149

MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1991
30e ANNÉE

Math-Ecole a 30 ans

Au rythme de 5 publications par année, Math-Ecole atteint cette année son 150e numéro!

Pour fêter cet anniversaire, Math-Ecole organise une **exposition-atelier** du 12 au 21 novembre 1991, dans le cadre du Musée suisse du jeu, à la Tour-de-Peilz, sur le thème:

JEU ET MATHÉMATIQUE
Jouer pour construire..., jouer pour maîtriser...

- L'enfant peut-il faire des mathématiques en jouant?
- Sous quelles conditions?
- Quels sont les jeux qui s'intègrent facilement dans nos programmes?

Ces questions sont au coeur de la problématique de l'enseignement et des apprentissages. A l'occasion de son 30e anniversaire, Math-Ecole souhaite poursuivre ce débat et convie tous ses lecteurs et amis à s'y joindre.

L'exposition-atelier propose au visiteur de résoudre des problèmes en jouant, met le matériel nécessaire à sa disposition, lui présente des situations par des panneaux qui l'engagent à essayer, à manipuler, à trouver des solutions.

Les activités retenues permettent d'accueillir 40 personnes (de 9 à 99 ans) simultanément, en complément de la visite du Musée suisse du jeu.

Un animateur est à disposition pour des **visites de classes** afin de permettre aux maîtres d'observer ses élèves en activité... ou de jouer également.

Heures d'ouverture

Musée suisse du jeu:	14 h à 18 h (lundi fermé)
Exposition-atelier:	10 h 30 à 12 h, 14 h à 18 h (lundi fermé)
Visites de classes:	10 h 30 à 12 h, 14 h à 15 h 30, 15 h 30 à 17 h 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21 novembre, sur inscription, chez M. Chastellain - Chenalettaz 89 - 1807 Blonay Tél. (021) 943 35 66)

Journée officielle:	samedi 16 novembre. Dès 15 h, visite guidée de l'exposition-atelier, conférence de F. Gutmacher. **Invitation à tous les lecteurs et amis.**

MATH-ECOLE 149

30e ANNÉE — Paraît cinq fois par an — SEPTEMBRE 1991

En guise d'éditorial...

Les mathématiques: outil et langage de notre époque

«Si notre société - à travers son institution scolaire - a consacré les mathématiques comme clef de voûte de l'excellence, c'est qu'elles constituent, aujourd'hui, la trame de sa modernité, son mode d'expression privilégié et le pivot de ses valeurs positives. Voici des siècles que nous parlons et écrivons le français, mais l'apparition de ces chiffres, qui nous sont désormais si familiers, est très récente. Le numérotage des maisons de Paris ne date que du premier Empire; le matricule des soldats, du XIXe siècle; le chéquier, du début du siècle; le numéro de français (numéro de la Sécurité sociale), de la dernière guerre; et l'ordinateur, des années cinquante. Ces innombrables codes qui quadrillent notre vie quotidienne – codes d'entrée de maison, codes postaux, cartes de crédit, télex, minitel, etc. – n'ont que quelques années d'existence. Un signe des temps: aujourd'hui on ne vous demande plus votre «adresse» mais vos «coordonnées» - repère cartésien s'il en fut - et le Français moyen est devenu l'idole des statisticiens.

Conséquence inéluctable de cette inflation irrésistible: par effet de vases communicants, le langage artificiel des chiffres (taux d'inflation, de croissance, d'intérêt...; chiffres du chômage, du commerce extérieur, de la délinquance, etc.; états informatiques, statistiques de l'emploi, sondage, diagrammes divers, SME...) a pris le pas sur le langage des lettres (calligraphie, dissertation, rhétorique, latin,...) et tend désormais à se substituer à la langue naturelle. Les joutes politiques de chiffres l'attestent, et la conversation courante dérive même dangereusement vers un jargon télégraphique à base de sigles et d'abréviations inspirées de l'algèbre.

Pour prendre conscience du rôle des chiffres dans la société moderne, imaginez, un instant, ce qui se passerait si, par un coup de baguette magique, tous les chiffres s'effaçaient soudain, sur les voitures, les maisons, les billets de banque, les cadrans téléphoniques, les relevés bancaires, les contrats, les horloges, les thermomètres, les ordonnances médicales, les bornes kilométriques, les calendriers, les comptabilités, les instruments de navigation des avions, les bulletins de salaire, etc. Quelle pagaille!

Mais constater l'omniprésence «incontournable» des chiffres ne suffit pas. Il faut, également, bien comprendre que les chiffres ne «vivent» jamais seuls et qu'ils ne sont que la partie visible de la logique mathématique qui les sous-tend.

Pour être efficaces et «crédibles», les chiffres ont besoin, en arrière plan, d'une infrastructure logique inspirée d'une méthode uniforme et régulière: à quoi serviraient, par exemple, les numéros de voitures, de passeports et de billets de banque, s'ils n'étaient pas l'objet d'un suivi, de contrôles systématiques et cohérents par des fonctionnaires?

Cette logique – qui permet de gouverner l'énorme montagne de chiffres que nous produisons et qui nous alimente quotidiennement – s'appelle **mathématique.** Multiforme, elle permet tous les degrés de sophistication, de l'arithmétique élémentaire de l'épicier à l'»espérance» mathématique du probabiliste. Ne soyons donc pas étonnés de la découvrir partout.

Son règne absolu date de Galilée qui a donné le premier rôle à son langage - et donc à sa forme d'intelligence – dans la fameuse apostrophe: **«Le livre de la nature est écrit en langue mathématique sans l'aide de laquelle il est impossible d'en comprendre un seul mot»**. Conséquence: à l'époque du nombre roi et dans une société où le mode de communication se réduit de plus en plus à un simple jeu de lettres et des chiffres, celui qui ignore le langage mathématique est traité en sourd-muet».

Arnaud-Aaron UPINSKY
Clefs pour les mathématiques
Ed. Seghers, 1988 p. 11-13

«Des nombres pour partager...»
par Richard Schubauer, méthodologue, Genève

La construction du nombre telle qu'elle est conçue dans les méthodologies des premiers degrés de l'école primaire est centrée presque uniquement sur des activités de mesure, de cardinalisation et comparaison de collections, de réunion d'ensembles disjoints. Ce serait un pléonasme que d'affirmer que le nombre sert à dénombrer et à comparer...

La lecture de l'ouvrage collectif de l'INRP «Apprentissages numériques», (Hatier, Paris, 1990) nous a permis d'élargir, à travers la notion de partage, le champ des activités liées à la construction du nombre. Les auteurs proposent plusieurs séquences, ordonnées, allant des partages inéquitables puis équitables d'objets déplaçables, aux partages d'objets non déplaçables.

	Objets déplaçables	**Objets non déplaçables**
équitable	perles, bonbons, biscuits, ...	gommettes, dessins, décalques, ...
inéquitable	fabrication de cornets-surprises	

Tableau: des situations de partage.

L'activité que nous allons vous présenter, baptisée «Les colliers», entre dans la catégorie des situations de partage équitable d'objets déplaçables, elle est inspirée de celle dite «Des maracas» (ouvrage cité). Nous faisons le choix de ne pas vous raconter uniquement le déroulement de la séquence, mais de vous permettre de comprendre ce qui se passe en amont de la situation de classe, lors de sa construction, de vous rendre sensibles à nos choix didactiques et à leurs justifications théoriques, en deux mots, de vous faire participer intellectuellement à notre travail d'ingénierie. Nous sommes encore actuellement en phase expérimentale, ce qui revient à dire que nous n'allons pas vous livrer une situation-problème clé en mains; cela sera l'objet d'une autre publication qui paraîtra dans le courant de l'année scolaire 1991-1992.

Deux doigts de théorie didactique

Dans les lignes qui suivent nous ferons souvent référence à la notion de «variable didactique», qui nécessite quelques explications. Ces variables sont des «objets modifiables», matériels, lexicaux, numériques, p. ex., sur lesquels les auteurs de séquences, les enseignants peuvent agir en vue de modifier les procédures des élèves en fonction de la connaissance visée. Dans la situation des colliers, le nombre de perles est une variable qui, comme nous le verrons ci-dessous, est une contrainte importante de la situation. Comme auteurs nous avons toujours eu en point de mire la connaissance que les élèves devraient construire, en l'occurrence le nombre. Les choix des variables seront continuellement «guidés» par ce but à atteindre. Nous sommes encore à une étape expérimentale, donc les hypothèses que nous élaborons sur les procédures attendues des élèves sont continuellement confrontées à leurs procédures effectives, ce qui entraîne de notre part des réajustements, des modifications de variables.

Construction de la séquence

1. Les choix matériels

Les colliers se fabriquent avec des perles, d'accord mais... leurs tailles, leurs couleurs, leurs formes sont-elles indifférentes? Le fil doit-il être rigide, souple? Questions innocentes!

Nous les avons choisies de tailles, de formes et de couleurs différentes. Les deux premières variables auront directement des conséquences sur les procédures; de même taille et de même forme, cela pourrait privilégier la mesure de longueur au détriment du dénombrement. De même, un fil trop rigide provoquerait aussi des comparaisons de longueurs, par contre il ordonne les perles et inciterait au dénombrement. Quant aux couleurs, elles seront en nombre supérieur à celui des élèves en présence, afin de les contraindre à ne pas se constituer des colliers par couleurs

2. Les degrés scolaires

Nous expérimentons nos séquences en 1P et en 2P, étant au fait que les élèves de 1P ne maîtrisent pas suffisamment la suite numérique pour dénombrer l'ensemble des perles mais juste assez pour leur propre collier; alors que cela ne devrait pas poser de difficultés à ceux de 2P. Les séquences sont aussi réalisées dans l'enseignement spécialisé et nous prévoyons une extension en 3P.

3. Les consignes

Pour bien mettre en évidence les choix que nous avons opérés au niveau des variables et les hypothèses sur les procédures attendues des élèves, nous présenterons les trois consignes ensemble. Certaines variables seront en italique dans le texte de la consigne, les autres, sous le texte.

3.1. Consigne A:

Partagez ces perles pour fabriquer chacun *un collier.* A la fin chaque collier doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables:	a) le nombre d'élèves; valeur de la variable:	3
	b) le nombre de perles; valeur de la variable:	47,50 ou 53

Vous avez déjà compris que le nombre de perles dépendait du nombre d'élèves en présence et qu'il déterminait le reste, ici 2. La valeur du reste a son importance, proche du nombre d'élèves il devrait leur poser un problème; trop petit, l'évidence n'est pas remise en question.

Cette consigne a servi de base d'expérimentation, c'est la plus proche de celle proposée dans le manuel déjà cité.

3.2. Consigne B:

Partagez ces perles pour fabriquer *trois colliers*. A la fin chaque collier doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables:	a) le nombre d'élèves; valeur:	2
	b) le nombre de perles; valeur:	50 ou 53

La modification de la valeur de la variable «nombre d'élèves» est issue de notre hypothèse que deux élèves devant fabriquer trois colliers, ils procéderaient d'abord à un partage préalable de la collection avant de les fabriquer, ce serait les contraindre à anticiper, par le passage d'emblée au plan numérique.

3.3 Consigne C:

Partagez ces perles pour fabriquer chacun *deux bracelets*. A la fin chaque bracelet doit avoir *le même nombre de perles* et il doit en rester *le moins possible* dans la boîte.

Variables:	a) le nombre d'élèves; valeur:	3
	b) le nombre de perles; valeur:	68 ou 70
	c) le nombre de bracelets; valeur:	6

Le reste prévu ici plus grand que le nombre d'élèves mais inférieur au nombre des bracelets posera certainement d'intéressants questionnements chez les élèves.

Nous avons fait l'hypothèse, avec cette troisième consigne, que les élèves s'engageraient d'abord dans un partage global préalable en trois parts puis dans un partage secondaire en deux parties, ce qui devrait les contraindre encore plus à l'usage du nombre.

4. Les procédures attendues

Vous pourriez vous demander pourquoi tenter de déterminer à l'avance les procédures des élèves, nous aurons bien assez l'occasion de les observer en train de «faire». La situation expérimentale et encore plus la situation de classe sont d'une telle complexité que l'observateur qui ne se donne pas a priori des repères, observera de tout un peu et ne pourra en aucun cas tirer des enseignements fiables, à même de valider ses hypothèses ou de les modifier à l'avenir.

Nous avons déterminé trois classes de procédures, ordonnées par leur apparition dans la situation. Nous verrons aussi que tenter leur classement peut à tout moment être remis en cause par l'analyse a posteriori, que certaines procédures sont «liées» et que cela n'est pas toujours facile d'en rendre compte littéralement.

a) Les procédures de partage:	P1:	chacun pour soi (par poignées, un par un)
	P2:	distribution organisée par un distributeur (un par un, deux par deux,...)
	P3:	partage organisé (chacun prend en même temps)

- P4: approximation du tout et répartition par approximation (numérique ou non)
- P5: partage avec comptage préalable et répartition approximative
- P6: partage avec comptage préalable et répartition exacte

b) Les procédures de mesure:

- M1: pas de mesure
- M2: mesure de longueur des colliers
- M3: correspondance terme à terme sans comptine
- M4: correspondance terme à terme avec comptine à répétition (1,1 - 2,2 - 3,3 - ... ou 1,1,1 - 2,2,2 -...)
- M5: correspondance terme à terme avec comptine simple (1,2,3,...)
- M6: comptage (coordination: pointage et numération parlée)

c) Les procédures de compensation (après mesure, si nécessaire):

- C1: pas de compensation (arrêt)
- C2: pas de compensation, retour au partage
- C3: compensation par rapport à la longueur des colliers (sur les perles: grosses-petites; sur les colliers: courts-longs)
- C4: compensation par l'acte de répartir la différence (sans le nombre)
- C5: compensation numérique

Ces procédures, classées hiérarchiquement, selon leur degré de complexité ne correspondent aucunement à des étapes que les élèves devraient franchir; elles sont dépendantes des représentations qu'ils se font du problème et des connaissances qu'ils peuvent mobiliser pour le résoudre. Autre remarque, les procédures des classes a et b pourraient très bien être mobilisées simultanément; celles de la classe c pourraient ne pas apparaître en cas de réussite de celles de partage et/ou de celles de mesure.

Le plan d'expérimentation

Il s'agit à ce stade de confronter nos hypothèses sur la situation à la réalité, de les valider ou de les infirmer, de modifier certaines variables en fonction des procédures effectives des élèves. Historiquement nous avons débuté avec la consigne A, ce n'est qu'après analyse des protocoles d'observation que nous avons construit les consignes B et C.

27.11.1990 1P; consigne A; 4 groupes de trois élèves, pris les uns à la suite des autres; 1 expérimentatrice, 1 observatrice et 1 «vidéiste».
Les séquences se sont déroulées hors classe. Une observation a été entièrement retranscrite, actions et paroles aux fins d'une analyse fine.

05.03.1991 2P; un groupe de 3 élèves; consigne A
un groupe de 2 élèves; consigne B
un groupe de 3 élèves; consigne C
Déroulement en classe, les autres élèves ayant des activités différentes.
1 expérimentatrice, 2 observateurs (papier-crayon); protocoles pour 3 groupes.

12.03.1991 1P; même dispositif qu'en 2P; 1 observateur; protocoles pour les 3 groupes.
Simultanément 3 autres groupes passent avec un autre expérimentateur-observateur; protocoles succincts pour les trois groupes.

En dehors de la consigne, nous avions prévu de ne pas intervenir autrement qu'en y renvoyant les élèves: – «Est-ce bien ce que je vous avais demandé de faire?» ou «Est-ce que chaque collier a le même nombre de perles, est-ce qu'il en reste le moins possible?». Décision fut prise de ne pas se fixer sur la réussite de la tâche, mais seulement d'essayer de comprendre jusqu'où et comment les élèves prenaient en charge la situation.

En résumé cela nous donne sept groupes pour la consigne A, trois groupes pour la consigne B et trois groupes pour la consigne C.

Un exemple de séquence en première primaire (nov. 1990)

Nous n'allons pas vous imposer la lecture d'un protocole complet, quoi que ce soit une opération très enrichissante; nous nous tiendrons à une présentation chronologique des moments clés de la séquence accompagnés de commentaires sur les procédures des élèves.

Les élèves: Joao (J), Kantuta (K) et Maria-Luisa (M)

L'expérimentatrice (E)

Les codes entre [ ] renvoient aux procédures décrites auparavant.

Pendant cinquante secondes les élèves fabriquent chacun pour soi un collier, en silence. [P1]

K à J *t'en as combien*
K et J *(à deux voix) un deux trois quatre... ... douze treize...*
J *... quatorze*
K *... treize (à M) combien toi*
M *quinze*

Mesure de chaque collier séparément [M6]: J = 16; K = 16; M = 15. La boîte est vide (...)

E *voilà alors vous avez fait ce que je vous avais demandé ensemble oui (...)*
K *mais lui il en a plus [comparaison sur le nombre: 16 > 15]*
E *est-ce qu'il a le droit d'en avoir plus que toi*

Nous remarquerons que pour ces élèves «le moins possible» signifie prendre toutes les perles.

E *alors comment faire*
J *faudra tout défaire [C2] (...)*
E *qu'est-ce que t'en penses Kantuta*
K *et ben moi... euh... je pense que quand on prend un l'autre y prend la même chose (...) après lui il en prend deux et pis on en prend deux [P3]*

La procédure proposée ne tiendra pas le coup au-delà de «six» les élèves reprendront [P1]

Puis comptage chacun pour soi [M6]; J = 17; K = 16; M = 14. (Ils approchent les colliers tenus verticalement pour en mesurer la hauteur) [M2]

J *Maria-Luisa elle en a pas le même nombre*
K à M *t'en as combien toi*
J *un de moins il lui manque*

K recompte les perles de M [M6]

K *t'en as seize*

La situation est la suivante: J = 16; K = 15; M = 16

L'expérimentatrice leur demande s'ils se souviennent de ce qu'elle avait demandé

M *oui d'avoir le même nombre (...)*
K *et qu'il doit y avoir le moins de perles là-dedans*

J et K rapprochent leurs colliers, verticalement

J *mets-le bien droit*
K *ouais j'en ai de trop*
J *bien droit... c'est toi qui en as un de plus*
K *non toi t'en as un petit un de plus pasque çui-là y dépasse çui-là [M2 et C3]*

J enlève une perle et la remet dans la boîte [C4]

E *alors comment est-ce que vous allez faire il faudrait que vous en ayez le même nombre et qu'il en reste le moins possible dans la boîte*
J *ah on a qu'à en enlever un... maintenant moi et Maria-Luisa on est... [C4] (J prend le collier de M pour le comparer au sien)*
K *pis moi (elle rapproche aussi le sien)*
J *nous on est maintenant à la même hauteur (...) [C3]*
E *comme ça tout le monde en a le même nombre... alors comment est-ce qu'on peut vérifier que tout le monde...*
K *... on compte [M6] (...)*

Résultat du comptage: J = 15; K = 16; M = 16

K *on a qu'à enlever toute les deux un...*
J *... ouais ils enlèvent tous les deux un... c'est comme le mien [C5; ils anticipent sur le nombre cette fois] (K et M remettent une perle dans la boîte) (...)*
E *(..) pis dans la boîte il en reste le moins possible*
J *deux*
K *y en a deux*
E *Est-ce que c'est le moins possible ensemble oui*

L'échange didactique continue encore un moment centré sur une proposition de Maria-Luisa «si on en enlève une chacun on en aura toujours la même quantité».

Nous pouvons relever à ce stade à quel point la séquence est riche; l'éventail des procédures et leur évolution nous confirment l'intérêt d'une telle situation pour la construction du nombre.

Si ces élèves utilisent le nombre pour mesurer leur propre collier, ils ne savent pas encore quoi en faire lorsqu'ils décident de comparer les colliers. Chez la plupart des élèves de 1P que nous avons observés, la comptine est en place, le dénombrement de collections jusqu'à vingt éléments est acquis, mais cela n'est pas suffisant pour affirmer qu'ils ont construit le nombre.

Après analyse du protocole complet, nous prenons conscience qu'ils n'utilisent pas le nombre pour partager...!

De cette constatation sont nées les consignes B et C.

Avec les nouvelles consignes

Décision est prise d'observer des séquences correspondant aux consignes A, B et C en 2P et encore en 1P (mars 1991) avec l'hypothèse que les séquences B et C vont permettre aux élèves d'anticiper sur le nombre.
Les résultats infirment nos hypothèses dans tous les cas sauf un, en 2P avec la consigne C. Huit groupes sur neuf ont mobilisé la procédure P1 pour le partage. En 2P, les 2 groupes (sit. A), l'autre, P1 puis P3 après mesure, pour les perles restantes, sans compensation. Remarquons ici qu'un partage bien organisé, dans lequel les élèves auraient confiance, éviterait la mesure et la compensation.

En 1P certains groupes n'ont pas pu dépasser le partage «chacun pour soi» et se retrouvèrent avec des collections de perles inégales, sans pouvoir dépasser cette situation: «le plus long il a gagné» annoncera un élève au tout début de la séquence!

Penchons-nous encore sur le groupe de 2P avec la consigne C. la séquence s'est déroulée très rapidement, les élèves anticipant même tellement fortement sur le nombre que l'un d'eux annoncera une fin prématurée de la séquence. La lecture de ce protocole est révélatrice de l'évolution des procédures et de la confiance qu'on les élèves dans le nombre, de la 1P à la 2P.

Les élèves: Alberto (A), Christian (C), Giuseppe (G)

L'expérimentatrice (E)

Nombre de perles: 70

E	*Partagez ces perles pour fabriquer chacun deux bracelets à la fin chaque bracelet doit avoir le même nombre de perles et il doit en rester le moins possible dans la boîte*
G	*ont fait un bracelet et dix... comme ça y en a moins dans la boîte [P4]*

Les deux autres sont d'accord, chacun réalise un bracelet de dix puis un second bracelet de dix.

G	*c'est fini [pour Giuseppe on ne peut pas faire mieux, l'anticipation sur l'estimation ayant été trop forte]*
E	*qu'est-ce qu'on vous a demandé*

Ils répètent la consigne.

E	*comment vous savez qu'il en reste le moins possible dans la boîte*
G	*ça se voit*
?	*on peut compter*
E	*il pouvait pas en rester moins*
C	*j'en ai vingt [M6]*
E	*on peut plus partager*

Christian fait des tas en distribuant un à un pour chaque tas et obtient trois tas de trois perles.
[P2]

E	*qu'a fait Christian*
A	*ça peut se faire ça*
G	*oui*

Chacun prend deux perles [P6] place une perle par bracelet; il reste quatre perles (reste plus grand que le nombre d'élèves.

Giuseppe propose d'en prendre encore une chacun, puis renonce devant l'argument de Christian rappelant les deux bracelets.

La suite?

Nous avons tenté par cet article de vous sensibiliser au travail d'ingénierie qui devrait soutenir toute réalisation didactique sérieuse avant sa mise à disposition des enseignants. C'est une étape incontournable, coûteuse en temps mais qui devrait permettre ensuite à l'enseignant de faire confiance à la situation.

Pour nous, l'expérimentation n'est pas terminée, nos hypothèses ne sont qu'en partie confirmées, d'autres modifications de variables sont déjà prévues.

Entraînement et apprentissage par la découverte

par Elmar Hengartner et Gregor Wieland
(article paru dans la revue *Die neue Schulpraxis*, de juillet/août 1990, cahier 7/8)

Traduction: Pierre Luisoni et Frédéric Oberson

En réalisant un manuel d'exercices productifs de calcul (produktive Rechenübungen, dans le texte), E. Ch. Wittmann et G. N. Müller (Université de Dortmund) ont rendu accessible une nouvelle conception de l'enseignement de la mathématique de la 1re année à la 4e année.

Pour l'ensemble de l'enseignement du calcul, ils ont mis au point exercices, problèmes et matériels didactiques favorisant un apprentissage actif par la découverte et une approche globale claire des notions fondamentales. Le 1er volume «De 1 + 1 à 1 x 1», destiné aux deux premières années primaires, vient de paraître. Le second, «Des procédés semi-écrits aux opérations écrites de calcul», à l'intention des 3e et 4e années, paraîtra dans un an environ.

Entraînement et découverte: une contradiction?

Ordinairement, les exercices occupent plus de la moitié du temps consacré à l'enseignement de la mathématique. Qu'il faille exercer les notions nouvelles afin d'assurer un apprentissage durable reste incontesté. Mais que l'on puisse et même doive lier exercices et apprentissage par la découverte apparaît moins évident. Si découvrir signifie trouver du nouveau et résoudre des problèmes, il apparaît possible de pratiquer ces activités, même dans la phase d'acquisition d'une notion.

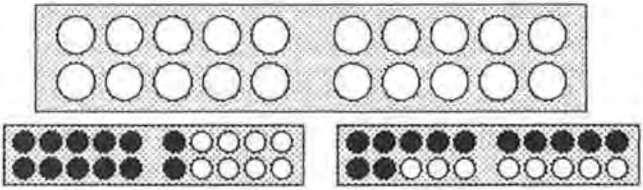
Une didactique qui met l'accent sur l'instruction et la communication, et qui accorde une grande importance au discours «question/développement» du maître, verra essentiellement dans la phase d'entraînement une phase où les notions nouvelles doivent être répétées aussi souvent et aussi longtemps qu'il le faut, jusqu'à ce qu'elles soient en place.

Il en va tout autrement dans la conception d'un apprentissage actif par la découverte: *l'exercice apparaît ici comme partie intégrante de toutes les phases du processus d'apprentissage*, considéré comme une sorte de découverte articulée. «Découvrir en s'entraînant et s'entraîner en découvrant». Ce qui signifie que, dans certains cas, des exercices d'entraînement font partie des données du problème et donnent l'occasion de faire des découvertes et, en d'autres situations, que l'apprentissage par la découverte inclut, à toutes les étapes, l'occasion de s'exercer.

L'idée qu'on puisse, en matière d'apprentissage du calcul, aménager la plupart des situations dans le sens de tels exercices et jeux, conçus comme «champs de découverte», est certes séduisante. Elle est maintenant devenue pour la première fois réalité pour l'enseignement du calcul dans les quatre premières années.

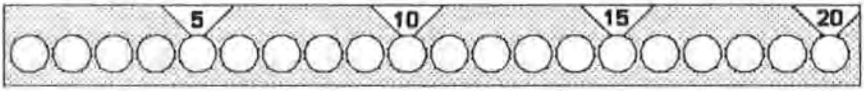
Le "Zwanzigerfeld"

C'est un arrangement de 20 disques (de la grosseur d'un jeton) disposés de telle sorte que deux groupes de cinq forment une dizaine aussi bien en ligne qu'en colonne.



Représentations de 6 + 6

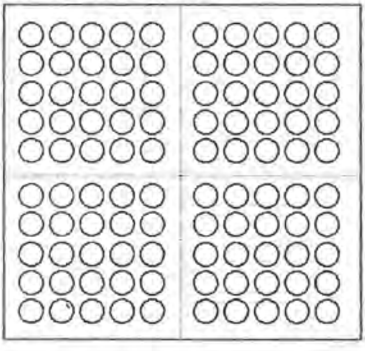
Le "Zwanzigerreihe"

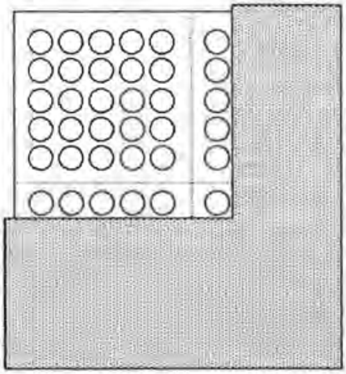


Le "Zwanzigerfeld" met en évidence l'aspect cardinal d'un nombre tandis que le "Zwanzigerreihe" met en évidence son aspect ordinal.

L'angle 1x1 sur le "Hunderterfeld"

Le "Hunderterfeld"





Représentation du 6 x 6 sur le "Hunderterfeld"

Un manuel d'exercices productifs de calcul

Nous voudrions tout d'abord présenter les objectifs et le contenu du manuel de Wittmann et Müller.

Depuis la réforme pédagogique des années 70, il existe, dans la littérature didactique consacrée au calcul, des exercices de type productifs. C'est de la quête de ceux-ci qu'est issu cet ouvrage. L'objectif était de mettre à disposition de l'enseignement de la mathématique des exercices productifs:

a) qui favorisent l'apprentissage actif par la découverte;
b) qui abordent des thèmes de manière globale;
c) qui accordent une grande importance à l'intuition, aux représentations mentales.

L'ouvrage propose toute une série d'exercices divers:

— des exercices d'introduction s'appuyant sur la manipulation de matériel;
— des exercices structurés orientés par des concepts mathématiques et d'autres construits de manière systématiquement variée;
— des exercices liés à l'environnement de l'enfant, donc organisés autour de situations concrètes de la vie quotidienne;
— des exercices d'acquisition d'automatismes, dénommés «calcul éclair» par les auteurs, présentés comme cours de calcul mental destiné à tous les degrés.

L'ouvrage étant conçu comme un tout «à la fois livre du maître, livre de l'élève et collection d'exercices) - auquel s'ajoute cependant un nombre restreint de fiches de travail -, l'enseignant a le choix; il peut s'en tenir à sélectionner quelques propositions, il peut adopter des parties entières du manuel.

Chaque thème traité comprend une description précisant:

— l'essence de la matière traitée: De quoi s'agit-il?
— les objectifs visés: Qu'est-ce qui doit être exercé?
— les moyens nécessaires: De quoi a-t-on besoin?
— une proposition de marche à suivre: Comment peut-on procéder?
— des idées de développement: Comment pourrait-on aller plus loin?

Si l'on fait la comparaison avec d'autres moyens d'enseignement en usage, l'utilisation de ce moyen d'enseignement et d'apprentissage paraît simple et les consignes proposées peu contraignantes. Souvent même, on aura l'impression que cela reste traditionnel: das Zwanzigerfeld, die Zwanzigerreihe, das Hunderterfeld, die Hundertertavel (voir dans la partie illustration: pages de gauche). Pourtant ce qui est proposé est surprenant et nouveau. C'est l'activité de l'élève qui focalise le tout et celle-ci est envisagée comme une action de découverte dans le cadre de problèmes posés globalement. Dans tous les thèmes, on constate le refus d'un calcul purement aveugle et mécanique («Bigeli - Rechnen») et le parti-pris est manifeste pour un apprentissage significatif, par la découverte.

Nous voudrions préciser maintenant différentes conceptions de l'apprentissage et tenter de les évaluer dans la perspective de l'apprentissage en mathématique.

Exemple 1 : Le dé basculé (dès la 1ère année)

Thème :
On exerce l'addition (et la soustraction) d'entiers positifs inférieurs à 20.
Découverte d'une stratégie amenant la fin d'une partie.

Matériel :
Un dé à jouer, une feuille de papier ou une bande de papier présentant la suite des 20 premiers entiers.

Jeu à deux :

1) Le joueur A jette le dé et obtient, par exemple, le nombre 3.

2) Le joueur B fait basculer le dé sur l'une des 4 faces latérales. Son choix définit un nouveau nombre à ajouter au précédent. Par exemple, en basculant vers la face 2, le nombre 5.

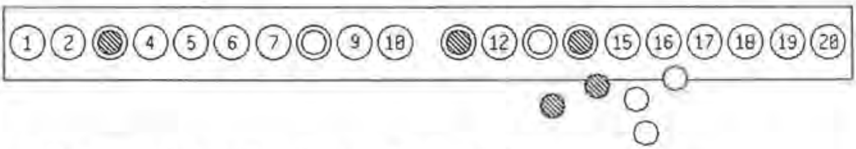
3) Maintenant le joueur A fait basculer le dé sur une face de son choix. Il tire ainsi un nouveau nombre à additionner au total déjà obtenu.

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 5 \\ \hline 8 \\ +\ 3 \\ \hline 11 \\ +\ 2 \\ \hline 13 \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

But du jeu :
Le joueur atteignant 20 ou plus a gagné.

Variantes :

Au lieu de noter les additions, on peut exiger des meilleurs de la classe qu'ils calculent mentalement. Ils expriment verbalement les calculs tout en plaçant leurs pions respectifs sur la bande des 20 premiers entiers, les joueurs ayant des pions de couleurs différentes.



Pour exercer la soustraction, on part de 20 et on soustrait successivement les nombres obtenus. Celui qui parvient, en premier, à 0 ou moins que 0 a gagné.

(tiré de Winter/Wittmann, 1984, Cahier d'exercices, page 4)

Les fins de parties permettent aux enfants de découvrir une stratégie gagnante. Supposons que le joueur A a obtenu la somme 13 et que le 2 figure sur la face supérieure du dé. Le joueur B basculera le dé de manière à cacher le 6 et à obtenir le 1. La somme est alors 14. Comme c'est maintenant au joueur A de faire basculer le dé, le joueur A va gagner. (Essayez maintenant vous-même!)

1. Un apprentissage actif par la découverte au lieu d'un «drill» mécanique

On trouve dans l'histoire de la didactique du calcul des conceptions divergentes de l'enseignement et de l'apprentissage. Wittmann les décrit, dans l'absolu, comme le reflet d'une *conception passive* ou *active*. Les deux positions ont pour fondement des conceptions psychologiques, en dernier ressort philosophiques, différentes et incompatibles de l'apprentissage humain (Messner 1978).

Dans la *conception passive*, c'est *l'apprentissage par association* qui est le fondement. L'apprentissage a été décrit par le courant de la psychologie associationniste (par ex. Wundt, Ebbinghaus) comme une association de représentations ou contenus de conscience, par le behaviorisme (par ex. Thorndike) comme une liaison stimulus - réponse (exemple: liaison entre un problème et sa solution). Ces conceptions insistent sur l'importance:

— de la *décomposition de la matière en petites unités*, que l'on tend à *isoler*;
— des *répétitions* fréquentes et du *contrôle* régulier.

Toute la gamme de fiches d'exercices, de jeux de calcul et de programmes commerciaux sont issus de cette conception.

La *conception active*, elle, met en première place l'*apprentissage significatif* (structuration). Le but visé est ici la compréhension ainsi que la diversification des perceptions, de la pensée et de l'expression verbale. Cela n'est possible que si les apprenants se trouvent eux-mêmes confrontés de manière active aux problèmes posés. Pour la Gestaltpsychologie (Wertheimer, Metzger), l'apprentissage a un caractère global et il est lié à des tâches significatives. Pour la psychologie génétique (Piaget, Aebli), un apprentissage structurant, significatif, est une action constructive, une production de relations dans le but de développer la mobilité de la pensée et de l'action. La maîtrise d'un exercice n'a pas pour but d'ingurgiter de la matière, mais au contraire, de modifier les structures de la pensée. Dans cette conception, l'important est que l'apprentissage:

— se rapporte à des contextes plus larges, ayant un sens pour l'élève et qui puisse être compris globalement;
— que l'enseignement développe l'activité personnelle et la découverte active.

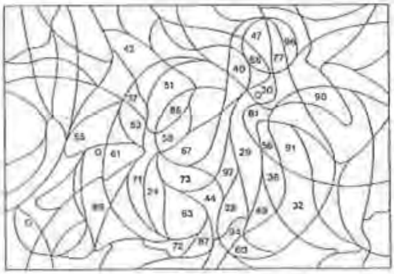
Deux exemples: apprentissage par association et apprentissage significatif

A l'aide de deux exemples ayant trait au même thème: soustraction (et addition) de nombres de deux chiffres, du niveau de la 2e et 3e année (exemples 2 et 3 dans les pages de droite) nous tenterons d'illustrer la différence entre apprentissage de type stimulus-réponse et apprentissage actif par la découverte. A première vue, on pourrait penser que les deux exercices sont importants et complémentaires (apprentissage significatif dans l'exemple 3 et acquisition d'automatismes dans l'exemple 2). En fait, les tâches proposées dans l'exemple 2 sont contenues dans l'exemple 3; mais elles se trouvent, dans ce dernier cas, placées dans le contexte d'un problème mathématique. Pour l'élève, il s'agit d'une situation à clarifier, à évaluer et par rapport à laquelle il doit se déterminer. Donc, en fait, les deux exercices sont de nature à s'opposer plus qu'à se compléter.

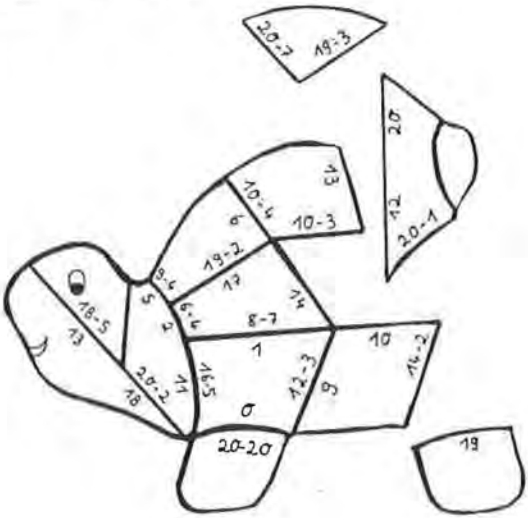
Exemple 2: "Le phoque multicolore"
Somme et différence de nombres à deux chiffres

Colorie les plages correspondant aux solutions!

1) 23 + 14 =
2) 23 + 24 =
3) 63 + 24 =
4) 63 + 34 =
5) 36 + 17 =
6) 47 + 34 =
7) 79 + 15 =
8) 58 + 38 =
9) 14 + 58 =
10) 49 + 37 =
11) 56 + 27 =
12) 19 + 46 =
13) 87 - 16 =
14) 74 - 14 =
15) 74 - 44 =
16) 58 - 34 =
17) 45 - 16 =
18) 87 - 29 =
19) 62 - 34 =
20) 75 - 39 =
21) 83 - 39 =
22) 91 - 42 =
23) 84 - 28 =
24) 92 - 15 =



Exemple 4: "La tortue"



L'accumulation d'apprentissage de type stimulus-réponse est improductif

Cette assertion reste valable même quand les élèves trouvent du plaisir à réaliser leurs exercices! Nous pensons ici à des démarches dans lesquelles:

a) tout est articulé en courtes séquences;
b) chaque objectif d'apprentissage, chaque opération partielle et chaque difficulté est isolée;
c) la plupart du temps, on montre ce qui est à faire à l'aide d'exercices-modèles, qu'on répète, sans varier la forme, jusqu'à ce que les élèves se soient familiarisés avec la situation;
d) un contrôle permanent est exercé de l'extérieur.

Ces caractéristiques, typiques d'un apprentissage simulus-réponse valent aussi pour une foule de matériels disponibles dans le commerce, qu'il s'agisse d'entraînement au calcul (Heinevetters Rechentrainer), du matériel LUEK (Apprendre-Exercer-Contrôler), de PROFAX ou du LITTLE PROFESSOR, ou de toute une série de fiches de travail. Ces matériels offrent diverses possibilités d'exercices de contrôle qui, vus de l'extérieur, paraissent la plupart du temps attractifs, ludiques, originaux et variés; pourtant, ils ne se basent, pour la plupart, que sur une conception étroite de l'apprentissage par association.

Une utilisation prépondérante de tels exercices en classe est improductive, Wittmann le justifie ainsi:

1) ces exercices sont artificiels, fabriqués comme des «plantons de serre» pour l'école, hors du contexte de la vie de tous les jours et non transférables à celle-ci;
2) la répétition d'exemples-modèles fabriqués d'avance fait l'effet de recettes et favorise une attitude passive d'apprentissage;
3) ce qui est acquis reste superficiel et sans effet à long terme, car ces exercices n'offrent pas l'occasion d'apprendre à résoudre réellement des problèmes et à établir des liens logiques.

Plaidoyer pour un apprentissage significatif et actif par la découverte

Lorsqu'on fait des exercices selon le principe de l'apprentissage actif par la découverte, toutes les tâches s'organisent de manière cohérente parce qu'orientées par un thème. Ces tâches ne sont pas interchangeables de manière quelconque comme c'est le cas dans l'exercice formel de l'exemple 4 (la tortue). Il s'agit de tâches multiples, qui permettent de différencier des niveaux de difficulté (dans l'exercice 5 des tirages de dés à deviner, par exemple, l'inventaire des possibilités d'obtenir 11 est plus difficile que l'inventaire lié à la somme 5).

De tels exercices exigent une réflexion personnelle à divers niveaux et la capacité individuelle d'échanger des informations, de s'expliquer; ce qui développe la confiance que doit acquérir l'élève en ses capacités de résoudre des problèmes. Plus on stimule l'activité propre de l'élève, plus on tend vers le succès à long terme et plus on suscite en lui une réelle motivation. Les élèves sont ainsi stimulés de manière plus globale et plus large.

Exemple 3: "Nombres inversés" (apprentissage par la découverte)

Consigne:

Choisis un nombre de deux chiffres par ex. 27
Inverse les chiffres 72
Calcule la différence 72 - 27 = 45

64 - 46 = 18

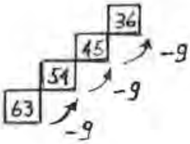
Exemples des élèves

53 - 35 = 18
84 - 48 = 36
74 - 47 = 27
93 - 39 = 54
61 - 16 = 45

On remarque:
Tous les résultats sont des multiples de 9.
Voici la liste des calculs dont le résultat est 27

63 - 36 = 27
85 - 58 = 27
96 - 69 = 27
41 - 14 = 27

Signalons ces nombres sur la table des cent premiers nombres.
Nous découvrons ainsi d'autres paires:



Nous découvrons:

Du nombre choisi au nombre obtenu en inversant les chiffres, il y a toujours trois pas de +9 ou -9 en diagonale.
Ce qui fait 3·9 = 27 comme différence. 3 est aussi la différence entre le chiffre des dizaines et celui des unités.
Cherche maintenant les paires de nombres formant une différence de 36 puis 45, 54, 63 ...
Inversons un résultat (multiple de 9). On obtient une paire dont la somme est 99.

54 + 45 = 99
27 + 72 = 99
18 + 81 = 99

Exercices récurrents et exercices immanents

A l'aide d'exemples, nous allons maintenant illustrer la différence importante qui réside entre deux types d'exercices destinés à l'apprentissage actif par la découverte. Prenons l'exemple 6. (les «tableaux barrés»), il est nécessaire de résoudre un bon nombre de cas avant de percevoir le rapport significatif qui les lie. Wittmann qualifie ces exercices d'*exercices récurrents* (*réflectives Ueben*, dans le texte). C'est le cas des exemples 3 (nombres inversés) et 5 (tirages de dés à deviner). Dans un premier temps, les élèves font du «Bigellrechnen». C'est seulement ensuite que la réflexion intervient et que sens et structure de l'exercice apparaissent.

Il en est tout autrement dans les exemples 7 (jeu de Nim) et 8 (le 15 gagne). Là, la situation est claire dès le début; l'exercice est en permanence lié à la recherche et la mise au point d'une stratégie. Wittman utilise l'expression *exercices immanents (immanentes Ueben*, dans le texte*)* pour désigner ce type d'exercices. L'exercice récurrent, avec ses deux phases d'exercices puis de découverte est moins exigeant que l'exercice immanent. Il est plus simple et peut être utilisé plus tôt dans une progression différenciée.

Les exigences d'un tel enseignement

Un enseignement de la mathématique, qui vise comme dans les exemples ci-dessus, à conjuguer découverte et solution de problèmes, nécessite également un changement dans la manière de comprendre l'apprentissage. Il s'agit de passer

— d'un enseignement basé sur une progression linéaire à un apprentissage stimulant basé sur des situations et problèmes ressentis par l'élève comme des défis;

— de l'idée du cheminement unique à la possibilité de progressions individuelles différentes;

— d'une organisation basée sur un découpage en tâches partielles isolées à une orientation prenant en compte des problèmes plus complexes;

— d'une évaluation extérieure à plus d'autonomie dans le contrôle et une réflexion plus attentive aux démarches de résolution de problèmes;

— d'une orientation unilatérale vers les résultats à une plus grande attention aux processus de pensée (voir Winter, 1988, page 9).

La suite de l'article de Hengartner et Wieland complète la caractérisation de l'enseignement de la mathématique proposé par les auteurs du manuel «Handbuch produktiver Rechenübungen», Dr. E. C. Wittmann et Dr. G. N. Müller (Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins, Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1990). Elle paraîtra dans un prochain numéro de *Math-Ecole*.

<u>Exemple 5</u>: "Tirage de dés à deviner"

Thème:
On exerce l'addition jusqu'à 18, le complément à 18, la soustraction depuis 18 (on cherche systématiquement à décomposer le nombre 18).

Matériel:
3 dés et une feuille de papier.

Jeu:
Dans une première phase, on calcule la somme des points obtenus en jetant les trois dés. Ceci plusieurs fois. Puis la maîtresse jette les trois dés mais les recouvre immédiatement (par exemple sous une serviette). Elle indique puis note la somme tirée. Elle demande alors aux élèves de deviner le résultat de chaque dé.
Imaginons qu'on ait obtenu:

			Au tableau:
L'institutrice:	"Ma somme est 11."		11 =
Un élève:	"Y a-t-il un 6 ?"	L'inst.: "Non."	
Un élève:	"Un 5 ?"	L'inst.: "Oui."	11 = 5 +
Un élève:	"Et un 2 ?"	L'inst.: "Oui."	11 = 5 + 2 +
Un élève:	"Ah! Un 5, un 2 et un 4."		11 = 5 + 2 + 4

Le jeu se déroule par groupe ou à deux.

Exercice récurrent:

"Quels nombres peuvent donner 11 ? Cherche toutes les possibilités!"
Après quelques résultats obtenus par tâtonnement, on peut proposer une recherche systématique:
"Commence par le plus grand nombre; ordonne selon la grandeur!"

Avec  il est possible d'avoir 4 et 1
3 et 2

Avec  il est possible d'avoir 5 et 1
4 et 2
3 et 3

Avec  il est possible d'avoir 4 et 3

11
6 + 4 + 1
6 + 3 + 2
5 + 5 + 1
5 + 4 + 2
5 + 4 + 3
4 + 4 + 3

"Cherche toutes les décompositions pour les sommes 3, 4, 5, ..., 18!"

Exemple 6: "Les tableaux barrés"

Thème:
Additionner plusieurs termes jusqu'à 100, à l'intérieur de table d'addition (également de tables de soustraction)

Matériel:
Des carrés à biffer (B) obtenus à partir d'une table d'addition (A), par exemple:

A

+	15	9	6
11	26	20	17
7	22	16	13
18	33	27	24

→ B

26	20	17
22	16	13
33	27	24

A

+	3	5	11	9
17	20	22	28	26
2	5	7	13	11
12	15	17	23	21
4	7	9	15	13

→ B

20	22	28	26
5	7	13	11
15	17	23	21
7	9	15	13

Exercice de calcul:
On donne aux élèves un tableau, comme en B (table d'addition sans les bords).
Chaque élève choisit maintenant un nombre quelconque du tableau et biffe les autres nombres de la ligne et de la colonne contenant ce nombre. Ensuite, chacun choisit un deuxième nombre et biffe à nouveau les nombres restants de la ligne et de la colonne correspondante. De même une troisième fois. Maintenant chacun ajoute les trois nombres choisis: tous obtiennent la même somme, et pourtant les nombres choisis peuvent être différents.

On propose cet exercice de calcul à partir de tableaux extraits de différentes tables d'addition: pour chaque tableau, les sommes obtenues sont les mêmes, les choix des nombres étant pourtant différents.

~~26~~	20	17
22	~~16~~	~~13~~
~~33~~	27	24

~~26~~	~~20~~	17
22	~~16~~	~~13~~
~~33~~	27	~~24~~

~~26~~	~~20~~	17
22	~~16~~	~~13~~
~~33~~	27	~~24~~

Exercice récurrent:
On informe les élèves sur la manière d'obtenir les tableaux, à partir de tables d'addition. On compare la somme obtenue (dans l'exemple ci-dessus: 66) avec la somme des nombres constituant les bords de la table d'addition: 18 + 7 + 11 + 15 + 9 + 6 = 66. Les sommes sont les mêmes.

Justification:
La consigne donnée pour tracer les nombres est telle que chaque nombre du bord est pris exactement une fois en considération.

Les élèves construisent maintenant eux-mêmes les tableaux.
Wittmann rapporte qu'un enfant réalisa un tableau dont la somme était l'âge de sa mère et l'offrit à celle-ci lors de son anniversaire!

Variante avec la soustraction:
On choisit une somme, inférieure à 100. On construit un tableau et on calcule la différence entre la somme des nombres choisis et 100. Cette différence est égale à la différence entre 100 et la somme des nombres constituant le bord de la table d'addition.

(Dans le manuel, la démarche est plus originale et planifiée de manière plus détaillée)

<u>Exemple B:</u> «Le 15 gagne»

Thème:

Additionner, décomposer et compléter jusqu'à 15.
Dénombrer les possibilités de décomposition de 15 en une somme de 3 termes.
Carré magique

Matériel:

Des cartes portant les nombres de 1 à 9.

Jeu à deux:

On place sur la table les neuf cartes de manière à voir les nombres de 1 à 9. A tour de rôle, les joueurs prennent une carte. Le gagnant est le premier qui, à partir des cartes qu'il a tirées, peut en retirer 3 formant une somme égale à 15.

Commentaire:

Il ne s'agit pas seulement de calculer. Les joueurs doivent aussi, dès le début, réfléchir aux bonnes combinaisons des nombres, réagir aux coups de l'adversaire, prévoir les coups à venir. Dans ce jeu, les objectifs de l'entraînement, du calcul, cède le pas à des objectifs plus élevés. C'est ce qu'entend Wittmann lorsqu'il parle d'exercice immanent.

Relance (après plusieurs parties et pour les élèves plus âgés)

— Y a-t-il un premier qui soit le meilleur possible?
— Forme et ordonne tous les triplets de nombres dont la somme est 15.
— Dans ces triplets, quelle est la fréquence d'apparition des nombres 1 à 9?
— Essaie de réaliser un carré magique (3-3) en utilisant les 9 cartes!

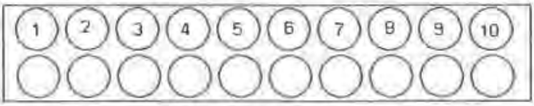
(Wittmann/Müller, 1990, page 60)


8
7
4
5
1

Exemple 7: Jeu de Nim (dès la 1ère année)

Thème:
Addition et suite de nombres. Découvrir une stratégie

Matériel:
Un plan de jeu (dessin ci-contre)
10 jetons (une couleur par joueur)

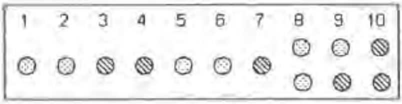


Règle du jeu:

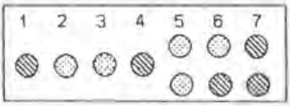
1. Deux élèves jouent l'un contre l'autre (rouge contre bleu).
2. A chaque coup, on pose 1 ou 2 jetons, en allant de gauche à droite, sur la seconde ligne de ronds.
3. Le premier joueur à atteindre le 10 a gagné.

Commentaire:
Les enfants remarquent après quelques parties que la position 7 est une position gagnante.

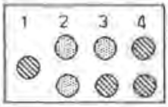
Le joueur se trouvant en 7 peut gagner quel que soit le choix de son partenaire (poser 1 ou 2 jetons).



Dès lors, comment atteindre le 7 ?



Comment atteindre le 4 ?



Le joueur qui atteint le 4 peut gagner car il peut atteindrele 7.
Celui qui atteint le 1 peut gagner car il peut atteindre le 4.
Les nombres décisifs sont 1, 4, 7, 10.

Variantes:
Le plan de jeu peut être étendu à 11, 12, ... Par exemple, pour 12, les nombres décisifs sont 3, 6, 9, 12. Seulement, pour gagner, il ne faut pas être le joueur qui commence!

On change les règles du jeu:
A chaque coup, on peut poser 1, 2 ou 3 jetons.
Pour un plan de jeu allant jusqu'à 15, les positions importantes sont 3, 7, 11, 15.
Jeu de Nim jusqu'à 25: A chaque coup, on peut poser de 1 à 6 jetons.

JAB
1200 GENÈVE 2

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse: F 17.— Etranger: F 19.—
CCP 12-4983 - 8 Paraît 5 fois par an

Service de la Recherche Pédagogique
20 bis, rue du Stand
CH - 1211 Genève 11 — CP 119
Tél. (022) 27 42 95

Adresse: Math-Ecole; 20 bis, rue du Stand, CH-1211 Genève 11; CP 119

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion