MATH
ECOLE

MAI 1968
7e ANNÉE

33

Mathématiques sans frontières

DIALOGUE LOGICO-PEDAGOGIQUE

Le monde s'est mis à l'heure des structures. Le structuralisme nous envahit. Mode passagère, snobisme? Pour certains, gens superficiels, peut-être. Pour les autres, gens de raison, non. Toutes les disciplines humaines convergent sur un point: la nature du réel — que ce soit le réel du physicien ou celui du linguiste — est, fondamentalement, définie par l'ordonnance des éléments constitutifs de ce réel, par leur manière de former une charpente, par leur **structure.** Les structures, d'autre part, sont des modèles établis par l'esprit et soumis eux-mêmes aux lois de l'esprit. Ces lois enfin, dont la construction, commencée il y a des siècles, se poursuit aujourd'hui encore, sont celles que nous proposent logiciens et mathématiciens. Ils sont, ces savants, les maîtres à penser de tous les chercheurs scientifiques; ils sont aussi les maîtres à penser de quiconque vit dans ce siècle et prétend y faire sa place.

Raisonner avec rectitude est qualité intellectuelle de base qui doit s'apprendre et s'exercer. D'où le renouvellement de la pédagogie des mathématiques, comme aussi celui de la pédagogie de la langue. D'où, enfin, le renouvellement de toute la pédagogie: apprendre, d'abord, à bien penser et, ensuite, appliquer ce penser à toute chose, à toute discipline.

Jean-Blaise Grize, professeur de logique à Neuchâtel, Genève et Paris, et Albert Morf, professeur de psychologie à Montréal, ont accepté de traiter de cette omniprésence de la logique en pédagogie pour les lecteurs de «Math-Ecole». Ils l'ont fait sous une forme dialoguée pleine de charme. Qu'ils soient remerciés de la bonne grâce qu'ils nous ont témoignée en répondant promptement à la requête que nous leur avions adressée.

S. R.

JEAN-BLAISE GRIZE — Ne pourrait-on pas dire qu'opérer de façon logico-mathématique c'est d'abord agir sur des objets, ensuite intérioriser ces actions et finalement opérer sur elles?

ALBERT MORF — On peut, on peut... mais il faut se demander si cette description générale de la genèse de l'intelligence se retrouve telle quelle dans les situations actuelles d'adaptation.

G — Elle pourrait donc être autre?

M — Cette façon de présenter les choses peut faire croire à une sorte d'atomisme de la connaissance. Lorsqu'un enfant d'âge scolaire se trouve devant un problème nouveau, ce qui va lui permettre d'augmenter son savoir, c'est bien sûr des opérations. Mais les opérations qu'il va effectuer sur la situation réelle ne constituent pas nécessairement la forme intériorisée d'actes spécifiques qu'il aurait exercés autrefois, sous forme pratique, sur les objets présents. C'est tout un ensemble d'actions antérieures qui va le diriger.

G — Ce qui veut dire que l'élève va se référer globalement à son acquis opératoire et que, s'il apprend à multiplier des nombres par exemple, ce ne sont pas ses seules actions numériques qui entrent en jeu, mais une sorte de structure multiplicative déjà présente et qui s'enrichit par ces nouvelles activités.

M — Oui, à condition de ne pas imaginer qu'opérer de façon logico-mathématique s'opposerait à opérer physiquement.

G (menaçant) — **Pourquoi pas?**

M (ennuyé) — Parce qu'il faut introduire une distinction fondamentale entre les méthodes et les contenus. On imagine bien que l'arithmétique a elle-même une structure mathématique. Mais l'histoire, la géographie, la botanique...

G — On peut leur donner une structure mathématique avant de les enseigner, pour les enseigner.

M — Oui... ou plutôt... ça dépend. Qui ça, «on»?

G — Le logicien, je suppose, ou peut-être l'historien-logicien, le géographe-logicien.

M — Pas du tout! Cela reviendrait à faire réciter aux enfants les découpages du logicien au lieu de leur faire structurer eux-mêmes les contenus nouveaux selon leur logique propre. J'estime que presque tous les contenus de l'enseignement peuvent être abordés à partir de certains problèmes concrets qui ouvrent la porte à un traitement opératoire que l'élève peut développer lui-même.

G — Donc...

M (malheureux) — Il reste pourtant un réduit de connaissances scolaires qui semblent être de l'information pure et qu'on pense indispensables sinon utiles. Les célèbres chefs-lieux de départements, par exemple...

G — **Mais dans ce cas précis, il y a une belle occasion de structurer logiquement le contenu en question. Les départements représentent une subdivision du pays, et le chef-lieu est au département ce que la capitale...**

M — Oui, oui. Mais le problème logique est assez élémentaire, et en le comprenant l'élève n'a pas encore «appris» le fameux catalogue.

G — **Il y a donc des matières — comme on dit dans les tables — qui ne peuvent sans violence se concevoir de façon mathématique?**

M — Oui, mais elles sont alors fort rares (ou devraient le devenir), et de toutes façons elles n'empêchent pas de procéder logiquement et mathématiquement. Bien au contraire.

G — **Je commence à soupçonner un sophisme.**

M — Déformation professionnelle! Ce qui peut toujours se faire de façon logique, c'est l'apprentissage lui-même. Cela veut dire que des procédés logiques et mathématiques peuvent être appliqués même pour apprendre des contenus qui, eux, sont non mathématiques ou sans intérêt logique.

G — **Et alors réciproquement, je pense, ces contenus-là quoique non mathématiques, viendront encore renforcer l'instrument de la pensée logique, parce qu'ils sont appris d'une certaine façon.**

M — Exactement. Chaque fois qu'un enfant est amené à imaginer une classification, à constituer des relations, à découvrir des invariants, il rend hommage à la logique.

G — **J'en suis ravi, mais mon honnêteté me pousse à demander si tout cela est réellement important.**

M — C'est d'une importance fondamentale et de deux façons. Une connaissance est une masse d'informations qui ne sert à rien si elle n'est pas mobilisable. Or elle le sera d'autant mieux qu'elle aura été plus fortement structurée par l'enfant lui-même. D'autre part, un fait nouveau est d'autant mieux retenu qu'il vient s'insérer dans un cadre, qu'il répond à une question que l'enfant s'est posée.

G — **Excellent, il y a place ici pour un syllogisme: pour qu'il y ait question, il faut qu'il y ait problème. Pour qu'il y ait problème, il faut que l'esprit le pose, il faut une approche logico-mathématique.**

M — C'est si vrai que nous avons pu l'établir à l'Ecole Nouvelle St-Germain à Montréal à propos d'un contenu aussi arbitraire que l'orthographe. Au lieu d'enseigner l'orthographe d'un mot, nous avons invité les enfants à l'écrire de toutes les façons (phonétiquement acceptables) qu'ils jugeaient possibles. Ce n'est qu'ensuite que l'orthographe correcte...

G — **C'est-à-dire conventionnelle...**

M — leur a été fournie. La «bonne» orthographe apparaît alors comme la solution d'un micro-problème dans un contexte quasi-combinatoire. Elle est non seulement mieux retenue, mais elle apporte en même temps une sorte de satisfaction intellectuelle.

G — **A moi Skinner! Les enfants ont vu des orthographes fausses et vont donc tout embrouiller.**

M — D'abord ils ne les ont pas vues, ils les ont **inventées.** Ensuite notre expérience de trois ans est patente: chaque mot nouveau que l'enfant rencontre dans ses lectures continue à apparaître comme la solution à un problème toujours posé, comme une réponse à une question toujours ouverte.

G — **Si je comprends bien alors une approche est logico-mathématique si elle pose des problèmes et il n'y a en conséquence aucune raison pour qu'elle ne puisse être adoptée dans chacune des matières scolaires.**

M — Et même extra-scolaires... aussi longtemps qu'il y en aura.

G — **Bon, mais je voudrais encore soulever un problème.**

M — D'après ce qui précède, c'est de bonne méthode.

G — **Les questions dont nous parlons doivent être posées par l'enfant lui-même, au cours de ses propres activités mentales. Cela fait que certaines choses n'apparaîtront pas avant un âge donné, qu'il faudra donc les rayer des programmes pour les reporter à plus tard. Or, j'ai entendu dire que, s'il se trouvait que certaines de ces matières soient d'usage nécessaire, il fallait tout de même les enseigner et que l'élève les comprendrait plus tard.**

M — Plus tard, c'est-à-dire le plus souvent jamais. Apprendre avant de comprendre, c'est apprendre en déformant. Pour comprendre, il faut ensuite commencer par désapprendre, c'est-à-dire par corriger les déformations antérieures, ce qui est bien douteux. Quand je pense à ma mathématique personnelle...

G — **N'ai-je toutefois pas appris à parler, c'est-à-dire à utiliser des structures dont les linguistes nous ont découvert la complexité, bien avant d'être à même de comprendre ces structures?**

M — Je ne dis pas le contraire. Mais l'école n'enseigne pas à parler, hélas. Elle enseigne la grammaire.

G — **Et elle a tort?**

M — S'il s'agit de la grammaire des grammairiens, sans aucun doute. Si c'est celle qui correspond aux structures logiques et verbales de l'enfant, nullement.

G — En effet, puisque nous avons dit que c'était là un moyen de renforcer ces structures. Mais est-ce possible?

M — Pourquoi pas? Il suffit de partir de ce que l'enfant a spontanément élaboré, de le laisser explorer son propre langage, de l'inciter à classer, à sérier, comme nous l'avons fait à Montréal.

G — Il me plaît de trouver que la vérité est la même en deçà et au-delà de l'océan. Mon collègue Charles Muller procède de même à Neuchâtel. Mais j'y pense: ces trois moments ne sont-ils pas ceux que je suggérais au début de notre entretien?

M — En effet. A la manipulation correspondrait l'usage spontané d'une langue que l'enfant étudierait, par la suite, comme il étudierait son univers physique.

G — Autrement dit, il appliquera à ce matériel linguistique ses structures logico-mathématiques.

