mathématiques. Les enseignants ont dû choisir les 2 items les plus importants dans une liste proposée.

Choix des activités en fonction de/du	Classes « ordinaires »	Classes spécialisées	Centres de jour
La capacité des élèves (prise en compte des difficultés des élèves et des erreurs possibles)	19/36	10/10	6/7
L'état psychologique des élèves	0/36	3/10	2/7
Le contenu mathématique	29/36	4/10	3/7
La nature de l'activité (jeux, fiches, recherches…)	11/36	1/10	2/7
L'organisation sociale (travail individuel, collectif, en groupes, ateliers)	7/36	6/10	2/7
La durée que va prendre l'activité	2/36	1/10	1/7
Le matériel nécessaire	3/36	1/10	0/7
Autres	2/36	0/10	0/7
Total	73/36	26/10	16/7

Tableau 3 : Réponses au questionnaire concernant le choix des enseignants pour sélectionner leurs activités en classe de mathématiques[7]

Il ressort que les enseignants « ordinaires » choisissent les activités qu'ils proposent à leurs élèves en fonction prioritairement du contenu mathématique puis ensuite en fonction des capacités de leurs élèves. Dans le cas des enseignants de classes spécialisés et des Centres de jour, c'est d'abord les capacités de leurs élèves qui

7 *Les enseignants ont parfois sélectionné plus de deux items.*

priment puis les contenus mathématiques. On relève toutefois une particularité chez les enseignants des classes spécialisées qui prennent en compte l'organisation sociale comme deuxième critère décisif dans leurs choix d'activités. Cette particularité nous amène à faire l'hypothèse que dans les classes spécialisées la gestion de la classe est compliquée, peut-être davantage que dans les deux autres types d'institutions, et nécessite une prise en compte plus spécifique de l'organisation sociale avant de proposer des activités en classe. Rappelons que le nombre d'élève par classe dans ces lieux, bien que réduit, reste tout de même élevé (entre 7 et 9 élèves contre 6 maximum en Centre de jour), ce qui pourrait expliquer l'attention particulière que les enseignants de cette institution portent à l'organisation sociale.

Une autre question similaire posée aux enseignants en fin de questionnaire leur demandait de choisir deux activités en priorité parmi 8 proposées et d'argumenter leurs choix (question ouverte sans proposition d'items-réponses). Nous avons ensuite regroupé les différents arguments évoqués par les enseignants dans 11 catégories différentes que nous présentons dans le tableau ci-dessous et que nous mettons en lien avec les choix effectués pour chaque type d'institution :

Catégories d'argumentations	Classes « ordinaires »	Classes spécialisées	Centres de jour
Nature des activités (jeu, recherche,...)	23/36	7/10	3/7
Tâche mathématique	14/36	0/10	3/7
Plaisir /motivation	14/36	4/10	3/7
Organisation sociale et gestion de l'activité	7/36	6/10	1/7
Matériel	5/36	2/10	1/7
Possibilité de jouer sur les variables de la tâche	4/36	3/10	1/7
Travail de mémorisation	4/36	0/10	0/7
Utilité	4/36	0/10	0/7
Technique mathématique	2/36	2/10	0/7
Originalité /innovation	2/36	1/10	0/7
Sens de l'addition	2/36	0/10	3/7

Tableau 4 : Réponses concernant le nombre d'enseignants ayant utilisé un argument concernant leurs choix de deux activités parmi huit proposées.

Le premier point que nous pouvons mettre en évidence à la lecture de ce tableau concerne l'absence de réponses relatives à la prise en compte de la capacité des élèves (évoquée précédemment) comme critère de sélection d'activités et l'apparition de l'importance de la prise en compte des aspects motivationnels dans les activités proposées. Il ressort également que la nature des activités est un critère souvent mentionné « c'est un jeu », « les recherches sont importantes », etc. De plus, il apparaît que le plaisir ou la motivation que provoque une activité est une condition importante pour les enseignants dans les trois types d'institutions. Ce constat avait déjà été mis en avant dans une étude réalisée par Pelgrims (2003) où il ressortait que les enseignants des classes spécialisées choisissaient certains exercices en invoquant la nécessité de « motiver », « mettre en confiance » leurs élèves plutôt que de se baser sur d'autres critères tels que leur niveau de connaissance.

Nous remarquons que les classes « ordinaires » et les Centres de jour portent une attention particulière au contenu mathématique impliqué dans l'activité proposée (quelle tâche mathématique est travaillée et quelle technique mathématique est privilégiée ?). Par contre, ce n'est pas le cas des classes spécialisées où ce critère est peu représenté. Les critères qui ressortent dans les classes spécialisées s'attachent davantage à l'organisation sociale et aux questions liées à la gestion de l'activité en classe. Ce point ressortait déjà des résultats précédents (tableau 3). Les réponses des enseignants des Centres de jour laissent apparaître aussi un nouvel élément : le choix d'activités en fonction du sens de la technique mathématique en jeu.

Nous pouvons donc ajouter quelques constats à ceux énoncés précédemment. Nous notons premièrement l'importance, dans les trois types d'institutions, de choisir des activités qui sont originales et ludiques pour les élèves concernés. Dans les classes spécialisées l'organisation sociale et la gestion de classe apparaissent comme primordiales dans le choix des activités par les enseignants et renforcent les constats déjà obtenus établis dans ce sens précédemment. Quant aux Centres de jour, il ressort que les activités qui sont perçues comme donnant du sens au contenu mathématique traité sont sélectionnées en priorité.

Enfin, il apparaît que les arguments invoqués chez les enseignants des classes spécialisées sont principalement d'ordre organisationnel, motivationnel, alors que dans les classes « ordinaires » et les Centres de jour, ils sont aussi d'ordre didactique (réflexion sur la tâche/technique mathématique en jeu).

Conclusion

Nos analyses permettent d'obtenir un certain nombre d'informations que nous résumons de la façon suivante.

Tout d'abord, nous avons constaté que les enseignants « ordinaires » semblent fortement contraints par l'emploi des moyens d'enseignement officiels COROME. Les diverses réponses recueillies auprès des enseignants indiquent même que ceux-ci tendent à être aussi conformes que possible à ces moyens qui sont garants du programme officiel. De manière générale, nous remarquons que cette préoccupation n'est pas celle des enseignants des deux autres types d'institutions spécialisées qui sont davantage tournés vers les besoins de leurs élèves plutôt que sur la nécessité d'employer les moyens COROME. Cependant, alors que les Centres de jour utilisent partiellement les moyens officiels suisses romands dans leur enseignement, ce n'est pas toujours le cas des enseignants de classes spécialisées, qui, pour certains, ne les emploient pas du tout. La raison invoquée par certains enseignants des classes spécialisées concerne l'échec préalable de leurs élèves dans ces classes. En effet, les enseignants considèrent ne pas pouvoir employer des moyens avec lesquels les élèves ont déjà subi des échecs successifs. Ainsi, la prise en compte de ce facteur conduit certains d'entre eux à ne pas les utiliser du tout et à se tourner vers d'autres ressources.

Il ressort également que les enseignants « ordinaires » choisissent leurs activités prioritairement en fonction du contenu mathématique, puis en fonction des capacités de leurs élèves. Dans le cas des enseignants des Centres de jour, c'est l'inverse. On relève une particularité chez les enseignants des classes spécialisées qui ne mentionnent que des critères non didactiques pour justifier le choix de leurs activités. Nous trouvons notamment l'organisation sociale comme deuxième critère décisif dans leurs choix d'activités. Cette particularité nous amène à faire l'hypothèse que dans ces lieux la gestion de la classe est compliquée, peut-être davantage que dans les deux autres institutions, et nécessite une prise en compte plus spécifique de l'organisation sociale avant de proposer des activités en classe. Si la gestion de classe est effectivement plus compliquée, ce qui reste toutefois à vérifier, cela peut être dû à un l'effectif plus élevé dans ces lieux par rapport aux classes des Centres de jour.

Références

Cange, C. (2005). L'enseignement spécialisé en Suisse Romande, l'exemple d'une institution vaudoise. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (année 2003)*, 101-108, Paris VII : Cahier Didirem.

Favre, J.-M. (2005). Etude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (années 2003)*, 109-125, Paris VII : Cahier Didirem.

Maréchal, C. (2010). *Effet des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition*. Thèse de l'Université de Genève.

Pelgrims, G., (2003). La motivation à apprendre des élèves en milieu scolaire : des classes ordinaires aux classes spécialisées. *In G. Chatelanat et G. Pelgrims (Eds.), Education et enseignement spécialisés : ruptures et intégrations (pp. 215-239)*. Bruxelles : De Boeck.

Empiler des cubes

Pierre Audin

Unité « mathématiques » du Palais de la découverte, à Paris

Je travaille au Palais de la découverte depuis bientôt vingt ans. Auparavant, j'étais professeur de mathématiques, en France, dans le secondaire, c'est-à-dire pour des élèves de 11 à 18 ans. Juste avant que je ne devienne un « prof défroqué » l'éducation nationale s'est enrichie en France d'une nouvelle activité en classe de Seconde (élèves de 15-16 ans), prise sur les horaires officiels de la classe, les « modules ». Sur un horaire bizarre, ¾ d'heure par semaine, il fallait partager la classe en deux groupes, pas forcément équilibrés, et le partage pouvait varier d'une semaine à l'autre. On ne savait pas ce qu'il fallait y faire, il était seulement explicitement interdit de faire des « modules de soutien » en alternance avec des « modules d'approfondissement ». Sans doute cela devait être un espace de liberté pour les enseignants, et donc les consignes des inspecteurs étaient peu claires, puisqu'il n'est pas dans les habitudes françaises qu'un inspecteur laisse à un enseignant la liberté de faire ce qu'il veut. Un peu partout, il y a donc eu des modules de soutien et d'approfondissement, en alternance, modules qui ne disaient pas leurs noms : modules 1 et 2 ou A et B. De mon côté, j'ai cherché quelles activités je pouvais tenter, qui ne soient ni du soutien, ni de l'approfondissement, mais qui soient « autres ».

La situation

La lecture d'un article de Jan de Lange (1984) m'a laissé en arrêt et j'ai adapté une des situations dont il était question, à l'intention de deux moitiés de classe, les élèves étant triés par ordre alphabétique. Il s'agissait *a priori* de géométrie dans l'espace. L'activité a été un grand ratage, j'y reviendrai. Cependant, je l'ai reprise assez vite lorsque je suis arrivé au Palais de la découverte, où elle est plutôt réussie. A noter que désormais, il ne s'agit plus du tout de géométrie dans l'espace.

La situation est assez simple, puisque tout le monde sait ce qu'est un cube, et tout le monde a joué avec des cubes depuis le plus jeune âge, souvent même avant de savoir marcher. Les élèves connaissent, le public connaît, pas de problème d'accessibilité à cet objet. Là, on demande de reconstituer, avec le moins de cubes possible, un empilement de cubes dont on a deux vues, l'une de face, l'autre de profil, sans préciser de quel profil il s'agit, d'ailleurs. La solution n'est pas aussi simple qu'on peut l'imaginer à première vue, parce qu'il faut quand même comprendre qu'il s'agit de projections, et que si l'on voit un carré, on ne sait pas à quelle profondeur se situe le cube qu'il représente. Voici les deux vues proposées.

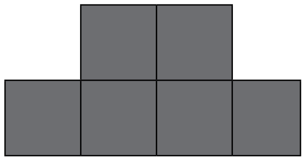


Figure n°1 : vue de face

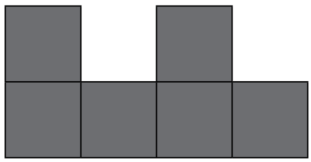


Figure n°2 : vue de profil

La question n'est pas seulement de trouver un empilement de cubes qui donne ces deux vues, mais de trouver ceux qui nécessitent un minimum de cubes. La stratégie de tout un chacun est pourtant de commencer par trouver un empilement de cubes qui donne les deux vues. Lorsque j'insiste sur la question de minimiser le nombre de cubes utilisés, la stratégie se poursuit en tentant d'enlever les cubes inutiles de l'empilement trouvé.

En classe

Lors de l'activité en classe, la recherche a été collective, chaque élève dessinant sur sa feuille un empilement en perspective, pendant qu'un élève le faisait au tableau, ce qui permettait les discussions entre élèves. Evidemment, la représentation en perspective n'est pas chose simple pour les élèves, elle était remplacée par un quadrillage de quatre cases sur quatre, utilisant un codage de type « bataille navale » : dans une direction, on utilise les lettres A, B, C, D, et dans l'autre les chiffres 1, 2, 3, 4 (voir la figure 3).

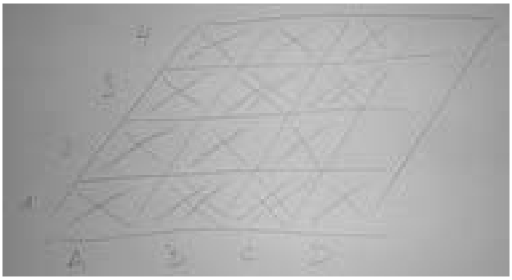


Figure n°3 : représentation en bataille navale

Dans les deux modules, la solution de départ utilisait vingt cubes, ce qui correspond au maximum. L'activité durait 1h30 dans chaque module, et elle s'est arrêtée sans qu'on sache quel était le minimum : la meilleure solution trouvée a été de onze cubes.

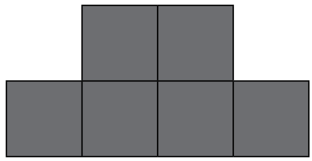
Cela se passait en 1993 dans une classe de Seconde d'un lycée parisien. C'était ma dernière année d'enseignement dans le secondaire, car à partir du 1er septembre, j'étais en poste au Palais de la découverte, dans le département de mathématiques.

Au Palais de la découverte

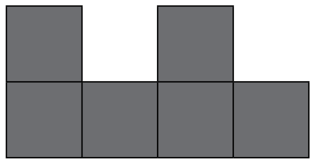
Pour une autre activité, les menuisiers du Palais de la découverte m'ont fabriqué des cubes de 3 cm de côté. Comme je disposais aussi de plateaux en bois plaqué de formica blanc quadrillé de lignes rouges donnant un pavage de carrés de côté 3 cm, la mémoire du problème précédent m'est revenue et j'ai proposé l'activité au public, puis aux groupes scolaires. Car désormais, l'activité n'était plus entravée par la question de la représentation en perspective plus ou moins réussie : disposant d'une cinquantaine de cubes de la bonne taille, l'expérimentation consiste bien à empiler des cubes et à contrôler si les vues sont les bonnes. Voici le mode d'emploi disponible, pour les élèves en visite en groupe, ou pour le public.

Figure n°4 : matériel disponible

Essayez de construire, avec le moins de cubes possible, une forme géométrique en trois dimensions dont la vue de face est :



et celle de profil :



Combien faut-il de cubes au minimum pour la réaliser ?

Lorsque j'ai commencé cette activité, la stratégie était systématiquement la même qu'avec mes élèves (à une exception près) : d'abord la solution pléthorique, utilisant vingt cubes (Figure 7).

Mais en disposant effectivement de cubes et en pouvant les empiler effectivement, il y a désormais possibilité effective d'expérimenter. Assez rapidement, on se rend compte que certains cubes sont inutiles, et à force d'enlever des cubes on obtient une des trois solutions suivantes : dans 10% des cas, 8 cubes, dans 80% des cas, 7 cubes, dans 10% des cas, 6 cubes. Chaque fois, il n'est plus possible d'enlever un seul cube de l'empilement obtenu. Les onze cubes de mes élèves de Seconde sont largement battus.

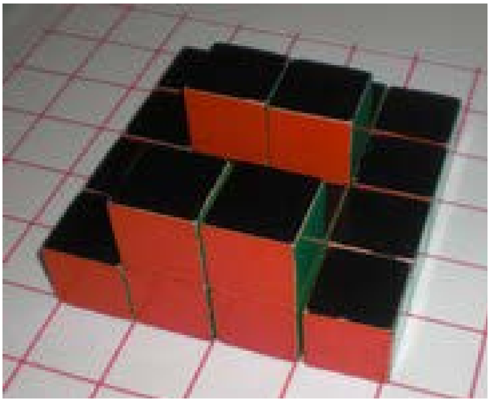


Figure n°7 : solution pléthorique

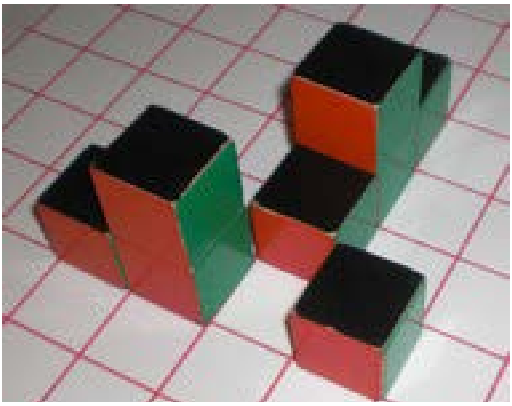


figure n°8 : solution avec 8 cubes

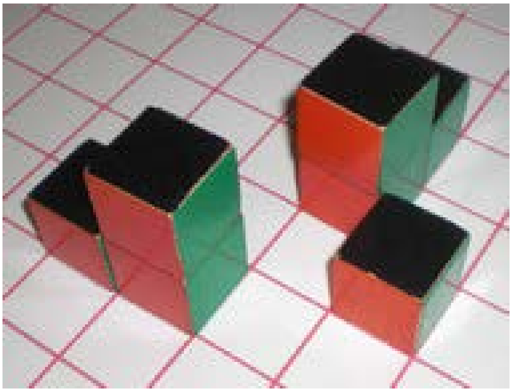


Figure n°9 : solution avec 7 cubes

L'exception notable concerne les élèves des lycées professionnels (pour une fois, ils sont valorisés dans une activité mathématique) qui usinent des pièces en atelier. Ils ont l'habitude de travailler des pièces avec

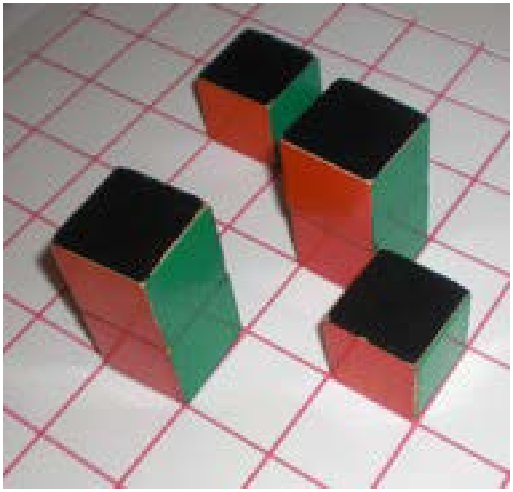


Figure n°10 : solution avec 6 cubes

des vues de face, de profil, de dessus ; ils posent six cubes de façon à se conformer aux deux vues simultanément, et ils sont assez fiers d'avoir réussi en quelques secondes.

Désormais et depuis plusieurs années, la première solution trouvée ne comporte que dix cubes (pauvres élèves de modules n'atteignant que le résultat de onze cubes …). C'est vrai pour les visiteurs comme pour les élèves : la solution à dix cubes se construit avec d'abord six cubes en ligne, tels qu'on les voit sur la vue de face. Puis, quatre cubes complémentaires, cachés derrière une pile de deux cubes, viennent fournir la vue de profil (Figure 11).

Il y a clairement eu un changement de stratégie, dont j'ignore la raison. La source se trouve peut-être dans un jeu télévisé ou dans l'utilisation des téléphones mobiles ou des ordinateurs portables et autres tablettes graphiques, avec lesquels une grosse part de l'activité reste le jeu.

Qu'est-ce qui m'intéresse (et qui m'intéressait) dans cette activité ? Ce n'est pas la géométrie dans l'espace, assez élémentaire somme toute, puisqu'elle ne met en jeu que quelques cubes, à empiler sur seulement deux niveaux. C'est ce qui concerne la méthode utilisée pour s'assurer qu'on est bien au minimum. Et de faire comprendre aux élèves ou au public que la solution obtenue par une méthode est la solution que

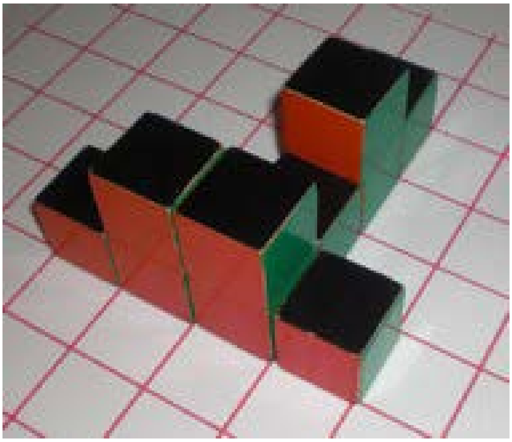


Figure n°11 : solution de départ, avec 10 cubes

la méthode permet d'obtenir, mais pas forcément « la » solution du problème étudié.

Le minimum, ou un minimum ?

Comment être sûr que j'ai trouvé le minimum ? Si je trouve une solution à huit cubes, je sais que le minimum est huit, ou moins de huit, mais sûrement pas plus de huit. Si j'obtiens une solution à sept cubes, le minimum est sept ou moins. Si j'obtiens une solution à six cubes, le minimum est inférieur ou égal à six. Je n'obtiens pas une égalité mais une inégalité. Pour avoir finalement une égalité, j'ai besoin d'une autre inégalité. De toute évidence, d'après l'énoncé, si je vois six carrés, j'aurais besoin de six cubes ou plus, donc toute solution demandera au moins six cubes et le minimum est supérieur ou égal à six. Si j'ai une solution utilisant six cubes, je sais donc que le minimum de cubes à utiliser est à la fois inférieur ou égal et supérieur ou égal à six, ce qui ne peut se faire que si le minimum est égal à six.

En mathématiques, pour démontrer une égalité, il est souvent nécessaire de démontrer deux inégalités (de même, par exemple dans une recherche de « lieu de points », une égalité entre deux ensembles nécessite souvent d'établir deux inclusions entre ensembles). C'est la première « morale » méthodologique.

Problème de méthode

Passons à la deuxième « morale », qui concerne la stratégie utilisée pour résoudre le problème. Vous partez d'une solution et vous enlevez les cubes inutiles un par un. Il est clair qu'au moment où vous ne pouvez plus enlever un cube, vous avez toujours une solution, et si vous en enlevez encore un, n'importe lequel, ce n'est plus une solution. Le nombre de cubes obtenu est donc un minimum local, pour la fonction qui, à une disposition de cubes satisfaisant les conditions sur les vues de face et de profil associe le nombre de cubes de cette disposition.

Le fait de demander au public de faire un empilement de cubes avec le *moins* de cubes possible, ou quand le visiteur obtient une solution, lui demander si on ne peut pas en faire une autre avec *moins* de cubes, induit sans doute cette idée de retirer des cubes inutiles, sans penser à reprendre le problème à la manière des élèves de lycée professionnel par exemple.

La présence du médiateur scientifique que je suis, ou de l'enseignant que vous êtes, permet d'aider le visiteur ou l'élève à analyser la solution obtenue. Il est clair que dans la solution obtenue, il n'y a que deux cubes au niveau supérieur, chacun servant dans les deux vues, de face et de profil. Il est clair que ces deux cubes ne lévitent pas et sont donc obligatoirement portés chacun par un cube du niveau inférieur. Mais dans ce premier niveau, les cubes utilisés ne servent pas tous dans les deux directions, pour les deux vues (Figures 12 et 13).

Un cube, qui ne sert que de face, peut se trouver à n'importe quelle profondeur, tant qu'il est masqué par les autres cubes pour la vue de profil. Si je le déplace dans cette direction de la profondeur, il arrive à une position où il élimine un cube qui ne servait lui aussi que dans une direction, l'autre direction. Ce deuxième cube peut donc être supprimé. Pour réussir cette amélioration, il a fallu changer de méthode. C'est bien la preuve que le minimum obtenu était local, et qu'il était le résultat de la méthode utilisée et non « la » solution du problème posé. De façon surprenante pour le visiteur, en menant un autre raisonnement, il a obtenu une solution avec moins de cubes que ce qu'il croyait être le minimum précédemment.

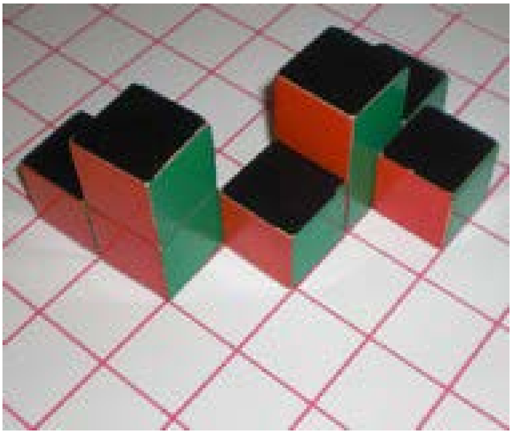


Figure n°12 : un des cubes change de profondeur

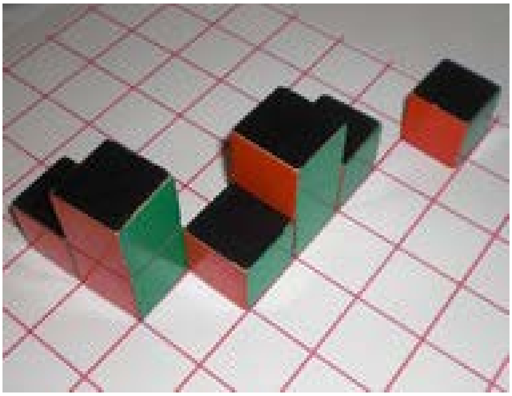


Figure n°13 : à cette profondeur, le cube n'est plus masqué par les autres

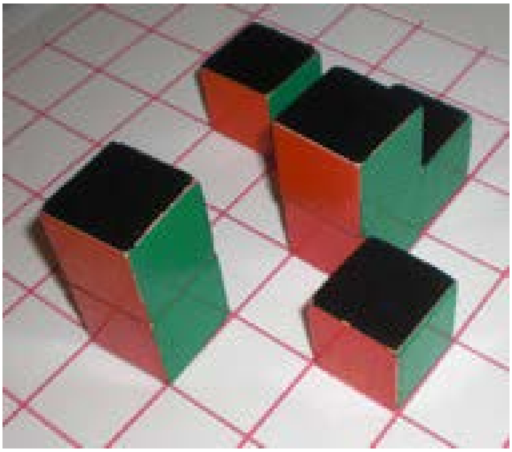


Figure n°14 : un autre cube va pouvoir être retiré

C'est la deuxième « morale » concernant cette activité. A notre époque, où il suffit de cliquer sur « Ok » pour qu'un ordinateur fasse le travail à notre place, il me semble utile de rappeler à mes visiteurs, à vos élèves, que l'ordinateur ne calculera que ce qu'il sait calculer et qu'il faut faire d'abord un peu de maths avant d'utiliser son secours.

Une bonne histoire a toujours trois morales

Si au cours de l'expérimentation, le visiteur croit successivement en un minimum de 10, puis de 8, puis de 7, puis de 6, la nécessité s'impose d'une démonstration que le minimum est bien 6 et qu'on ne trouvera pas une solution avec seulement 5 cubes. D'avoir un peu souffert pour obtenir une solution à six cubes lui permet aussi de vérifier cette dure réalité : quand on démontre une égalité par deux inégalités inverses l'une de l'autre, l'une des deux est souvent plus difficile à obtenir que l'autre. S'il était facile de savoir que le minimum était supérieur ou égal à six, l'inverse a pris beaucoup plus de temps et d'énergie.

Si, à première vue, la situation proposée semble être du domaine de la géométrie dans l'espace, elle n'est finalement qu'un prétexte pour mettre en place ou rappeler des principes utiles au raisonnement mathématique.

Et pour une activité qui semble si familière, si facile à imaginer -- empiler des cubes -- il s'avère que disposer du matériel et empiler effectivement les cubes, constitue une aide sérieuse. C'est la troisième « morale », d'ordre didactique : ne pas croire qu'on connaît bien ce qu'on est censé bien connaître. Oui, on empile des cubes dès le plus jeune âge, mais cette activité se passe beaucoup mieux lorsqu'on dispose concrètement des cubes qu'il est question d'empiler.

Références

De Lange, J. (1984). Geometry for all or: no geometry at all? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 84/3*, 90-97.

Les questions de Fermi

Laura Weiss

IUFE, Université de Genève

Introduction

En 1623, dans *Il Saggiatore*, Galilée écrivait :

> *« La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. »*

Cette phrase, maintes et maintes fois citée, pose le constat de la contribution fondamentale que les mathématiques, en tant que langage mais aussi outil d'approfondissement et de formalisation des concepts, peuvent apporter aux sciences et à la physique en particulier. Plus de deux millénaires se sont écoulés depuis la naissance des mathématiques, à partir du monde physique et des besoins quotidiens, par le détachement du concret que les philosophes grecs ont progressivement opéré en définissant des objets idéaux, des règles non contingentes et un système de raisonnement basé sur la logique pure (Arsac, 1987). Avec Galilée et surtout Newton, c'est une union particulièrement fructueuse qui se (re)noue entre les deux disciplines, car la relation qu'elles entretiennent est bien plus intime que ne serait un lien de champ d'application – la physique pour les mathématiques – ou de langage – les mathématiques pour la physique.

Cette relation entre mathématiques et physique est si forte que plusieurs philosophes, physiciens et mathématiciens l'ont longuement auscultée : comment se fait-il que les mathématiques soient si bien adaptées pour décrire les phénomènes auxquels s'intéressent les sciences physiques ? Ainsi Etienne Klein (2005) transforme l'affirmation de Galilée en question :

> *« Comment un ensemble de symboles abstraits, articulés par un jeu de règles précises, issus très souvent d'une activité purement intellectuelle, peut-il posséder de telles capacités d'adaptation au monde empirique ? »,*

Question qu'Einstein traduit en stupéfaction à l'aide d'une de ses formules lapidaires :

> *« Ce qui est incompréhensible, c'est que le monde soit compréhensible ».*

En effet le grand physicien considère que les mathématiques sont un produit de la pensée humaine, indépendant de l'expérience sensible et des objets réels. Il s'agit donc de comprendre pourquoi le langage mathématique permet de formuler les lois de la nature.

Si on suit Kant dans la Critique de la raison pure (1781), l'adaptation entre physique et mathématiques trouve son origine justement dans le fait que les mathématiques sont une construction de l'esprit humain. Autrement dit, le physicien, comme tout homme, comprend la nature en fonction des outils intellectuels qu'il a à disposition :

> *« La raison ne voit que ce qu'elle produit elle-même selon son projet, qu'elle devrait prendre les devants avec les principes qui régissent ses jugements, et forcer la nature à répondre à ses questions, mais non pas se laisser conduire en laisse par elle ».*

Actuellement ce débat n'est pas clos, même si majoritairement les physiciens semblent s'accorder sur une idée proche de celle de Kant, à savoir que seules les propriétés mathématiques du monde physique nous sont accessibles et que la force de la physique réside justement dans le choix de limiter son champ d'étude à ce qui est mathématisable[1].

Si dans cette introduction, nous nous sommes référés à cette question vieille d'un demi-millénaire, sans réponse à ce jour et peut-être à jamais, sur la nature de la relation intime entre mathématiques et physique, c'est une autre connivence entre ces deux disciplines que nous allons illustrer ci-dessous. Elle porte sur les questions de Fermi, qui semblent concerner particulièrement les physiciens, comme le prouve la présence d'une rubrique mensuelle s'y rapportant dans *The Physics Teacher*, journal américain populaire pour les enseignants de physique.

---

1 *Pour une brève revue des positions des scientifiques et philosophes sur ce sujet voir Klein (2005).*

Ces questions exposent comment, en s'appuyant sur des mathématiques simples et des données approchées, il est possible de répondre à toutes sortes de questions de la vie quotidienne.

Dans cet article, après avoir défini les questions de Fermi et décrit leur fonctionnement d'abord dans le cas d'exemples historiques, puis concrets pour la classe, nous en discutons l'ntérêt et montrons qu'elles s'inscrivent dans les objectifs du plan d'études romand (PER).

La question de Fermi « musicale » d'origine

Enrico Fermi, prix Nobel de physique 1938, l'un des tout grands physiciens du XXe siècle, était considéré comme un maître des approximations en calcul, car il avait le goût de se poser des questions parfois bizarres et de les résoudre sur le champ, avec les moyens à disposition. Ainsi, on raconte qu'un jour il s'interrogea sur les accordeurs de pianos travaillant dans la ville de Chicago et qu'avec ses amis il en estima le nombre sur un coin de table. Sa réponse tient dans une suite de suppositions à propos des valeurs numériques des données et dans un calcul d'ordre de grandeur du résultat.

Combien d'accordeurs de pianos travaillent à Chicago?

En partant de cet exemple, nous définissons une question de Fermi comme un problème dont les données numériques ne peuvent être qu'estimées, ce qui implique un résultat dont on ne peut donner que l'ordre de grandeur – à savoir l'exposant de la puissance de 10 – et non la valeur précise. Cette estimation assez grossière (quand le résultat est 1000 par exemple, on ne peut savoir s'il s'agit de 512 ou 4328 !) peut être due à un choix délibéré, quand l'ordre de grandeur du résultat suffit pour répondre à la question ou, au contraire, au manque de connaissance précise des données initiales. Cette façon de procéder peut s'appliquer à énormément de situations, dont quelques unes sont exemplifiées ci-dessous. Toutefois, avant de proposer d'autres exemples, quelques commentaires sur la situation des accordeurs de pianos permettent de mieux comprendre le raisonnement qui en soustend la résolution.

Suppositions à faire :
Nombre d'habitants de Chicago : environ 5'000'000
Nombre de personnes par foyer : en moyenne 2
Pourcentage de foyers qui possèdent un piano et le font accorder régulièrement : 5%
Fréquence d'accordage d'un piano : en moyenne une fois par an.
Durée d'accordage d'un piano : environ 2 heures, déplacement compris.
Temps de travail d'un accordeur : 8 h par jour, 5 jours par semaine, 50 semaines par an.
Solution sur la base de ces suppositions
Nombre total d'accordages par an : (5.000.000 habitants) / (2 habitants par foyer) × (5% de foyers avec piano) × (1 accordage par an) = 125'000 accordages.
Nombre d'accordages par accordeur : (50 semaines) × (5 jours par sem.) × (8 heures par jour) / (2 heures par accordage) = 1000 accordages par an.

Réponse
125'000/1000 = 125,
DONC une centaine d'accordeurs de pianos à Chicago dans les années 1930.

Le résultat calculé ci-dessus d'une centaine d'accordeurs de piano à Chicago dans les années 1930 n'est certainement pas exact, car les suppositions faites sont toutes discutables, mais certaines plus que d'autres. Par exemple, le pourcentage de foyers de Chicago qui font accorder leur piano une fois l'an semble particulièrement sujet à une remise en cause. Probablement un bon musicien qui possède un vieux piano le fait accorder plus régulièrement, alors que les parents d'un enfant qui apprend à jouer peuvent être plus laxistes sur la régularité des accordages, par conséquent la moyenne peut être très différente de 5%.

L'intérêt de ce type d'analyse réside plutôt dans l'identification des données à préciser pour calculer, puis affiner le résultat. Il serait donc utile de rechercher une valeur plus exacte du nombre d'habitants de Chicago, qui est une donnée aisément accessible. En revanche, le pourcentage de foyers concernés ou le temps de travail d'un accordeur – qui ne travaille généralement pas comme un employé à 40 heures par semaine – sont beaucoup plus difficiles à estimer. Pour cette dernière donnée, une autre façon de s'y prendre serait de contacter un accordeur et lui demander le nombre d'accordages qu'il fait par an, sur la base de son livre de comptes ou en l'observant travailler pendant un jour typique. Mais même de cette manière, le calcul ne prend pas en compte les spécificités qui peuvent exister dans un métier de niche comme celui d'accordeur de pianos. Une dernière solution serait alors de passer d'une approximation par ordre de grandeur à une « fourchette » en établissant des limites inférieure et supérieure en fonction de la variabilité du travail des accordeurs.

Enfin, si connaître le nombre d'accordeurs de piano travaillant à Chicago dans les années 30 est une information totalement gratuite et d'un intérêt limité sans doute même pour Fermi qui avait imaginé la question, son intérêt pédagogique, ou plutôt d'une autre question qui concernerait davantage les élèves, est surtout la possibilité de débattre du résultat trouvé, de sa validité et de sa plausibilité. Ainsi un débat scientifique avec classe permettrait d'abord de vérifier la validité du résultat d'un point de vue de la technique mathématique (le principe du calcul est-il correct ? la formule employée exacte ? les calculs sont-ils justes ?), puis d'entrer dans une réflexion sur la probabilité et la plausibilité du résultat.

Le paradoxe de Fermi

Un deuxième exemple historique permet de mieux préciser l'intérêt des questions de Fermi. Le projet SETI[2] (Search for Extra-Terrestrial Intelligence) essaie d'estimer depuis environ trois quarts de siècle les probabilités de communication de notre civilisation avec des extraterrestres. L'équation suggérée par Drake en 1961[3] permet de calculer N, le nombre de civilisations extraterrestres avec lesquelles les Terriens pourraient entrer en contact.

Nombre de civilisations extraterrestres avec lesquelles les Terriens pourraient entrer en contact

La solution proposée se base sur l'idée de décomposer, grâce à l'équation de Drake, la réponse à la question initiale en plusieurs sous-questions dont certaines peuvent avoir

Solution

$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$ où

R^* = nombre d'étoiles en formation par an dans notre galaxie,

f_p = fraction d'étoiles possédant des planètes,

n_e = nombre moyen de planètes par étoile propices à la vie,

f_l = fraction de planètes avec apparition de la vie

f_i = fraction de vies donnant des civilisations « intelligentes »

f_c = fraction de civilisations capables et désireuses de communiquer,

L = durée de vie moyenne d'une civilisation, en années.

Réponse historique

Les valeurs plausibles, à l'époque où l'équation a été proposée, étaient $R^*=10$; $f_p=0,5$; $n_e=2$; $f_l=1$; $f_i=f_c=0,01$; $L=10'000$, ce qui donne comme réponse $N = 10$.

une réponse relativement précise, comme R* ou fp. Pour notre part, nous voyons dans cette méthode l'analogue d'un calcul d'erreur où l'imprécision du résultat final peut être renvoyée aux imprécisions des différentes mesures. Signalons toutefois que de considérables désaccords subsistent encore aujourd'hui à propos des données choisies à l'époque, dont certaines ont pu être améliorées depuis les années soixante avec les progrès de l'astronomie. Ici aussi un débat scientifique, ou du moins une réflexion sur le résultat, confère à la méthode une plus grande portée : d'une part elle permet d'identifier les données à affiner, d'autre part, malgré les inconnues qui subsistent, elle offre un ordre de grandeur qui n'est pas énoncé simplement au hasard.

Fermi s'était aussi intéressé à ce problème et l'avait reformulé sous forme du paradoxe qui porte son nom[4] : « S'il y a autant de civilisations extraterrestres, leurs représentants devraient déjà être chez nous. Où sont-ils donc ? ». Son argumentation se basait sur le fait que la Terre est beaucoup plus jeune que l'Univers et que si d'autres civilisations technologiques ont existé ou existent dans la galaxie, elles auraient déjà dû entreprendre des voyages interstellaires. Or, il n'y a pas de signes ou de traces de ces voyages. Plusieurs hypothèses ont été énoncées pour expliquer ce paradoxe. En laissant de côté les arguments de ceux qui considèrent la question trop anthropomorphique et la re-

2 http://www.seti.org/

3 http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_de_Drake ou encore http://exobio.chez-alice.fr/drake.htm

4 http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Fermi

jettent d'emblée puisqu'il serait impossible de communiquer avec une vie aux formes trop différentes de la nôtre, on trouve trois catégories de réponses. La vie intelligente n'existe que sur Terre puisque le principe d'exclusion biologique, qui pourrait s'appliquer dans ce cas aux espèces intelligentes, empêche que deux espèces partagent la même niche écologique (d'où fi égale 0); les extra-terrestres existent bien mais les voyages interstellaires restent impossibles, car trop longs pour la durée de notre vie et c'est la communication qui est impossible (d'où fc égale 0); ou enfin les extraterrestres existent bien et nous visitent à notre insu, puisque nous sommes incapables de déceler leurs traces ! Si le paradoxe de Fermi continue d'être discuté dans les cercles du projet SETI et des promoteurs de sciences comme l'exobiologie, la futurobiologie ou l'astrosociologie, il permet dans notre propos de mettre en évidence que les estimations des données des questions de Fermi sont parfois très difficiles, voire basées sur des arguments très discutables.

Concluons que cette question n'est pas présentée ici pour un quelconque intérêt pour l'enseignement, mais bien pour son statut « historique » qu'elle partage avec la précédente. On peut ainsi en retenir essentiellement une démarche qui, malgré le grand nombre de données discutables à prendre en compte, réduit autant que faire se peut l'épaisseur de l'inconnu auquel l'homme est confronté quand il pense à sa place dans l'univers.

Le nombre de grains de riz dans un paquet d'un kilogramme

Pour illustrer la méthode des questions de Fermi à un niveau qui soit adapté à l'école primaire, on peut faire chercher aux enfants la question classique[5] du nombre de grains de riz contenus dans un kilogramme de riz. Essentiellement deux méthodes de solution du problème sont à leur portée, l'une passant par le comptage du nombre de grains contenus dans un volume donné de riz, l'autre par le comptage du nombre de grains contenus dans une masse donnée de riz. Le problème peut être proposé en fin d'école primaire, par exemple en 7e ou en 8e année. Pour le travailler avec des enfants plus jeunes, il faut transposer la question à des objets plus grands, par exemple des marrons ou des billes, les premiers présentant l'avantage de ne pas être tous de la même taille et mieux justifier ainsi aux yeux des enfants un résultat approximatif, résultat dont la précision pourra ensuite être montrée comme suffisante pour les besoins du problème (le problème peut être de calculer le nombre de marrons qu'un marronnier produit et il sera demandé aux enfants de ramasser les marrons dans la cour de récréation pendant quelques semaines). Avec de jeunes enfants, le calcul du volume est remplacé par le comptage du nombre de fois qu'on peut remplir un récipient (par exemple une grande boîte) avec les marrons. En comptant le nombre de marrons qu'on peut mettre dans la boîte, le nombre total de marrons ramassés s'obtient à l'aide d'une multiplication ou d'une addition répétée pour les élèves plus jeunes. Ici aussi, l'intérêt est d'arrondir le nombre de marrons contenus dans le récipient, en montrant qu'on n'en met pas toujours le même nombre selon la façon dont ils se placent et de leur dimension, pour trouver un résultat approché, mais qui donne un bon ordre de grandeur. Une discussion avec les élèves pourra mettre en évidence qu'avec deux ou trois marrons de moins ou de plus dans la boîte à chaque remplissage, le résultat final varie entre deux fois plus ou moins le nombre de remplissages, qui est une toute première approche du concept de l'imprécision d'une mesure.

Quel est l'intérêt de cette tâche ? Outre le fait qu'elle permet de récolter de l'argent pour les courses d'écoles lors de soirées de parents en proposant, contre une obole, de deviner le nombre de grains de riz contenus dans un récipient, nous y voyons d'abord deux objectifs mathématiques et un objectif de collaboration. Ce dernier est le travail collectif des élèves, la tâche mettant en évidence la rentabilité de la collaboration, parce qu'elle permet d'atteindre un comptage plus élevé et d'améliorer ainsi la précision du résultat. Les deux premiers

5 *Ce problème est classique, de nombreux sites sur internet traitent de la question.*

Solution par le volume
Un paquet de l'excellent riz pour risotto « Carnaroli » (http://www.fureurdesvivres.com/news/riziculture-italienne-et-risotto) dans un emballage souple en plastique a des dimensions d'environ 16 cm sur 10 cm sur 8 cm, ce qui correspond à un volume arrondi de 1500 cm^3. Si on compte 500 grains de ce riz, ils occupent un volume de 4 cm sur 4 cm sur 1 cm, ce qui donne 16 cm^3, qu'on peut arrondir à 15cm^3. A noter qu'il peut être demandé aux élèves d'une classe de compter 1000 grains par groupes de 2 ou 3 élèves, ce qui permet, dans une classe de 20 élèves, d'obtenir le volume de 10'000 grains, améliorant ainsi la précision de la donnée de base. Revenant à notre calcul, si un volume de 15 cm^3 de riz correspond à 500 grains, alors le kilogramme de riz, dont le volume est approximativement 1500 cm^3, contient environ 50'000 grains. Le résultat peut être arrêté à son ordre de grandeur, à savoir 100'000 grains.
Les grains de riz « Carnaroli » étant petits et irréguliers, notre résultat est un peu supérieur mais reste proche et surtout du même ordre de grandeur que celui donné par plusieurs sites internet (entre 30'000 et 50'000 grains par kilogramme (*http://www.doc-etudiant.fr/Physique-qr/Combien-y-a-t-il-de-grains-dans-un-kilo-de-riz-34426.html*)), qui se basent probablement le riz à long grain le plus utilisé.
Solution par la masse
L'idée est la même que pour le volume, il s'agit de peser un nombre de grains de riz dénombrable sans erreur en un temps raisonnable, puis, par l'application de la proportionnalité, calculer le nombre de grains de riz contenus dans un kilogramme. Toutefois, cette deuxième méthode est sujette à plus de discussion. En effet, si les élèves peuvent dénombrer collectivement 10'000 grains, la masse de ces derniers est de l'ordre de 100 g (de 50 à 200 g(Masse d'un grain de riz, selon différents sites internet, autour de 0,02 à 0,028 g. Voir par exemple : *http://forums.futura-sciences.com/chimie/441715-mole-dun-grain-de-riz.html* ou *http://www.ilephysique.net/forum-sujet-190277.html*; etc.)), ce qu'il est possible de mesurer sur une balance de ménage facile à se procurer. Mais comme la masse d'un grain de riz est de l'ordre de 0,01 g, l'ajout de quelques grains sur la balance ne fait pas varier le résultat de la balance, ce qui peut déstabiliser les élèves.
Comparaison des deux méthodes
Si les deux méthodes peuvent être appliquées avec la classe, il peut être intéressant de partager les élèves en deux groupes et de comparer ensuite les résultats obtenus par les deux méthodes. Les différences obtenues devraient renforcer l'idée de se limiter à l'ordre de grandeur et ne pas vouloir chercher plus de précision pour le résultat.

Deux méthodes de solutions du problème détaillées

sont d'une part le calcul de volume à partir des dimensions du paquet d'un kilogramme de riz et des dimensions du récipient dans lequel on met les grains dénombrés et d'autre part l'application de la proportionnalité, car ces deux notions mathématiques entrent en jeu pour obtenir le résultat.

Mais un troisième type d'objectif ne doit pas être négligé, objectif qui peut être travaillé dans le cadre d'un débat scientifique entre les élèves, après l'obtention et la validation du résultat : c'est à nouveau l'idée que la précision à rechercher dans un résultat est non seulement dépendante des données initiales, mais aussi de la question posée. Ce deuxième choix est de la responsabilité de l'auteur du calcul, en fonction des éléments inhérents au problème mais aussi du regard qu'il porte sur celui-ci. Trop souvent, la résolution d'un problème et le calcul de sa réponse fait perdre aux élèves le contexte de la question et la précision nécessaire de la réponse. A ce propos, l'utilisation de la calculatrice, qui calcule « trop » facilement et « trop » précisément, peut s'ériger en obstacle à un choix raisonné de la précision d'un résultat en fonction de la situation.

La dimension des molécules

Les molécules sont vraiment très petites, tout le monde l'a appris à l'école. Mais comment se faire une idée de leur petitesse ? Et éventuellement faire partager cette conscience aux élèves, qui confondent parfois molécules et microbes ! Une question de Fermi permet de rendre plus concevable cette petitesse à travers une estimation du très grand nombre de molécules dans un petit volume : il s'agit de de comparer le nombre de molécules d'eau (H2O) d'une goutte d'eau avec le nombre de gouttes d'eau dans le lac Léman[6]. La solution de ce problème nécessite de calculer le volume de l'eau du lac, le volume d'une goutte et le nombre de molécules d'eau dans un goutte, trois calculs qui impliquent des estimations des données numériques en jeu.

Comparer le nombre de molécules d'eau (H2O) dans une goutte d'eau avec le nombre de gouttes d'eau dans le lac Léman

6 *http://primas.unige.ch/index.php/materiel/materiel-pour-l-enseignement/mathematiques/37-molecules-maths*

Solution
Le volume du lac Léman peut être modélisé par un parallélépipède rectangle de longueur 100 km, de largeur 10 km et de profondeur 100 m. Le calcul de son volume donne 1011 m^3, ce qui est proche de la valeur qu'on peut trouver dans des références (http://fr.wikipedia.org/wiki/Lac_L%C3%A9man). Il y est dit que le lac Léman contient 89 milliards de m^3 d'eau.
Le volume d'une goutte se calcule en sachant qu'un compte-goutte donne environ 20 gouttes par millilitre, ce qui correspond à un volume de 0,05 mL ou 5×10^{-8} m^3.
Le nombre de gouttes dans le lac se calcule en divisant le volume du lac par le volume d'une goutte. Cela donne $10^{11}/(5\times10^{-8}) = 2 \times10^{18}$ gouttes, ce qui se lit deux milliards de milliards de gouttes. C'est un grand nombre !
Pour calculer le nombre de molécules dans une goutte d'eau, il faut passer par le concept de mole et le nombre d'Avogadro : dans une mole d'une espèce chimique, il y a $6{,}0221415 \times 10^{23}$ molécules, ce qu'on peut aisément arrondir à 6×10^{23}. La masse de la mole d'H_2O étant 18 g (2 fois 1g pour chaque atome d'hydrogène et 16 g pour l'atome d'oxygène) et la masse d'une goutte d'eau de 0,05 mL étant 0,05 g (Pour rappel 1 litre d'eau a une masse de 1 kg, car la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3), on peut calculer qu'une goutte contient environ 2×10^{21} molécules, ce qui s'énonce deux mille milliards de milliards. C'est encore un plus grand nombre, mille fois plus grand que le précédent.
Réponse
Il y a environ mille fois plus de molécules dans une goutte d'eau que de gouttes d'eau dans le lac Léman.

Cet exemple fait appel à la connaissance – basique en chimie – de la mole[7]. Ce concept, comme l'incroyable grandeur du nombre d'Avogadro, reste très difficile à se représenter par les élèves. C'est la raison pour laquelle nous proposons cette analogie numérique entre le nombre de molécules d'une goutte d'eau et le nombre de gouttes d'eau du lac Léman. Pour le lac, il est plus aisé de comprendre que seul l'ordre de grandeur du nombre de gouttes importe, car ce nombre varie sans arrêt, les gouttes vont et viennent, s'évaporant et se condensant, s'échappant à l'occasion d'une plus grande vague … Cependant le très grand nombre de gouttes du lac, nombre dont on peut appréhender qu'il est énorme, aide à concevoir combien sont nombreuses – et donc petites – les molécules, dans la mesure où une seule goutte en contient mille fois plus que de gouttes dans le lac.

Discussion et conclusion

La variété des questions de Fermi est immense. Preuve en est le journal américain *The Physics Teacher*[8] qui leur consacre depuis plus de dix ans une rubrique mensuelle. Les questions traitées vont de la précision de la mesure du temps qui serait nécessaire pour déterminer exactement le sept milliardième habitant de la Terre[9] à l'altitude dont devait se lancer Felix Baumgartner pour atteindre la vitesse du son[10], en passant par le nombre de mots prononcés lors d'une campagne électorale[11]. Pour des élèves plus jeunes, la recherche européenne *Lema* a édité une brochure, qui propose une série de questions de ce type utilisables en classe de mathématiques ou de sciences, que nous invitons les enseignants à explorer[12].

Si certaines questions de Fermi peuvent sembler un peu gratuites, elles comportent, à notre avis, un intérêt scientifique et didactique certain. Tout d'abord, elles font souvent appel à une combinaison de connaissances scientifiques dans le domaine dans lequel elles s'appliquent, nécessaires pour élaborer la « formule » qui formalise la réponse, et au bon sens pour estimer la pertinence et la valeur des grandeurs en jeu.

Ensuite elles permettent de se « faire une idée » de la réponse à une question qui peut être issue de la simple curiosité, en adoptant cependant une posture scientifique. En effet, pour les résoudre, ces questions demandent d'identifier les facteurs ou les données qui interviennent dans le calcul du résultat et de les estimer numériquement (comme pour l'équation de Drake). Elles développent ainsi ce qu'on peut appeler « bon sens numérique », qui appartient au

7 *Pour proposer cette activité à des élèves n'ayant aucune base de chimie, il faut leur indiquer que 18g d'eau pure contiennent approximativement 6×10^{23} molécules*

8 *http://tpt.aapt.org/features/fermi_questions_solutions*
9 *http://scitation.aip.org/journals/doc/PHTEAH-home/fermi/feb2012.pdf*
10 *http://tpt.aapt.org/resource/1/phteah/v51/i1/p14_s1?bypassSSO=1*
11 *http://scitation.aip.org/journals/doc/PHTEAH-home/fermi/nov2012.pdf*
12 *http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/fr/tout.php*

domaine de la « numéracie ». L'importance de ce champ de compétences est actuellement de plus en plus reconnu, en particulier parce que sa non maîtrise est un facteur handicapant pour les chômeurs de longue durée et d'autres personnes dont l'intégration sociale est déficiente[13]. Par exemple au Québec, les autorités scolaires mettent l'accent sur le développement de ce type de compétence dès le plus jeune âge, comme composante de la pensée critique et proposent des formations dans ce domaine aux enseignants des petites classes[14].

Dans le domaine scientifique, une résolution du type question de Fermi est souvent une première approche qui permet de décider s'il vaut la peine d'investir dans la recherche de données plus précises, qui peuvent être difficiles à trouver, et dans un calcul plus élaboré qui demande l'aide d'instruments de calcul.

Car justement les questions de Fermi permettent de se dégager de la dépendance aux instruments de calcul[15]. Cela est important selon nous pour deux raisons. D'une part, simplement parce qu'une réponse au niveau de son ordre de grandeur est généralement suffisante dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, où il s'agit de faire des choix raisonnés. Par exemple, s'il s'agit de prendre une décision sur la base de la comparaison de deux grandeurs (comme dans la dimension des molécules, mais aussi par exemple pour savoir s'il est plus intéressant de prendre un forfait ou de payer à l'unité) un calcul fondé sur des estimations suffit généralement. D'autre part, et cela est particulièrement important pour l'enseignement, parce que la calculatrice fait souvent perdre à son utilisateur une partie du contrôle de son résultat. Nous abondons dans le sens de la présentation des questions de Fermi dans *The Physics Teacher* :

> *« Forcer élèves et étudiants à utiliser leur capacité à estimer, à donner des réponses en termes d'ordre de grandeur n'est pas seulement un enjeu pour réussir des concours mais une stratégie d'enseignement en classe pour développer la confiance en soi et la capacité d'analyse des résultats pour décider s'ils ont du sens, plutôt que de se reposer sur la précision d'une valeur calculée à l'aide d'une calculatrice »[16]. (Bouffard, 1999, 314)*

On retrouve un objectif très proche de celui-ci dans les « *éléments pour la résolution des problèmes* » du plan d'études romand (PER - MSN 33) : « *Résoudre des problèmes numériques et algébriques … en estimant un résultat et en exerçant un regard critique sur le résultat obtenu* »[17]. On peut d'ailleurs regretter de ne pas voir cet objectif davantage mis en évidence et répété à plusieurs occurrences dans le PER. En effet, il nous semble qu'un travail systématique en classe sur ce genre de questions, en s'inspirant par exemple de la brochure Lema citée ci-dessus, devrait permettre de développer chez les élèves un bon sens numérique qui leur servira tout au long de leur vie. Comme le formule Müller dans le site expériment@l de la Faculté des sciences de l'Université de Genève[18], il s'agit de « *calculs simples [offrant des] outils (de compréhension) forts* ». Il serait dommage d'en priver les élèves.

Références

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 8.3*, 267-309.

Bouffard, K. (1999). *The Physics Teacher 37*, 314.

Galileo Galilei, (1623). *Il Saggiatore*, traduction française de Christiane Chauviré, L'Essayeur, Les Belles-Lettres, Paris, 1980.

Klein, E. (2005). L'efficacité des mathématiques est-elle si « déraisonnable » ? Forum de la théorie, 6 et 7 décembre 2005. Cycle de conférences de l'IREM de Montpellier 2007-2008. http://www.irem.univ-montp2.fr/IMG/pdf/texte_conf_Klein.pdf

Müller, A. Rubrique Question de Fermi. https://experimental.unige.ch/que-sont-les-problemes-de-fermi/

13 http://www.alice.ch/fileadmin/user_upload/alicech/dokumente/sveb/projekte/elements_constitutifs.pdf

14 http://foundationsfornumeracy.cllrnet.ca/pdf/EY_NumeracyKit09_FRE.pdf

15 Pour mémoire, les utilisateurs de règle à calcul devaient faire l'estimation de l'ordre de grandeur « de tête » puisque la règle à calcul donnait la valeur numérique mais non l'ordre de grandeur.

16 Texte d'introduction sur les questions de Fermi traduit. http://tpt.aapt.org/resource/1/phteah/v37/i5/p314

17 http://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_33/

18 https://experimental.unige.ch/que-sont-les-problemes-de-fermi/

Labo-maths

Thierry Dias

HEP Vaud & groupe DDMES[1]

L'objectif de cette rubrique « labos-maths » est de proposer aux enseignants des situations de recherche assez ouvertes afin qu'ils puissent les explorer avec leurs élèves. Il ne s'agit donc pas de faire faire des problèmes au sens où on l'entend habituellement. Ainsi, si le contexte de la recherche est imposé, les questions à poser et les démarches de travail envisagées peuvent être diverses et donc adaptées à plusieurs niveaux de classe. Il n'y a pas de consigne privilégiée qui laisserait entendre qu'il existe une réponse attendue. La rubrique propose des situations d'investigations pour lesquelles il n'est pas non plus fourni d'analyse a priori. Nous engageons les enseignants à faire faire des expériences et des découvertes mathématiques à leurs élèves en parcourant parfois des chemins inattendus, parfois des impasses provisoires. L'enseignant ne sera pas le seul pilote de la résolution, il pourra lui aussi être surpris des découvertes mais sera avant tout un témoin privilégié du potentiel de ses élèves à construire des connaissances mathématiques.

La finalité de la rubrique tient également dans la possibilité d'une communication entre les enseignants. Nous proposons effectivement à celles et ceux qui le souhaitent de témoigner de leurs expériences en narrant leurs découvertes, leurs surprises et les difficultés rencontrées. Ainsi un enseignant peut expliquer comment il a posé le problème, avec quelle(s) consigne(s) et pourquoi il a choisi certaines questions et pas d'autres. Il pourra également témoigner de sa réflexion sur le travail de ses élèves, analyser le dialogue en classe ou présenter les perspectives qui résultent de ses expériences mathématiques.

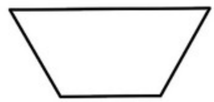
1 Le groupe Didactique Des Mathématiques et Enseignement Spécialisé est une équipe de recherche suisse romande.

Les problèmes de cette rubrique « labo-maths » peuvent se résoudre collectivement au sein de véritables petits laboratoires de mathématiques[2]. Ils ne doivent pas donner lieu à une compétition quelle qu'elle soit, ce sont plutôt des occasions de mener des recherches collaboratives au sein de jeux de tâches[3].

Trapézoïdons !

La recherche

Olga est une petite fille qui aime faire la fête ! C'est bientôt son anniversaire... Elle aimerait organiser un goûter dans son jardin car c'est le printemps. Elle souhaiterait inviter beaucoup de monde : sa famille et ses amis. Malheureusement il n'y a pas assez de tables dans sa maison, elle a donc décidé d'en louer. Comme Olga est originale, elle a choisi des tables qui ont toutes la même forme : celle d'un trapèze. Elle les trouve plutôt jolies :



Les trois petits côtés sont de même longueur, le grand côté mesure le double d'un petit côté.

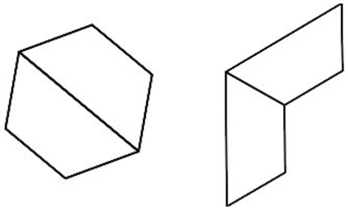
Autour de ces tables on peut installer une personne sur chaque petit côté et 2 personnes sur le grand côté. Dans son jardin, Olga cherche à organiser ses tables afin de faire un bel effet à ses invités. Elle s'impose la règle suivante : on assemble les tables selon la longueur des côtés. Ainsi un petit côté d'une table doit toujours toucher un petit côté, et ce sera la même chose pour le grand côté qui doit toujours être assemblé avec un autre grand côté.

Vous pouvez commencer en faisant un peu de géométrie : faites par exemple chercher tous les assemblages possibles et tous ceux qui ne le sont pas pour un nombre de tables donné. Ça, c'est assez facile, surtout avec un petit nombre de tables. En revanche, si l'on prend comme contrainte qu'Olga sou-

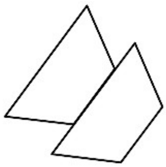
2 Voir : Dias, T. (2012). Manipuler et expérimenter en mathématiques. Magnard. Paris.

3 Voir : Favre, J. M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Grand N., 82, 9-30.

exemples d'assemblages possibles :



exemple d'assemblage impossible :



haite réaliser des assemblages symétriques, la question sera moins facile.

Pour faire des recherches amusantes, on peut imaginer qu'elle loue par exemple 6 tables en essayant alors de répondre à certaines des questions qui suivent. De combien de façons différentes peut-on assembler les 6 tables (en les accolant ou non) ? En occupant toutes les places, combien de personnes peuvent s'installer dans chaque assemblage trouvé ? En imaginant que l'on invite en fonction des places disponibles, quel assemblage permet le plus petit nombre d'invités possible ? Quel assemblage permet le plus grand nombre d'invités possible ? Y a-t-il plus d'un assemblage possible pour un nombre d'invités donné ?

Vous pouvez également faire des mathématiques un peu plus compliquées en choisissant un plus grand nombre de tables louées ou en augmentant le nombre d'invités. On peut aussi demander aux élèves s'il existe-t-il un nombre minimum de tables à louer en fonction d'un nombre d'invités donné ?

Pilotage de la classe

Vous pouvez bien entendu permettre à vos élèves de travailler en petits groupes, mais vous êtes libre de choisir les dispositifs qui vous conviennent le mieux. Passez le temps nécessaire à discuter des consignes de ce problème avec vos élèves, ceci vous donnera l'occasion de vous assurez qu'aucune difficulté de compréhension ne vient nuire inutilement à la recherche mathématique. Mais il faut éviter de donner trop de conseils. Quand les élèves commencent le problème, chaque assemblage trouvé nourrit la recherche et leur donne des idées pour trouver d'autres solutions. Laissez-leur un temps d'exploration suffisant pour qu'ils puissent dépasser les configurations les plus évidentes. Ils sauront sans aucun doute trouver de nouveaux assemblages intéressants même s'ils pensent parfois être « bloqués » un certain temps pensant qu'il n'y a plus rien à trouver. Si certains de vos élèves sont en difficulté avec le dessin des trapèzes, n'hésitez pas à leur fournir des gabarits en carton voire même à utiliser un matériel en plastique adéquat. Les expériences n'en seront que plus riches !

Laissez-les remarquer en action les spécificités de cette figure géométrique particulière qu'est le trapèze isocèle : axe de symétrie, parallélisme, isométrie, longueur double du grand côté par rapport au petit (dans ce cas particulier). Il n'est pas absolument nécessaire de nommer ces propriétés, selon l'âge des élèves de simples expériences sensibles peuvent suffire. Vous pouvez inciter les élèves à garder une trace graphique de l'ensemble des configurations en fonction du nombre de tables choisi. Les figures géométriques ainsi réalisées sont complexes et peuvent donner lieu à des activités de reproduction ou de description par exemple.

Après avoir laissé un temps de recherche suffisant concernant les configurations spatiales vous pouvez orienter le problème dans le champ numérique. « Avez-vous trouvé de nombreux assemblages ? Super ! Maintenant pouvez-vous dire combien d'invités peuvent inviter Olga avec chacun de vos aménagements ? » Le dénombrement des places dépend bien entendu des choix d'assemblage des tables entre elles, mais des régularités numériques existent. Laissez-les alors découvrir progressivement les relations qui existent entre les configurations et le nombre d'invités, ou entre le nombre de places indisponibles en fonction des configurations. Le dénombrement des places qui peuvent être occupées par les invités possède un maximum par table assez facile à déterminer, en revanche cette valeur extrême est plus intéressante à chercher lorsqu'on assemble les tables entre elles.

Il peut être également très intéressant d'imposer des contraintes « sociales » du genre : « aucune table ne doit être isolée» ou «les invités d'un groupe de tables ne doivent pas se tourner le dos ».

Si vos élèves sont plus grands et ont des connaissances mathématiques plus importantes, n'hésitez pas à leur lancer de nouveaux défis en augmentant par exemple le nombre de tables louées : les possibilités d'assemblages augmentent-elles proportionnellement avec le nombre de tables louées ? Vous pouvez également imposer un grand nombre d'invités et demander : « Combien de tables sont nécessaires au minimum pour recevoir 150 personnes qui auraient toutes une place ? » Ce type de question éloigne volontairement la recherche du contexte graphique car il sera très difficile de dessiner les solutions !

Pensez à recueillir le travail des élèves, prenez des notes sur les interactions qui ont eu lieu, sur la variété des approches des élèves que vous avez observées dans votre classe. Toutes ces informations peuvent toujours être utiles pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves mais aussi pour évaluer leurs connaissances et leur potentiel à apprendre en mathématiques. N'hésitez pas à adapter le problème au niveau et à l'expérience de vos élèves. Dans votre réflexion sur votre expérience avec ce problème, gardez par exemple à l'esprit les questions suivantes :

- Quelles difficultés ont eu les élèves dans la compréhension du problème ?
- Comment les élèves ont-ils abordé cette tâche ?
- Quelles stratégies les élèves ont-ils essayées ?
- Y a-t-il des réponses d'élèves ou des interprétations qui vous ont surpris ?

Où sont les maths ?

Mireille Cherix, gymnase du Bugnon, HEP Vaud, groupe DDMES

Les connaissances mathématiques utiles pour effectuer les recherches proposées dans ce problème dépendent bien entendu des questions qui sont posées. Néanmoins, on peut dire que cette situation comporte deux enjeux dont l'un est majeur : celui qui se situe dans le domaine du pavage du plan. L'autre enjeu se situe en numération, mais il est moins important.

Ce problème demande aux élèves de découvrir et d'organiser des données collectées dans le contexte de la construction et l'analyse de figures géométriques. Il est aussi relié aux questions d'aire et de périmètre que les élèves rencontreront dans leurs expériences mathématiques futures (par exemple le fait que des objets d'une même aire peuvent avoir différents périmètres). Une erreur fréquente est la confusion entre aire et périmètre. À travers leur travail dans ce problème, les élèves utiliseront le concept de périmètre pour analyser et comparer les types d'arrangements de tables. Le lien entre l'arrangement des tables et le nombre d'invités permet aussi de travailler la notion d'optimisation, essentielle dans beaucoup de problèmes d'applications des mathématiques.

Partagez vos expériences

Savoir comment vos élèves répondent à ce problème nous intéresse beaucoup. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves. Si vous le souhaitez, nous serons donc ravis de recevoir vos idées et vos réflexions.

Vous pouvez ajouter à votre envoi toutes les informations concernant la manière (ou les manières) dont vous avez choisi de poser le problème, des travaux d'élèves et même des photos montrant vos petits chercheurs en action. Envoyez vos résultats en indiquant votre nom, le niveau de votre classe, ainsi que les coordonnées de votre établissement à l'adresse suivante :

Math-Ecole, Université de Genève/FAPSE, 40, Boulevard du Pont-d'Arve, PAVILLON MAIL, 1204 Genève

ou par mail à : mathecole@ssrdm.ch

Avec votre accord, quelques-uns de vos envois seront publiés dans un numéro ultérieur de la revue Math-Ecole. Vos noms et coordonnées d'établissement seront bien entendu indiqués dans l'article correspondant.

Partage d'activités autour de l'investigation

Sylvia Coutat

Université de Genève

PRIMAS est un projet européen qui réunit quatorze universités de douze pays différents, coopérant pour promouvoir l'introduction et l'utilisation de la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques et des sciences. PRIMAS travaille en outre avec divers groupes tels que décideurs politiques, autorités scolaires, directeurs d'établissements scolaires, enseignants et parents afin de créer un environnement favorable à la démarche d'investigation. L'objectif de ce projet est d'apporter des changements dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences en Europe. En soutenant et en incitant les enseignants à développer des approches pédagogiques mettant en œuvre la démarche d'investigation, PRIMAS vise à ce que les élèves, à leur tour, expérimentent directement l'investigation scientifique. Le but ultime de ce projet est d'augmenter le nombre d'étudiants ayant une meilleure disposition à l'égard de ces disciplines et s'engageant dans des professions en rapport.

Menu de gauche avec l'accès disciplinaire aux activités

A Genève, PRIMAS a permis, entre autre, la mise en œuvre de dispositifs de formations continues et initiales. Les enseignants ont eu la possibilité d'échanger sur leurs pratiques d'investigations en classe.

PRIMAS se termine en 2013, cependant les échanges vont pouvoir perdurer à travers un site internet mis à disposition des enseignants de la classe de 1P à la maturité :

http://primas.unige.ch/

Ce site rassemble aussi un ensemble d'activités autour de la démarche d'investigation en mathématiques et en science. L'accès aux activités peut se faire par la discipline concernée ou par le degré souhaité. Pour chaque activité, outre les renseignements classiques (objectifs pédagogiques en liens avec le PER, énoncés destiné aux l'élèves, matériel, durée de l'activité) chaque présentation d'activité s'appuie sur des éléments didactiques à propos du rôle de l'enseignant, le ou les déroulements possibles ainsi que des liens externes pour les plus curieux. Pour chaque activité, vous pouvez laisser des commentaires ou des remarques. Nous vous invitons à proposer vos propres activités et expériences à travers le formulaire « Proposer une activité »

Des documents à propos des aspects didactiques de la démarche d'investigation sont à diposition des enseignants et des parents.

Menu de droite avec accès par degré aux activités

Math-Ecole, pour ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques !

Ce numéro de Math-Ecole est le premier numéro électronique. Nous espérons qu'il sera suivi de nombreux autres numéros.

Chacun est invité à proppposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Les articles doivent parvenir en version électronique, par email adressé à la rédaction (mathecole@ssrdm.ch). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Contact : mathecole@ssrdm.ch

Site internet : http://www.math-ecole.ch/mathecole/

Pour commander d'anciens numéros de Math-Ecole vous pouvez adresser vos demandes à mathecole@ssrdm.ch

- CHF 5.- de n° 150 à 217 (n° 136, 152, 153, 178,179 et 186 épuisés)
- CHF 3.- de n° 1 à 149 (nombreux numéros épuisés)

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 50 depuis la rubrique *Consultation en ligne*.