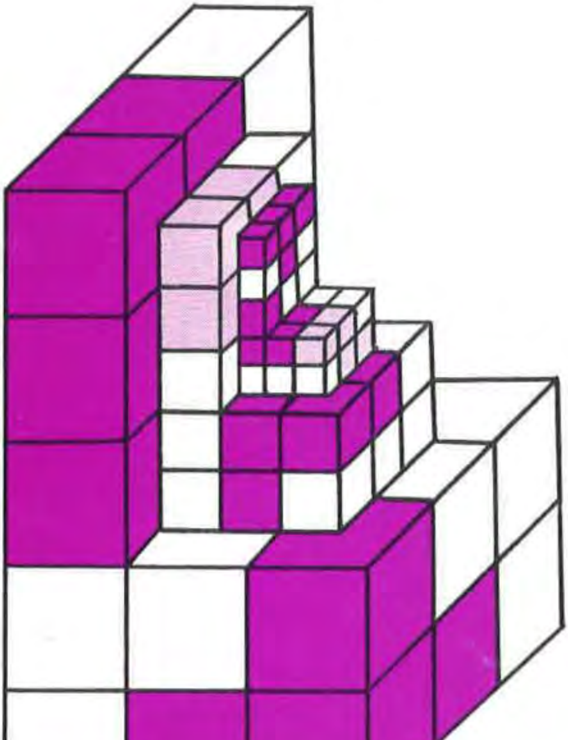
112



MATH ECOLE

MARS 1984
23e ANNÉE

MATH-ECOLE 112
23e ANNEE Paraît cinq fois par an MARS 1984

Editorial

Mathématique au Mali

Problème: *Dans une famille de 11 enfants, le plus petit a 6 ans. Quel est l'âge du plus grand s'il y a 2 ans entre les enfants?*

Objectifs de la leçon: – apprendre à compter de 2 en 2, c'est-à-dire exprimer les nombres en français et faire acquérir la notion de comptage par ordre croissant et décroissant.

Cela se passe dans une classe du Mali. 80 (quatre-vingts comme ils disent) enfants de 2e année primaire. Ils sont serrés, trois par table. Chacun a son petit matériel: une ardoise et un morceau de craie. Matériel collectif: des bâtonnets.

Le problème est écrit au tableau noir; il est lu par le maître et par quelques élèves qui savent bien lire. Onze enfants sont appelés à tour de rôle et alignés devant la classe par ordre de grandeur. Ils vont illustrer le problème et faciliter sa compréhension. Le plus petit accepte de jouer le rôle de l'enfant de 6 ans. Puis chaque enfant tente d'imaginer l'âge qu'il devrait avoir. Un camarade répète les âges. Le maître écrit au tableau noir (c'est le mur de la classe peint en noir) la série des nombres découverts. Tous en chœur, mais sans chahuter, les élèves répètent la série par ordre croissant et par ordre décroissant.

Les applications consistent à écrire sur l'ardoise la série complète, depuis zéro. Le contrôle est effectué selon le procédé cher à La Martinière: lever l'ardoise et c'est le verdict du maître: bien! mal! D'autres applications suivent: des séries lacunaires préparées par le maître au tableau noir. Et pendant ce temps, les enfants qui ont quelques difficultés sont pris à part, manipulent des bâtonnets, comptent et recomptent...

Ce fut une belle leçon. Les enfants travaillaient, étaient attentifs, cherchaient à savoir les mots en français (car ils arrivent à l'école sans savoir cette langue; la leur est le bambara), répétaient, levaient la main, voulaient participer, voulaient apprendre.

Leçon de modestie pour nous, enseignants nantis, dans des classes envahies de matériel, avec une vingtaine d'élèves. Et je me suis posé la question: – Comment aurais-je fait en face de ces 160 yeux qui voulaient comprendre, de ces mains claquant des doigts qui appelaient pour répondre, de ces 80 enfants qui voulaient exprimer leur savoir?

Françoise Waridel

A propos de l'écriture décimale

par J. Brun, J.-M. Giossi et A. Henriques

I. Introduction

Si l'enfant construit la notion de nombre grâce à sa propre activité mentale, son entourage social non seulement le stimule dans cette construction mais lui offre de surcroît un apport que l'on ne peut ignorer: les noms des nombres, les numéraux et leur écriture, les signes numériques. Il y a quelques décennies les parents et les instituteurs donnaient une grande importance au fait que le petit enfant sache réciter la comptine. L'apprentissage de la suite des noms des nombres était considéré comme la base de l'apprentissage de l'arithmétique. On avait, bien entendu, exagéré son importance. La psychologie de l'enfant a mis en évidence que les symboles et les signes, verbaux ou écrits, ne constituent pas le concept. Au contraire, c'est l'élaboration de ce dernier par le sujet qui donne aux symboles et signes leur signification. La comptine perd alors son auréole. De nouvelles exagérations n'ont pas tardé à apparaître. On niait toute valeur cognitive à l'apprentissage de la suite des numéraux. Nous avons même rencontré un instituteur qui ne voulait pas que sa propre fille apprenne à compter. Il voulait qu'elle construise le concept de nombre en manipulant des objets concrets, et ensuite, il lui enseignerait les noms des nombres.

Nous sommes aujourd'hui à la recherche d'un juste milieu. Il est admis que la construction du concept est élaborée par l'enfant lui-même et qu'aucun adulte ne peut le faire à sa place. D'autre part l'humanité, tout au long de son histoire, a mis au point des systèmes de communication et de représentation. Les plus pratiques et les plus performants ont été sélectionnés et les générations se les sont transmis. Les numéraux et l'écriture numérique en sont deux exemples dont la valeur ne doit point être sous-estimée. Plus l'enfant y est initié tôt, mieux c'est. Si la comptine est proposée aux enfants par leur entourage relativement tôt, l'écriture et les symboles numériques leur sont proposés un peu plus tardivement, vers 6-7 ans. Les chiffres de 1 à 9 ne posent pas de problèmes particuliers. Les enfants de cet âge apprennent facilement à les reconnaître, à les écrire et à y faire correspondre la quantité correcte. Par contre, lorsque deux chiffres sont utilisés pour représenter la suite des nombres de 10 à 99 les enfants rencontrent de sérieux problèmes pour comprendre la signification de chacun des deux signes, signification qui dépend de sa position respective. Par exemple, la signification du chiffre 2 dans 12 et 24 n'est pas la même. Dans le premier cas, il signifie deux unités tandis que dans le deuxième cas il représente deux dizaines.

L'écriture de position est indéniablement très commode pour celui qui l'a comprise. Mais la majorité des enfants jusqu'à 8-9 ans et un grand nombre encore jusqu'à l'âge de 10 ans a beaucoup de peine pour la comprendre. Ceci se répercute dans la maîtrise de la retenue et plus tard des décimales. Tous les enseignants de l'école primaire ont bien entendu constaté ces difficultés et ont inlassablement expliqué à leurs élèves comment il faut faire pour que l'algorithme de l'addition ou de la multiplication ainsi que celui des deux autres opérations fonctionne lorsqu'il y a retenue. Mais malheureusement leurs explications sont reçues par les enfants le plus souvent comme des «trucs». Par exemple, dans l'addition suivante

$$\begin{array}{r} 176 \\ \underline{+\ 298} \end{array}$$

les enfants ne comprennent pas pourquoi la première retenue représente une dizaine et la deuxième une centaine. Si le résultat de l'opération est correct c'est plus comme une recette qui a réussi indépendamment du mérite du cuisinier.

Plusieurs chercheurs, Perret et Kamii entre autres, ont essayé de comprendre en quoi consistaient les difficultés des enfants pour saisir la signification de l'écriture de position. Le travail que nous présentons ici est une modeste contribution à l'élucidation de ce problème. Avoir plus d'information sur la manière dont les enfants interprètent l'écriture de position nous suggérerait peut-être des idées pour mieux expliquer à nos élèves la signification conventionnelle de cette écriture.

II. La tâche proposée

Nous avons interrogé 21 enfants de première et deuxième primaire âgés entre 6 ans et 5 mois et 8 ans et 7 mois. Ils appartenaient à deux écoles, une fribourgeoise et l'autre genevoise [1]

En un premier temps nous avons proposé aux enfants un à un des cartons sur lesquels étaient inscrits en gros caractères des nombres comme 4, 5, 8, 12, 14... Les enfants devaient dire leurs noms et disposer à côté du carton la quantité de jetons correspondante. Ensuite, nous avons demandé aux enfants de donner les jetons correspondant à chacun des deux chiffres composant le 12/14... La tâche proposée consistait donc pour l'enfant à représenter à l'aide de jetons la quantité signifiée par chacun des deux chiffres composant le 12, le 14 etc.

Pour réussir cette tâche il faut que l'enfant garde à l'esprit le total représenté par le signe numérique et qu'il utilise le concept de la dizaine, puisque de par sa position le 1 doit recevoir dix jetons et le 2 deux jetons.

III. Les conduites observées

Les enfants n'ont pas de problèmes à nommer correctement les différents nombres que l'expérimentateur leur présente, ni à leur attribuer la quantité correcte

[1] Nous remercions les enseignants qui nous ont accueilli si gentiment dans leurs classes.

de jetons correspondants. Ainsi ils donnent onze jetons au 11, douze au 12 et ainsi de suite. Mais lorsque l'expérimentateur leur propose de donner les jetons qui reviennent au premier signe numérique et ceux qui reviennent au deuxième signe numérique séparément, les choses se compliquent. On a alors observé les conduites suivantes:

Conduite A

Les enfants donnent un jeton au 1 du 12 et deux jetons au 2; ou encore, un jeton au 1 du 17 et sept jetons au 7. Il en va de même pour les autres nombres, comme le 11, le 14 etc.

Parmi les 21 enfants avec lesquels nous nous sommes entretenus, 12 ont adopté cette conduite.

Voici deux exemples:

Exemple 1. Laurent, 8 ans et 7 mois.
(après avoir mis onze jetons pour le nombre 11)

- J'aimerais que tu donnes les jetons en deux tas séparés. Un tas pour ce signe ici (le premier 1 du 11) et un tas pour ce signe ici (le deuxième 1 du 11).
- (Laurent donne un jeton à chaque signe).
- Ça fait combien de jetons?
- Deux.
- Avant tu avais donné combien?
- Onze.
- Deux ce n'est pas onze? ...
- Non.
- Comment faire pour en avoir 11?
- Il faut en donner plus.
- Combien il faudrait en donner encore?
- (il calcule) Encore 9.
  (...)

Exemple 2. Sébastien, 7 ans et 5 mois.
(il donne 11 jetons pour le nombre 11)

- On va donner séparément des jetons à chacun des signes.
- Un ici et un là (en indiquant les deux 1 du 11. Il le fait).
- Tu as donné combien de jetons maintenant?
- Deux.
- Avant tu avais donné 11. Comment ça se fait?
- (l'enfant montre un troisième tas).
- Mais si on voulait les mettre avec et faire seulement deux tas. Un tas pour ce signe ici et un tas pour ce signe ici.
- Je préfère les laisser comme ça.
  (...)

Les enfants qui adoptent cette conduite ne semblent pas troublés par le fait que la quantité de jetons attribuée auparavant au nombre ne corresponde pas à la somme des jetons donnés aux deux signes séparément. Cette conduite a été déjà observée par d'autres auteurs (C. Kamii [1] et J.-F. Perret [2]). Mais nous avons quand même été surpris de la rencontrer aussi fréquemment,également chez des enfants de deuxième primaire.

Conduite B

L'enfant tend à distribuer la quantité de jetons correspondant aux nombres 11, 12 etc., aussi équitablement que possible entre les deux signes numériques les composant. Ainsi il donne six jetons à chaque signe du 12; cinq et six jetons respectivement à chacun des deux signes du 11 etc.

Nous avons rencontré cette conduite chez trois enfants. En voici un exemple:

<u>Exemple 3.</u> Sylvie, 6 ans et 5 mois.
(...)

- Pour ce nombre (11) comment va-t-on répartir les jetons entre ces deux signes?
- La moitié là et la moitié là. (Elle essaie de le faire et elle est surprise). On n'arrive pas. (Elle enlève un des jetons).
- C'est juste comme ça?
- Non, il n'y en a que 10.
- Comment on va faire?
- On peut pas le mettre parce qu'il n'y en a pas encore deux.
- Alors?...
- Un de plus... (Elle ajoute un jetons à l'un des signes).
- Et pour ce nombre (12) comment allons-nous faire?
- (Elle pose deux colonnes de 6 jetons).
- (L'expérimentateur montre les trois uns, les deux du 11 et le un du 12) Est-ce qu'ils sont la même chose?
- Ils sont pareils.
- Alors pourquoi tu as mis 5 à celui-ci et 6 à celui-là?
- Parce que je veux partager.
- Mais on n'est pas obligé de partager. On ne s'occupe plus de partager.
- (La fille donne 5 jetons au 1 du 12 et 7 jetons au 2).
  (...)

---

[1] C. Kamii, *L'arithmétique en première primaire sans crayons,* Université d'Illinois, Chicago, 1983.
[2] J.-F. Perret, *Numération: coder ou compter,* IRDP, Neuchâtel, 1981.

Conduite C

L'enfant donne un seul jeton au deuxième signe du nombre présenté et tous les autres au premier signe.

Nous avons observé cette conduite chez deux sujets. Chez l'un au début de l'entretien, chez l'autre vers la fin. Voici ces deux exemples:

Exemple 4. Sandra, 7 ans.

- (Elle commence par donner 1 jetons au 1 du 12 et deux jetons au 2).
- Combien tu as mis?
- Trois.
- Et avant?
- Douze.
- Comment ça se fait?...
- (Sandra donne alors onze jetons au 1 et un jeton au 2).
  (...)

Exemple 5. Marc, 6 ans et 11 mois.

(Marc commence par adopter la conduite A de manière systématique. Sa mère, présente par hasard à l'entretien, lui explique à la fin que le premier 1 du 11 et le 1 du 12 signifient une dizaine. Marc a l'air de suivre et même de comprendre. Après les explications la mère de Marc lui demande):

- Comment on va distribuer les jetons pour le 17?
- Seize ici (1) et un là (7). (Marc a l'air très content de sa réponse).

Conduite D

Cette conduite consiste en ce que l'enfant donne à chaque signe autant de jetons qu'il vient de donner au nombre en question. C'est-à-dire qu'il donne douze jetons au 1 du 12 et douze jetons au 2 du 12. Le fait qu'il ait utilisé le double de jetons ne semble pas lui poser de problèmes.

Nous avons observé cette conduite chez 4 enfants.

Exemple 6. Samuel, 7 ans et 6 mois.

(...)

- (Samuel donne onze jetons à chaque 1 du 11).
- Et pour ce nombre (10) comment tu vas faire?
- (Il donne deux jetons au 1 du 10 et ne met rien pour le 0).
- Bien... Et pour celui-là? (12).
- (Il donne douze jetons au 1 et douze autres au 2).
- Tous ces 1 (l'expérimentateur montre les deux uns de 11 et ceux de 10 et de 12), ils sont les mêmes ou ils sont différents?

– Ils sont les mêmes.
– Ils veulent dire la même chose?
– Oui.
– Combien tu as mis pour celui-ci? (L'expérimentateur montre le 1 du 10).
– Dix.
– Et pour celui-ci? (L'expérimentateur montre le premier 1 du 11).
– Onze.
– Et pour celui-là? (Le 1 du 12).
– Douze.
(...)

Conduite E

C'est la conduite correcte: l'enfant donne dix jetons aux premier signe du nombre présenté et le reste de jetons aux deuxième signe. Ainsi, pour le 12, il donne dix jetons au 1 et deux jetons au 2.

Cette conduite a été observée chez cinq enfants.

IV. Discussion des résultats

Les conduites A, B, C et D témoignent d'une incompréhension de l'écriture de position.

La conduite A, la plus fréquemment adoptée par les enfants, suggère que ces derniers perçoivent les deux signes numériques formant les nombres plus grands que 9, comme étant les chiffres 1, 2, 3, 4 ... qui leur sont plus familiers. Les quantités onze, douze, etc. ne sont pas assez grandes pour que les enfants ne les maîtrisent pas. Ils donnent d'ailleurs sans problèmes douze jetons au nombre 12 et onze jetons au nombre 11. Mais lorsque l'expérimentateur leur demande de donner les quantités de jetons représentées par chacun des deux signes numériques composant les nombres 11 ou 12, les enfants «oublient» la quantité totale et traitent ces signes numériques comme deux chiffres isolés.

La conduite B témoigne du souci de respecter la quantité signifiée par le nombre. Comme il faut douze jetons pour le nombre 12, il faut les partager entre les deux signes numériques qui le forment. Plusieurs personnes à qui nous avons fait part de ces résultats ont pensé que la conduite B est suggérée par la manière de formuler notre demande. Lorsque nous disons «donner séparément à chaque signe» nous suggérions le partage... Nous ne pouvons pas l'exclure, mais nous optons plutôt pour l'hypothèse suivante: l'enfant voulant conserver la quantité exacte et ayant deux signes numériques pour la distribuer, et surtout – et c'est là l'essentiel du problème – n'ayant pas compris l'écriture de position – il ne voit pas pourquoi il ne doit pas partager équitablement les jetons à disposition entre les deux signes.

La conduite C, comme la précédente, dénote un souci de conserver la quantité totale des jetons. Mais comment «séparer» les deux signes puisqu'ensemble ils forment un nombre? L'enfant opte alors pour donner deux fois la quantité totale des jetons.

La conduite D tient compte non seulement de la quantité totale mais aussi d'une connaissance essentielle pour la construction de la série numérique: tout nombre est construit à partir de celui qui le précède en lui ajoutant 1. Ainsi l'enfant, non seulement répond à la demande de l'expérimentateur, mais lui montre qu'il sait que le 12 est 11 plus 1 et le 17, 16 plus 1.

Demandons-nous maintenant dans quelle mesure l'enfant tient à ses réponses. Accepte-t-il également d'autres conduites? Voici ce que nous obtenons lorsque nous suggérons aux enfants d'autres conduites que les leurs. Commençons par le groupe d'enfants qui ont donné la conduite E:

Un des enfants accepte la conduite B (partage équitable) comme très bonne.

Un deuxième accepte la B et la D.

Un troisième refuse toute suggestion. Pour lui la seule réponse valable c'est la E.

(Malheureusement, nous n'avons pas fourni de suggestions au quatrième enfant, un des premiers à avoir été interrogé).

Le fait que deux enfants sur quatre acceptent des conduites moins élaborées est significatif de la fragilité de leurs connaissances.

Quant aux enfants qui ont donné spontanément la conduite B, tous acceptent la conduite E comme valable. Mais un d'entre eux accepte également la conduite A.

Quant aux enfants qui ont adopté la conduite A:

- Deux d'entre eux n'acceptent aucune autre suggestion.
- Deux acceptent la B et la E.
- Un autre accepte la B, la E et la C.
- Un enfant accepte seulement la B.
- Deux la C et la E.
- Un la D et la E.
- Un autre seulement la C.

Sur l'ensemble des conduites que nous avons pu observer, quatre d'entre elles montrent que les enfants ne connaissent ou ne reconnaissent pas la signification de l'écriture utilisée. Ceci semble paradoxal puisque, au cours de deux premières années de scolarité, ils apprennent et exercent les notions de groupement, de base et de passage d'une base à l'autre. Malgré cela, les enfants interprètent le signe numérique comme un signe absolu et non comme la composition de deux signes dont, par convention, la position détermine la signification. Pour la plupart des enfants les signes graphiques qu'ils soient simples (de 1 à 9) ou doubles (de 10 à 99) sont assimilés à des indicateurs de quantité, de la même manière que les numéros.

La logique sous-jacente à l'écriture de position semble leur échapper complètement et l'écriture de la suite numérique se poursuit dans la même logique que celle utilisée pour les 9 premiers chiffres. (Les signes 12 et 13 ont le même statut que les signes 6 ou 7).

V. Entrevues avec les enseignants

Nous avons présentés ces résultats aux institutrices des classes dans lesquelles nous avons effectué ce travail ainsi qu'à certains de leurs collègues. Nous souhaitions obtenir des informations quant à leur manière d'enseigner l'écriture de position et leur avis sur la signification possible des différentes conduites que nous avons pu observer.

Toutes les enseignantes interrogées nous indiquèrent qu'elles pratiquaient longuement les opérations de codage et de décodage dans toutes les bases, y compris la base dix et qu'à leurs yeux, les enfants avaient compris l'essentiel.

Toutes étaient fort surprises des résultats de notre expérience et ne semblaient pas être conscientes que leurs élèves pouvaient raisonner de la sorte. Par la suite elles fournirent spontanément une explication en relation avec la nature du programme scolaire. Voici quelques extraits de ces entretiens.

1.
- Comment leur expliquez-vous le passage à la dizaine?
- Cela se fait avec les jetons ou avec les doigts. On met dix objets qu'on entoure avec une corde, etc.
- Mais il semble qu'ils ne savent pas faire l'inverse?
- C'est cela qui est très difficile!
- Comment essayez-vous de leur faire assimiler?
- Je n'y pense pas vraiment parce que j'ai l'impression qu'ils ont compris. On se dit que tant qu'ils font leurs groupements ils ont l'air d'avoir compris...

2.
- Nous nous demandions le pourquoi de la conduite de type 6 et 6 (conduite B).
- Ça vient du fait que l'on fait beaucoup de calculs. On leur propose un chiffre, 12 par exemple, et on leur demande de trouver les possibilités pour faire douze...
- Pensez-vous alors que ça pourrait venir de l'influence de l'addition?
- Oui, parce qu'ils ne savent plus dans quel type de jeu ils se trouvent à ce moment-là... lorsqu'on fait quinze jours le jeu de l'addition, ils répondront par des réponses du type 6 et 6 et si on entraîne le jeu des bases, ils sauront qu'il s'agit d'unités, etc...

3.
- Faites-vous la liaison entre la position relative des chiffres et leur signification?
- Oui.
- En première année il n'y a pas de lien entre le groupement des bases et l'addition... on ne travaille pas systématiquement le passage à la dizaine...

– Peut-on dire qu'il y a un certain décalage entre les opérations et les groupements?
– Oui, certainement.
Pour eux, la dizaine c'est surtout un mot. Quand on passe vraiment aux calculs, ils oublient que c'est un groupement. Ils savent que c'est dix mais ils oublient que c'est un groupement de dix unités.

Nous regrettons de ne pas pouvoir donner ici de plus amples extraits de ces entretiens et d'en faire une analyse plus approfondie. Cependant, nous aimerions souligner que les institutrices mettent en relation les difficultés des enfants à comprendre l'écriture de position avec le programme scolaire qui incite l'enseignant à présenter les différentes notions de manière morcelée et juxtaposée: «... quinze jours on parle de bases et quinze autres jours d'additions...»

Ces remarques vont dans le même sens que celles de J.-F. Perret:

«Cette brève description que l'enfant a du nombre nous permet de mieux saisir les risques de voir les élèves ne pas établir de lien mais d'établir des cloisons étanches entre champs d'expériences différents. Pour schématiser ces deux champs, nous dirons que selon la situation, l'élève mobilisera soit sa connaissance du comptage pour répondre à une question qui fait intervenir d'une façon ou d'une autre le mot clé «combien», soit ses savoir-faire scolaires en réponse à une consigne du type «groupe et code dans une base donnée».[1]

VI. Conclusions

Suite à ce sondage, nous avons eu l'occasion de travailler avec des enfants de première, deuxième, troisième et quatrième primaires, dans le but de voir, si dans une situation d'apprentissage, les enfants qui n'avaient pas compris la signification de l'écriture numérique conventionnelle pouvaient la comprendre, moyennant des explications et des exercices que nous jugions pertinents. Or, il s'est avéré que ceux des enfants (même ceux du groupe de 9 ans) qui n'avaient pas compris, avaient beaucoup de difficultés à suivre le sens de nos explications et à réaliser les activités proposées.

Lorsqu'une tentative d'apprentissage échoue, on peut toujours incriminer la façon de procéder. Mais pour pouvoir modifier cela, il est nécessaire de modifier les hypothèses qui l'ont engendrée.

Les exercices proposés étaient des exercices d'échanges, de même nature que ceux pratiqués couramment par tous les enseignants. Les enfants n'avaient aucun problème pour les effectuer, mais pourtant, ils ne comprenaient pas que le 2 de 23 signifie deux dizaines. La difficulté ne semble résider ni dans la constitution des groupes, ni en leur échange contre quelque chose les symbolisant. Pourquoi cette difficulté, pour certains enfants insurmontable, à comprendre l'écriture de position? Probablement parce que dans cette manière d'écrire, il y a autre chose qui se cache... Mais quoi? ...

[1] J.-F. Perret, *Numération: coder ou compter*, IRDP, Neuchâtel, 1981.

Essayons de faire quelques hypothèses:

- Il y a le fait de grouper les unités en dizaines et les dizaines en centains.
- Il y a l'ordre relatif entre différents chiffres qui nous donne l'information quant à leur statut; s'agit-il d'unités, de dizaines ou de centaines?
- Il y a aussi, et cela n'a été mis en évidence jusqu'à maintenant par aucun chercheur, tout au moins à notre connaissance, l'idée de découper la série numérique en morceaux égaux, chacun d'eux contenant dix unités. Et cela n'est pas la même chose que de faire des groupes de 20.

Notre hypothèse est que les difficultés proviennent de ce troisième constituant de l'écriture de position. Expliquons-nous. La structure d'ordre est construite par les enfants assez précocement. Les travaux de Piaget l'ont assez montré. D'ailleurs, on peut facilement constater que la plupart des enfants de 6 ans savent montrer ce qui vient avant et ce qui vient après. Ils peuvent aussi construire des collections égales comprenant un certain nombre d'éléments. Mais ce qu'ils n'ont pas encore construit, c'est une série numérique [1] relativement longue. La majorité des enfants de 6-7 ans sait compter jusqu'à 20 ou 30. Mais nombreux sont ceux qui peuvent compter plus loin. Mais même dans ce cas, leur série numérique semble faiblement constituée: ce sont des unités, dont chacune porte un nom, qui se succèdent. L'organisation des éléments de la série est si faible que les enfants sont incapables de les nommer en en omettant un sur deux: 2, 4, 6 etc. Ou encore 3, 5, 7 etc. Ponctuer la série tous les 10 éléments est pour eux une tâche impensable. Or, c'est justement cette organisation de la série numérique, c'est cette ponctuation à tous les éléments occupant la dixième place de manière itérée qui est reflétée dans l'écriture de position. Nous pouvons saisir ainsi l'impossibilité des enfants à la comprendre: l'écriture de position exprime une manière d'organiser les nombres que les enfants ne possèdent pas.

Cette hypothèse nous a apporté un nouvel éclairage sur les difficultés des enfants à comprendre l'écriture de position et cela nous a permis d'entreprendre de nouvelles observations auprès d'eux. Pour le moment, l'information recueillie, bien qu'insuffisante pour prouver notre hypothèse, est intéressante et semble la corroborer.

Un nouveau sondage expérimental est en cours dont le but est de déterminer l'organisation de la série numérique jusqu'à 100 chez les enfants qui ont compris l'écriture de position et chez ceux qui n'ont pas compris le code conventionnel. En outre, une série d'activités et exercices seront mis au point pour aider les enfants à maîtriser la signification que les signes numériques ont, de par leur position.

---

[1] Voir à ce sujet A. Henriques, *Réflexions et hypothèses à propos de la construction de la notion de nombre*, in *L'école valaisanne*, No 5, 1983.

4e PRIMAIRE

Approche de l'ancien système anglais des mesures de longueur

(Exemple d'exploitation d'une suggestion de la méthodologie)
par J.-P. Nater

Il est admis que les suggestions qui enrichissent pour ainsi dire chaque activité de nos méthodologies de mathématique 1P à 4P ne jouissent pas d'un statut unique. La page IV de l'introduction à MATH 4P dit par exemple, à propos des suggestions: «..., leur ampleur et leur variété favorisent une grande souplesse d'utilisation. Leur fonction étant d'apporter aussi bien des alternatives que des idées complémentaires, ...».

Nous avons ainsi, choisi, dans notre classe, de compléter notre travail sur les mesures de longueur (DE 5 a) par une approche de l'ancien système anglais d'unités (suggestion 1, p. 323). Il va de soi que la connaissance et l'utilisation des pouces et autres yards n'auront jamais été les objectifs directs de notre recherche! Une fois de plus, tout au long de notre activité (3 périodes d'une quarantaine de minutes chacune), la démarche et les attitudes importaient davantage que les résultats immédiats.

1re période

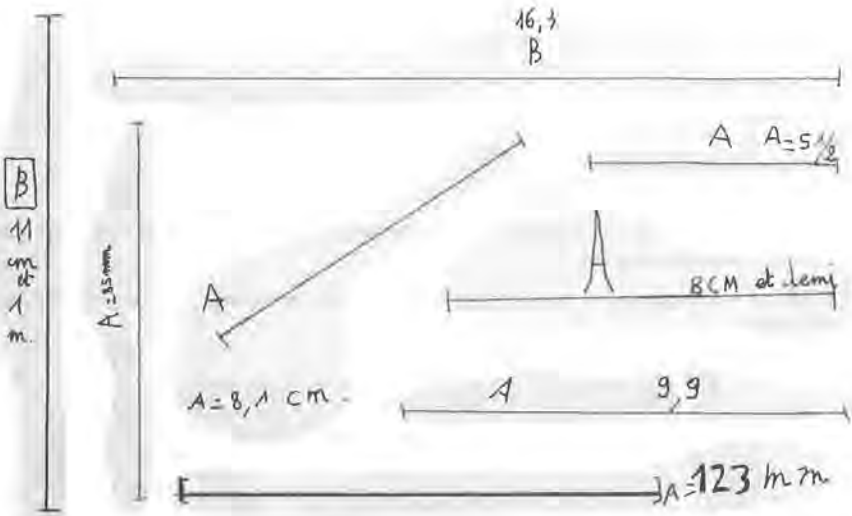
1. Chaque enfant reçoit cette bande de papier, découpée:

– Qu'est-ce?
(«C'est pour mesurer!»)

2. Sans autre commentaire, chacun est invité à dessiner un segment quelconque et à le mesurer avec son «instrument».

– Comment noterez-vous votre résultat?

Les productions des élèves sont diverses, ... et riches pour la discussion qui va suivre! On remarque une utilisation spontanée des unités usuelles (cm et mm, cette dernière pourtant très peu travaillée jusqu'ici). Pour un «long» segment, il



se pose le problème du report de l'instrument. La manipulation de la bande de papier est parfois malaisée et source d'erreurs (Il y a certaine imprécision dans tout acte de mesurage!). La communication écrite soulève le problème des codes, soit des abréviations. La virgule apparaît dans l'écriture de quelques enfants, alors même qu'elle n'a jamais été abordée dans notre classe (les enfants apprendraient-ils ailleurs qu'à l'école?)

Toutes ces notations sont donc discutées et comparées. Collectivement, on rappelle encore ces écritures, rencontrées dans de précédentes leçons:

$$A \cong 16 \text{ cm}$$
$$16 \text{ cm} < A < 17 \text{ cm}$$

3. Nous revenons à notre instrument, pour l'observer un peu mieux!

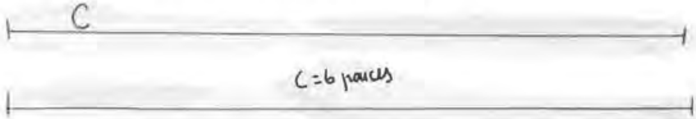
– Que remarque-t-on, dans la partie inférieure?
  («On dirait d'autres unités!»)
– A quoi peuvent-elles servir?
  («C'est pour mesurer certains objets!»
  «D'autres personnes utilisent ces unités»)

On précise alors:

- inch (plur.: inches) veut dire «pouce»;
- cette unité était (et est encore parfois) utilisée dans les pays de culture anglaise (mesures anglo-saxonnes).
  (Remarque d'un enfant: «Ce n'est pas très pratique, parce que si on dit que quelque chose mesure 3 pouces, on ne comprend pas très bien!»)

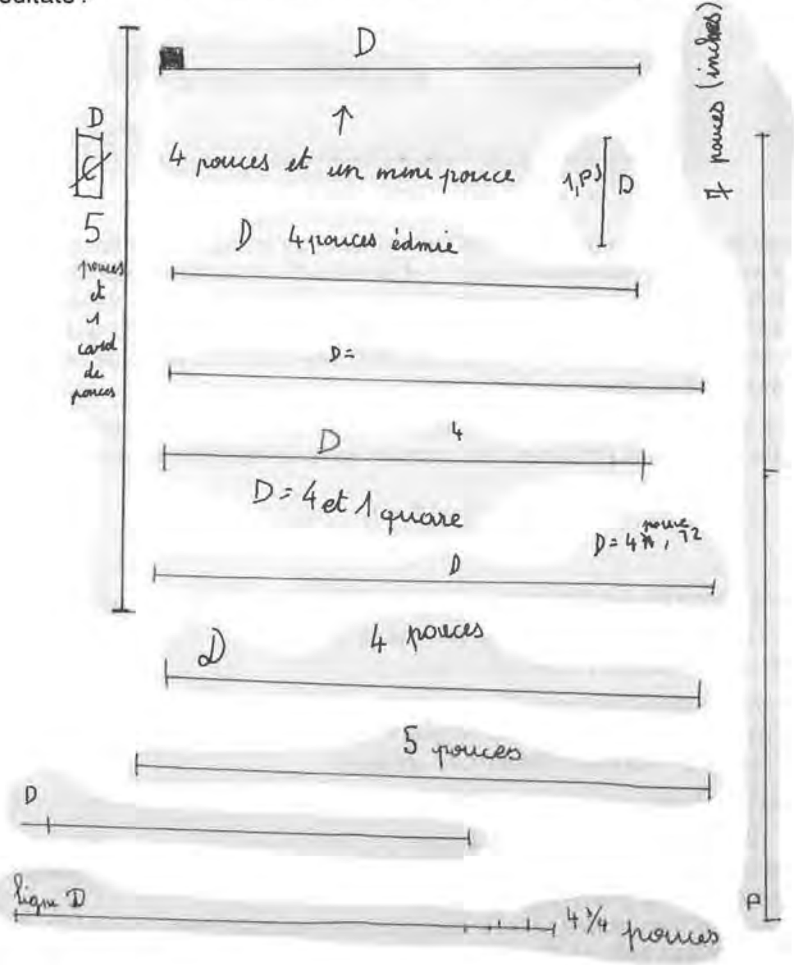
4. On utilise la nouvelle unité:

- Dessinez un segment C qui mesure 6 pouces.



Le problème du report de l'instrument se pose à nouveau: le 5e pouce, sur notre bande, n'est pas entier!

- Dessinez un segment D quelconque; mesurez; comment exprimera-t-on les résultats?



Ici encore, les notations utilisées sont comparées et discutées. Les propositions des enfants sont variées! L'un d'entre eux a même suggéré d'écrire: «D mesure 3 pouces et 2 cm»!

On remarque que certains enfants ne parviennent pas à exprimer la mesure par un code. D'autres ont corrigé la ligne «quelconque» d'abord dessinée, pour qu'elle «tombe bien»! Le mot «inch» est attrayant pour quelques-uns! L'orthographe l'est moins pour beaucoup!!!

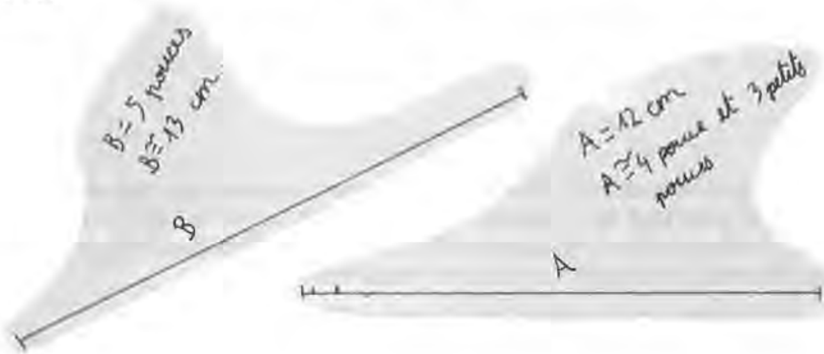
On termine cette première période en comparant les subdivisions du pouce (en deux et en quatre) avec celles du cm (en 10 mm).

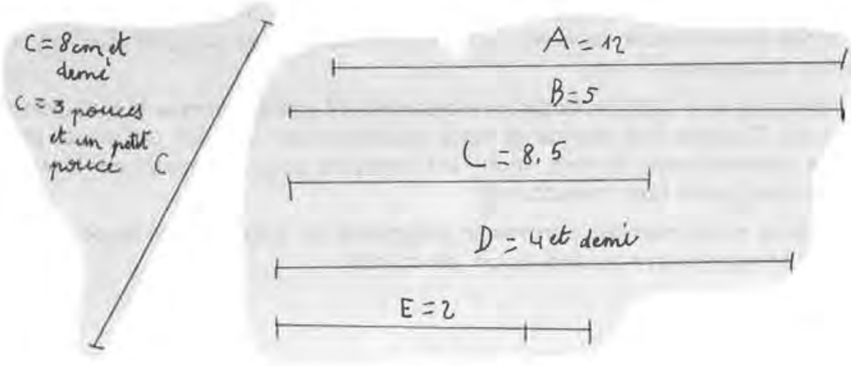
2e période

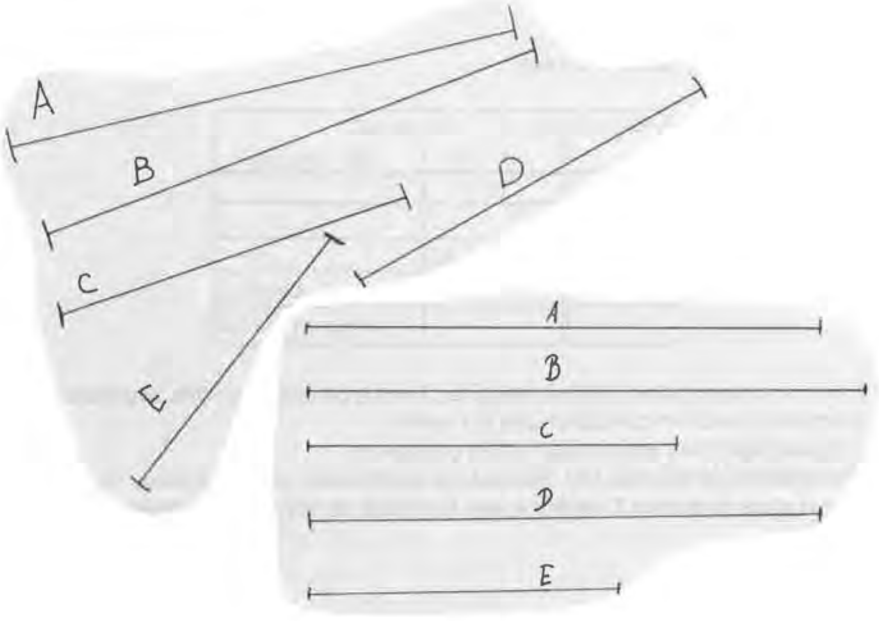
1. On présente le tableau suivant:

segment	longueur	
	en cm	en pouces
A	12	
B		5
C	8 et demi	
D		4 et demi
E		2 trois quarts

- Peut-on prévoir, avant de les dessiner, l'ordre de grandeur des segments?
- Comment peut-on comparer ces écritures?
  («Il faut noter tout en cm, ou tout en pouces!»)
- Complétons le tableau (on dessine les segments); pouvons-nous noter le résultat sans le dessin? vérifions nos écritures en mesurant les segments dessinés.







Des aspects pratiques sont mis en évidence par l'observation des réalisations des élèves: précision de la mesure; utilisation, chez certains, des unités métriques ou anglaises, sans indiquer l'unité choisie; disposition judicieuse des segments dessinés, pour une comparaison visuelle facilitée!

On remarque chez deux élèves l'emploi spontané du signe ≅ !
On écrit au tableau: 1 pouce ≅ 2,5 cm

2. Découverte du «pied»:

- Mesurons la largeur de notre fenêtre, puis les dimensions d'un sous-main; après discussion, nous décidons de négliger les parties inférieures au pouce, et nous écrivons:

  unité: le pouce

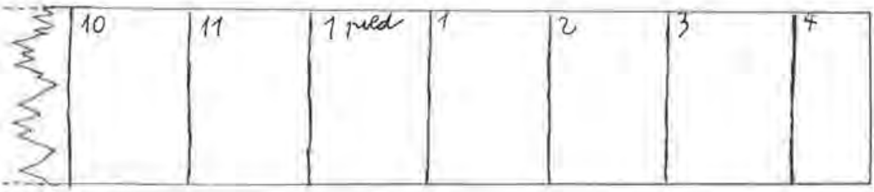
largeur de la fenêtre	=	27
longueur du sous-main	=	17
largeur du sous-main	=	12

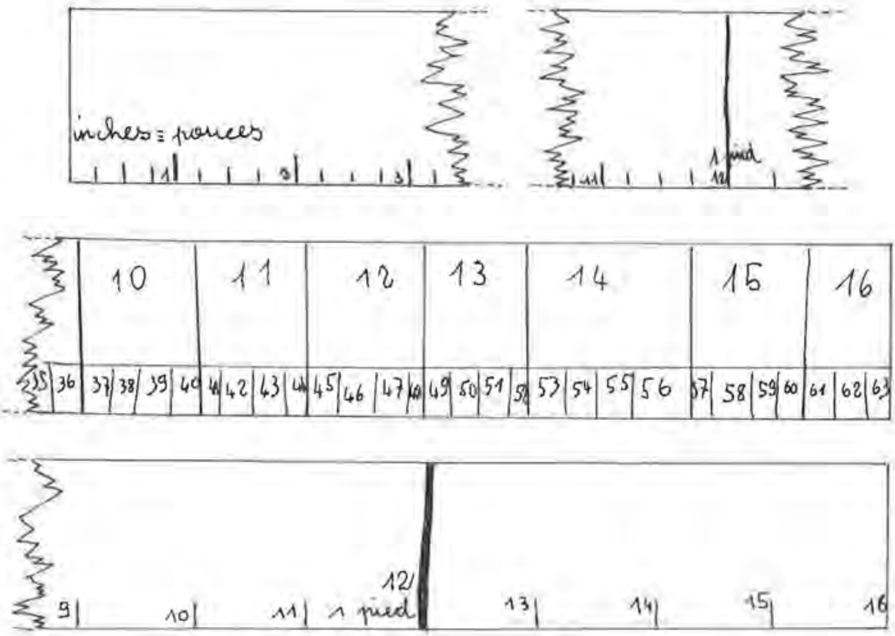
- Les reports successifs de notre instrument sont peu pratiques! Que serait-ce s'il fallait mesurer la longueur de la salle de classe!
  («Il faut une unité plus grande!», réagissent les enfants)
- Que proposeriez-vous?
  (Et les «inventeurs» de proposer, avec imagination, ... et intelligence:)
  - Une unité 2 fois plus grande, parce que le pouce est partagé en deux.
  - Une unité 10 fois plus grande (influence du système métrique, ou «Chassez le naturel, ...»)
  - Nouvelle unité: le dm (!)
  - Nouvelle unité: la main (!!)

On présente alors le pied, en précisant et en écrivant:

1 pied = 12 pouces

3. On construit un pied, chaque enfant ayant reçu une bande de papier d'une quarantaine de cm.





Les travaux réalisés font également l'objet d'observations et de remarques, quant à la précision apportée au dessin, à la numérotation des pouces, à leurs subdivisions (parfois numérotées) ou non, au passage du 11e au 12e pouce, puis du 12e au 13e.

Notre nouvel instrument, pour terminer, est maintenant utilisé pour contrôler les mesures précédentes, exprimées à présent en pieds et en pouces.

3e période

1. On utilise le pied pour mesurer des segments dessinés au tableau, puis on exprime les résultats obtenus par écrit:

M = 4 pieds et 8 pouces
N = 2 pieds et 10 pouces
P = 6 pieds et 5 pouces

2. Découverte du yard:

- Et si nous devions mesurer la largeur de notre cour de récréation?
  («Il faudrait une unité encore plus grande qu'un pied!»
  Certains enfants suggèrent une unité qui vaudrait 12 pieds.
- Cette unité, en fait, existe; elle vaut 3 pieds (et oui!) et on l'appelle un yard.
  Il nous est facile de construire quelques yards, en collant bout à bout 3 pieds fabriqués précédemment. Les enfants réagissent très vite: «On dirait un mètre!»; après discussion, on compare, bien sûr le mètre et le yard.
- Utilisons notre instrument élaboré, pour contrôler la mesure des segments M, N et P; comment exprimer, maintenant ces longueurs?

  M = 1 yard 1 pied 8 pouces
  N = 2 pieds et 8 pouces (Que manque-t-il pour obtenir 1 yard?)
  P = 2 yards et 5 pouces
- Que mesurent, approximativement, ces segments en m et cm?
  On émet quelques réponses, on les explique ou on les justifie, puis on vérifie en mesurant. On écrit finalement:

  1 pouce ≅ 2 cm et demi
  1 pied ≅ 30 cm
  1 yard ≅ 90 cm («presque 1 m!»)

3. Quelques exercices de transformations.

- Les élèves sont invités à écrire quelques équivalences, en restant cette fois-ci dans le système anglais d'unités. Par analogie au système métrique (1000 m font 1 km), nous faisons une rapide allusion au mile (1760 yards).

	12 pouces ≡ 1 pied	12 pouces = 1 pied
12 pouces pour un pied.	3 pied ≡ 1 yard	3 pied = 1 yard
3 pied pour un yoard.	36 pouces ≡ 1 yard	36 pouces = 1 yard
36 pouces pour un yard	1760 yard ≡ 1 mile	1760 yard = 1 mile

- Des exercices un peu plus formels de transformations, avec le système anglais d'une part, puis avec les unités du système métrique d'autre part, sont soumis à la classe. Une petite discussion nous permettra de relever les avantages du système métrique, avec sa règle récurrente, de 10 en 10, comme dans notre système de numération... décimale.

4 pieds et demi ≡ 54 pouces
20 pieds ≡ 6 .. yard 2 .. pieds
4 yard 2 pieds ≡ ... pieds

6 m ≡ 60 dm
4 m 5 dm ≡ 45 dm

6 m = 60 dm
4 m 5 dm 45 dm
3 m et demi = 350 cm

2 yards ≡ 6 pieds
10 yards ≡ 30 pieds
6 pieds ≡ 72 pouces
6 m ≡ 60 dm

3 m . et demi = 350 cm
4 m 55 = 455 cm
7 dm . 3 cm = 73 cm
6 cm = 60 mm
300 cm = 3 m

6 pieds ≡ 72 pouces
4 pieds et demi ≡ 54 pouces
20 pieds ≡ 6 yards 2 pieds
~~4 yards~~

4 pied et demi = 18 pouces
20 pied = yard

Cette suggestion aura donc parfaitement joué son rôle, en nous donnant simplement une occasion de consolider la notion de mesure (comparer la longueur à mesurer à l'unité choisie). Nous avons pratiqué une activité de mesurage, utilisé des instruments, exprimé des longueurs, oralement ou par écrit, dessiné et comparé des segments, découvert, puis utilisé un système structuré de mesure. Jouer avec des pouces, des pieds ou des yards ne nous a jamais laissé l'impression d'errer à l'extérieur de notre programme! Notre système métrique, d'ailleurs bien présent car utilisé régulièrement dans notre activité, recevait quant à lui un éclairage nouveau, quoiqu'indirect, et s'en trouvait enrichi.

Actualité et problème de la vie courante!

Et vous! La monnaie! Ça vous intéresse?

La monnaie...
ou l'art de construire ses propres tableaux

par Danielle Berney et Marcelle Goerg

- saisir l'utilité d'une mise en ordre de données,
- faire preuve d'ordre et de précision dans le collationnement de résultats.

Une tâche à suggérer!

> Avec des pièces de 50 20 10 5 centimes, combien peut-on faire de collections différentes d'une valeur de 70 c?

Nous sommes dans une classe de 4e année au mois de décembre.

Combien de collections différentes?

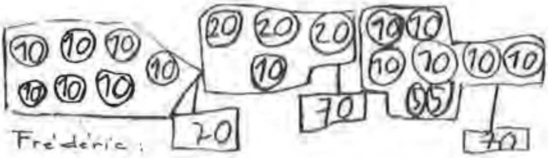
Première impression des élèves:

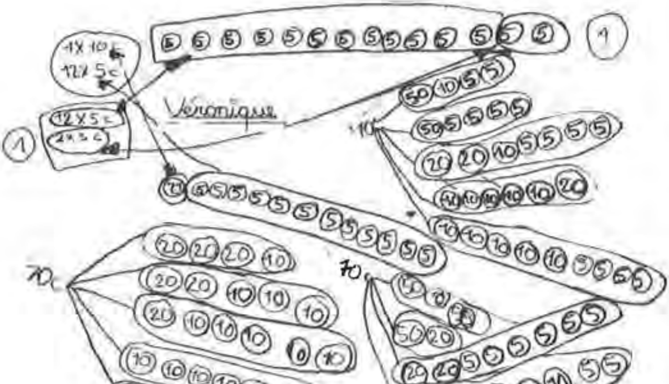
«il y en a beaucoup»!

Cette impression les incite à prendre le crayon pour noter les collections imaginées et à chercher ainsi celles qui sont équivalentes à 70 c.

Tout d'abord, les pièces apparaissent avec leur statut d'objet,

l'idée d'équivalence prédomine, les collections de 70 c sont représentées sur leur feuille sous forme de «porte-monnaie» contenant 70 c.





Puis la combinatoire avec 5 10 20 50 se profile, les collections s'alignent en décomposition de 70, les échanges apparaissent, notés plus ou moins systématiquement.

Virginia	: «– Je *prends* 50 c en pièces de 10 c et je *prends* 20 c. (Virginia dessine sa collection en additionnant les pièces: 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 20 = 70
Nathalie	: «– J'en ai déjà 11.» (collections)
M.	: *«– Est-ce que tu penses les avoir toutes trouvées?»*
Nathalie	: (montrant du doigt le début de son travail):

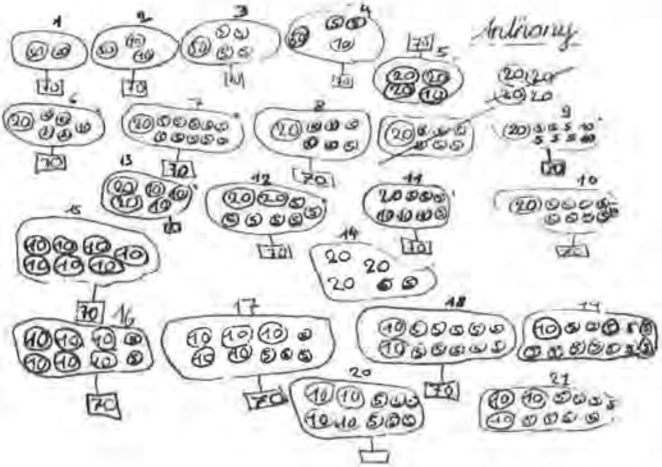
– «là, j'ai deux choix».

– «Je crois que j'ai toutes les collections avec 50 c.»

50/20
50/10/5/5
50/10/10
50/5/5/5/5

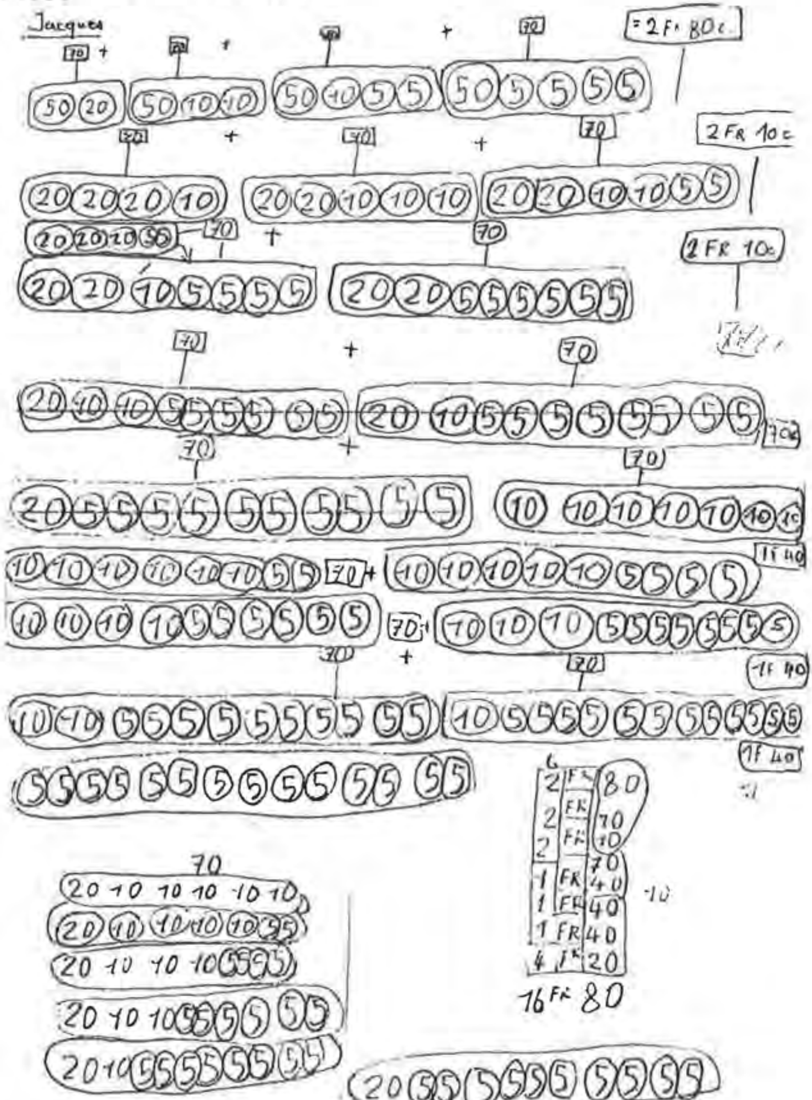
Toutefois l'organisation reste très personnelle et le fil conducteur est souvent moins apparent pour l'observateur que pour celui qui le crée.

Les étapes du travail d'Anthony nous intéressent parce qu'elles sont fréquentes chez les enfants.



20+20+20+10=70
20+20+20+5+5=70
20+20+10+10+10=70
20+20+5+5+5+5+5+5=70
20+20+10+10+5+5=70
20+20+5+5+5+5+10=70
20+10+10+10+10+10=70
20+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=70
......

Elles montrent bien le développement de sa pensée, la mise en place d'une organisation qui a ses limites. Pour être certain de trouver toutes les collections, Anthony éprouve le besoin d'y voir clair, de mettre de l'ordre.



50 20 = 70 c

50 10 10 = 70c

50 10 5 5 = 70c

50 5 5 5 5 = 70

4 avec 50 1/2 FR 1983 C

20 20 20 10 = 70c

20 20 20 5 5 = 70c

20 20 10 10 10 = 70 c

20 20 5 5 5 5 5 5 = 70c

20 10 10 10 10 10 = 70c

20 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70c

20 20 10 10 5 5 = 70c

20 20 10 5 5 5 5 = 70c

20 10 10 10 10 5 5 = 70c

20 10 10 10 5 5 5 5 = 70c

Anne -6- 2.

20 10 10 5 5 5 5 5 5 = 70c

20 10 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70c

12 avec 20 20 C

10 10 10 10 10 10 10 = 70c

10 10 10 10 10 10 5 5 = 70 c

10 10 10 10 10 5 5 5 5 = 70c

10 10 10 10 5 5 5 5 5 5 = 70

10 10 10 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70c

10 10 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70c

10 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70c

7 avec 10 10 C

5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 = 70

1 avec 5 5 C

24 collections différentes dessinées d'un seul jet.

Anne est prête à recevoir une relance, si elle ne se pose pas la question elle-même: et pour 80 c? ... pour 1 F? ...

Suite du travail de Marco.

	50 c	20 c	10 c	5 c
A	–	–	–	14
B	–	–	7	–
C	–	–	6	2
D	–	–	5	4
E	–	–	4	6
F	–	–	3	8
G	–	–	2	10
H	–	–	1	12
I	–	3	1	–
J	–	2	3	–
K	–	1	5	–
L	–	1	10	–
M	–	2	6	–
N	1	1	–	–
O	1	–	2	–
P	1	–	–	4
q	1	–	1	2
R	–	3	–	2
S	–	1	1	8
T	–	1	2	6
U	–	1	3	4
V	–	1	4	2
W	–	2	2	2
X	–	3	1	–

Combien de collections de 2 sortes de pièces?
de 3 sortes de pièces?
avec 1 seule pièce de 50 c?

«– Facile»! dit Marco.

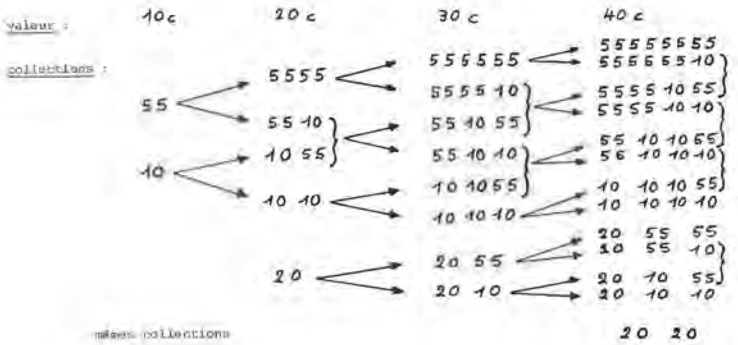
Quand les élèves ont trouvé le nombre de collections différentes d'une valeur de 70 c, qu'ils sont sûrs de leur résultat parce que leur système de recherche est clair, satisfaisant (énumération après une mise en ordre nécessaire, ébauche de tableau, échanges systématiques, ...), ils ont souvent envie de généraliser hâtivement en disant, par exemple:

pour 70 c, j'ai 24 collections,
pour 10 c, j'ai 2 collections,
donc pour 80 c, j'aurai ?? ... 26 collections (24 + 2) ?
ou 48 collections (24 × 2) ?
ou ? ? ?

La question est loin d'être facile, la combinatoire n'est pas simple. Comment être sûr de son raisonnement? Chercher pour 80 c après avoir cherché pour 70 c est fastidieux et le soupir des enfants est éloquent!

Mais alors, faut-il abandonner cette piste, ou proposer une autre démarche, par une *relance* appropriée:

> Faites l'inventaire des collections différentes pour 10 c, 20 c, 30 c, 40 c, et observez ce qui se passe.



valeur	collections
10	2
20	4
30	6
40	9
50	?
60	?
70	24
80	?
⋮	⋮

Existe-t-il une machine qui fonctionne entre l'ensemble des valeurs et l'ensemble du nombre de collections?

Aïe! la généralisation n'est toujours pas évidente!
Serait-ce plus difficile qu'il n'y paraît de se fabriquer un petit modèle pour trouver toutes les collections différentes d'autres valeurs?

Un tableau, *qui se construit de proche en proche* et qui n'est pas un instrument facile, permet de trouver *le nombre de collections différentes* selon la valeur et les sortes de pièces de monnaie.

Le maître l'utilisera pour répondre aux interrogations de ses élèves; eux se contenteront de l'observation qu'on ne peut pas généraliser ce problème simplement parce que les échanges avec de la monnaie ne sont pas réguliers, observation très importante car les enfants ont tendance à croire qu'un seul résultat leur permet toujours de systématiser.

Tableau des collections différentes

Sortes de pièces \ Valeur	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	...	...	...
5c	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
5c ou 10c	1	2	3	4	5	6		8					
5c ou 10c ou 20c	1	2	4	6	9	12		20					
5c ou 10c ou 20c ou 50c	1	2	4	6	9	13		24					
......													
......													

Mode d'emploi pour compléter le tableau

- Nombre de collections pour 30 c

5	au moins 1 10	au moins 1 20	au moins 1 50
5 5 5 5 5 5	10 5 5 5 5	20 5 5	—
	10 10 5 5	20 10	
	10 10 10		

$$\underbrace{1 + 3}_{\boxed{4}} + 2 = \boxed{6}$$

Tableau : → $\boxed{6}$

- Nombre de collections pour 50 c

5	au moins 1 10	au moins 1 20	au moins 1 50
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	10 5 5 5 5 5 5 5 5	20 5 5 5 5 5 5	50
	10 10 5 5 5 5 5 5	20 10 5 5 5 5	
	10 10 10 5 5 5 5	20 10 10 5 5	
	10 10 10 10 5 5	20 10 10 10	
	10 10 10 10 10	20 20 5 5	
		20 20 10	

$$\underbrace{1 + 5}_{\boxed{6}} + 6 + 1 = \boxed{13}$$

Tableau : → $\boxed{12}$ → $\boxed{13}$

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:
Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Dénervaud, R. Délez, Ch. Félix, M. Ferrario, F. Jaquet, F. Oberson.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 14.—, Etranger F 16.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina & Burgener, 1950 Sion