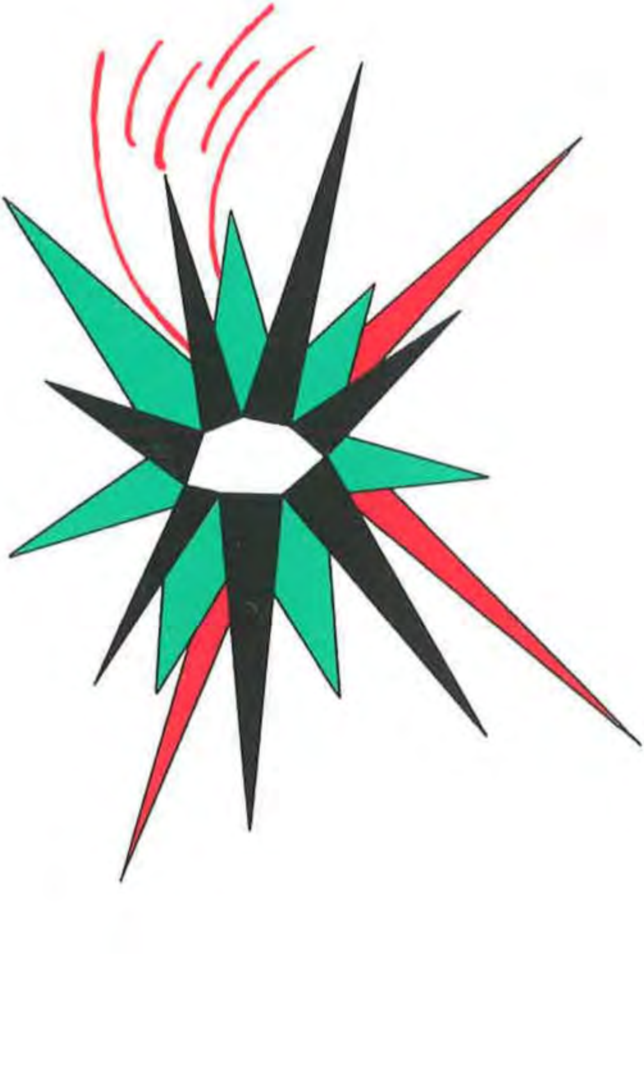
123



MATH ECOLE

MAI 1986
25e ANNÉE

MATH-ECOLE 123
25e ANNÉE Paraît cinq fois par an MAI 1986

Editorial

Le jeu à l'école

Le maître: *Demain, nous organiserons un tournoi de «Puissance 4».*

La classe: (en chœur) *Ouaah!*

Un élève: *Alors, on ne fera pas de math?*

Un autre: *Moi, j'aime bien. C'est marrant: je me demande ce que l'autre va faire et j'essaie de trouver des trucs.*

Un parent: *Tu prends ton «Puissance 4» à l'école? De mon temps on jouait aux billes pendant les récréations.*

Un autre: *Il me semble que vous jouez beaucoup avec votre nouveau professeur de mathématiques. J'espère que vous apprendrez tout de même à compter.*

Un autre: *Tiens, c'est intéressant! Hier soir, au cours d'informatique, on a créé un programme pour jouer au «Tic-tac-toc», un jeu qui ressemble beaucoup à «Puissance 4», en plus simple.*

L'inspecteur: *Vous avez déjà terminé le programme de cette année?*

Un collègue: *C'est une bonne idée, pour la dernière semaine d'école ou pour occuper les élèves rapides qui ont toujours terminé leurs exercices avant les autres?*

Un autre: *D'un point de vue pédagogique, je suis d'accord, mais j'ai des doutes à propos des objectifs: ce type d'activité ne figure pas dans la rubrique «fundamentum» du condensé de plan d'études qui définit les matières d'examen.*

Un autre: *Avec la bande d'agités dont j'ai hérité cette année, il est exclu de faire des jeux.*

Une voix: *Tu gagneras ton pain à la sueur de ton front, tu enfanteras dans la douleur et tu joueras après le travail.*

Propos imaginaires? démodés? pertinents? Ce n'est pas à un éditorial de trancher, en quelques lignes. En revanche, il peut suggérer l'essai suivant:

Vous remplacez une des prochaines «leçons de mathématiques», dans l'acception traditionnelle du terme, par un tournoi de «Puissance 4» ou de tout autre jeu connu de vos élèves: «Mastermind», dominos, «Le compte est bon», etc.

Vous écoutez les élèves, les parents, les collègues, le directeur, vous-même, pour vérifier la concordance de leurs avis avec les propos cités précédemment.

Mais avant tout, vous observez vos élèves. Jouent-ils avec sérieux? S'engagent-ils dans la tâche à la fois par plaisir et pour l'activité en soi? Communiquent-ils? Tiennent-ils compte des avis des autres? Répètent-ils leurs erreurs ou améliorent-ils leur tactique de partie en partie?

Vous intervenez là où c'est nécessaire, pour sortir un groupe d'embarras, pour relancer l'activité, pour animer la discussion, pour analyser les différentes stratégies, pour harmoniser les notations et les façons de décrire le déroulement d'une partie.

Finalement, vous relisez les objectifs généraux du plan d'études comme ceux-ci par exemple (CIRCE III, adopté en 1985):

Le maître donne l'occasion à l'enfant, le plus souvent possible, de développer ses multiples facultés pour vivre toutes les phases d'une recherche et acquérir ainsi le caractère et les aptitudes que cela nécessite.

Si vous étiez encore perplexe sur la place à accorder au jeu dans l'enseignement des mathématiques, cet essai vous aura certainement permis de vous faire une opinion.

F. Jaquet

Dilemme!

8 h. Leçon de français.
On entend le son «r» au début, à l'intérieur, à la fin du mot.
– Classez les mots suivants en trois ensembles dit la maîtresse de Sylvie.
Il faut placer: tigre, éléphant, requin et rhinocéros.

9. h. Leçon de mathématique.
– Placez dans un diagramme les mots qui commencent par *r* et les mots qui désignent les animaux, dit encore la maîtresse.

A 8 h. 20, Sylvie a eu droit à une remarque parce qu'elle n'avait pas écrit rhinocéros à deux endroits.
A 9 h. 15, Sylvie a eu droit à une remarque parce qu'elle avait placé rhinocéros à deux endroits.

p.c.c.: R.H.

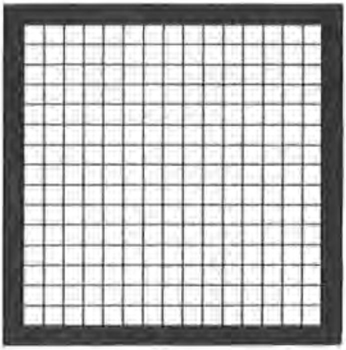
«Au pays du carré 15»

Un jeu original du SRP par Roger Délez et Johann Läng

PRÉSENTATION DU JEU

Le Matériel

a) Le damier:

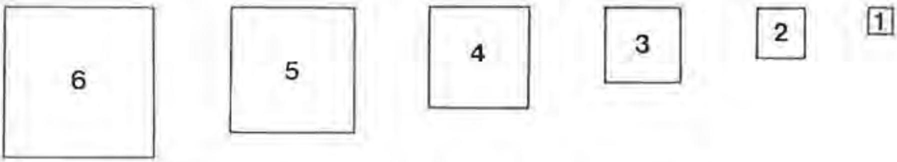


Damier de 15 × 15 (cadre non compris).
225 carrés (15 × 15)
196 intersections (14 × 14)

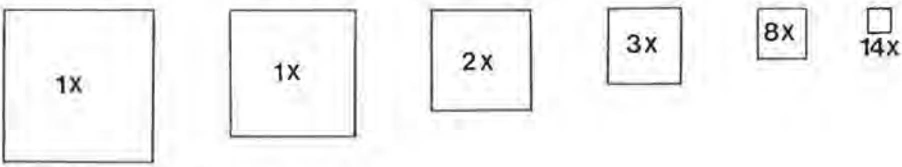
Activité manuelle: fabrication du damier.
Activité mathématique: dessin précis du damier

b) Les pièces: (35)

6 carrés VERTS: 1 de 6 × 6, 1 de 5 × 5, 1 de 4 × 4, 1 de 3 × 3,
1 de 2 × 2, 1 de 1 × 1.



29 carrés ORANGES: 1 de 6 × 6, 1 de 5 × 5, 2 de 4 × 4, 3 de 3 × 3,
8 de 2 × 2, 14 de 1 × 1.



Activité manuelle: fabrication des pièces
Activité mathémathique: dessin des pièces sur le plus petit espace possible.

c) La boîte

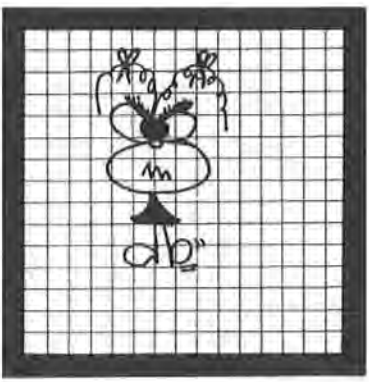
Boîte de 17 × 17 ou 15 × 15 (à l'intérieur) avec son couvercle pour ranger le tout.

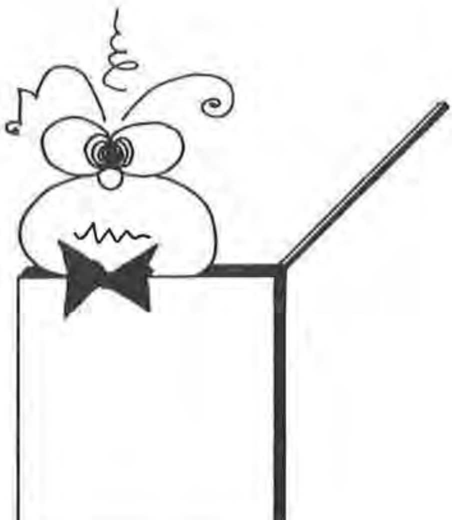
Activité manuelle: fabrication de la boîte et du couvercle
Activité mathématique: plan de la boîte et du couvercle.

d) Le carnet de notes:

Au fur et à mesure des activités, trouver le meilleur moyen de noter ses recherches.

Activité mathématique: classements, repères, organigrammes...





Voici un premier exercice utilisant les 6 pièces vertes

Recherchons par exemple la plus petite feuille de papier (aire) qui puisse les contenir toutes. Nous faisons appel à ce stade à la notion de pavage.

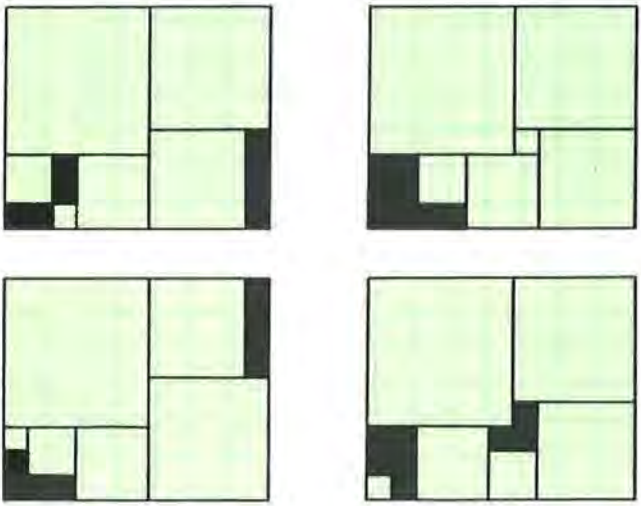
Aire des pièces:

$6 \times 6 = 36$
$5 \times 5 = 25$
$4 \times 4 = 16$
$3 \times 3 = 9$
$2 \times 2 = 4$
$1 \times 1 = 1$

6 pièces = 91 → 91 cm^2

– Ces pièces entrent-elles dans une plaque de 11×9?
– Quel format de papier est-il le mieux adapté?

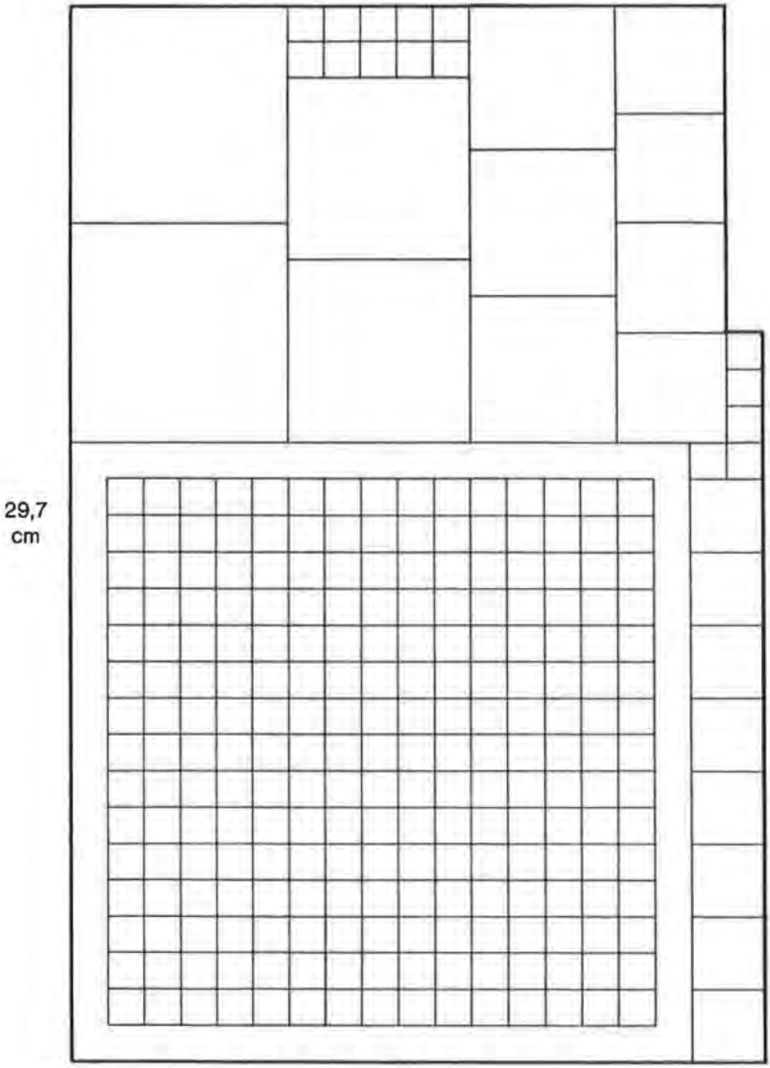
NB: Les pièces «6» et «5» impliquent qu'au moins un côté du «carré» ou du «rectangle» mesurera 11 cm.



etc...

Le format de papier le mieux adapté est: A6

Nous pouvons pratiquer de la même manière avec les pièces oranges. Une question se posera peut-être: «Quel à format de papier minimum nous permettrait de fabriquer à la fois le damier et les pièces»?



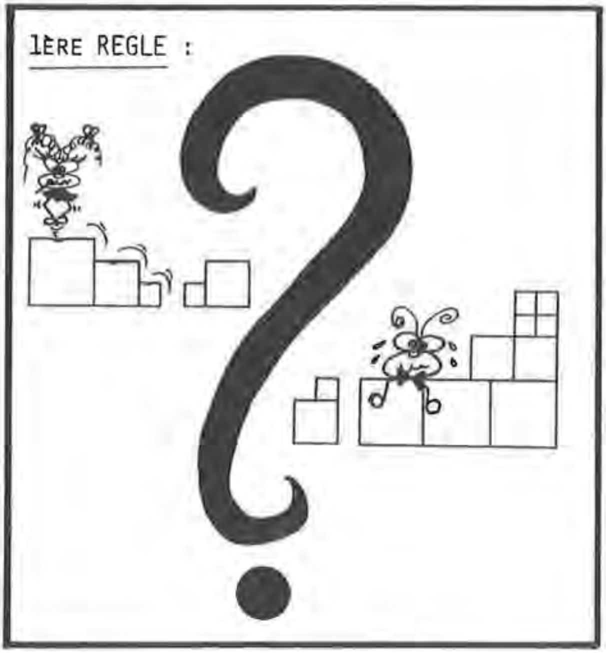
Eh bien oui!... Tout peut se placer dans un format A4!... Qui l'eût cru?...

Comment jouer?

Lorsque le jeu est réalisé, on peut se demander quelles seront les règles à appliquer. La pratique et l'expérimentation nous ont permis d'arriver à la proposition suivante:

Il y a plusieurs manières d'appréhender ce jeu. Pour le faire véritablement sien, il faut d'abord le créer puis jouer sans se fixer de règle au départ. C'est petit à petit que l'on jalonnera son parcours de règles afin de se fixer des buts à atteindre. Le réflexe qui devrait être le nôtre dans de nombreuses occasions se résumerait ainsi:

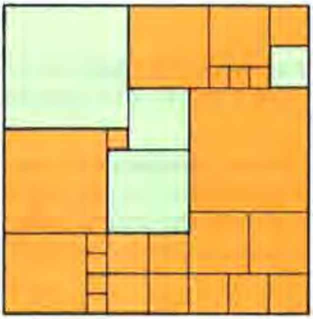
«Que peut-on faire avec cela?...»



JOUONS... JOUEZ,

EN TOUTE LIBERTÉ

Voici quelques cheminements parcourus:

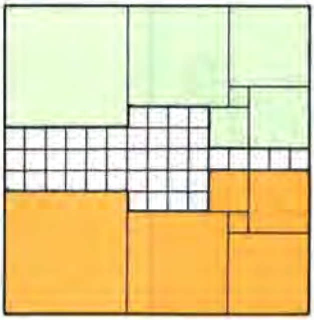


① Pavage au hasard des pièces sans ordre défini.

On constate ici que toutes les pièces vertes ne sont pas placées.

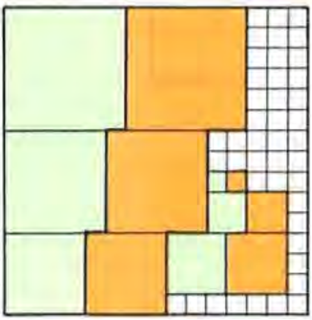
② Autre possibilité: tous les verts sont placés.

Les autres pièces sont placées au hasard. (ou peuvent combler les vides en commençant par les plus grandes).



③ Tous les verts sont placés puis les autres pièces de 1 à 6 en symétrie.

Les vides sont ensuite comblés. (ils ne sont pas recouverts ici, pour mieux observer la symétrie).



④ On peut aussi essayer de placer chaque fois côte à côte le 6 vert et le 6 orange, le 5 vert et le 5 orange...

Avec cette disposition, on se trouve confronté à un problème, il est impossible de paver l'espace avec les pièces restantes. Que faire?...

Quelques travaux d'élèves

En appliquant la règle suivante:

«Placer toutes les pièces vertes sans qu'elles se touchent et sans qu'elles touchent les bords, puis les pièces oranges en commençant par les plus grandes possibles», des élèves de 6P ont réussi à trouver 69 solutions différentes en 2 h 30 min de jeu.

Les voici sous forme d'un tableau ne tenant compte que des pièces oranges:

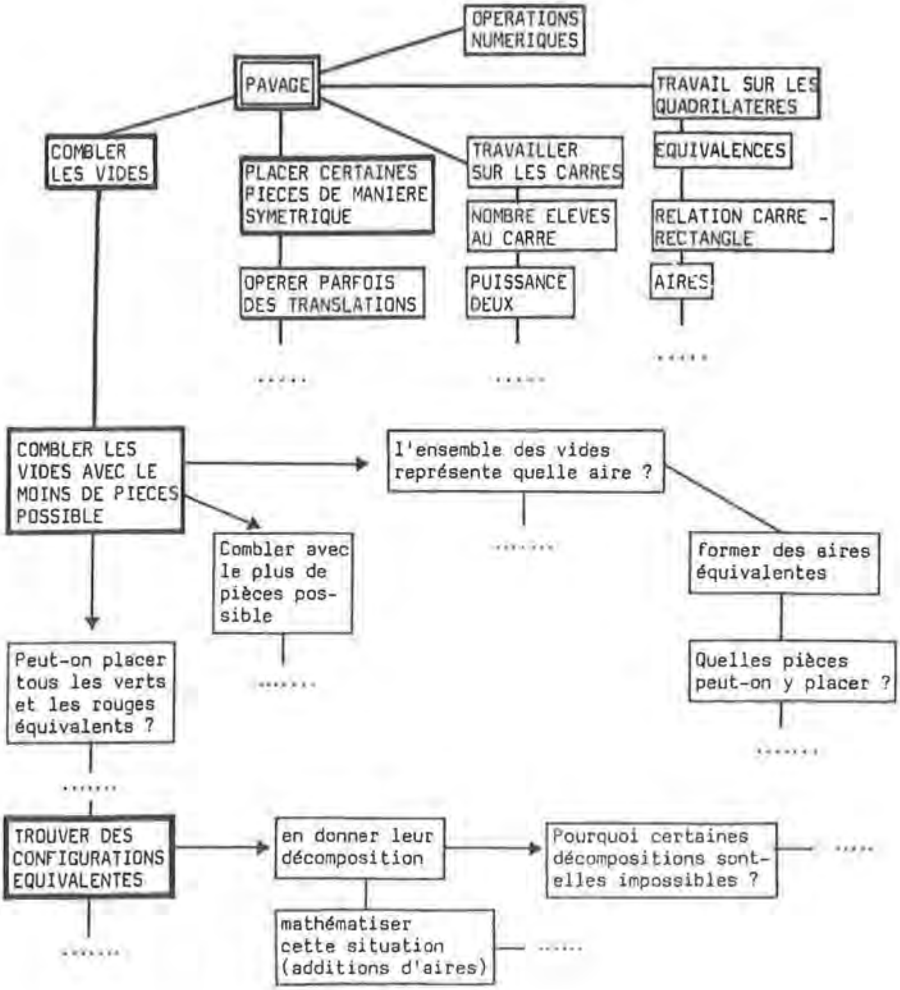
Nº du dessin	P 1	P 2	P 3	P 4	Nombre de pièces oranges	Remarques
1	–	–	–	–	0	
2	1	–	–	–	1	
3	–	–	1	–		
4	–	–	–	1		} 2 solutions différentes
5	–	–	–	1		
6	1	1	–	–	2	
7	1	–	1	–		
8	1	–	–	1		
9	–	1	1	–		
10	2	–	–	–		
11	–	2	–	–		
12	3	–	–	–	3	
13	2	1	–	–		
14	2	–	1	–		
15	1	2	–	–		
16	1	–	2	–		
17	1	1	1	–		
18	1	1	–	1		
19	–	3	–	–		
20	–	1	2	–		
21	2	1	–	1	4	} 2 solutions différentes
22	2	1	–	1		
23	1	2	–	1		
24	–	3	1	–		
25	2	–	2	–		
26	3	–	–	1		
27	4	–	–	–		
28	2	–	2	–		
29	2	2	–	–		
30	1	2	1	–		
31	3	1	–	1	5	
32	3	1	1	–		
33	3	–	1	1		

Nº du dessin	P 1	P 2	P 3	P 4	Nombre de pièces oranges	Remarques
34	3	–	2	–	5	
35	2	2	1	–		
36	4	–	–	1		
37	1	3	1	–		
38	1	4	–	–		
39	3	2	–	–		
40	5	–	–	–		
41	4	–	1	–		
42	4	1	–	–		
43	–	5	–	–		
44	2	3	–	–		
45	4	1	1	–	6	
46	5	–	1	–		
47	2	4	–	–		
48	3	2	1	–		
49	5	–	1	–		
50	3	–	3	–		
51	2	3	1	–		
52	4	1	–	1		
53	3	3	–	–		
54	4	–	1	1		
55	6	–	–	–		
56	3	4	–	–	7	
57	4	2	1	–		
58	5	2	–	–		
59	4	2	1	–		
60	7	–	–	–		
61	6	1	–	–		
62	6	–	1	–		
63	6	–	–	1		
64	6	2	–	–	8	
65	5	3	–	–		
66	7	1	–	–		
67	7	–	1	–		
68	5	2	1	–		
69	8	–	–	–		

Des pistes qu'il est possible de suivre:
Intéressons-nous tout d'abord à une activité que l'on pourrait entreprendre avec un matériel adapté aux petits:

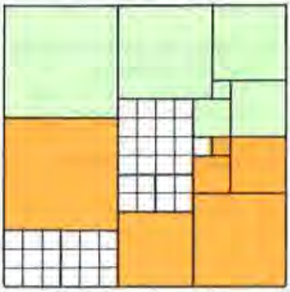
LE PAVAGE

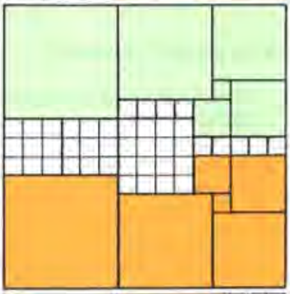
Voici quelques pistes de travail que l'on pourrait envisager en fonction des élèves de nos classes (de la 1ere enfantine à la fin du primaire... et même après l'école obligatoire).

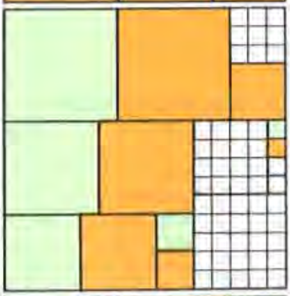


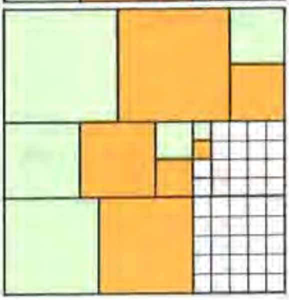
Un jeu tel que celui-ci peut nous permettre des relations avec le programme de 5P et 6P:

EXEMPLES:









RÈGLES:

a) Jeu sans contrainte.

(*Seule obligation:* placer 2 fois la série 1-2-3-4-5-6)

- Combler les vides par d'autres pièces.

(pièces vertes et oranges symétriques)

- Arriver à combler avec le moins de pièces possible.

- Eventuellement trouver des configurations équivalentes.

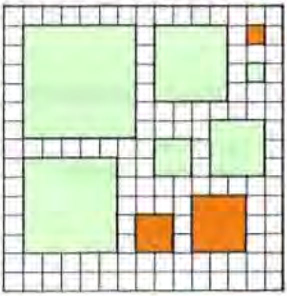
NOTIONS TOUCHÉES:

1. *Pavage du plan* (par manipulations)

2. *Travail des aires.* (aire de la plaque; aire de chaque pièce; aire restante).

3. *Travail sur les carrés.* (nombres élevés au carré) (relations existant entre les carrés, proportions, fractions...) ex.: $3^2 + 4^2 = 5^2$ (pièces équivalentes mais pas forcément interchangeables).

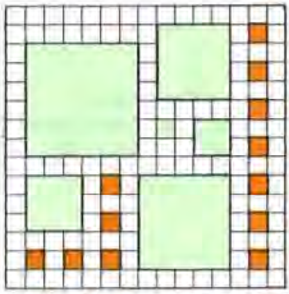
4. Etude des □ et des ▭



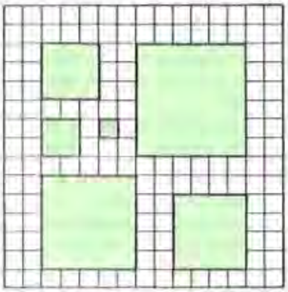
b) Jeu avec contraintes

a) Placer les 6 pièces vertes sans qu'elles se touchent et sans qu'elles touchent les bords.

b) Placer ensuite la pièce la plus grande possible puis dans le reste la plus grande possible...



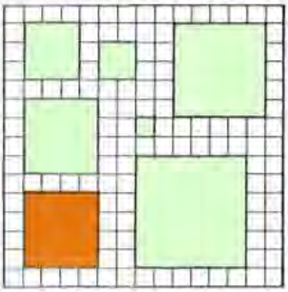
– On comble les espaces à combler selon la règle mais au fur et à mesure que le jeu se développe, on peut se poser une foule de questions:



. Peut-on mettre uniquement des pièces vertes à l'exclusion de toute autre?

. Peut-on ne mettre que des pièces d'une seule espèce?

. Quel est le minimum de pièces?



. Quel est le maximum de pièces?

. Quelles pièces, si elles existent, sont impossibles à placer? Combien de nœuds du quadrillage sont visibles au maximum? au minimum?

. Quelle sera la sur face maximum ou minimum recouverte?
etc.

Pavage du plan.
(par manipulation en suivant une règle stricte).

► en plaçant 1, 2 et 3

5. *Travail sur les voisinages, sur les frontières.*
(ne touche pas à... est distant de 1 ou de 2...)

6. *Travail sur les notions*

$< \quad > =.$

► en plaçant 12 fois le 1

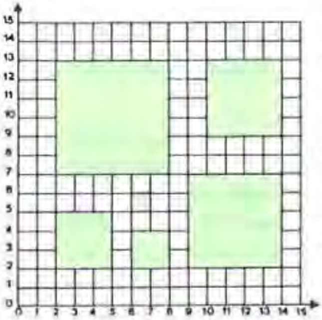
7. *Calcul de l'aire occupée, de l'aire libre.*

8. *Travail sur les nœuds du quadrillage.*

► en ne plaçant aucun orange.

9. *Additions*
Soustractions
Multiplications
Comparaisons
Equivalences
Analogies
Différences.

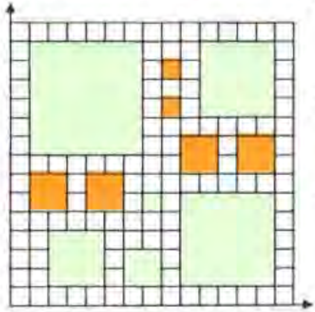
► en plaçant un seul orange



1) Placement des pièces:

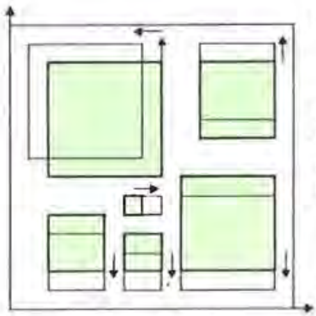
a □ b

Pièce «1»: (6;5)
(7;5)
(7;6)
(6;6)
Pièce «2»: (6;2)
(8;2)
(8;4)
(6;4)
Pièce «3»: (2;2)
(5;2)
(5;5)
(2;5)
Pièce «4»: (10;9)
(14;9)
(14;13)
(10;13)
Pièce «5»: (9;2)
(14;2)
(14;7)
(9;7)
Pièce «6»: (2;7)
(8;7)
(8;13)
(2;13)



On peut se contenter de ne donner que le point a et le N° de la pièce.

10. **Système de coordonnées.**
- codage
- décodage
- message
- transcription



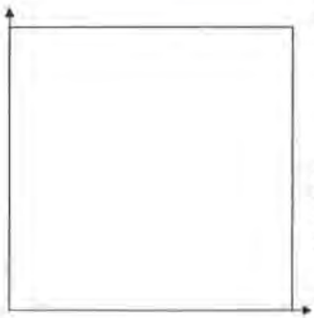
2) But du jeu:

Opérer des translations afin de préparer la place pour une ou plusieurs nouvelle(s) pièce(s).

11. **Translations**
- stratégie.

3) Translations possibles sur le modèle de départ.

Ex: Pièce 3: (2;1)
Pièce 6: (1;8)
Pièce 4: (10;10)
Pièce 5: (9;1)
Pièce 1: (7;5)
Pièce 2: (idem)



Par quoi peut-on compléter?

4 pièces de 2
2 pièces de 1

donner le code etc...

. **On peut aussi se poser plusieurs questions:**
- Quelle(s) pièce(s) faut-il déplacer pour n'ajouter qu'une pièce de 1, de 2...?
- Pour ajouter une pièce de 1 et une de 2...?

JOUONS AUSSI POUR LE PLAISIR DU JEU!...

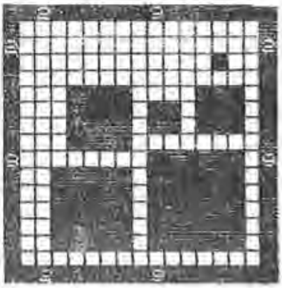
Nous avons placé les pièces vertes sur le damier et nous jouons selon la règle suivante:

«Les pièces ne se touchent pas et ne touchent pas les bords. Il s'agit de les déplacer en commençant par la pièce «1». Si on ne peut pas la bouger, on la sort du jeu et ainsi de suite jusqu'à la pièce «6». Si aucune pièce ne peut bouger on se retrouve avec une grille vide que l'on reconstruira en replaçant les pièces, en commençant par la plus grande, au premier emplacement possible, puis la 2e au premier emplacement, puis la 3e, la 4e, la 5e, la 6e (le «1») et on recommencera à déplacer le «1» jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.

Attention: Si le «1» sort du jeu, on déplace le «2» et on replace le «1» au premier emplacement possible et on le déplace jusqu'à ce qu'il ne puisse plus, etc...

Mieux que le texte écrit, observons ce qui se passe dans la réalité!

1.



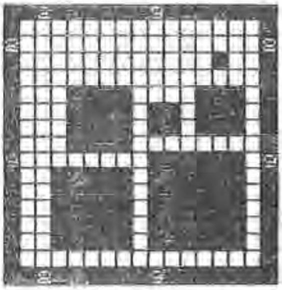
MARQUE TES
POSITIONS:
****
6: 9 9
5: 10 3
4: 5 4
3: 5 12
2: 6 9
1: 3 13

EN RESPECTANT CETTE LOGIQUE, QUEL SERA LE COUP SUIVANT ?

SI TU AS TROUVE, PRESSE S

Nous avons placé les pièces pour commencer à jouer.

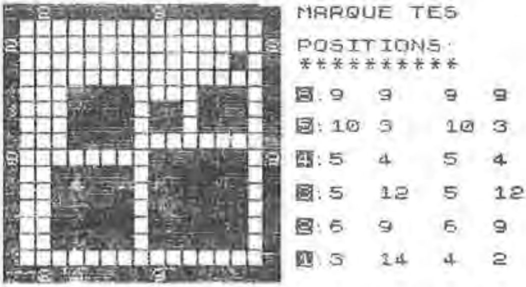
2.



MARQUE TES
POSITIONS:
****
6: 9 9 9 9
5: 10 3 10 3
4: 5 4 5 4
3: 5 12 5 12
2: 6 9 6 9
1: 3 13 3 14

Le «1» peut se déplacer d'un cran à droite (voir coordonnées).

3. FRAPPE TA SOLUTION:

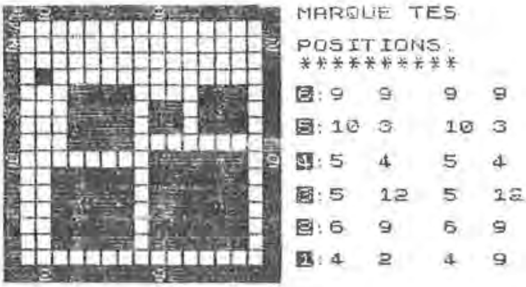


Le «1» ne peut plus se déplacer d'un cran à droite. Il va aller occuper la première case disponible soit la case (4; 2).

Pour le codage des pièces, nous considérons toujours le coin supérieur gauche.

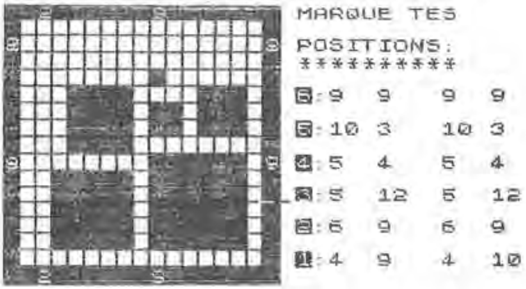
NB: Les pièces ne peuvent se déplacer que de la position (2;2), premier emplacement possible pour toutes les pièces, à (14;14), dernière position possible pour le «1». *Le déplacement se fait toujours horizontalement* de la ligne 2 à la ligne 14.

4. FRAPPE TA SOLUTION



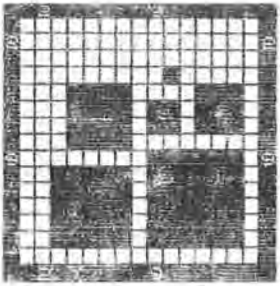
Le «1» ne peut pas occuper la case (4; 3) et doit aller se placer sur la prochaine case disponible, soit la case (4; 9).

5. FRAPPE TA SOLUTION:



Le «1» peut occuper la case suivante: (4; 10).

6. FRAPPE TA SOLUTION:

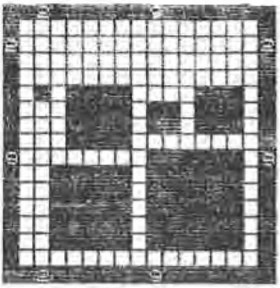


MARQUE TES
POSITIONS:
****

:	9	9	9	9
:	10	3	10	3
:	5	4	5	4
:	5	12	5	12
:	6	9	6	9
:	4	10	5	2

Le «1» ne peut plus occuper de case sur la ligne 4, il doit donc chercher un nouvel emplacement disponible.
Il existe à la ligne suivante à la position (5; 2).

7. FRAPPE TA SOLUTION:

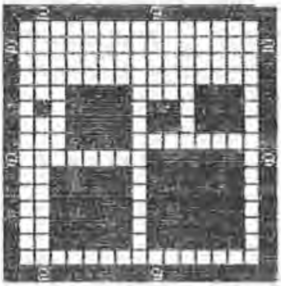


MARQUE TES
POSITIONS:
****

:	9	9	9	9
:	10	3	10	3
:	5	4	5	4
:	5	12	5	12
:	6	9	6	9
:	5	2	6	2

Sur cette ligne, le «1» ne peut plus se placer, il cherche alors la prochaine case disponible qu'il trouve en (6; 2).

8. FRAPPE TA SOLUTION:

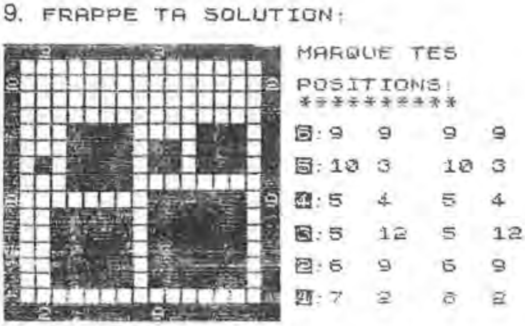


MARQUE TES
POSITIONS:
****

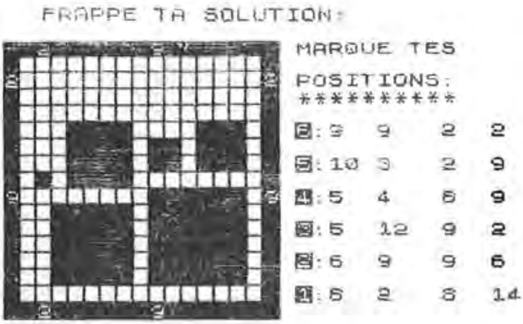
:	9	9	9	9
:	10	3	10	3
:	5	4	5	4
:	5	12	5	12
:	6	9	6	9
:	6	2	7	2

La case suivante se trouve en (7; 2).

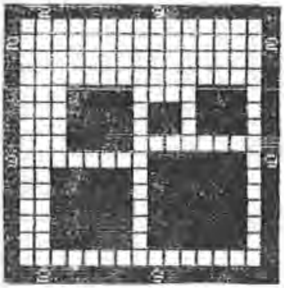
9.



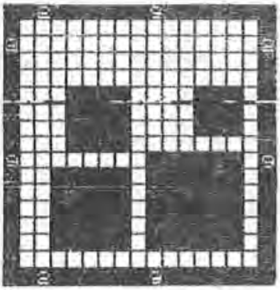
La suivante en (8; 2).



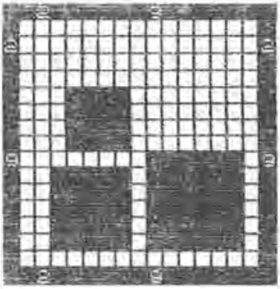
Arrivé en (8; 2), le «1» doit chercher une nouvelle case en continuant des investigations de la position (8; 2) à la position (14; 14) dernière place disponible.



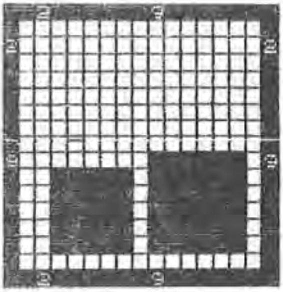
Le «1» ne trouvant pas de place disponible sort du jeu. Et on essaye de déplacer le «2».



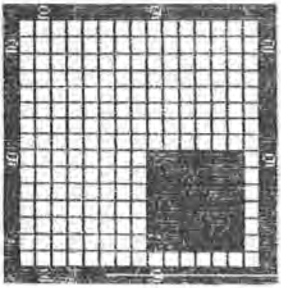
Impossible! le « 2 » sort du jeu. Qu'en est-il pour le « 3 » ?



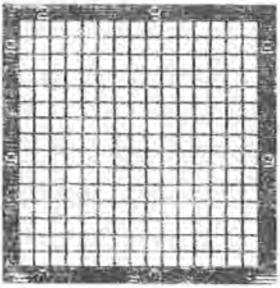
Impossible! le « 3 » sort du jeu. Essayons avec le « 4 ».



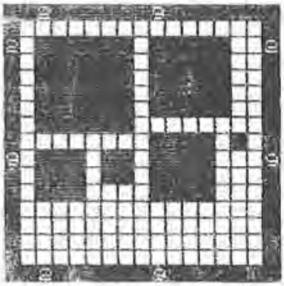
Impossible! le « 4 » sort du jeu. Aurions-nous plus de chance avec le « 5 » ?



Non, impossible aussi! Le « 5 » sort du jeu. Et le « 6 » nous direz-vous?



Impossible!...
et le « 6 » comme ses prédécesseurs quitte aussi le damier.



On replace alors les 6 pièces en commençant par le « 6 » au premier emplacement possible, et ainsi de suite jusqu'au « 1 ».

Nous en avons assez dit pour aujourd'hui. Alors à vous de jouer!

Les sommes de deux carrés

par André Calame

Dans le numéro 119 de Math-Ecole de septembre 1985, en page 16, on trouvait le problème suivant:

> 1985 est la somme de 2 carrés
>
> $$a^2 + b^2 = 1985$$
>
> Quels sont ces carrés?
>
> Quelle sera la prochaine année dont le millésime sera formé de deux carrés?

Ce problème a été le point de départ d'une étude sur les sommes de deux carrés lors d'une séance du Séminaire de mathématiques élémentaires à l'Université de Neuchâtel. Ce séminaire regroupe des maîtres en activité dans les écoles secondaires et des étudiants qui, pour la plupart, se voueront à l'enseignement.

Nous donnons ici un résumé de ce travail avec les quelques modifications que nécessite le passage de l'exposé oral au texte écrit.

On constate que

$$1985 = 49 + 1936 = 7^2 + 44^2$$
$$1985 = 961 + 1024 = 31^2 + 32^2$$

D'ici à l'an 2000:

$$\begin{aligned}
1989 &= 225 + 1764 = 15^2 + 42^2 \\
&= 900 + 1089 = 30^2 + 33^2 \\
1993 &= 144 + 1849 = 12^2 + 43^2 \\
1994 &= 625 + 1369 = 25^2 + 37^2 \\
1997 &= 841 + 1156 = 29^2 + 34^2 \\
2000 &= 64 + 1936 = 8^2 + 44^2 \\
&= 400 + 1600 = 20^2 + 40^2
\end{aligned}$$

Certains nombres sont somme de deux carrés, d'autres pas. Ceux qui sont somme de deux carrés peuvent l'être d'une seule manière, de deux façons ou peut-être plus. Ceci nous amène à deux questions:

1) Y a-t-il des nombres dont on peut savoir d'avance qu'ils ne sont pas somme de 2 carrés?
2) Y a-t-il des nombres dont on peut savoir d'avance qu'ils sont somme de 2 carrés?

Il est aisé de donner une réponse à la première question et de la démontrer:

Les nombres qui sont des multiples de 4 augmentés de 3 ne sont jamais somme de deux carrés.

En effet, supposons que le nombre n soit somme de deux carrés

$$n = a^2 + b^2$$

et examinons les trois cas possibles suivant la parité de a et b:

1) a et b sont tous deux pairs:

   On peut poser: $a = 2r$ et $b = 2s$;

   $n = a^2 + b^2 = 4r^2 + 4s^2 = 4(r^2 + s^2) = \text{mult. } 4$

2) Un des nombres est pair (par exemple a) et l'autre impair:

   On peut poser: $a = 2r$ et $b = 2s + 1$;

   $n = a^2 + b^2 = 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 =$

   $4(r^2 + s^2 + s) + 1 = \text{mult. } 4 + 1$

3) a et b sont tous deux impairs: $a = 2r + 1$ et $b = 2s + 1$;

   $n = a^2 + b^2 = (4r^2 + 4r + 1) + (4s^2 + 4s + 1) =$

   $4(r^2 + r + s^2 + s) + 2 = \text{mult. } 4 + 2$;

n n'est jamais de la forme mult. 4 + 3.

Une réponse à la seconde question a été donnée par Fermat au XVII^e siècle:

Tout nombre premier de la forme $p = 4m + 1$ est décomposable en une somme de deux carrés.

La démonstration repose sur deux résultats classiques de la théorie des nombres: le petit théorème de Fermat et le théorème de Wilson. Voici la liste des nombres premiers $p = 4m + 1$ inférieurs à 100 et leur décomposition en somme de deux carrés (y compris le cas de 2, seul nombre premier pair):

$2 = 1 + 1$	$41 = 16 + 25$
$5 = 1 + 4$	$53 = 4 + 49$
$13 = 4 + 9$	$61 = 25 + 36$
$17 = 1 + 16$	$73 = 9 + 64$
$29 = 4 + 25$	$89 = 25 + 64$
$37 = 1 + 36$	$97 = 16 + 81$

Ainsi, le problème est résolu pour tous les nombres premiers. Mais qu'en est-il des nombres composés? Ici intervient une propriété essentielle de l'ensemble S des nombres naturels qui sont somme de deux carrés:

Si deux nombres appartiennent à l'ensemble S, il en est de même de leur produit.

Exemple: $5 = 1 + 4$ et $13 = 4 + 9$ avec $5 \cdot 13 = 65 = 1 + 64$

Ainsi dans l'ensemble S, la multiplication est une opération interne. La démonstration de cette propriété donne en même temps la manière de décomposer le produit en somme de deux carrés.

Soit (1) $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$

alors $xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

Dans le dernier membre, on peut additionner et soustraire le terme 2abcd qui permet d'obtenir des carrés:

$$xy = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2)$$
$$(2)\quad xy = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ ou}$$
$$xy = (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2)$$
$$(3)\quad xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Nous obtenons donc deux décompositions du produit xy sauf, d'une part, si $a = b$ ou $c = d$, d'autre part si l'un des termes a, b, c, d est nul.

Dans la suite, nous appellerons algorithme du produit le passage des formules (1) aux formules (2) et (3).

Il est maintenant possible de donner une solution complète du problème pour tout nombre naturel n, en procédant par étapes:

1) On décompose n en produit de facteurs premiers.
2) On met en évidence «les facteurs carrés», c'est-à-dire tous les facteurs premiers avec un exposant pair maximum

   $n = c^2 d$

   d est alors un produit de k facteurs premiers tous distincts.

3) Si $k=0$, on a: $n = c^2 = c^2 + 0^2$

et le problème est résolu.

Si $k > 0$ et qu'un des facteurs premiers de d est de la forme 4m+3, alors la décomposition est impossible; n n'est pas la somme de deux carrés. La démonstration un peu délicate de ce point repose sur une méthode due à Fermat.

Si $k > 0$ et que tous les facteurs premiers de d sont de la forme 4m+1, on décompose chacun d'eux en somme de deux carrés.

4) On applique l'algorithme du produit pour mettre d sous forme de deux carrés: $d = a^2 + b^2$

Dès lors: $n = c^2(a^2 + b^2) = (ac)^2 + (bc)^2$
et le problème est résolu.

Exemples: $n = 1225 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2 \cdot 1 = 35 + 0^2$

$n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 12^2 \cdot 7$ décomposition impossible

$n = 1625 = 5^3 \cdot 13 = 5^2 \cdot 5 \cdot 13 = 25 \cdot (2^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 3^2)$

$= 25 \cdot (4^2 + 7^2) = 25 \cdot (16 + 49) = 400 + 1225$

$= 20^2 + 35^2$

Si d possède plus de deux facteurs premiers, il est possible de les combiner de différentes manières par l'algorithme du produit. Si k est le nombre des facteurs premiers, on peut obtenir au plus 2^{k-1} compositions différentes

Le plus petit nombre naturel avec trois décompositions est 325, tandis que 1105 est le plus petit nombre avec quatre décompositions:

$$\begin{aligned}325 = 5 \cdot 13 = (2^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 1^2) \cdot (2^2 + 3^2) &= 10^2 + 15^2\\ &= 1^2 + 18^2\\ &= 6^2 + 17^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = (1^2 + 2^2) \cdot (2^2 + 3^2) \cdot (1^2 + 4^2) &= 4^2 + 33^2\\ &= 9^2 + 32^2\\ &= 12^2 + 31^2\\ &= 23^2 + 24^2\end{aligned}$$

Le jeu dans l'enseignement de la mathématique

Une tentative de communication d'une recherche universitaire[1]

par Edith Baeriswyl

Recherches pédagogiques versus pratiques scolaires.

Théories émanant du monde universitaire versus réalités tangibles du praticien.

Ces dichotomies existent, depuis fort longtemps et pas seulement dans le monde des sciences de l'éducation. Parfois elles prennent l'aspect de véritables oppositions, voire d'affrontements, parfois elles revêtent l'habit de la collaboration fructueuse.

A Genève nous n'échappons pas à cette situation, bien que certaines structures existantes ouvrent la porte à une collaboration plutôt qu'à une opposition: organisation de la Faculté de Pédagogie et des Sciences de l'Education (FPSE) permettant aux enseignants-praticiens de poursuivre des études de licence en cours d'emploi, détachement d'enseignants du secteur primaire à des postes d'assistants universitaires ou à des organismes de recherches (SRP, SRS), collaboration de professeurs de la FPSE à des projets sur le terrain et à des réflexions avec des méthodologues de différentes matières. Mais il reste que trop souvent les recherches émanant du milieu universitaire n'ont d'impact que sur un cercle restreint d'initiés et n'atteignent les praticiens qu'au hasard de rencontres ou de lectures fortuites.

Cette constatation, doublée du fait que l'équipe de recherche est composée de chercheurs universitaires ET de praticiens détachés, nous a amenés à réfléchir à la manière de communiquer nos résultats par un moyen plus accessible que la diffusion classique sous forme de livre, d'articles dans des revues spécialisées ou de communication dans des colloques.

L'exposition présentée au Centre Pédagogique de Geisendorf en octobre 1985 visait donc en premier lieu une communication effective au plus grand nombre possible de praticiens, futurs praticiens (candidats) et cadres de l'enseignement (méthodologues, inspecteurs, ...). Elle se voulait aussi un lieu d'échanges sur le thème présenté.

A. VUE D'ENSEMBLE DE LA RECHERCHE

Dans le cadre d'une recherche sur des situations de jeu dans l'enseignement de la mathématique, nous étudions plusieurs aspects des modes de fonctionnement des élèves:

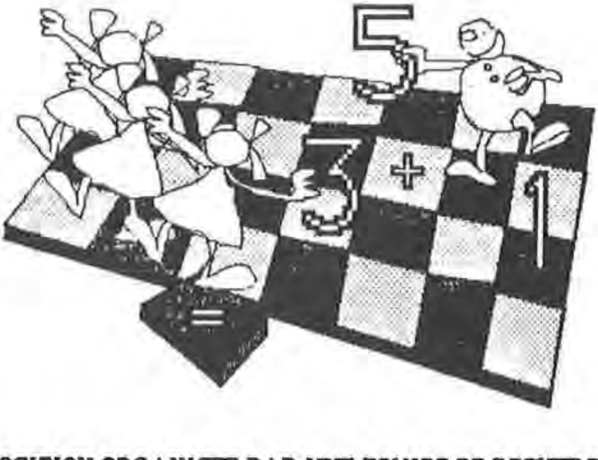
[1] Cette recherche est réalisée grâce à la subvention No 1.241.0.80 du Fonds National Suisse de Recherche la Scientifique par Linda Allal, professeur, Tra Bach Mai, assistante, Edith Wegmuller et Edith Baeriswyl, enseignantes détachées et assistantes.

- leur capacité à «gérer» des situations de jeu sans l'intervention ou la supervision constante de l'enseignant,
- leurs démarches et stratégies face aux contenus mathématiques des situations de jeu,
- les processus de régulation qui résultent de leurs démarches d'auto-évaluation et d'évaluation mutuelle en cours de jeu,
- l'influence des structures du jeu (règles de compétition ou de coopération) sur les démarches et les interactions entre élèves.

LE JEU

dans l'enseignement de la

MATHEMATIQUE



EXPOSITION ORGANISEE PAR UNE EQUIPE DE RECHERCHE DE LA FACULTE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'EDUCATION

Linda ALLAL Edith BAERISWYL
TRA Bach Mai Edith WEGMULLER

L'expérimentation est basée sur deux dispositifs de jeu créés pour la recherche:

Deco: jeu portant sur les opérations de décomposition du nombre, expérimenté avec 80 élèves de 1re, 2e et 3e année primaire.

Zigzag: jeu exigeant la coordination de démarches d'orientation spatiale et de calcul numérique, expérimenté avec 48 élèves de 2e et 3e primaire.

Pour chaque dispositif, nous avons défini deux versions qui diffèrent selon la structure d'interdépendance prévue par les règles énoncées aux joueurs:

Version 1: règles de compétition interindividuelle,
Version 2: règles de coopération entre joueurs pour atteindre un but commun.

L'exposition ne se voulait pas une présentation exhaustive de toutes les facettes de la recherche et des analyses effectuées. Nous avons cherché à illustrer les aspects qui nous semblaient les plus susceptibles d'être entendus et utilisables par les enseignants, en portant une attention particulière à la présentation que nous avons voulue aussi attractive que possible.

Dans cet article nous nous proposons de suivre le même cheminement que celui adopté pour l'exposition: présenter quelques «flashs» qui devraient évoquer la diversité des domaines touchés avant de tirer quelques conclusions sur la valeur relative d'une telle entreprise en nous référant aux commentaires oraux ou écrits des visiteurs.

B. CONTENU DE L'EXPOSITION

L'ensemble comportait 11 panneaux: deux panneaux de présentation générale plus «technique» (1 et 11), deux panneaux présentant des considérations générales sur le thème étudié: le jeu pédagogique (2 et 3), et sept panneaux montrant chacun une facette de la recherche (4 à 7 pour Deco – 8 à 10 pour Zigzag).

1. Préambule à la visite

Ce premier panneau se voulait être un guide pour situer brièvement les objectifs de la recherche et ceux de l'exposition et pour inciter les indécis à s'engager dans une lecture-visite.

2. Le jeu: une situation parmi d'autres

Parmi les moyens didactiques que l'enseignant peut offrir à ses élèves, le jeu n'a pas encore la place que pourtant certains pédagogues essaient de lui faire acquérir depuis plusieurs années. Effet pervers de son nom qui immanquablement est opposé au travail dans l'esprit de bon nombre d'entre nous, et méconnaissance des effets positifs qu'il peut engendrer font que trop souvent le jeu n'a qu'une place annexe dans les salles de classe. Progressivement au cours de nos recherches, nous avons tenté de dégager un modèle des différentes situations didactiques, basé sur le degré de structuration de la tâche. Dans ce modèle le jeu se révèle être une situation intermédiaire entre des situations très fermées (exercices et fiches de travail, Lexidata...) et des situations très ouvertes (situations-problèmes, productions des élèves avec Logo...) (voir Allal, 1981 et 1986). Les règles préétablies d'un jeu lui confèrent le caractère d'une tâche fermée mais à l'intérieur de ces contraintes l'élève peut et doit, pour mener à bien une partie, formuler des hypothèses, élaborer des stratégies et prendre des décisions: en cela le jeu peut s'assimiler à des tâches ouvertes.

Si nous sommes convaincus que le jeu est une situation didactique intéressante, nous ne voulons pas pour autant en faire un moyen unique mais bien plutôt une activité *parmi* et *avec* d'autres possibles. En effet plusieurs articulations peuvent être envisagées:

- A partir d'un jeu proposé aux élèves comme situation d'*initiation* à un nouveau concept, divers prolongements peuvent être prévus: fiches ou situations de recherche traitant du même contenu mathématique que le jeu.
- Ayant abordé un concept par des situations relativement «fermées» (leçons collectives et exercices), l'enseignant peut ensuite proposer un ou plusieurs jeux comme situation de *consolidation* des compétences des élèves.
- Dans le cadre d'ateliers axés sur des situations-problèmes, des jeux peuvent être introduits en tant que moyen de *diversification* des activités entreprises par les élèves.
- En relation avec plusieurs concepts relevant des quatre avenues du programme de mathématique, l'enseignant peut organiser des séances de «jeux libres» offrant aux élèves la possibilité d'utiliser divers jeux dans une perspective d'*élargissement* de leurs compétences générales de raisonnement, d'autonomie personnelle et d'interaction sociale.

3. L'enjeu du jeu pédagogique

Au cours de séances d'observation des élèves en situation de jeu, que ce soit lors des séances expérimentales (un couple d'élèves étant observé en dehors du contexte classe) ou lors de séances de «jeux libres» organisées par des enseignants (choix de jeux pour tous les élèves parmi un éventail à disposition), nous avons pu dégager trois groupes d'objectifs pouvant être exercés de manière privilégiée:

a. *interagir positivement avec ses pairs:* le jeu pédagogique, parce qu'il a une structure de base sous forme de règles et un enjeu tangible et motivant (gagner, faire le mieux possible), pousse chaque joueur à *contrôler les démarches de l'autre* (évaluation mutuelle), à *affirmer ses positions et à se justifier* en cas de contestation, à *collaborer* lors de parties coopératives, à *suggérer, aider* en donnant des explications à des camarades moins à l'aise, à *écouter* les conseils ou les suggestions de l'autre.

Ces comportements, paradoxalement, sont présents aussi bien lors de parties compétitives que de parties coopératives. Les enfants, moins rigoureux que les adultes en matière de respect de la structure d'interdépendance prévue, aident volontiers un adversaire par des suggestions ou des sollicitations positives mais peuvent aussi se montrer compétitifs face à un partenaire en version coopérative. Autrement dit, la transposition du jeu-dispositif, défini par les règles, en jeu-situation, entretenue par les conduites et les interactions entre joueurs, peut se réaliser de plusieurs manières, faisant du jeu une situation de pédagogie différenciée.

b. *développer des compétences scolaires* telles que: *lire* les règles du jeu, *écrire* des résultats partiels ou finaux, *compter* ses résultats ou ceux du camarade, *élaborer des stratégies, s'auto-évaluer.*

Parce qu'intégré à une activité très mobilisatrice et proche des occupations que l'enfant entreprend spontanément, le développement de ces compétences à travers le jeu n'est pas ressenti comme détaché de la globalité de l'activité et revêt un caractère peu rigide qui peut être source de motivation positive, particulièrement pour certains élèves dits «peu scolaires».

c. *développer l'autonomie:* lorsque des séances de jeux libres sont organisées, l'enfant est confronté à des *choix* de jeux et de partenaires. Il doit en outre *gérer le temps* disponible au mieux. En le laissant ainsi devant des choix, on l'oblige à prendre des décisions et à se montrer le plus autonome possible. C'est une compétence qui est souvent évoquée dans les textes officiels de l'éducation sans que l'on sache exactement quand et comment l'exercer: des séances de jeux libres peuvent viser son développement.

De plus, parce que le jeu est une situation dans laquelle les enfants s'engagent volontiers sans besoin d'une aide massive de l'enseignant, ce dernier peut prendre un certain recul nécessaire à une bonne *observation de ses élèves.* Il peut glaner une foule de renseignements sur les savoirs et savoir-faire de ses élèves par le fait notamment que ces derniers sont amenés à beaucoup interagir, à verbaliser leurs essais ou tentatives stratégiques.

(à suivre)

Bonnes feuilles...

La présentation des mathématiques, que ce soit dans les livres ou en classe, est souvent perçue comme autoritaire, et ceci peut provoquer un ressentiment de la part de l'étudiant. Idéalement, l'instruction mathématique dit: «Venez, raisonnons ensemble.» Mais ce qui sort de la bouche du professeur est souvent: «Regardez, je vais vous montrer que c'est la bonne manière de faire.» C'est la démonstration par coercition. Il y a plusieurs raisons pour que cela se produise. Tout d'abord, il y a le manque de temps. Nous devons venir à bout (ou nous croyons que nous le devons) d'un certain sujet dans le semestre de telle sorte que l'étudiant soit préparé à suivre le prochain cours de mathématiques ou de physique. Par conséquent nous ne pouvons nous permettre de nous attarder tendrement sur les difficultés mais nous devons expédier notre morceau à en perdre le souffle.

Il y a aussi de la part de certains professeurs le désir d'être brillant. (Ce que je vous raconte est joliment facile et évident pour moi, et si vous n'avez pas compris, vous devez vraiment être joliment stupide.)

Au revers de la médaille, il peut y avoir ignorance ou impréparation de la part du professeur qui le force à rester très proche du chemin tracé dans le manuel. De tels professeurs n'ont pas de prise sur leur sujet. Certains manquent de confiance en eux comme mathématiciens et sont terrorisés par l'autorité du texte ou de la monographie apprise. Ils ne savent pas comment broder ou, s'ils le savent, ils ont peur d'enseigner en brodant.

Extrait de
L'UNIVERS MATHÉMATIQUE
Ph. J. Davis et R. Hersch
Ed. Gauthier-Villars

Il n'existe pas de relation pédagogique «pure». La relation qu'un professeur de mathématiques, de gymnastique ou d'histoire a avec ses élèves est façonnée par la discipline qu'il enseigne. Le contenu disciplinaire a une importance jusque dans les dimensions relationnelles.

De même, il n'y a pas de contenu disciplinaire «pur». Cela peut paraître choquant mais les mathématiques enseignées par Roger ou par Claire ne sont pas les mêmes. Leur enseignement est marqué par leur personnalité, par ce que chacun a envie de transmettre à ses élèves et cela, même en mathématiques.

Extrait de
LES MATHS, LE FRANÇAIS, LES LANGUES...
A QUOI ÇA SERT?
J. Nimier, Ed. Cedic/Nathan

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIERES

Fondateur: Samuel Roller

Comité de rédaction:

MM. Th. Bernet, F. Brunelli, A. Calame, R. Délez, M. Ferrario, F. Jaquet, Y. Michlig, F. Oberson, D. Poncet.

Rédacteur responsable: R. Hutin

Abonnements:

Suisse: F 15.—, Etranger F 17.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion