MATH ECOLE

JANVIER 1971 10e ANNÉE

46

Pour achever notre second lustre d'existence

L'Ecole romande s'inscrit dans les faits: Commission interdépartementale romande de coordination de l'enseignement (CIRCE), présidée par Roger Nussbaum; Secrétariat à la coordination romande en manière d'enseignement, dirigé par Jean Cavadini; Institut romand de recherches et de documentation pédagogique (IRDP) avec Samuel Roller pour directeur.

Math-Ecole se devait de suivre le mouvement et de marquer plus nettement encore une vocation romande qu'il a eue d'ailleurs dès ses origines. Il le fait, avec l'approbation du Conseil de direction de l'IRDP, en transférant la rédaction et l'administration de Genève à l'Institut de Neuchâtel. Il le fait aussi, et surtout, en élargissant son comité de rédaction qui comptera désormais quatre nouveaux membres: François Brunelli de Sion, André Calame de Neuchâtel, Denis Froidcœur de Bellinzone et Frédéric Oberson de Fribourg. Nicolas Savary, de Sion, un compagnon de la première heure, quitte le comité, trop absorbé qu'il est par ses tâches sédunoises (mise en place de l'enseignement de la math moderne à l'école primaire). A cet ami de toujours, notre merci pour sa collaboration passée; au Service de recherche pédagogique de Genève (à Raymond Hutin en particulier et à sa secrétaire Mme Beblawi) la reconnaissance des lecteurs de Math-Ecole pour un travail impeccable de neuf années; au Département de l'instruction publique de Genève enfin notre gratitude pour la générosité morale et matérielle qu'il n'a cessé de nous témoigner.

Concernant les cinq numéros de l'année 1971, les thèmes principaux arrêtés par le comité de rédaction dans sa séance du 7 novembre 1970 à Lausanne sont les suivants:

Numéro 46, janvier: *Comparaisons - Rapports - Proportionnalité,* par François Brunelli.

Numéro 47, mars: *Aspects psychologiques de l'enseignement de la math moderne,* par Rémi Droz vraisemblablement.

Numéro 48, mai: *La problématique des problèmes,* par Roger Sauthier (Sion).

Numéro 49, septembre: *La relation maître-élève dans le nouvel enseignement de la math,* par Denis Froidcœur.

Numéro 50, novembre: *Le rôle des matériels dans l'enseignement de la math moderne,* par Berthold Beauverd.

... Et une fois de plus, une fois encore, Math-Ecole se tourne vers ses lecteurs qu'il remercie de leur fidélité et leur renouvelle un vœu trop mal entendu à son gré, à savoir qu'ils veuillent bien entrer en contact avec les auteurs des articles, demandant, critiquant, argumentant; faisant ainsi de Math-Ecole un instrument d'échanges et de collaboration.

S. Roller

Nos quatre nouveaux collaborateurs

M. *François Brunelli* est licencié ès sciences de l'Université de Lausanne. Maître de mathématiques au Collège de Sion, il y a enseigné dans huit degrés secondaires des sections A, B et C. Il est actuellement responsable de la formation, en math-moderne du corps enseignant primaire du Valais romand et coauteur du cours de recyclage destiné à ces enseignants. Il est chargé, par la TV romande et par la CIRCE, d'écrire des scénarios d'émissions sur la math-moderne pour 1972. Il est membre de la Commission des moyens d'enseignement en mathématique (sous-commission CIRCE).

M. *André Calame* est docteur ès sciences de l'Université de Neuchâtel. Il est maître de mathématiques au gymnase cantonal de Neuchâtel et chargé de cours à l'université de cette même ville (Bases théoriques des mathématiques élémentaires, cours destiné aux futurs maîtres secondaires; Séminaire de mathématiques élémentaires, destiné à la formation continue des maîtres). Il est délégué du Département de l'instruction publique de son canton pour l'application de la réforme de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires. Il a dirigé des cours d'introduction à la mathématique moderne à Fribourg (pour le corps enseignant fribourgeois) et à Leysin, sous les auspices du GRETI, pour le corps enseignant tessinois. Ses publications:

1955 Sur les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel.
1965 Mathématiques modernes I - Griffon Neuchâtel.
1966 Mathématiques modernes II - Griffon Neuchâtel.
1967 Mathématiques modernes III - Griffon Neuchâtel.
1969 Introduction à la mathématique moderne - SEPP - DIP - Fribourg.
1970 Matematica moderna I - Trad. en portugais - Editôra Poligono - Sao Paulo.
En préparation: Introduction aux mathématiques modernes - Griffon - Neuchâtel (avec exercices accompagnés des solutions).

M. *Denis Froidcœur* est licencié en mathématiques de l'Université catholique de Louvain. Ouvert aux problèmes psychologiques, il a pris une part active à la réforme belge portant sur l'enseignement de la mathématique moderne: Commission des programmes, organisation de cours de perfectionnement, auteur et co-auteur de notes de cours édités à La Procure - Namur (Math en 1er, Nadin, Lecart M.). Il exerce actuellement son activité à l'Office d'études et de recherches du Tessin où il est chargé de la mise en place de la réforme de l'enseignement de la mathématique dans les écoles primaires et secondaires.

M. *Frédéric Oberson* a été instituteur dans le canton de Fribourg. Inscrit à l'université, il y prépare un diplôme en mathématiques. Il enseigne cette discipline à l'Ecole normale de Fribourg. Il participe aux travaux qui se font dans le cadre de la réforme de l'enseignement des mathématiques dans son canton. Il conduit une recherche dans une classe expérimentale sur la pédagogie de la mathématique. Il est membre de la Commission des Moyens d'enseignement en mathématique de la CIRCE (Commission interdépartementale romande pour la coordination de l'enseignement).

Introduction à une journée d'étude consacrée à:

«Mathématique moderne et technologie éducationnelle»

par André Delessert, professeur de mathématiques à l'Université de Lausanne

Le professeur Delessert ayant accepté de présider cette journée d'étude, organisée par le GRETI (10 octobre 1970), il l'a ouverte en se livrant à des réflexions de haut niveau qu'il a bien voulu rédiger à l'intention des lecteurs de Math-Ecole. Nous le remercions de la collaboration qu'il nous apporte, conscients que nous sommes de l'honneur que nous fait ainsi l'Université.

Je tiens à remercier d'emblée les responsables du GRETI de l'honneur et du plaisir qu'ils me font en me confiant la responsabilité de présenter cette séance de travail. Je me suis d'ailleurs interrogé sur ce qui me valait cette flatteuse invitation, et j'ai découvert que c'était sans doute mon incompétence uniforme en tout ce qui concerne les procédés matériels d'enseignement mathématique. Cette ignorance m'assure une position, sinon centrale, tout au moins neutre entre les diverses tendances qui se manifestent certainement en ces matières. Quant aux raisons qui m'ont poussé à accepter néanmoins de présider cette journée, je vais en faire l'objet de cette courte introduction.

Il existe dans le canton de Vaud quelques organismes chargés de préparer une réforme en profondeur de l'enseignement mathématique. En particulier, un groupe d'étude du Centre vaudois pour l'enseignement mathématique a mis en train des expériences visant à la création, la fabrication et l'emploi de divers matériels d'enseignement mathématique. Je ne me propose pas de décrire ses travaux, ni de montrer comment notre groupe d'étude en est arrivé là. Je dirai simplement que l'évolution de nos doctrines suit de très près celle que l'on peut observer sur le plan international et c'est celle-ci que je voudrais schématiser très brièvement.

Le premier événement qui vient à l'esprit est l'attaque victorieuse menée autour des années cinquante contre les sacro-saints programmes traditionnels de mathématique. Aux questions d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie apparemment fixées pour l'éternité — elles avaient fini par incarner la vérité ultime par excellence — on entreprit de substituer un programme axé sur les structures fondamentales de l'analyse, qui a connu un joli succès sous le nom de «mathématiques modernes». La brusquerie de cette révolution ne doit pas faire oublier que l'enseignement mathématique avait été remis en question depuis longtemps. C'est en 1908 déjà, au Congrès international des mathématiciens, à Rome, que fut créée la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Les premiers responsables en furent Félix Klein, l'Anglais Greenhill et le Genevois H. Fehr. La revue «L'enseignement mathématique», fondée par Fehr et Laisant, fut choisie comme organe officiel de la Commission. Il n'est pas déplacé de rappeler ici le rôle très honorable joué par notre pays, et Genève tout particulièrement, dans l'évolution de l'enseignement mathématique. La lecture des anciens numéros de «L'enseignement mathématique» est d'ailleurs très instructive. Entre autres choses, on y trouve déjà de nombreuses controverses sur la géométrie et sur les ensembles. Les idées qui ont fait explosion vers 1950 ont donc cheminé longuement avant d'aboutir.

La bataille des programmes s'est déroulée dans une certaine confusion. En particulier, le camp des modernistes n'était pas peuplé que de gens à l'esprit large; celui des traditionnalistes n'était pas formé que de personnages rétrogrades, en marge de la vie mathématique. Une nouvelle distribution des rôles semblait plausible. On peut la voir se dessiner depuis quelques années, sous la forme d'une remise en question de l'enseignement mathématique, que je considère comme beaucoup plus profonde que la première. Je vais essayer de l'esquisser à son tour.

Reprenant une vieille image, on a justement pu opposer les **mathématiques faites** et les **mathématiques à faire.** Les mathématiques faites sont presque entièrement contenues dans les ouvrages et les publications agréés par les mathématiciens. Les mathématiques à faire, dans une situation historique donnée, comportent, outre les connaissances mathématiques acquises, l'ensemble des problèmes ouverts qui en naissent, la tendance ou le besoin de les attaquer, les critères d'utilité, d'intérêt ou de beauté qui vont influencer la démarche du chercheur.

Dans l'école traditionnelle, le maître se place au point de vue des mathématiques faites, tandis que l'élève — tout comme le chercheur, d'ailleurs — se meut dans le monde des mathématiques à faire. L'évolution à laquelle on assiste aujourd'hui, et dont il faut reconnaître qu'elle est préconisée depuis longtemps par de nombreux esprits clairvoyants, a pour but d'amener le maître, lui aussi, dans le domaine des mathématiques à faire. L'enseignement traditionnel se définissait en termes de **programmes.** L'enseignement d'aujourd'hui se détermine en termes **d'objectifs de pensée et d'action.** Le but premier n'en est plus d'étudier le triangle, ou les fractions ordinaires, ou l'espace vectoriel; c'est d'apprendre à inventorier, à classer, à ordonner, à choisir, à décider, à critiquer, à corriger et aussi d'acquérir l'envie de comprendre.

Sous la forme où je les ai évoqués, les objectifs mentionnés ne paraissent pas typiques de l'enseignement mathématique. J'essaierai de les préciser un peu en évoquant l'idée de **codage.** Imaginons qu'on dispose d'une part d'un **«système physique»** qui peut être justement emprunté à la physique, mais aussi à la chimie, la biologie, à la vie de tous les jours ou même à la mathématique. On choisit ou on construit d'autre part un système de termes liés entre eux par des règles d'agencement ou de formation, constituant un **code**. Entre le système physique et le code, on peut introduire ou découvrir des analogies formelles; des correspondances fournissant la **clé du code**. Nous appellerons **codage** le complexe formé du système physique, du code et de la clé. En faisant fonctionner le code, il est possible de prévoir ou de mieux décrire le fonctionnement du système physique. La critique permet d'évaluer l'adéquation de ce codage, de l'affiner ou de le remplacer par un autre.

C'est ici que se situe une remarque très importante. La mathématique peut s'engendrer elle-même par **«autocodage»** à partir d'une base physique extrêmement réduite. La théorie des catégories fournit des codes pour la théorie des ensembles et celle des groupes. Cette dernière propose des codes pour l'algèbre linéaire qui, à son tour, engendre des codes pour la géométrie euclidienne, qui n'est elle-même qu'un code pour la géométrie physique élémentaire. Or la proportion des enfants et des adultes susceptibles de s'enthousiasmer pour cette aptitude à l'autocodage des mathématiques est ridiculement faible. Cette conception des mathématiques n'est pas une motivation suffisante pour la plupart des gens. En revanche, le nombre des élèves qui peuvent s'intéresser à des codages mathématiques de systèmes «physiques» tirés de la nature ou de la vie quotidienne est beaucoup plus grand. Afin d'exploiter cet intérêt, l'enseignement mathématique d'aujourd'hui recherche tous les procédés qui permettent de faire entrer en classe des systèmes physiques bruts, c'est-à-dire non encore verbalisés, à partir desquels peut se développer spontanément l'activité de codage.

Nous voyons par là que la création de matériel d'enseignement mathématique est au centre de la réforme actuelle. Et c'est à la lumière de ce qui précède qu'on peut préciser les tâches auxquelles elle doit s'atteler et les conditions auxquelles, selon moi, elle devrait s'astreindre. Nous nous bornerons, bien entendu, aux généralités.

En ce qui concerne les tâches de la recherche en matériel d'enseignement mathématique, cette méthode doit s'efforcer de favoriser, d'augmenter et de faciliter l'activité de codage. Ainsi:

1. elle doit ouvrir la classe à des situations «physiques» aussi variées, aussi enrichissantes et aussi attirantes que possible;
2. elle doit accroître les moyens d'action, de prévision et de réalisation de l'élève: par de la documentation statistique, des tables, des machines à dessiner, à calculer ou à simuler (on pourrait parler de faciliter le décodage, si codage et décodage n'était pas si étroitement imbriqués).

Quant aux conditions auxquelles doit se soumettre cette recherche, elles naissent du fait qu'il ne s'agit plus d'une aimable prospection de gadgets pour égayer les leçons de fin d'année. La création et l'utilisation de matériel d'enseignement mathématique fait partie intégrante de la stratégie de cet enseignement. A ce titre, elles doivent se subordonner aux nécessité de cette stratégie. Plus précisément:

a) L'emploi du matériel d'enseignement mathématique doit satisfaire les **exigences de la mathématique.** Dans l'enthousiasme de l'invention, on risque d'oublier qu'une fonction n'est pas toujours continue, qu'un ensemble n'est pas toujours fini, qu'une hyperbole n'est généralement pas connexe et surtout qu'il faut se garder d'identifier un système physique et le code mathématique employé pour le décrire. Il y a là un piège terriblement dangereux. Qu'on songe seulement à certaines présentations élémentaires des ensembles ou à l'arithmétique commerciale.

b) L'emploi du matériel d'enseignement mathématique doit se subordonner aux besoins de la didactique. Il est peut-être prématuré de faire aujourd'hui la fine bouche. Mais il serait navrant de voir les inventeurs s'acharner d'une part à illustrer une notion mathématique séduisante qui ne présenterait aucune difficulté particulière pour l'enseignement, tout en négligeant d'autre part des domaines ingrats qui requièrent des aides didactiques nouvelles (dans cet ordre d'idées, pensons à ce qui touche à l'approximation et l'incertitude, où la perception rapide de nombres écrits et de configurations).

c) L'emploi du matériel d'enseignement mathématique doit embellir le **rôle du maître.** L'évolution actuelle n'a que trop tendance à le rétrécir et l'attrister. Je n'hésite pas à y voir, pour ma part, l'une des grandes causes de la désaffection de trop de jeunes à l'égard de notre profession. Il serait regrettable de voir le maître réduit à la fonction d'accessoiriste, programmé à distance par des spécialistes ésotériques. Il importe que le plus grand nombre d'enseignants possible soit engagé dans la recherche de procédés techniques d'enseignement mathématique.

d) Les nouvelles techniques d'enseignement doivent respecter la **dignité et l'équilibre affectif des enfants.** Il ne faut pas oublier qu'on se propose d'augmenter l'activité de l'élève en exploitant ses réserves de curiosité, de goût du jeu, d'attirance pour les couleurs et les mécanismes en mouvement. Une généralisation incontrôlée de ces méthodes risque de provoquer chez lui une réaction immunologique. Les renseignements personnels que j'ai pu récolter auprès de nombreux étudiants me permettent d'affirmer qu'il se développe chez beaucoup une aptitude étonnante à l'étanchéité, qui est à l'opposé de l'ouverture d'esprit que notre enseignement se propose d'atteindre.

J'ai été bien long et pourtant je n'ai pas traité un sujet qui gagnerait à l'être au niveau interdisciplinaire. Toutefois, il m'a paru possible d'introduire cette séance de travail en vous faisant part de quelques réflexions personnelles sur l'importance, mais aussi sur les servitudes attachées aux travaux que vous allez entreprendre.

Comparaisons - Rapports Proportionnalité

par François Brunelli

Comparer des grandeurs, établir un **rapport** entre deux mesures, répartir des mandats politiques au système **proportionnel**, voilà des éléments de la vie courante. Sans vouloir revenir aux célèbres problèmes de robinets, qu'on peut éliminer sans remords des manuels d'école primaire, on peut essayer de définir une stratégie d'approche de la **linéarité** dès les premières années primaires: c'est l'objet des lignes qui suivent. Nous ne précisons pas les âges correspondant aux étapes successives, n'ayant pas nous-même la pratique au niveau primaire; nous souhaitons néanmoins être utile aux praticiens de ce degré en leur livrant nos réflexions.

Notre point de départ consistera en énoncés tirés de l'observation et de la vie courante:

1. Lise possède 4 poupées et Myriam en possède 12.
2. Dans ma classe, il y a 7 filles et 21 garçons.
3. La longueur d'une salle de classe est 12 m et sa largeur 6 m.
4. Une paire de sandales coûte 13 F et une paire de souliers 39 F.
5. Un abricotier a produit 75 kg de fruits du premier choix et 25 kg du deuxième choix.
6. Pour faire le même trajet, un piéton met 12 h et un cycliste 3 h.

Ces énoncés, et on peut multiplier les exemples, peuvent constituer les prémisses de problèmes traditionnels d'arithmétique. A partir de telles situations simples, nous nous proposons de **comparer** les deux nombres figurant dans chaque donnée.

Etape 1

En établissant des **correspondances élément à élément,** illustrées par des diagrammes tels que:

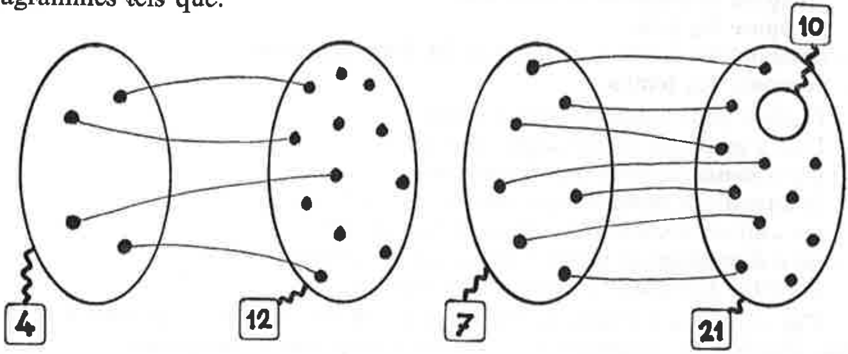


Figure 1

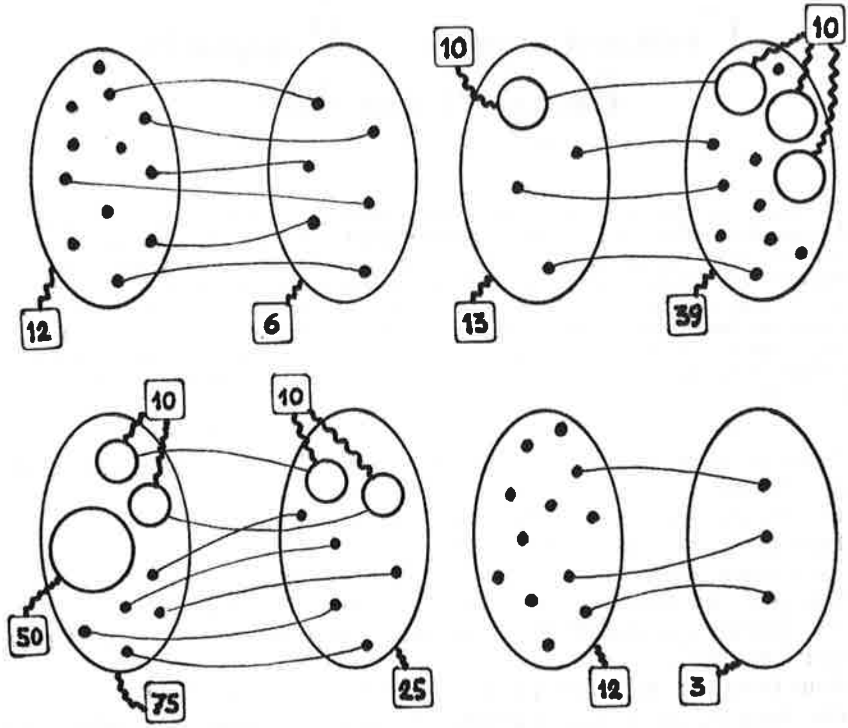


Figure 1 (suite)

nous faisons découvrir — ou nous rappelons — à l'enfant la relation d'**ordre** qui lie les deux nombres.

Aux consignes:
— **compare** les nombre de poupées;
— **compare** le nombre de filles et le nombre de garçons;
— **compare** la longueur et la largeur;
— **compare** les prix;
— **compare** les poids du premier et du deuxième choix;
— **compare les temps**;

l'enfant peut répondre, par exemple:
— Lise a **moins** de poupées que Myriam;
— il y a **moins** de filles que de garçons;
— la largeur est **moins** longue que la longueur;
— les souliers coûtent **plus** cher que les sandales;
— on a **davantage** de premier choix que de deuxième choix;
— le piéton met **plus** de temps que le cycliste.

Ces réponses verbales seront ensuite, au niveau des cardinaux d'ensembles, «traduites», «symbolisées» respectivement par les **inégalités:**

$4 < 12$; $7 < 21$; $6 < 12$; $39 > 13$; $75 > 25$; $12 > 3$.

Remarques

1. Les symboles relationnels $<$ et $>$ sont souvent lus: «plus petit que», respectivement «plus grand que»; il serait néanmoins souhaitable de les lire plutôt: «inférieur à» et «supérieur à» et nous y voyons deux raisons:
   — D'une part, et c'est une représentation qui sera reprise lors d'extensions successives de la notion du nombre — **N, Z, Q, R** — si nous représentons l'ensemble des entiers par des points équidistants situés sur une demi-droite:

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

Figure 2

   un nombre sera dit «supérieur à» un autre si le premier est situé «à droite» du second;
   un nombre sera dit «inférieur à» un autre si le premier est situé «à gauche» du second.
   Les expressions: «supérieur à» et «à droite de», «inférieur à» et «à gauche de» sont des notions **topologiques;** les expressions: «plus grand que», «plus petit que» sont ambiguës.

   — D'autre part, il faudra un jour distinguer entre les relations **d'ordre strict** ($>$ et $<$) et les relations **d'ordre large** ($\geq$ et $\leq$).
   Mais, au fait, il est grammaticalement incorrect de dire:
   «plus grand ou égal à»,
   «plus petit ou égal à»,
   alors que, sans incorrection de langage, on peut dire:
   «supérieur ou égal à»,
   «inférieur ou égal à».

2. Les réponses fournies par les enfants aux consignes peuvent réserver quelque surprise; par exemple, pour l'énoncé No 3, un enfant pourrait répondre: «la largeur est **plus** courte que la longueur», et, pris au piège du langage, pourrait donner sa traduction par l'inégalité: $6 > 12$! Une formulation unique serait bienvenue, dans chaque situation:
   — le **nombre** de poupées de Lise **est inférieur** au **nombre** de poupées de Myriam;
   — le **nombre** de filles est **inférieur** au **nombre** de garçons;
   — le **nombre** qui mesure la largeur est **inférieur** au **nombre** qui mesure la longueur;
   — le **nombre** qui exprime le prix des souliers est **supérieur au nombre** qui exprime le prix des sandales;
   — le **nombre** qui mesure le poids du premier choix est **supérieur** au **nombre** qui mesure le poids du second choix;
   — le **nombre** qui mesure le temps du piéton est **supérieur** au **nombre** qui mesure le temps du cycliste.

Etape 2

Ultérieurement, lorsque l'enfant s'est habitué aux opérations d'**addition** et de **soustraction** sur **N**, les réponses aux mêmes consignes qu'à l'étape 1 seront, par exemple:

— Myriam possède **8** poupées **de plus** que Lise;
— il y a **14** garçons **de plus**;
— on a **6** m **de moins** en largeur;
— une paire de sandales coûte **12** F **de moins** qu'une paire de souliers;
— l'abricotier a donné **50** kg **de moins** de 2e choix;
— le cycliste **gagne 9** h **sur** le piéton.

Ces réponses, parfois elliptiques, sous-entendent en fait les schémas ci-après, que nous supposons ici déjà utilisés formellement par l'enfant:

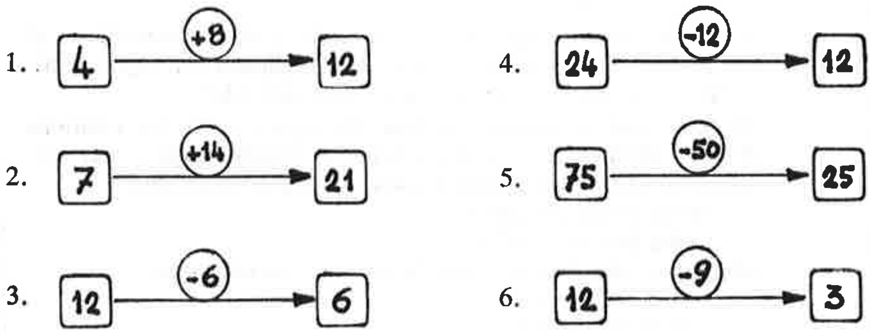


Figure 3

Pour comparer, l'enfant répond ici, en fait, par un **opérateur,** et les schémas correspondent à la résolution des équations:

$$\begin{array}{rlrl} 4 + \ldots = 12 & \qquad & 24 - \ldots = 12 \\ 7 + \ldots = 21 & & 75 - \ldots = 25 \\ 12 - \ldots = 6 & & 12 - \ldots = 3 \end{array}$$

On peut remarquer que l'élément numérique des réponses formulées ne figure pas au second membre des équations, ce qui était formellement exigé par l'ancienne disposition traditionnelle des «solutions» (voire par des livres d'arithmétique encore en usage); cela n'allait pas sans créer d'inutiles difficultés d'expression verbale.

Etape 3

Proposons maintenant, à propos de poupées, un énoncé tout différent: **Lise et Myriam jouent avec 12 poupées,** et demandons aux enfants d'imaginer combien chacune des filles peut en avoir apporté.

a) Peut-être, se souvenant de certaines «étoiles» déjà complétées dans des exercices formels antérieurs (décomposition d'un nombre en sommes), des enfants répondront par ce schéma:

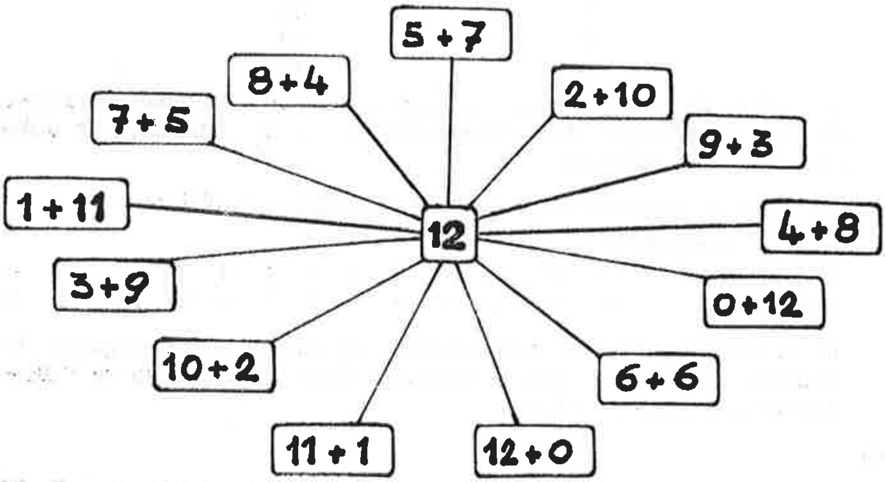


Figure 4

Ce diagramme étoilé illustre, entre autres, la propriété commutative de l'addition; par exemple, on peut en isoler l'égalité:

$$5 + 7 = 7 + 5$$

Les deux nombres situés à chaque extrémité des rayons de l'étoile forment une **paire,** puisque leur ordre, dans l'addition, est indifférent. Pour faire apparaître la notion de **couple** (paire **ordonnée**), c'est-à-dire pour indiquer, par exemple, que le premier nombre indique les poupées de Myriam et le second nombre les poupées de Lise, il **faut** convenir, avec les enfants, qu'on utilise une notation différente:

(12,0), (11,1), (10,2), ... , (3,9), (2,10), (1,11), (0,12) est une **liste de couples;** elle correspond au tableau suivant:

Nombre de poupées	
de Myriam	**de Lise**
12	0
11	1
10	2
9	3
8	4
7	5
6	6
5	7
4	8
3	9
2	10
1	11
0	12

Les suites de nombres sont disposées ici en deux **colonnes** parallèles; de plus, les nombres, dans chaque colonne, se succèdent dans un **ordre** croissant ou décroissant.

c) On proposera aussi une disposition sur deux **lignes** parallèles:

Nombre de poupées													
de Lise	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
de Myriam	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Il est évident qu'il faut demander ici aux enfants d'être soigneux: les éléments de chaque couple doivent être situés vis-à-vis l'un de l'autre, dans les colonnes ou les lignes.

d)

L'introduction d'une nouvelle représentation appelle les remarques préliminaires suivantes:

— Les cahiers utilisés par les enfants pour les exercices de mathématique sont généralement munis d'un quadrillage: on peut, de ce réseau à deux directions, faire un usage autre qu'une éducation à l'ordonnance des travaux présentés.

— Nous supposons aussi que, dès l'âge de 6-7 ans, l'enfant a eu l'occasion, à l'école, de se déplacer dans un réseau (quadrillage de rues et carrefours à son échelle), et d'utiliser des diagrammes à double entrée (jeux logiques, par exemple).[1]

[1] Cf. p. ex. Cullaz, Hutin, Pache, **Mathématique,** Guide médodologique pour la première année primaire, DIP, Genève 1970, 3.9. pp. 70 sqq.

Proposons alors de disposer:

— les nombres de poupées possibles de Myriam sur une **ligne**,
— les nombres de poupées possibles de Lise sur une **colonne**, selon le schéma suivant:

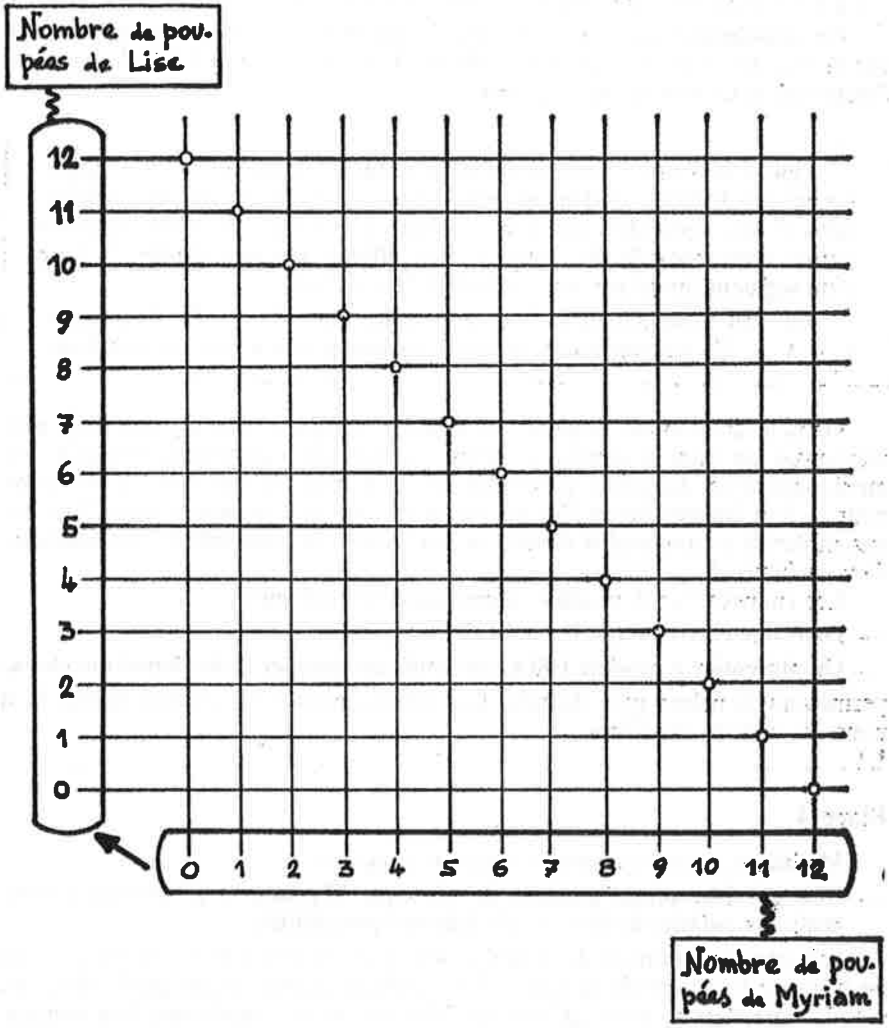


Figure 5

Dans ce diagramme cartésien, les couples issus des suites précédentes sont représentés — assez naturellement — par les intersections (carrefours) des lignes et des colonnes correspondantes.

On exercera l'enfant à répondre à des questions telles que:

— établir le diagramme cartésien pour une situation concrète donnée;

— lire, sur le diagramme, l'un des éléments du couple, lorsque l'autre élément est proposé;

— lire les éléments d'un couple à partir du point représentatif.

On **conviendra** soigneusement que le **premier** élément des couples est lu sur la liste horizontale: c'est une règle du jeu, rappelée par la flèche située à l'angle inférieur gauche du diagramme.

Que le réseau soit orthogonal (directions perpendiculaires), oblique, normé (la distance de deux nœuds voisins est la même sur les horizontales et les verticales) ou non, l'enfant découvrira bien vite que les points représentatifs des couples sont **alignés sur une droite,** le long d'un **segment** limité par les points (0,12) et (12,0).

En fait, implicitement, on a résolu, dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ l'équation: $y + x = 12$, par une représentation «parlante» de toutes ses solutions.

Dans le diagramme proposé, les couples s'alignent suivant une diagonale parcourue du haut à gauche à droite en bas (ou vice-versa). On pourrait aussi obtenir la diagonale parcourue de la gauche en bas vers la droite en haut si l'on intervertissait l'ordre de succession des nombres dans l'un des ensembles: il est préférable d'adopter dès l'abord la convention sous-entendue dans la figure 5.

Les énoncés 2 et 5, modifiés d'une manière analogue:

— **Dans une classe mixte, il y a 28 élèves;**

— **Un abricotier a produit 100 kg de fruits du premier et du deuxième choix;**

permettent le même type d'étude. Les autres énoncés s'y prêtent moins bien pour des raisons évidentes.

Etape 4

Modifions encore l'énoncé relatif aux poupées:

— **Lise possède quatre poupées de plus que Myriam,** et proposons à nouveau aux enfants de dresser une **liste des possibilités.**

Soit par énumération des couples: (0,4), (1,5), (2,6), (3,7), (4,8), ... , soit en utilisant le réseau de la figure 5, les enfants découvriront que la liste des couples «ne s'arrête pas», qu'on peut faire autant de couples que l'on voudra.

L'ensemble des points représentatifs est disposé sur une **demi-droite** dont l'origine est le point (0,4).

On découvre une **infinité** de couples, sous-ensemble de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$!

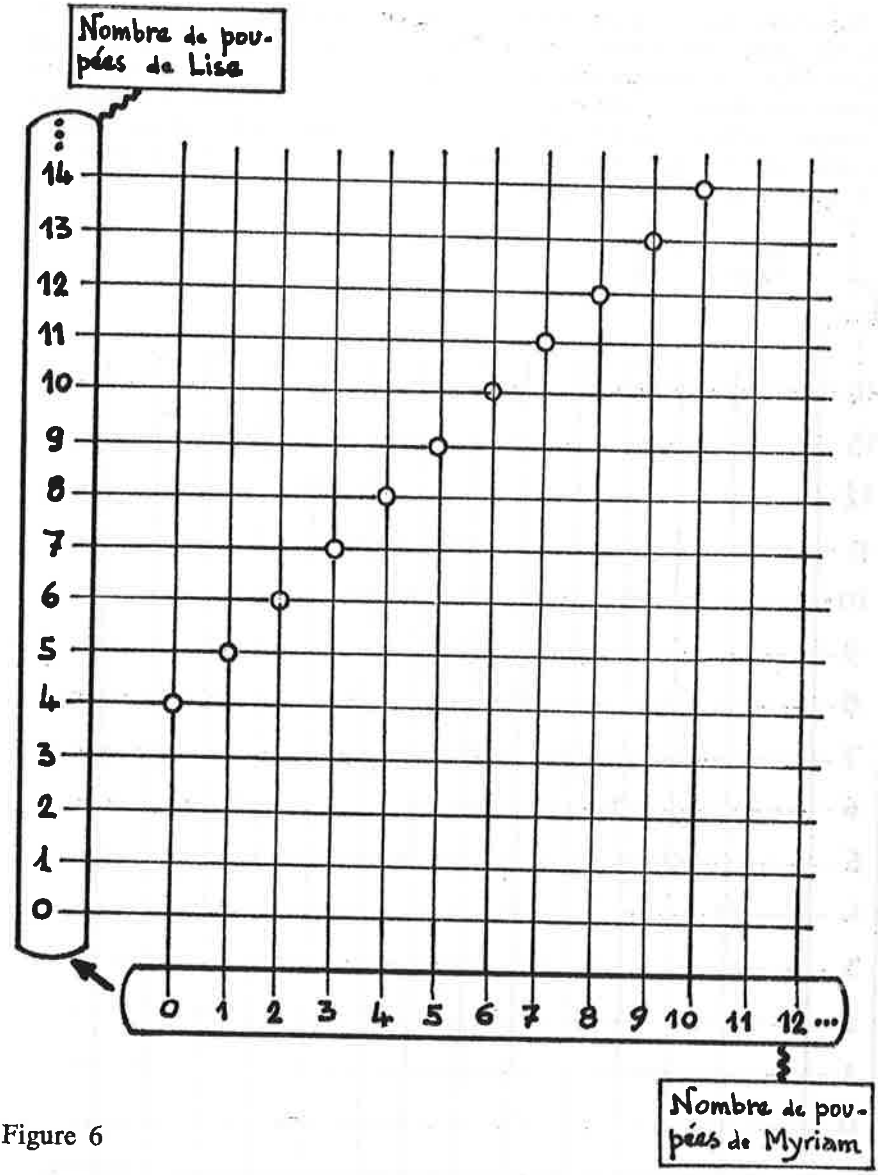


Figure 6

En fait, implicitement, on à résolu, dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ l'équation: $y - x = 4$, en donnant une représentation de l'ensemble de ses solutions.

Signalons un prolongement intéressant: en **superposant** les figures 5 et 6, l'une sur l'autre sur la vitre d'une fenêtre par exemple, on fait constater que le point (4,8) est commun aux deux diagrammes; on a en fait, par une manipulation très simple, résolu le petit problème: «Lise et Myriam ont ensemble 12 poupées et Lise en a 4 de plus que Myriam; combien de poupées chacune a-t-elle?», ou bien «La somme de deux nombres entiers est 12, leur différence est 4; quels sont ces deux nombres?»

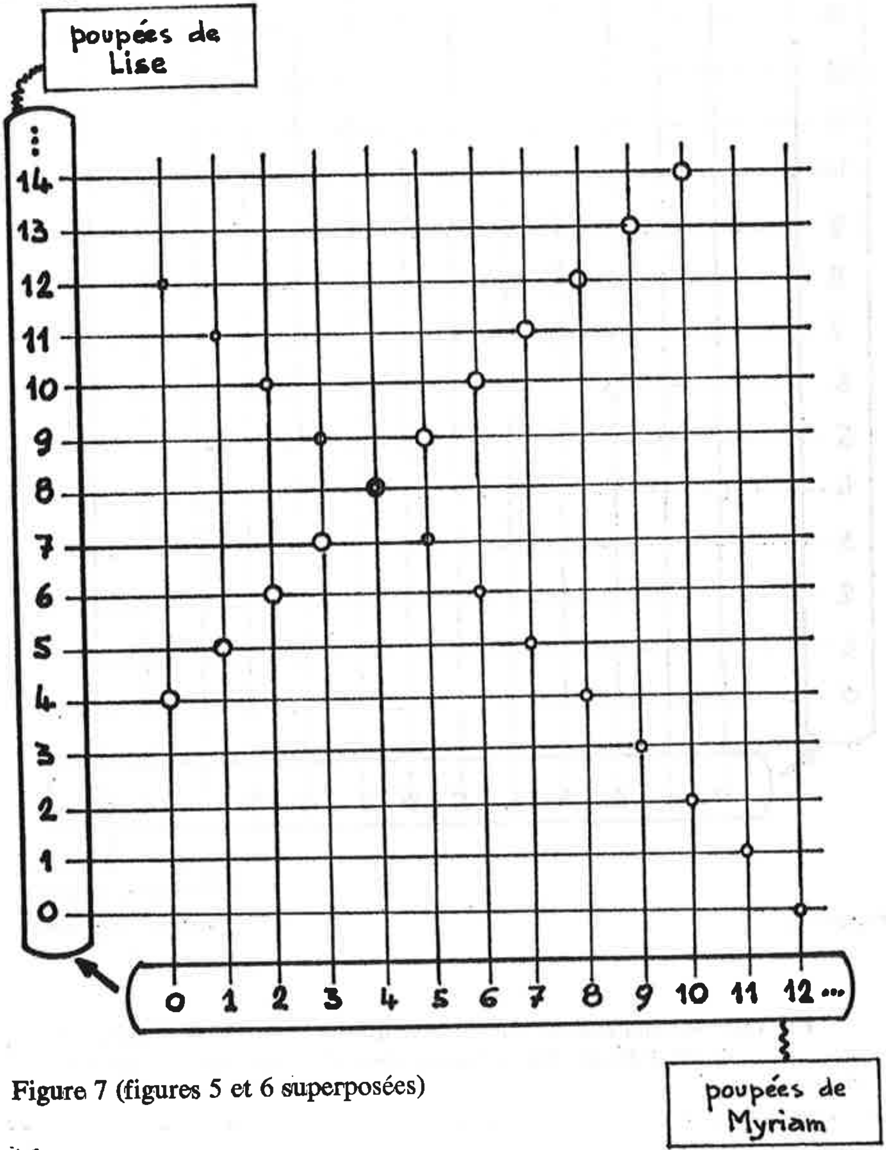


Figure 7 (figures 5 et 6 superposées)

Ou bien encore, si l'on veut, on a résolu le système linéaire:

$$y + x = 12$$
$$y - x = 4.$$

Etape 5

A un stade ultérieur, à la consigne **«compare»**, l'enfant pourra répondre en termes de **multiplication** et de **division** dans **N**; voici des réponses possibles, pour les six énoncés de départ:

— Myriam possède **3 fois plus** de poupées que Lise;
— le nombre de filles est **le tiers** du nombre de garçons;
— la salle est **deux fois plus** longue que large;
— le prix d'une paire de sandales est **le tiers** de celui d'une paire de souliers;
— il y a **trois fois moins** de deuxième choix que de premier choix;
— le piéton met **4 fois plus** de temps pour le même trajet.

Ces expressions verbales correspondent en fait aux schémas suivants, non explicités dans les réponses, et aux équations:

	Schémas	**Equations**
1.	$\boxed{4} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{12}$	$4 \,.\, \ldots = 12$
2.	$\boxed{21} \xrightarrow{:3} \boxed{7}$	$21 : \ldots = 7$
3.	$\boxed{6} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{12}$	$6 \,.\, \ldots = 12$
4.	$\boxed{39} \xrightarrow{:3} \boxed{13}$	$39 : \ldots = 13$
5.	$\boxed{75} \xrightarrow{:3} \boxed{25}$	$75 : \ldots = 25$
6.	$\boxed{3} \xrightarrow{\cdot 4} \boxed{12}$	$3 \,.\, \ldots = 12$

Les réponses sont à nouveau des **opérateurs.**

Nous estimons utile de remarquer ici que, pour une même situation, la comparaison peut s'exprimer par **quatre** formes verbales, correspondant à **deux** schémas; par exemple, pour l'énoncé 2:

a) Il y a **3 fois moins** de filles que de garçons;
b) le nombre de filles est **le tiers** de celui des garçons. $\boxed{21} \xrightarrow{:3} \boxed{7}$

a) Il y a **3 fois plus** de garçons que de filles;
b) le nombre de garçons est **le triple** de celui des filles $\boxed{7} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{21}$

Ces expressions verbales étant usuelles, il semble difficile de les réduire systématiquement à deux; pourtant, si le choix était possible dans la pratique scolaire, nous opterions pour b):

— au terme **«plus»** est liée l'idée d'une **augmentation**;

— au terme **«moins»** est liée l'idée d'une **diminution**;

et à un stade plus avancé, lors de l'usage des nombres à virgule (**Q_+**), il sera pour le moins maladroit de faire usage d'expressions telles que: **«0,25 fois plus»** — correspondant de fait à une **diminution!** — ou encore: **«3/4 fois moins»** — correspondant de fait à une **augmentation!**

Certains étonnements devant des blocages intellectuels ou des allergies à la mathématique doivent faire place à une autocritique...

Etape 6

Les deux affirmations (énoncé 1):

a) Myriam possède 8 poupées de plus que Lise;

b) Lise possède 8 poupées de moins que Myriam;

décrivent la même situation mais, dans les schémas correspondants, **les états sont intervertis et les opérateurs sont inversés** (addition et multiplication sont des opérations **inverses**):

a) $\boxed{4} \xrightarrow{+8} \boxed{12}$

b) $\boxed{12} \xrightarrow{-8} \boxed{4}$

Analogiquement, les deux affirmations (énoncé 2):

c) Le nombre de garçons est le triple du nombre de filles;

d) le nombre de filles est le tiers du nombre de garçons;

décrivent la même situation, **avec interversion des états et inversion des opérateurs** (la division étant l'opération inverse de la multiplication):

c) $\boxed{7} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{21}$

d) $\boxed{21} \xrightarrow{:3} \boxed{7}$

Des paires d'affirmations analogues peuvent être exprimées à partir des autres énoncés proposés. Nous ne le ferons pas ici, mais bien sûr il sera utile de multiplier les situations en classe.

Peut-être quelques enfants astucieux — et habitués à s'exprimer librement — feront remarquer que 21 : 7 = 3, **ce dernier nombre figurant dans les deux opérateurs...** Cette découverte est importante car nous pouvons alors introduire la notion de **rapport:** on propose à l'enfant une nouvelle lecture des schémas c) et d) qui illustrent, avons-nous dit, **la même situation:**

— **Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 3.**
Cette phrase doit aussi bien signifier pour l'enfant:

1. que le quotient du nombre de garçons par le nombre de filles est 3.

$$21 : 7 = 3$$

2. qu'on obtient le nombre de garçons en multipliant par 3 le nombre de filles;

$$\boxed{7} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{21}$$

3. qu'on obtient le nombre de filles en divisant par 3 le nombre de garçons.

$$\boxed{21} \xrightarrow{: 3} \boxed{7}$$

1. La première signification permet de définir, plus précisément:

On nomme rapport de deux nombres a et b, pris dans cet ordre, le quotient k du premier nombre par le second nombre.

$$\boxed{k = a : b}$$

On peut écrire aussi:

$$\boxed{k = \frac{a}{b}}$$

Pour fixer ce nouveau concept, on proposera aux enfants des problèmes tels que:
«Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 3; s'il y a 12 garçons, combien y a-t-il de filles?»
«Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 3; s'il y a 6 filles, combien y a-t-il de garçons?»
«S'il y a 24 garçons et 8 filles, le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est-il toujours 3?»
Sur le plan numérique, la compréhension de ces problèmes au niveau verbal conduira aux égalités lacunaires:

$$3 = 12 : \square \; ; \qquad 3 = \square : 6 \; ; \qquad \square = 24 : 8.$$

Nous pensons utile aussi d'intervertir les membres des égalités, le rapport apparaissant alors dans le membre de droite (symétrie de la relation d'égalité).

2. La seconde signification («on obtient le nombre de garçons en multipliant par 3 le nombre de filles») permet, à partir d'une suite de nombres **(filles)**, d'établir une autre suite de nombre **(garçons)**:

— **nombre de filles:** 1 2 3 4 5 6 7 ...
— **nombre de garçons:** 3 6 9 12 15 18 21 ...

Disposons ces deux suites de façon à mieux illustrer l'engendrement de la seconde par la première:

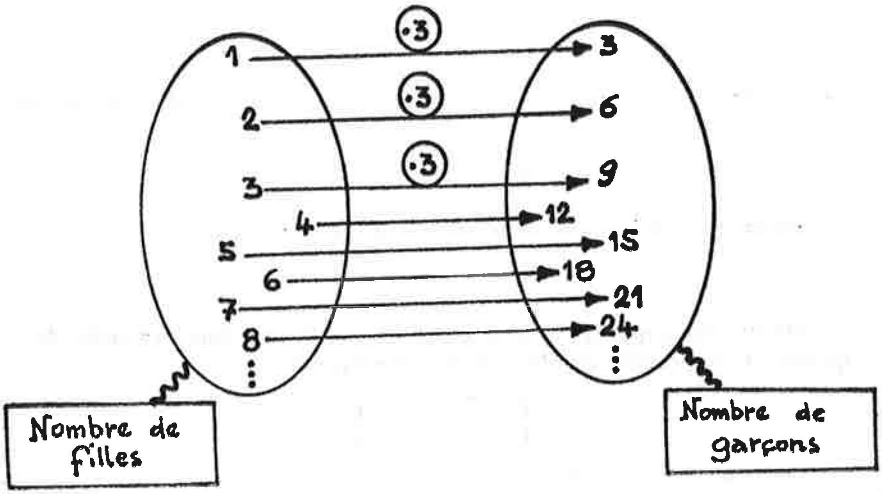


Figure 8

Chacun des nombres de la suite de droite est obtenu en multipliant le nombre qui lui correspond dans la suite de gauche par le facteur $\xrightarrow{\cdot 3}$ le terme **facteur** étant synonyme d'**opérateur multiplicatif.**

Les flèches, sur le diagramme, indiquent cette correspondance.

Chaque fois qu'une telle situation se présente, on dit que la seconde suite (celle de droite) de nombres est proportionnelle à la première suite (celle de gauche) de nombres.

L'opérateur multiplicatif (ici $\xrightarrow{\cdot 3}$ porte le nom de facteur de proportionnalité.

Autrement dit, en modifiant les étiquettes des ensembles: la suite des **multiples de 3** est proportionnelle à la suite des **nombres naturels,** et le facteur de proportionnalité est $\xrightarrow{\cdot 3}$.

> Autrement dit encore, chaque table du traditionnel **livret** — tel qu'il figure encore à la dernière page de couverture de certains cahiers bleus d'écoliers — présente deux suites proportionnelles de nombres...

Voici quelques types de problèmes destinés à fixer la notion de proportionnalité:

a) deux suites ordonnées sont proposées; trouver le facteur de proportionnalité;

b) deux suites sont proposées, mais en désordre; établir la correspondance, déterminer le facteur de proportionnalité;

c) remplacer les lettres par les nombres adéquats dans les diagrammes:

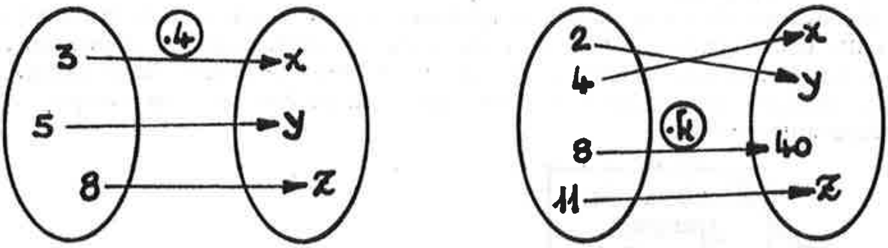
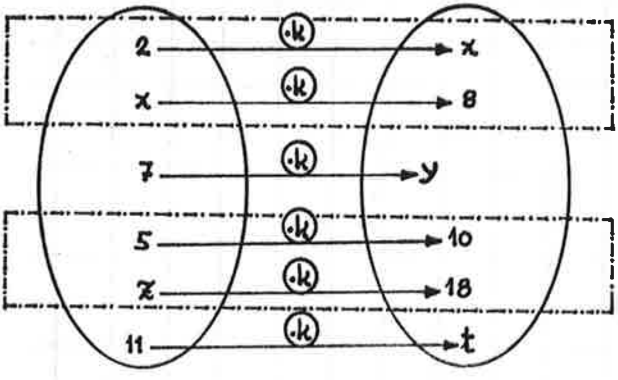


Figure 9

d) constituer, librement, des suites proportionnelles.

Notons, en passant, que deux problèmes traditionnels: calcul de «la quatrième proportionnelle», calcul de «la moyenne proportionnelle» ne sont que des **sous-problèmes,** comme le montre le diagramme suivant, où l'on remplacera les lettres par les nombres adéquats:



«moyenne proportionnelle», ou aussi: «moyenne géométrique».

«quatrième proportionnelle»

Figure 10

3. La troisième interprétation de la phrase:
Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 3
est évidemment liée à la notion d'**opérateur inverse.**
Dire qu'on obtient le nombre de filles en **divisant par 3** le nombre de garçons, c'est aussi dire qu'on obtient le nombre de garçons en **multipliant par 1/3** le nombre de filles. Nous reviendrons sur ce thème un peu plus loin.

Etape 7

Ayant auparavant construit des diagrammes (figures 5, 6, 7) pour des situations additives ou soustractives, nous pensons que l'enfant sera tout naturellement enclin à faire de même à partir des suites de la figure 8.

Il dressera d'abord une liste de couples: (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), ...

Il observera que la liste ne finit pas; il obtiendra des couples surprenants, s'il aime les grands nombres, tels que: (315,945), (1230,3690)... Pour avoir «beaucoup» de points dans le diagramme, se pose la question de la distance entre deux nœuds voisins du réseau, à choisir judicieusement, et puis aussi la question d'échelles différentes suivant les deux directions. Sans indiquer de stratégie, nous pensons possible que l'enfant découvre, ou accepte, un diagramme tel que:

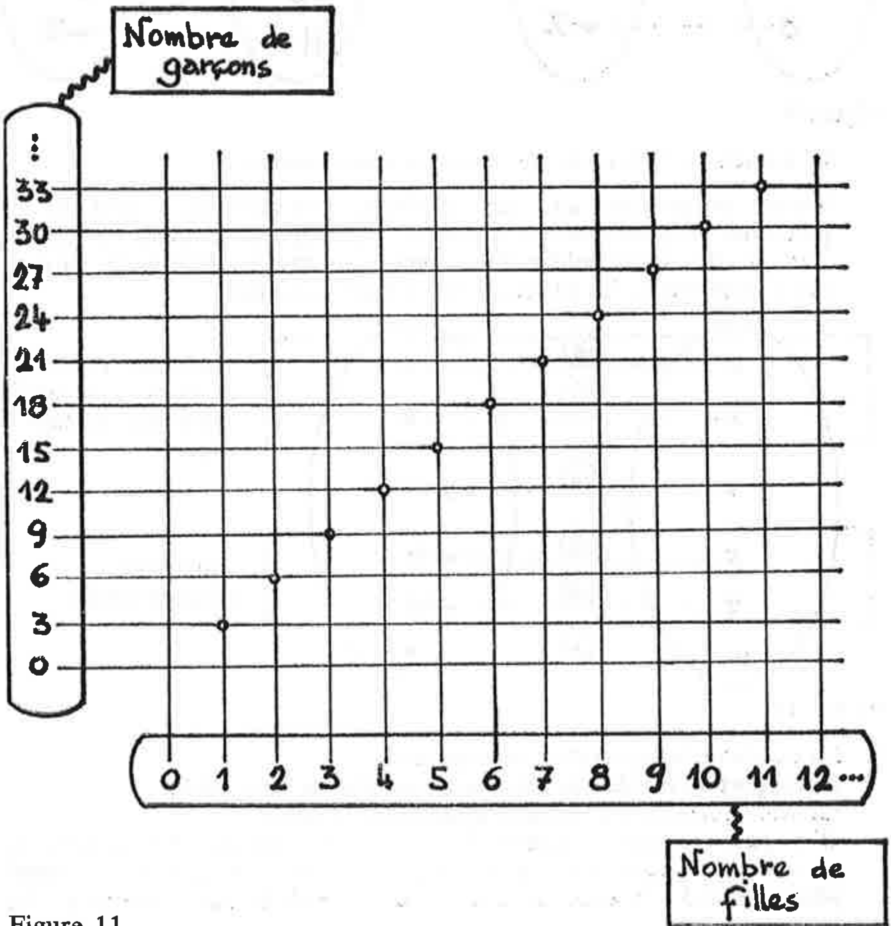


Figure 11

Les points, de nouveau, s'alignent sur une demi-droite. A nouveau, comme à l'étape 3 ou à l'étape 4, on exercera l'enfant aussi bien dans le sens **couple-diagramme** que dans le sens **diagramme-couple.**

Les autres énoncés, modifiés d'une manière analogue:

— **le rapport du nombre de poupées de Myriam à celui de Lise est 3;**

— **dans un ensemble d'enfants, le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 5;**

— **le rapport de la longueur à la largeur d'un rectangle est 6;**

etc., permettent le même type d'étude.

Après quelques diagrammes de ce genre, un élève remarquera que toutes les demi-droites passent par (0,0): ce couple est-il à admettre dans les listes?

Il faut répondre OUI, car:

— en multipliant 0 par un nombre, on trouve toujours 0;

— en divisant 0 par un **autre** nombre, on trouve toujours 0.

Mais ATTENTION! Le symbole 0 : 0 est dépourvu de sens; c'est une **indétermination:** du couple (0,0), on ne peut déduire la valeur numérique du rapport.

> Toute l'étude numérique faite ci-dessus revient en fait à résoudre, dans **N** $\times$ **N**, l'équation: $y = 3 \cdot x$, en donnant une représentation de l'ensemble de ses solutions.

Etape 8

Un énoncé synthétique tel que: **le rapport des prix de deux marchandises est 4** signifie:

Le rapport du prix d'une marchandise à celui d'une autre marchandise est 4. Autrement dit, on obtient le prix de l'une en multipliant par 4 le prix de l'autre; dans cette dernière phrase, il faut relever que la **première** composante est le **«prix de l'autre»:** On obtient les couples:

(1,4), (2,8), (3,12), (4,16), (5,20), (6,24), ...

On peut aussi signaler le couple (0,0), avec la réserve formulée plus haut.

Ici encore, pour s'assurer que les enfants ont bien réalisé la signification de cet énoncé, on leur proposera des questions telles que:

«Si la première marchandise («l'autre») coûte 7 F, que coûtera la seconde?»

$$\boxed{7} \xrightarrow{\cdot 4} \square \; ; \quad 7 \cdot 4 = \square$$

«Si la seconde marchandise coûte 32 F, que coûtera la première?»

$$\square \xrightarrow{\cdot 4} \boxed{32} \; ; \quad \square \cdot 4 = 32$$

«Le couple (5,20) figure-t-il dans la liste?»

— Oui, car: $5 \cdot 4 = 20$.

«Ecrire une liste de couples.»

«Faire un diagramme cartésien; y lire un élément d'un couple, lorsque l'autre est proposé; lire les deux éléments d'un couple, dans l'ordre convenu, à partir d'un point du diagramme.»

> Tout ce découpage, patient, nous semble absolument nécessaire; les blocages, dans les résolutions de «problèmes», sont souvent, sinon toujours, dus à une non-compréhension du langage, écrit ou parlé. Il y aurait, pour un psychologue de la connaissance, une belle étude à entreprendre, simplement en parcourant certains manuels destinés aux enfants et en analysant la forme, si souvent alambiquée, donnée aux énoncés.

Prolongements

1. Toute l'étude conduite dans les étapes précédentes peut être reprise, *mutatis mutandis* et en temps voulu, avec des **nombres à virgule** pour les **états.**

   Notons au passage que l'habitude de calculer dans diverses bases de numération est une aide puissante à la compréhension de tels nombres. Bien entendu, les énoncés 1 et 2 ne se prêtent pas à ce prolongement.

2. On peut se demander si un énoncé tel que: **dans une classe, le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est 4/3,** peut être étudié de façon analogue (étapes 7 et 8).

   La réponse est affirmative, mais nous estimons que cette recherche, en visant à une compréhension effective de la part des enfants, est prématurée au moins pour les quatre premières années primaires. Au-delà, on pourra utiliser le tremplin des **«machines à multiplier ou à diviser»,** imaginées par Z. P. Dienes et N. Picard.[1] Voici, résumées, les étapes conduisant à la **«machine fractionnaire»;** nous nous limitons à la notation: état-opérateur-état.

   a) **multiplication dans N** $\boxed{36} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{108}$

   b) **division dans N** $\boxed{108} \xrightarrow{:4} \boxed{27}$

[1] Z. P. Dienes, Opérateurs multiplicatifs, OCDL 1968.
N. Picard, Journal de mathématique II-2 CM-2, OCDL 1970, pp M 36-40.

c) **machine «qui ne fait rien»**

$$\boxed{36} \xrightarrow{\cdot 1} \boxed{36}$$
$$\boxed{36} \xrightarrow{:1} \boxed{36}$$

d) **composition de machines et réduction**

— La séquence $\xrightarrow{\cdot 3}\ \xrightarrow{\cdot 1}$ est **équivalente** à $\xrightarrow{\cdot 3}$;

— La séquence $\xrightarrow{\cdot 3}\ \xrightarrow{:1}$ est **équivalente** à $\xrightarrow{\cdot \frac{3}{1}}$;

— La séquence $\xrightarrow{\cdot 1}\ \xrightarrow{:4}$ est **équivalente** à $\xrightarrow{\cdot \frac{1}{4}}$;

— Dans une séquence de machines à multiplier et à diviser, on peut modifier l'ordre des machines.

e) **machine fractionnaire** (N. Picard, op. cit.)

la séquence $\boxed{36} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{108} \xrightarrow{:4} \boxed{27}$

est **équivalente** à la machine fractionnaire

$$\boxed{36} \xrightarrow{\cdot \frac{3}{4}} \boxed{27}$$

Par exemple, la correspondance de la figure 8 peut aussi être définie de l'ensemble (3, 6, 9, 12, ...) vers l'ensemble (1, 2, 3, 4, ...), en inversant le sens des flèches, et en inversant l'opérateur:

La suite: 1, 2, 3, 4, 5, ... est proportionnelle à la suite: 3, 6, 9, 12, 15, ...

et le facteur de proportionnalité est $\xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}}$.

Autre exemple: les problèmes proposés par la figure 9 peuvent être prolongés comme suit:

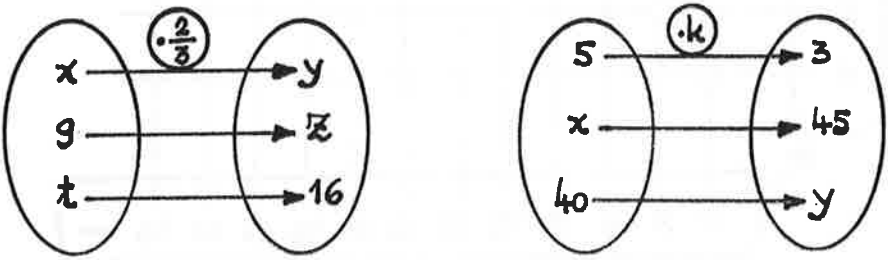


Figure 12

Tout au long de cette progression, **les états sont des nombres de N.** L'énoncé proposé en tête de ce paragraphe impose du reste cette situation. Une recherche des couples possibles, pour cet énoncé, conduira au diagramme cartésien suivant:

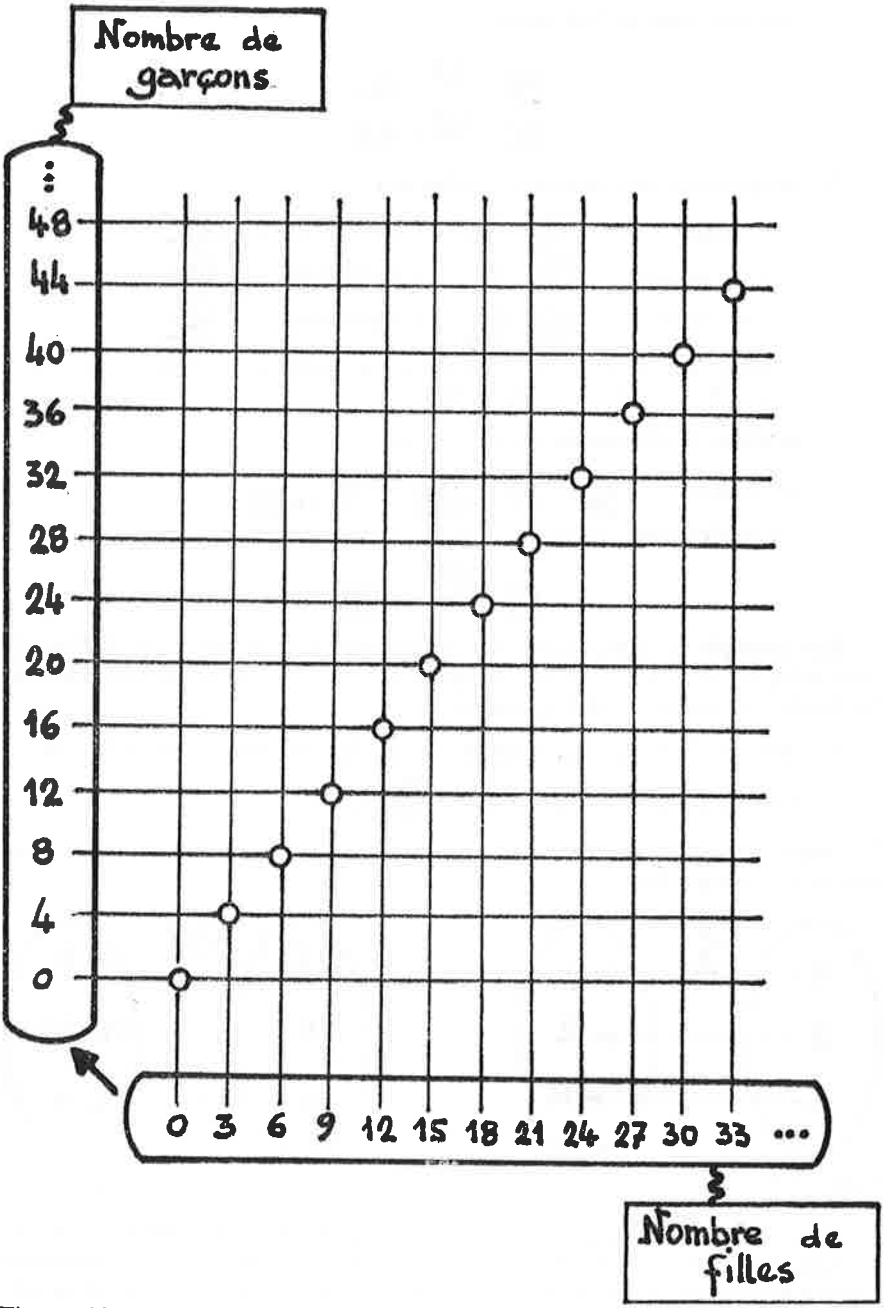

Nombre de garçons
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 ...
Nombre de filles

Figure 13

Etapes suivantes

Dans les étapes précédentes, ou bien les énoncés ne comportaient que des grandeurs de même espèce et mesurées avec la même unité, ou bien les exercices étaient purement numériques.

D'une part, il faut aider les élèves à prendre conscience que, pour comparer avec profit des grandeurs de même espèce (distances, prix, masses, temps, etc.), on doit les mesurer avec la même unité avant d'établir le rapport des **nombres** qui interviennent dans leurs mesures. Il y a ici une stratégie d'apprentissage à définir, que nous ne mentionnons que pour mémoire dans cet exposé.

D'autre part, deux suites proportionnelles peuvent être issues de couples dont les premières composantes sont des nombres qui mesurent une grandeur, et dont les secondes composantes sont des nombres qui mesurent une grandeur d'une autre espèce.

Le couple (2,6) peut être issu, par exemple, de l'un des énoncés suivants:
— 2 petites voitures coûtent 6 F,
— j'échange 2 sucettes contre 6 caramels,
— il faut payer 2 F pour 6 montées en télésiège,
— en 2 h, un escargot a parcouru 6 m, etc.

On dit alors respectivement que:
— le **prix** payé est proportionnel au **nombre** de voitures achetées,
— le **nombre de caramels** est proportionnel au **nombre de sucettes**,
— le **nombre** de montées est proportionnel au **prix**,
— la **distance** parcourue est proportionnelle au **temps**, etc.

L'analyse de ces situations donne lieu à une étude numérique calquée sur celle conduite aux étapes 6 et 7.

Remarques finales

1. La traditionnelle **«règle de trois»** est envisagée ici sous un aspect rajeuni: une brève réflexion concernant le sous-problème de «quatrième proportionnelle» (figure 12), en convaincra le lecteur.
2. On peut, sans risques, considérer que les termes **«proportionnalité»** et **«linéarité»** sont des synonymes: se donner deux séries proportionnelles de nombres, c'est définir une application linéaire. Par exemple, la figure 9 est le diagramme de l'application linéaire:

$$f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}, \qquad x \longmapsto \frac{4}{3}\,x$$

Le terme «linéarité» tend, dans les ouvrages récents, à se substituer à l'autre terme.

3. **Diagrammes «en escalier»**

Voici **un** exemple de situation différente:

Mon épicier vend des bonbons à 5 c la pièce; pour le prix de 6 bonbons, il m'en donne un 7e. Etablir une liste de couples: (nombre de bonbons, prix en c).

Le début de la liste, ordonnée, est:

(0,0), (1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25), **(6,30)**, **(7,30)**, (8,35), ... (11,50), (12,55), **(13,60)**, **(14,60)**, ...

Les couples, figurés dans un diagramme cartésien, ne seront plus alignés sur une demi-droite; il y aura des paliers.

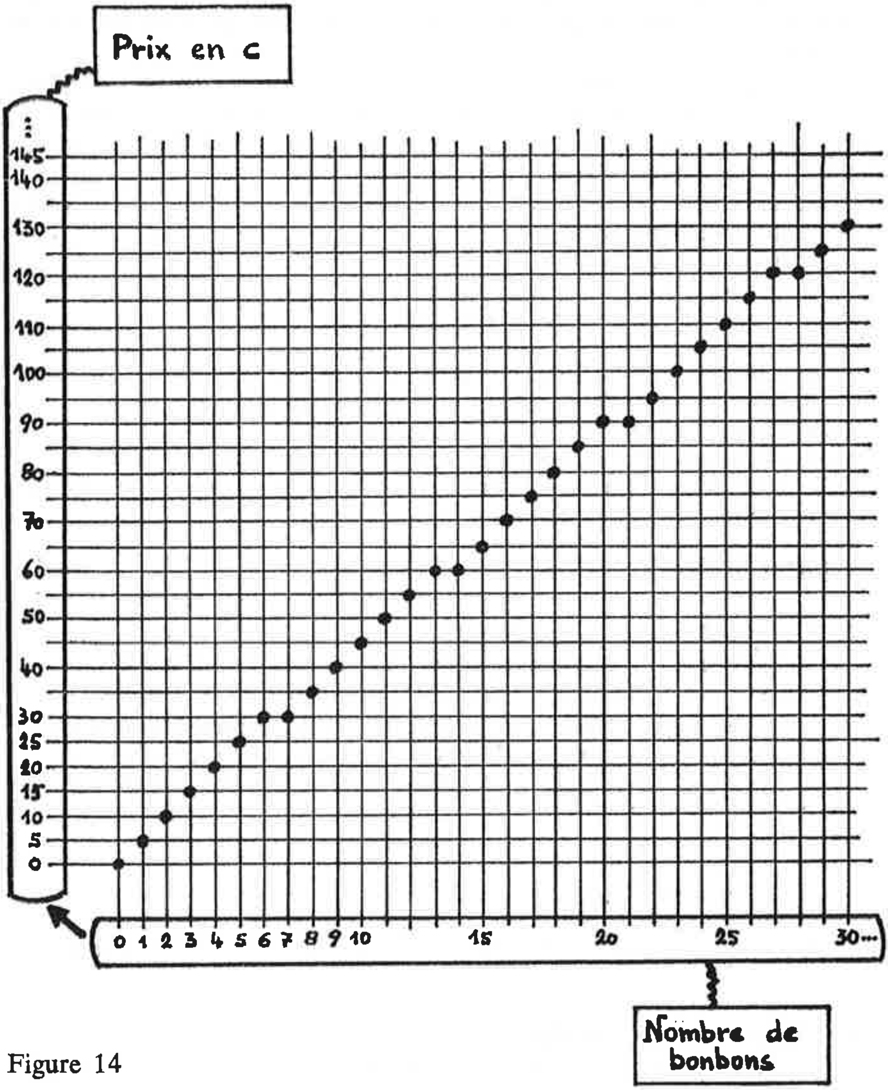


Figure 14

Cette situation particulière présente l'intérêt critique de tout contre-exemple.

4. Une foule de situations de la vie courante, et suscitant par conséquent l'intérêt aussi bien des futurs apprentis que les étudiants secondaires et de tout adulte, relèvent de la notion de proportionnalité: son introduction, pédagogiquement graduée, dans nos classes primaires, permet de déboucher à la fois sur une utilisation pratique et sur un élément important de culture mathématique.

5. Un prochain numéro de MATH-ECOLE, dont le thème sera «Le problème à l'école primaire», sera par certains aspects une suite au présent exposé.

Comité de rédaction:

Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, F. Oberson, L. Pauli, S. Roller, rédacteur.

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).

Rapports et réglettes Cuisenaire

Un rapport est la mise en relation de deux grandeurs de même espèce dont l'une est le mesurant de l'autre. D'où ces trois termes: le mesuré, le mesurant et la mesure (ou le rapport).

L'ensemble des réglettes permet de constituer des couples (deux réglettes côte à côte, l'une au-dessus de l'autre) et ceux-ci peuvent se classer de la manière suivante:

1. **Les deux réglettes sont de même longueur**

   $\frac{\text{rouge}}{\text{rouge}}$; $\frac{\text{marron}}{\text{marron}}$

   Si on admet que la réglette mesurante vaut 1, le rapport ici est 1 dans les deux cas.

2. **La réglette mesurante est plus petite que la réglette mesurée.**

   2.1. Elle entre un nombre exact de fois dans la réglette mesurée

   $\frac{\text{vert foncé}}{\text{rouge}}$; $\frac{\text{marron}}{\text{carmin}}$

   Le rapport est alors un nombre entier; dans l'exemple ci-dessus: **3; 2.**

   2.2. La réglette mesurante n'entre pas un nombre exact de fois dans la réglette mesurée

   $\frac{\text{vert foncé}}{\text{carmin}}$; $\frac{\text{orange}}{\text{marron}}$

   Le rapport est une fraction.

   Ici: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$

3. La réglette mesurante est plus grande que la réglette mesurée.

   3.1. Cette dernière entre un nombre exact de fois dans le mesurant

   $\frac{\text{rouge}}{\text{marron}}$; $\frac{\text{vert clair}}{\text{bleu}}$

   Le rapport est une fraction, numérateur 1.

   Ici: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$

   3.2. La réglette mesurée n'entre pas un nombre exact de fois dans le mesurant

   $\frac{\text{vert clair}}{\text{jaune}}$; $\frac{\text{carmin}}{\text{vert foncé}}$

   Le rapport est une fraction; numérateur plus grand que 1:

   $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$

* * *

Un couple étant posé et son rapport établi, trouver des couples équivalents (même rapport):

$$\frac{\text{blanc}}{\text{rouge}} = \frac{\text{rouge}}{\text{carmin}} = \frac{\text{vert clair}}{\text{vert foncé}} = \frac{\text{carmin}}{\text{marron}} = \frac{\text{jaune}}{\text{orange}};$$

Le mesuré et le rapport étant donnés, trouver le mesurant

$$\frac{\text{vert clair}}{?} = \frac{1}{2}$$

La réglette vert clair est la moitié d'une autre réglette. De laquelle? De la réglette vert foncé.

Le mesurant et le rapport étant donnés, trouver le mesuré

$$\frac{?}{\text{vert foncé}} = \frac{2}{3}$$

Quelle est la réglette qui vaut les $\frac{2}{3}$ de la vert foncé?

Réponse: la réglette carmin.

S. R.

A propos des schémas

J. J. Dessoulavy, dans son article sur **La mathématique et les problèmes** (Math-Ecole 45, p. 7) concluait ainsi: «Cette manière de procéder (cet emploi des schémas) est-elle bénéfique?

Permet-elle réellement de la part des enfants une meilleure compréhension? Il faut se poser la question. Tout procédé nouveau — ici la séquence schéma-équation — peut se dégrader en stéréotype. L'enfant, toujours docile, trop docile souvent, l'adopte et étant parvenu à s'y installer vaille que vaille, peut cependant n'avoir pas encore compris le problème qu'on lui soumet. D'où cette conclusion: essayer le procédé, demeurer vigilant et ne jamais s'en tenir à une seule manière de faire.»

Voici, en écho, des remarques que nous fait tenir Arnurf Schircks qui fut, pendant quelques années, collaborateur de Bertrand Schwartz à l'INFA (Institut national pour la formation des adultes) de Nancy:

« Je suis d'accord avec vous sur le danger que peut représenter l'apprentissage de schémas, notamment chez l'enfant. D'une manière générale je dirais que **tout** support pédagogique devenu mécanique, obligatoire, aveugle ou imposé ne peut porter en lui-même le germe propre à favoriser le développement des opérations, lesquelles ne fonctionnent que par **interaction** entre le milieu et le sujet. Si le schéma devient un stéréotype, un procédé, il ne fait pas partie d'un système d'ensemble dans lequel sont coordonnées les actions de l'individu mais au contraire, il appartient encore au monde extérieur. Quelques réflexions mériteraient une discussion approfondie:

a) La diversité des schémas pendant l'apprentissage: un schéma pour plusieurs situations, plusieurs schémas pour une même situation.

b) La découverte ou l'élaboration personnelles de schémas pendant l'apprentissage.

c) La réversibilité: le passage du schéma à l'action et de l'action au schéma.
d) La méthode «classique» comme moyen de contrôle et d'apprentissage: contre-épreuves, contre-suggestions...
e) Aller au-delà: passage du schéma au langage (schéma $\rightleftarrows$ expression).

Publication récente

J.-J. Dessoulavy, **«Calcul mental rapide»,** cahiers 1, 2, 3, 4 et 5 accompagnés d'une **«notice d'emploi»**. La Tour-de-Peilz, Editions Delta S.A., 1970.

Depuis plusieurs années, Jean-Jacques Dessoulavy, maître de méthodologie de la mathématique aux Etudes pédagogiques de Genève, s'était fait une spécialité de l'enseignement du calcul mental. Il était en cela le fidèle disciple de Maurice Béguin, l'inspecteur genevois, dont chacun a apprécié jadis les fiches de calcul sur les fractions ainsi que sa méthodologie du calcul mental. On aurait pu croire que l'enseignement de la mathématique nouvelle aurait détourné Jean-Jacques de son intérêt pour le calcul mental, comme si ce dernier devait perdre de son importance pour les écoliers et pour les adultes. Il n'en est rien. L'auteur, il y a quelques années, avait procédé à un sondage d'opinion pour voir la place qu'accordaient au calcul mental les employeurs, ceux de l'industrie, ceux de la banque et ceux du commerce. Le résultat avait été net: le calcul mental est important dans toutes ces branches, même dans les bureaux où l'on dispose de machines à calculer. On se trouve ainsi en présence d'un besoin sociologique auquel il faut répondre. C'est ce qui amène Jean-Jacques Dessoulavy à proposer aux enseignants et surtout aux élèves des cahiers d'entraînement qui rendront les plus grands services.

Signalons tout d'abord qu'il est admis que les élèves auront maîtrisé les tables d'addition et de multiplication au moyen des exercices qui relèvent de la mathématique moderne: ils auront construit leurs tables. Ce premier travail achevé, un entraînement à la rapidité peut intervenir. C'est ici que les cahiers de Dessoulavy entrent en action. Ils présentent des calculs fort bien gradués allant des additions simples aux multiplications et permettent aux enfants de travailler de manière individuelle. Le système de l'auto-correction est à l'honneur ainsi que les contrôles périodiques au moyen de tests qui permettent à l'enfant de s'évaluer lui-même en établissant le graphique de sa progression.

Voilà un nouvel outil qui sera le bienvenu dans un grand nombre de classes et auquel il n'est pas nécessaire de prédire le succès. On souhaitera que l'auteur puisse un jour se livrer à une modeste expérimentation afin d'étudier l'efficacité de ses cahiers selon certaines variables: l'âge, le sexe ou le milieu socio-économique des enfants. Il serait bien intéressant aussi qu'il nous montre la persévérance dont peuvent faire preuve les enfants, car ses cahiers, si attrayants soient-ils, demandent un effort soutenu qu'il est difficile d'obtenir de chacun. Si enfin ces cahiers pouvaient servir à discipliner les enfants, ils auraient ainsi une valeur supplémentaire non négligeable.

S. R.