M — Oui. Et à partir de là, tout pourra évoluer conjointement: la pratique du langage et sa structuration logique. Il y a alors une structure logico-mathématique qui va évoluer dans son domaine d'application...

G (dubitatif) **— oui...**

M — et en même temps cette évolution représentera un exercice fonctionnel pour l'ensemble des structures de l'enfant. Ce n'est peut-être pas à moi de dire que les structures...

G — sont toujours générales et que, en conséquence, elles peuvent servir de support aux contenus les plus divers, les plus nouveaux. De même elles peuvent être nourries...

M — et donc se développer...

G — par des contenus fort différents les uns des autres.

M — Or, à chaque moment de son développement, les structures que l'enfant domine lui permettent d'acquérir de nouvelles connaissances et inversément celles-ci viennent enrichir ses structures.

G — Et pour conclure?

G et M (en chœur) — Sciences sans conscience des structures n'est que ruine de la pédagogie.

A. Morf - J.-B. Grize

Des ensembles... à la géographie

Cet article de Léo Biollaz illustre les propos de Jean-Blaise Grize et d'Albert Morf. D'autres exemples paraîtront vraisemblablement dans le prochain numéro de «Math-Ecole». Le rédacteur aimerait aussi donner l'occasion de s'exprimer sur ce thème à ceux de nos lecteurs qui travaillent de manière «ensembliste» dans d'autres disciplines que la mathématique. Qu'ils veuillent bien envoyer leurs textes à la rédaction pour le 31 juillet 1968. Merci.

Depuis quelques années, on parle beaucoup de la théorie des ensembles dans l'enseignement de la mathématique. En effet, l'étude de ces ensembles est l'un des piliers de la mathématique moderne et les notions ensemblistes sont actuellement présentées aux élèves «de la maternelle à la faculté». D'aucuns pourraient penser que de telles notions ne peuvent être utilisées que dans l'enseignement de la mathématique. L'expérience scolaire nous montre que les notions d'**ensemble,** de **sous-ensemble, d'élément, d'appartenance,** de **non appartenance,** d'**intersection,** etc... trouvent très facilement leur emploi dans d'autres branches de l'enseignement. Visitant des classes de Suisse romande, j'ai pu constater en effet, que ces notions ensemblistes s'adaptaient heureusement à l'étude du vocabulaire et de la grammaire, par exemple.

Voici comment, personnellement, je m'en suis servi à la leçon de géographie pour l'étude des **cols du Valais.**

Une telle étude, cela va de soi, n'a pas pour but de faire mémoriser la liste des cols valaisans, mais de donner aux élèves une connaissance approfondie — ou du moins la plus approfondie possible — de ces cols. Or, qu'est-ce que «connaître un col» si ce n'est savoir quelles en sont les caractéristiques qui permettent de le définir de telle sorte que se dégagent les aspects qui lui sont propres comme ceux aussi par lesquels il ressemble à d'autres cols ou s'en différencie.

Les diverses caractéristiques d'un col sont ses **«propriétés»** ou ses **«attributs».** La connaissance se constitue au moyen de ces attributs. Plus ceux-ci sont nombreux, plus précise est la connaissance. Un «bloc logique» de Dienes peut être un simple bloc; il peut aussi être un bloc carré, ... grand, ... jaune, ... épais. Ainsi en sera-t-il des cols que nous nous proposons d'étudier.

Remarquons encore que si nous nous mettons à faire une «géographie ensembliste», le gain pour les élèves sera double: d'une part, ils apprendront bien leurs notions de géographie et, d'autre part, ils pratiqueront un exercice intellectuel qui renforcera la valeur de leur équipement mental, qui les rendra à son tour aptes à aborder avec succès d'autres apprentissages scolaires ou extra-scolaires.

Une étude de ce genre nécessite, évidemment plusieurs leçons. Voyons, dans le détail, les différentes étapes de son déroulement:

I. Notions générales concernant les cols — dans quels pays trouve-ton des cols? — importance des cols pour les pays montagneux (voies de communications — échanges — commerce — voyages — tourisme...). Le Valais, canton montagneux, a de nombreux cols. Savoir le nom du col, ne suffit pas, il faut encore connaître les régions ou localités qu'il relie.

Le mot col a pour synonymes **pas** et **passage.** Puisque nous sommes dans un canton bilingue, il faut également savoir qu'en allemand le mot col se dit **Pass.**

II. Déterminons tout d'abord notre **univers,** c'est-à-dire **l'ensemble** des cols que nous nous proposons d'étudier. Pour simplifier les choses, nous nous limiterons à la liste des cols qui figurent à la page 104 du manuel de géographie [1] aux mains des élèves. Le maître a, bien entendu, toute latitude d'établir une autre liste plus ou moins longue.

III. Travail par groupes. — Les élèves, répartis en équipes de quatre, sont invités à localiser sur leur carte chacun des cols du manuel. Le maître n'intervient que lorsque c'est nécessaire. Cet exercice constitue la première étude de **l'ensemble** des cols à connaître. Par un rapide contrôle, le maître s'assurera que chaque élève sait localiser les cols au moyen de la carte.

IV. Ce premier travail accompli, le maître propose à ses élèves de **classer** les cols. Un tel exercice est proprement **logique.** Il consiste à dégager des similitudes au moyen de la relation **«être le même que»** (sous un certain aspect) et des non similitudes (dissemblances) par la relation **«n'être pas le même que».** Ce seront les élèves qui proposeront les diverses espèces de classements qui elles-mêmes permettront de distinguer des **sous-ensembles** au sein de l'«univers» des cols valaisans. Les propriétés suivantes sont apparues:

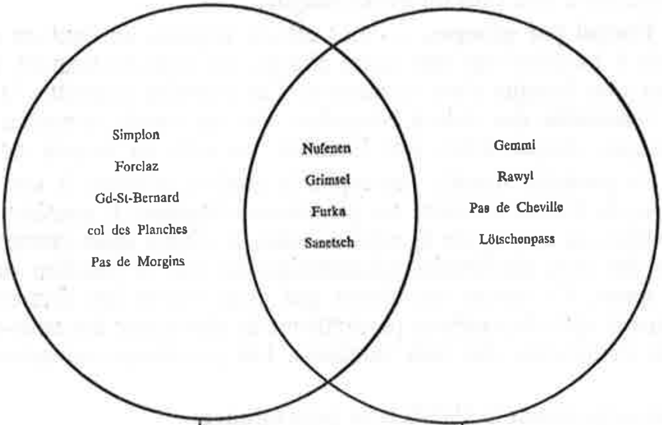
1. les cols reliant le Valais à un pays étranger
2. les cols situés sur la rive droite du Rhône
3. les cols du Bas-Valais
4. les cols qui relient le Valais à un canton confédéré
5. les cols situés sur la rive gauche du Rhône
6. les cols du Haut-Valais
7. les cols intérieurs au canton
8. les cols doublés d'un tunnel
9. les cols routiers
10. les cols doublés d'une voie de chemin de fer
11. les cols pédestres
12. les cols qui conduisent à l'extérieur du canton
13. les cols praticables toute l'année
14. les cols au-dessus de 3 000 mètres
15. les cols praticables une partie de l'année seulement
16. les cols qui se trouvent entre 2000 et 3000 mètres
17. les cols qui se trouvent entre 1000 et 2000 mètres

[1] Dr M. Roten - E. Métrailler, «Le Valais», géographie en 3e et 4e année, Ed. Delta S.A., La Tour-de-Peilz, 1966.

Toute cette recherche se fait en interrogeant la carte. Les élèves notent les noms des cols ayant la même propriété.

V. Le jeu continue. — Chaque équipe possède une série de cartes portant le nom d'un col, et se place autour d'une grande feuille sur laquelle a été dessiné un diagramme de Venn. A noter que le diagramme de Venn peut aussi être constitué par deux cerceaux ou dessiné à la craie. Le jeu consiste à choisir **deux** propriétés ou attributs, par exemple les propriétés 2 et 5, puis à distribuer dans le diagramme les cartes portant le nom des cols ayant les propriétés choisies. Dans ce cas, l'**intersection** sera vide puisque le même col ne peut être **à la fois** sur la rive gauche et sur la rive droite du Rhône.

Si l'on choisit les propriétés 18 et 4, il y aura intersections.



Le jeu va se compliquer si l'on décide de choisir trois propriétés: cols routiers, cols praticables toute l'année et cols conduisant à l'étranger, par exemple (l'**ensemble complémentaire** sera formé des cols **non** routiers, **non** praticables toute l'année, et **ne** conduisant **pas** à l'étranger). On voit qu'un exercice de ce genre demande beaucoup de réflexion et de jugement: Si un col conduit à l'étranger, DONC il ne conduit pas dans un canton confédéré; si un col est routier, DONC il est aussi pédestre, mais la réciproque n'est pas vraie, **il n'y a pas réversibilité,** etc... Tous ces exercices, et bien d'autres encore, donnent lieu à des discussions enrichissantes qui permettent d'approfondir utilement l'étude classique des cols.

Pour contrôler les connaissances acquises, les procédés les plus divers sont à la disposition du maître. Personnellement, je me suis servi d'une «grille» [1]) portant la liste polycopiée des cols ainsi que certaines de leurs propriétés, l'élève n'ayant qu'à mettre une × dans la case correspondante.

---

1) Voir la moitié de cette «grille» à la page 9.

Propriétés	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Albrunpass	×				×	×					×	×			×	×	
Augstbordpass					×	×	×				×				×	×	
Col de Balme	×		×		×						×	×				×	
Pas de Chésery	×		×		×						×	×					×
Pas de Cheville		×	×	×							×	×			×	×	
Col de Collon	×		×		×						×	×		×	×		
Col de Coux	×		×		×						×	×			×		×
Col de la Croix-de-Cœur			×		×		×				×				×	×	
Col de Fenêtre	×		×		×						×	×			×		
Col de Ferret	×		×		×						×	×			×		
Col de la Forclaz	×		×		×			×			×	×	×				×
Col de la Furka				×	×	×		×	×	×	×	×			×	×	
Col de la Gemmi		×		×		×					×	×			×	×	
Col du Gd-St-Bernard	×		×		×			×	×		×	×	×			×	

Cette étude a enthousiasmé les élèves qui se sont littéralement pris au jeu. Lors du contrôle, j'ai pu constater les heureux résultats obtenus par cette nouvelle façon d'aborder les cols valaisans.

Par analogie, on pourrait mener d'une façon semblable l'étude des montagnes et des cours d'eau.

Puisse cette modeste expérience donner à d'autres collègues l'idée d'utiliser les notions ensemblistes dans les diverses disciplines du plan d'études.

Léo Biollaz

Réflexions sur l'introduction de la mathématique moderne à l'école primaire (suite) [1]

3. Les programmes

Les responsables de l'établissement de programmes et de plans d'études destinés à l'enseignement pré-scolaire, primaire, secondaire ou supérieur devraient avoir sans cesse présentes à l'esprit les réflexions de l'équipe de «Prospective» et plus particulièrement celles de son fondateur et animateur G. Berger. La capacité de s'adapter constamment à des situations imprévisibles aujourd'hui, la mobilité d'esprit l'emportant sur les connaissances; en bref, la formation devrait l'emporter sur l'information. Première tâche donc, choisir les matières en fonction de leur valeur formative, se demander ensuite dans quelle mesure elles contribuent à maintenir et développer la mobilité d'esprit.

Comment s'établit un programme? Le plus souvent les autorités désignent une commission de spécialistes: quelles que soient leurs aptitudes, leur expérience pédagogique, les commissaires, après avoir choisi les matières (selon un critère prospectif) devraient normalement se poser une question fondamentale: comment le programme adopté va-t-il s'insérer dans la réalité scolaire? En d'autres termes, les matières prévues correspondent-elles vraiment au développement de l'intelligence de l'enfant ou de l'adolescent? Le déroulement dans le temps n'est-il pas trop long ou trop rapide? Comment réagiront les maîtres? On ne trouve pas de réponses à ces questions en discutant autour d'une table, il n'y a en réalité qu'une seule méthode valable: expérimenter de manière aussi scientifique que possible. Les méthodes de la pédagogie expérimentale sont connues et nous renonçons à les décrire ici, mais nous ne saurions assez insister sur l'importance de ce stade expérimental. La plupart des réformes effectuées en Suisse ou en Europe occidentale l'ont été sans aucun contrôle expérimental, si bien qu'il est quasi exclu d'en apprécier la valeur; est-ce un progrès, un recul? Précisément, au moment où, en Suisse romande, on songe à la mise en place d'un programme commun de la première à la quatrième année primaire,

(1) Voir «Math-Ecole», No 31, janvier 1968.

n'y aurait-il pas lieu de prévoir dans chaque canton des classes expérimentales? Un collège de spécialistes de la pédagogie expérimentale dirigerait le travail en disposant de tous les moyens techniques modernes indispensables et des facilités matérielles nécessaires. Rien n'empêcherait d'ailleurs de dépasser les frontières nationales en associant d'autres classes de langue française à l'expérience. Et même, d'étendre le champ de recherche à des classes suisses alémaniques, compte tenu du travail d'avant-garde entrepris sous l'impulsion des Départements de l'instruction publique de Bâle-Campagne ou de Zurich, par exemple. Le moment n'est-il pas venu de faire sauter les cadres qui compromettent la réalisation d'expériences d'une certaine ampleur, faute de crédits et d'animateurs qualifiés en nombre suffisants?

Remarquons à ce stade qu'un programme n'a de valeur que s'il est accompagné d'une méthodologie: celle-ci est inséparable des matières enseignées et jouerait un rôle décisif au stade expérimental. Nous y reviendrons donc plus loin sans oublier cet autre facteur de réussite: la préparation des maîtres.

Tout ce que nous venons d'écrire s'applique sans réserve à la mathématique moderne. Comment concevoir son introduction dans les programmes de l'école primaire? En janvier 1966, un groupe d'experts réunis à l'Institut de l'Unesco pour l'éducation, à Hambourg, a proposé un programme minimum *) pour l'école primaire (jusqu'à 12 ans), qui se présente comme suit (mises à part quelques libertés que nous prenons quant à la forme):

1. **Les nombres.** — Nombres naturels, nombres entiers, nombres rationnels non négatifs (fractions décimales et % y compris). Les opérations, structures algébriques de chacun des ensembles de nombres énumérés ci-dessus. Techniques de calcul, excepté les règles relatives aux nombres entiers négatifs.

2. **Géométrie.** — Connaissance de figures et de solides simples; transformations élémentaires: translation, rotation, similitude et symétrie.

3. **Mesures.** — Longueurs, surfaces, volumes, temps, poids, monnaies, température. Caractère approximatif de toute mesure. Changement d'unité.

4. **Probabilités.** — Quelques exemples simples. Fréquences, relations.

5. **Fonctions.** — Graphes et tables de relations fonctionnelles ou numériques. Leur construction et leur interprétation. Notions de statistique descriptive.

6. **Les problèmes.** — A partir d'une situation donnée, l'élève devrait être capable de découvrir un modèle mathématique approprié, d'analyser ce modèle pour l'utiliser ensuite dans l'élaboration de la solution du problème posé.

Il conviendrait, ajoutent les experts, de traiter ce programme dans un esprit moderne, c'est-à-dire en utilisant les notions d'ensemble, de relation, d'application...

---

*) Mathematic reform in the primary school, report prepared by J. D. Williams, pp. 46-47.

Examinons rapidement ce projet de programme. Les points 4 et 5 sont nouveaux, alors que les autres paraissent au premier abord plus conformes aux usages. En réalité, l'étude de la brochure montre qu'il n'en est rien. On propose dans chacun de ces points un déplacement du centre de gravité; ainsi, dans 1, la découverte des structures des ensembles de nombres, de même que les propriétés des opérations, l'emportent sur les techniques de calcul; en géométrie, on insiste sur les transformations et l'idée de modèle mathématique est au centre du point 6, consacré aux problèmes. Par ces innovations, on tient compte du premier critère que nous énoncions plus haut; celui de la valeur formative!

Précisons notre pensée par quelques exemples. L'étude des rotations conduit à la découverte des groupes cycliques à 3, 4, 5... éléments. Parallèlement l'opération «addition», dans l'ensemble des classes du reste, module 3, 4, 5, etc..., met en évidence des groupes isomorphes aux précédents. De telles études, où les expériences, les explorations des élèves doivent jouer un rôle essentiel, préparent l'introduction de l'ensemble des entiers, $Z = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$ qui, muni de l'addition, a lui aussi une structure de groupe cyclique, avec un nombre infini d'éléments, ce qui le distingue des précédents. On parviendrait ainsi à dégager une structure qu'il serait possible ensuite d'appliquer dans bien d'autres situations; structure qui importe plus que les exemples qui ont permis de la découvrir. Remarquons que l'introduction de Z dans le point 1 constitue une importante innovation: nos programmes sont demeurés liés à l'histoire du nombre; les Grecs qui, il y a 2300 ans, connaissaient les nombres rationnels, ignoraient les nombres négatifs, si bien qu'aujourd'hui, à 12 ans, un élève a consacré beaucoup de temps à des exercices plus ou moins acrobatiques sur les fractions, mais n'a aucune idée des nombres négatifs.

Les propriétés des opérations l'emportent alors aussi sur l'habileté à effectuer de longs calculs. Rien de plus propice au développement de la mobilité, de l'invention, que d'apprendre à se servir habilement de l'associativité, de la commutativité ou de la distributivité:

$29 + 37 = 29 + 1 + 36 = 30 + 36$
$37 + 24 + 13 + 36 = 37 + 13 + 24 + 36 = 50 + 60$
$25 \times 32 = (25 \times 4) \times 8 = 100 \times 8$
$12 \times 113 = 6 \times (2 \times 113) = 6 \times 226 = 3 \times (2 \times 226) = 3 \times 452$

De nombreux exercices de ce genre adaptés au niveau des élèves valent mieux que les recettes qui occupent une place ridicule dans les manuels.

Enfin, quel progrès si l'élève en face de problèmes de vitesse, de pente, d'intérêts, de poids spécifiques etc... réalise qu'il s'agit de l'application de la même fonction $f(\times) \rightarrow a \times x$!

Il va de soi que les remarques que nous faisions plus haut sur la nécessité de soumettre un programme nouveau à des expériences contrôlées s'appliquent intégralement au programme de Hambourg. La diffusion de ce document ne fait que rendre plus urgente une telle expérimentation. J.D. Williams, le rédacteur de la brochure, décrit avec précision (pp. 58-67) les conditions scientifiques d'un tel travail; nous renonçons à les analyser ici sans pourtant sous-estimer leur valeur. Bien au contraire. Elles correspondent d'ailleurs aux méthodes usuelles de la pédagogie expérimentale.

Une quesion demeure: quel programme prévoir pour des enfants de 5 à 7 ans? Les experts de Hambourg n'ont pas, à notre avis, accordé à ce stade l'importance qu'il mérite. De ses premières années d'école dépend souvent l'attitude définitive d'un élève vis-à-vis des mathématiques. C'est à ce niveau que les résultats des travaux de J. Piaget doivent retenir notre attention: un passage trop rapide au formel, à l'abstraction risque de paralyser toute étude ultérieure. Nous ne pouvons à ce sujet que renvoyer le lecteur à la fin de notre premier article.

Provisoirement, et dans l'attente d'expériences contrôlées, nous proposons le programme suivant, admis par la commission de l'enseignement des mathématiques du Département de l'instruction publique de Genève:

5-6 ans	E 1	Préparation du nombre
	E 2	Première découverte de l'espace
	E 3	Les nombres de 1 à 5
6-7 ans	I 1	Reprise et extension de E 1 et E 2
	I 2	Les nombres de 0 à 10
	I 3	Préparation aux opérations
	I 4	Les premières opérations: addition, soustraction et quelques multiplications. Comparaison
	I 5	Les nombres de la 2e dizaine.

Commentons brièvement ces différents points:

E 1 et 2. **Jeux** de classification, de relation, d'application. Exploration de quelques figures élémentaires. Jeux de mosaïques. Correspondances bi-univoques (bijection): importance ici de la variété du matériel, des dispositions des éléments dans l'espace. Sériation selon un critère: hauteur, longueur, largeur, épaisseur, etc.; jeux sur l'ordre linéaire, l'ordre circulaire: à gauche, à droite, dessus-dessous, devant-derrière, en haut-en bas, etc... Jeux relatifs à l'inclusion. Dans la règle, le nombre des éléments mis en jeu ne dépassera pas 6.

E 3 Un enfant de 5 ans - 5 ½ ans «connaît» les nombres de 1 à 5, ce qui signifie qu'il est capable dans toute situation de comparer le nombre d'éléments de deux ou plusieurs ensembles lorsque ce nombre est inférieur ou égal à 5. Il s'agit par des jeux et des expériences diverses d'exercer cette «connaissance». On introduira les symboles 1, 2, ..., mais on renoncera aux signes des opérations, bien que l'enfant sache, par exemple, que 4 et 1 font 5.

I 1 Voir E 1 - E 2; le nombre des éléments sera compris entre 6 et 10 ou même 6 et 12. On enrichira l'ensemble des figures géométriques à explorer. Premières expériences sur la ligne droite.

I 2 Connaître les nombres de 0 à 10, c'est non seulement les nommer, écrire le symbole correspondant, mais aussi les décomposer. A ce stade, il s'agit uniquement de manipulations et d'exercices oraux.

I 3 La préparation des opérations revient à mettre en évidence deux faits:

a) Un couple de nombres correspond par l'opération «addition» à un nombre. On peut donc prévoir soit des manipulations, puis oralement et enfin par écrit un exercice de l'addition sans utiliser le signe $+$ ou le signe $=$.

b) Sans utiliser le vocabulaire ensembliste, on présentera l'addition comme nombre cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints. Dans les deux situations, il importe de varier la position des éléments, d'imaginer des situations concrètes aussi différentes que possible. La soustraction apparaîtra comme opération inverse de l'addition .«Un ensemble compte 4 éléments; combien faut-il ajouter d'éléments pour qu'il en compte 7?»

I 4 A ce stade, on introduira avec précaution les signes des opérations, en particulier $=$, $+$, $-$, $<$ et $>$. On se bornera à quelques exemples simples de multiplications préparées par des manipulations. L'introduction du signe $\times$ ne paraît pas nécessaire.

I 5 Ici un choix s'impose. Nous proposons deux solutions: introduire les nombres de la deuxième dizaine à l'aide du matériel adéquat, selon la méthode habituelle, ou bien avant cette introduction, peut-être même à la place de cette introduction, introduire avec du matériel **uniquement** des calculs dans la base 3, la base 4, par exemple.

Ce programme de transition a le mérite d'être applicable immédiatement, quelles que soient les expériences en cours.

4. La méthodologie

Un programme vaut par la méthodologie qui l'accompagne, objet elle aussi d'expériences liées d'ailleurs étroitement à celles qui se rapportent aux matières enseignées. La mathématique moderne permet d'accorder une large place à l'activité de l'élève, à l'exploration, à l'invention, à la mobilité. Il serait faux de renoncer à préparer les notions d'ensemble faute de matériel fabriqué spécialement, car il suffit de recourir aux objets que l'enfant trouve autour de lui. Certes, les blocs logiques de Dienes favorisent l'introduction des premières notions ensemblistes, mais n'arrive-t-on pas aux mêmes résultats à l'aide de jouets en bois, en métal ou en peluche, des animaux, des voitures et des personnages, petits ou grands, réalisés en trois ou quatre couleurs différentes? De même, des jetons, des perles, des cailloux, des noisettes suffisent à introduire dans des situations aussi variées que nombreuses, l'idée de conservation du nombre. Ce qui compte par-dessus tout, à notre avis, c'est que l'enfant soit conduit à abstraire une notion à partir de manipulations, de recherches aussi différentes que possible. En se limitant à un seul matériel, ne court-on pas le risque de créer de fausses abstractions, de lier une notion à une seule image mentale? Ainsi la notion de sériation n'est comprise que si l'enfant peut ordonner aussi bien des bâtonnets que des balles de diamètre variable ou encore des personnages de taille différente.

Par ailleurs, si on admet volontiers que l'enfant de 5-7 ans consacre beaucoup de temps à des manipulations, on estime souvent que plus tard, à 10 ans par exemple, toute activité concrète est une perte de temps. Une telle conception risque de compromettre toute l'introduction de la mathématique moderne. L'activité aura changé de nature, mais elle n'en devra pas moins occuper la première place.

Toutefois, il faut le dire clairement, accorder une place centrale à l'activité de l'élève revient à condamner sans rémission la «leçon classique» de mathématique.

L'idée n'est pas nouvelle: il y a plus de vingt ans que nous pénétrions à Neuchâtel dans une classe d'élèves de 8 à 10 ans, dirigée par une pédagogue remarquable, Marguerite Bosserdet, à laquelle nous rendons avec gratitude cet hommage posthume. Nous avions sous les yeux un véritable atelier; seuls ou par groupes de 3 ou 4, les enfants «exploraient» les nombres, inventaient des problèmes ou construisaient des modèles. La maîtresse ne faisait que mettre en pratique les enseignements de son maître, Ed. Claparède, l'auteur de l'**Ecole sur mesure.** Si l'exemple que nous citons n'est pas unique (nous aurions bien d'autres noms à mentionner ici), nous devons reconnaître que la classe monolithique où tous les élèves font au même moment le même exercice reste de très loin la plus répandue. Or, il n'y aura pas de progrès dans l'enseignement de la mathématique si l'on ne transforme pas la classe en petit laboratoire (1), où les enfants peuvent travailler à leur rythme, découvrir une même notion à partir de manipulations différentes. Nous savons que nous heurtons de front une certaine conception officielle de l'enseignement, mais nous devons combattre l'illusion que l'introduction de la mathématique moderne à l'école primaire va, elle seule, aplanir toutes les difficultés, comme par miracle. Il faut, en fait, saisir l'occasion de ce changement de programme pour modifier fondamentalement l'organisation du travail de la classe. N'oublions pas que ce qui est en cause, c'est la façon dont l'enfant d'aujourd'hui comprendra le monde dans lequel il est appelé à vivre demain.

5. La formation des maîtres

Nous devons d'emblée distinguer deux aspects de ce problème:
la formation des nouveaux maîtres et celle des maîtres en exercice.

Au niveau secondaire inférieur et supérieur, les futurs maîtres devraient recevoir un enseignement aussi complet que possible en mathématique moderne. Tant qu'on n'aura pas réalisé cet important changement, on retardera l'introduction d'un nouveau programme. A cette formation de base s'ajouterait une méthodologie inspirée de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent.

---

(1) Voir «Math-Ecole», No 27, mai 1967.

Pourquoi attendre pour réaliser de telles transformations? En revanche, le «recyclage» des maîtres en exercice pose des problèmes plus délicats dont la solution prendra du temps. Il faut former des formateurs: l'idéal serait de choisir des maîtres primaires qui, compte tenu de leurs aptitudes en mathématique et de leur intérêt, accepteraient de préparer une licence à l'Université, ce qui signifie que l'Etat devrait payer leur traitement durant les années d'études pour leur confier ensuite la direction de cours régionaux permanents. On procéderait par étapes en prenant en charge tout d'abord les maîtres du degré inférieur, puis du degré moyen et enfin du degré supérieur de l'école primaire. Le temps nécessaire à cette formation des chefs de file correspondrait à peu de chose près aux recherches expérimentales qu'exige la préparation des nouveaux programmes. Qu'on ne nous objecte pas que cela est impossible pour des raisons économiques. Depuis plusieurs années, les grandes entreprises industrielles ou commerciales n'hésitent pas à favoriser le perfectionnement, non pas de leurs employés ou ouvriers, mais des chefs de service. Préparer notre jeunesse aux tâches qui l'attendent dans 20 ou 30 ans, n'est-ce pas aussi important que d'assurer l'évolution d'une industrie? Sans compter que l'industrie, l'économie, auront besoin à tous les échelons d'un personnel mieux formé en mathématique. **L. Pauli**

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

En complément de notre premier article, signalons les ouvrages suivants, édités en Suisse romande, et témoins du renouvellement de l'enseignement mathématique:

✱ **H. SUTER, «Mathématiques modernes I»**, Editions du Griffon, Neuchâtel, 1965. Cet ouvrage est destiné aux élèves des sections scientifiques des écoles secondaires.

✱ **S. PAHUD et J.-M. PASTORI, «Cours de mathématique, 7e, 8e et 9e degrés, Nos 1 et 2»**, (cours du cycle d'orientation), édité par le Département de l'instruction publique de Genève, 1966/1967.

✱ **Ch. ROTH «Résumé de mathématique, avec 260 problèmes»** (cours destiné aux étudiants de l'Ecole technique supérieure), édité par l'Ecole supérieure technique de Genève, 3e édition, 1967.

✱ **G. H. AURY, R. LANG, A. OLZA, «Cours de mathématique, 4e année»**, vol. I, II, III, IV, V (en cours de publication) et VI (en préparation), cours des écoles gymnasiales de Genève, édité par le Département de l'instruction publique de Genève, 1966/1968.

Comité de rédaction:	**Abonnement:**
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, G. Guélat, L. Pauli, N. Savary, S. Roller, rédacteur.	Suisse F 5.—, Etranger F 6.—, CCP 12 - 16713. Paraît 5 fois par an. Service de la recherche pédagogique, 65, rue de Lausanne, 1202 Genève (022 31 71 57).