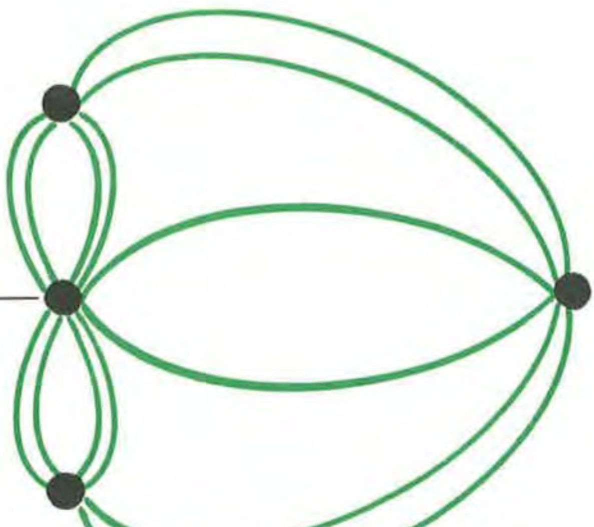
59



MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1973
12e ANNÉE

MATH ECOLE 12e ANNÉE SEPT. 1973 59

Mathématique et musique

par Frédéric Oberson, professeur à l'Ecole normale, Fribourg

La généralisation du nouvel enseignement de la mathématique à toutes les premières classes primaires cet automne mérite, à juste titre, le nom d'évènement capital dans l'histoire de l'Ecole romande. En effet, une profonde mutation, non seulement de notre enseignement de la mathématique mais, par contrecoup, de tout notre enseignement, s'amorce cette année.
Math-Ecole, dans son numéro 54, publiait un article de M. Calame intitulé «Enseignement de la mathématique et enseignement du français». Nos lecteurs ont donc déjà pu, au travers des quelques situations présentées dans cet article, se faire une idée d'une coordination bien comprise de l'enseignement du français et de l'enseignement de la mathématique. Ce que les travaux d'un N. Chomsky, d'un G. Van Hout, d'un J. Dubois ou d'autres encore permettent d'esquisser dans la voie de la coordination français-mathématique, un ouvrage tel que «La musique, discipline scientifique» de Pierre Barbaud [1], paru chez Dunod (1971), peut à mon sens le permettre dans la voie d'une coordination musique-mathématique. Il est bien clair cependant qu'en ce domaine, la décision appartient aux musiciens. Avec leur accord, dans le futur contexte de notre enseignement, cet ouvrage m'apparaîtrait alors comme l'un des guides possibles pour l'élaboration d'une pédagogie de l'enseignement de la musique ouverte sur l'ensemble des activités scolaires c'est-à-dire une pédagogie qui ne refuse pas, a priori, de se servir «d'outils» qu'elle n'aurait fabriqués elle-même. L'ouvrage de P. Barbaud, de par sa «tournure» mathématique, risque d'être considéré par la plupart des responsables actuels de l'enseignement musical comme un traité réservé à quelques «techniciens» de la musique. Or si l'on dresse le catalogue des «outils» mathématiques dont se sert P. Barbaud dans le chapitre premier de son livre, et qui seul fait l'objet du présent article, on obtient essentiellement des notions qui figurent au programme CIRCE des quatre premières années primaires (relation d'équivalence, classe d'équivalence, groupe, relation d'ordre, etc.). Ne serait-ce que par simple souci d'information, il est donc raisonnable en tant qu'enseignant, de regarder cet ouvrage avec quelque intérêt. Cela d'autant plus qu'en automne 1976 le Plan d'introduction des programmes romands (degrés 1 à 4) prévoit la diffusion de moyen d'enseignement nouveaux pour l'éducation musicale.

[1] Compositeur français contemporain du groupe «Algorithme» de Paris.

Un nom-fréquence pour chaque son

Préciser avec soin, lors de chaque activité, l'ensemble que l'on considère. Voilà une des premières règles de travail que découvrent les enfants dans leur apprentissage de la mathématique. Ils sont d'ailleurs très tôt en mesure d'en découvrir toute l'importance. Que l'institutrice, par exemple, se risque une fois au jeu du portrait (méthod. 1re année ER p. 11) sans avoir défini préalablement, avec suffisamment de précision, l'ensemble référentiel: la nécessité de se mettre d'accord sur l'ensemble à considérer éclatera aux yeux de tous. P. Barbaud, respectant cette règle élémentaire, nous propose comme référentiel l'ensemble des 88 sons (plus exactement hauteurs de son) que peut émettre un piano de concert. Il entend donc que nous considérions les hauteurs de son du système tempéré où l'octave juste a été divisée en 12 intervalles strictement égaux (système propre à tous les instruments à tempérament fixe). Dès lors, do est synonyme de si dièse, do dièse est synonyme de ré bémol, ré dièse synonyme de mi bémol, etc.
Un ensemble étant défini, il est très souvent commode de pouvoir désigner chacun de ses éléments par un nom ou un signe. Pour ce faire, on réalise une bijection de cet ensemble sur un ensemble de noms ou de signes. Prenons, comme exemple, un ensemble de quatre bateaux construits chacun par un élève de la classe. La bijection qui permet d'attribuer un nom à chaque bateau peut être représentée par le diagramme fléché ou le tableau suivants:

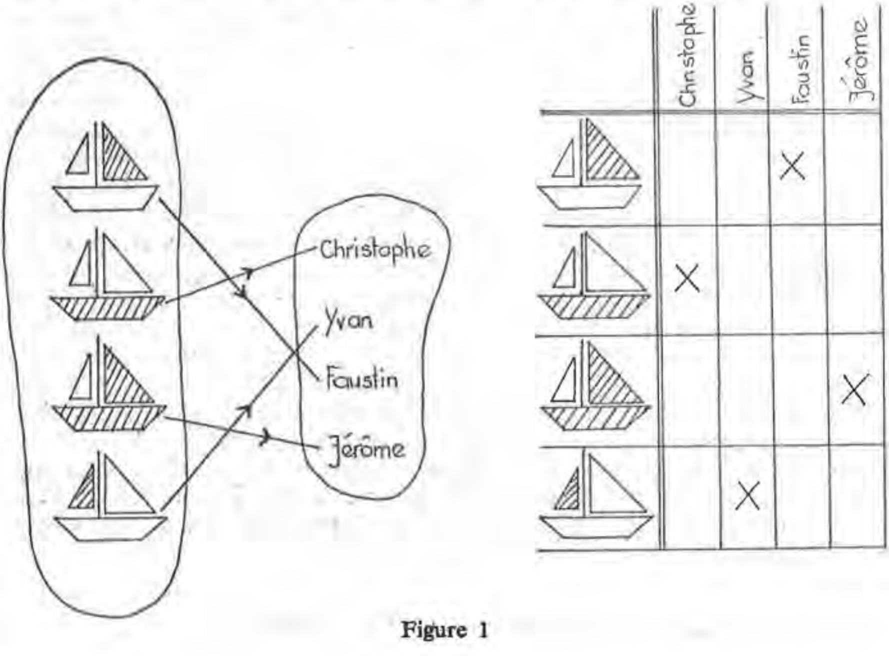


Figure 1

Ainsi lorsqu'on parle du bateau de Christophe, toute la classe sait qu'il s'agit du bateau dont la coque est noire et dont les deux voiles sont blanches. Les élèves sont ensuite libres, s'ils le jugent préférable, de convenir d'abréger le signe «bateau de Christophe» par «b. C.» ou simplement «C».
P. Barbaud ne fait rien d'autre lorsqu'il nous amène à écrire l'ensemble H des 88 hauteurs de sons émis par le piano de la manière suivante:

$$H = \{55 \cdot 2^{n/12} \ ; \ n \text{ entier et } 0 \leqslant n \leqslant 87\}$$

ou en abrégé:

$$H = \{0, 1, 2, \ldots, 87\}_{(55, 2, 12)}$$

En effet, frappons la première touche à gauche du clavier d'un piano de concert. Cette touche que nous appellerons la (I) correspond au son le plus grave que peut émettre ce piano. Lorsque nous frappons cette touche, la corde correspondante vibre à la fréquence [1] de 55 périodes par seconde. Si nous frappons la touche la (II) plus haut d'une octave, sa corde vibre à la fréquence de 110 périodes par seconde. Pour le la (III), plus haut d'une octave encore, nous obtenons 220 périodes par seconde. Pour le la (IV), 440 p/sec. Pour le la (V), le la du diapason, 880 p/sec. 1760 p/sec. pour le la (VI). 3520 p/sec. pour le la (VII), et pour le la (VIII), le dernier la à l'extrémité droite du piano, 7040 p/sec. Des mesures effectuées pour toutes les touches du clavier nous donneraient le tableau suivant:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
si ♯ = do		65,41	130,81	261,63	523,25	1046,5	2093,0	4186
do ♯ = ré *b*		69,30	138,59	277,18	554,36	1108,7	2217,5	4435
ré		73,42	146,83	293,67	587,33	1174,7	2349,3	4699
ré ♯ = mi *b*		77,78	155,56	311,13	622,26	1244,5	2489,0	4978
mi = fa *b*		82,41	164,81	329,63	659,26	1318,5	2637,0	5274
mi ♯ = fa		87,31	174,61	349,23	698,46	1396,9	2793,8	5588
fa ♯ = sol *b*		92,50	185,00	369,99	739,99	1480,0	2960,0	5920
sol		98,00	196,00	392,00	783,99	1568,0	3136,0	6272
sol ♯ = la *b*		103,83	207,65	415,30	830,61	1661,2	2322,4	6645
la	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,0	3520,0	7040
la ♯ = si *b*	58,27	116,54	233,08	466,16	932,32	1864,6	3729,3	7459
si = do *b*	61,73	123,47	246,94	493,88	987,76	1975,5	3951,1	7902

Figure 2

[1] On appelle *fréquence* le nombre de fois où un phénomène de caractère périodique se répète identiquement à lui-même dans l'unité de temps. Une fréquence se mesure en nombre de cycles ou périodes par seconde.

Le tableau de la figure 1 nous donnait une bijection de l'ensemble des bateaux sur l'ensemble de leurs constructeurs. Le tableau ci-devant nous donne une bijection qui, à chaque touche du piano (appelée la (I), la (I) dièse ou si (I) bémol, si (I), si (I) dièse ou do (I), do (I) dièse, etc.) fait correspondre une fréquence, donc une bijection de l'ensemble que nous appellerons T des 88 touches du clavier sur l'ensemble que nous appellerons F des 88 fréquences correspondantes.

Numérotons maintenant les touches de notre piano en désignant la (I) par 0, la (I) dièse ou si (I) bémol par 1, si (I) ou do (I) bémol par 2, ..., la (II) par 12, ..., la (III) par 24, etc. On peut alors définir cette bijection ainsi:

$$\begin{aligned} T = \{0, 1, 2, \ldots, 87\} &\longrightarrow F \\ n &\longmapsto 55 \cdot 2^{n/12} \end{aligned}$$

ce qui signifie que, une touche du clavier (par exemple 17) étant donnée, on obtient immédiatement sa fréquence correspondante en multipliant la fréquence de la touche 0 (55 p/sec) par le nombre $2^{17/12}$.

A défaut d'une démonstration qui nous entraînerait un peu loin, contentons-nous d'effectuer quelques contrôles. La bijection:

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow F \\ n &\longmapsto 55 \cdot 2^{n/12} \end{aligned}$$

si elle est correctement définie par cette écriture, doit en effet nous permettre de retrouver les résultats du tableau de la figure 2.

Pour les touches 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 le résultat est immédiat:

$$55 \cdot 2^{0/12} = 55 \cdot 2^0 = 55 \cdot 1 = 55$$
$$55 \cdot 2^{12/12} = 55 \cdot 2^1 = 110$$
$$55 \cdot 2^{24/12} = 55 \cdot 2^2 = 220$$
etc.

On obtient bien les résultats du tableau de la figure 2.
Pour une quelconque autre touche (prenons par exemple 17) on a:

$$55 \cdot 2^{17/12} \approx 55 \cdot 2{,}6697 \approx 147$$
(en effet, posant $y = 2^{17/12}$ on peut écrire
$\log (y) = 17/12 \cdot \log (2) = 17/12 \cdot 0{,}30103 \approx 0{,}42646$.
d'où l'on tire $y \approx 2{,}6697$)

Le tableau de la figure 2 indique bien comme fréquence correspondant à la touche 17 (ré (III) le nombre 147 (à $\pm$ 1 période/seconde près).

On est donc à même, maintenant, de désigner, comme le fait P. Barbaud, chaque son émis par le piano, plus précisément chaque hauteur de son, directement par sa fréquence écrite sous la forme: $55 \cdot 2^{n/12}$. On obtient pour tous les sons du clavier:

$55 \cdot 2^{0/12}$ $55 \cdot 2^{1/12}$ $55 \cdot 2^{2/12}$ ... $55 \cdot 2^{11/12}$	[de la (I) à sol (I)♯ ou la (II) ♭]
$55 \cdot 2^{12/12}$ $55 \cdot 2^{13/12}$ $55 \cdot 2^{14/12}$ ... $55 \cdot 2^{23/12}$	[de la (II) à sol (II)♯ ou la (III) ♭]
.	
.	
.	
.	
$55 \cdot 2^{84/12}$ $55 \cdot 2^{85/12}$ $55 \cdot 2^{86/12}$ $55 \cdot 2^{87/12}$	de la (VIII) à do (VIII) ou si (VIII)♯]

Figure 3

ou, en gardant en mémoire les nombres constants 55, 2 et 12 caractérisant respectivement la fréquence la plus basse de l'ensemble de sons considérés, l'intervalle de base (dans notre cas: l'octave juste) et le mode de tempérament (division de l'intervalle de base en 12 intervalles unitaires égaux), simplement:

0	1	2	3	...	11
12	13	14	15	...	23
24					
.					
.					
.					
.					
84	85	86	87		

Figure 4

Appelant H l'ensemble des hauteurs de son considérées, on peut donc écrire:

$$H = \{55 \cdot 2^{n/12};\ n \text{ entier et } 0 \leqslant n \leqslant 87\} = \{0, 1, 2, 3, \dots 87\}_{(55,\,2,\,12)}$$

Il est bien clair que les raisonnements qui nous ont conduits à définir H ainsi, bien que nécessaires au lecteur pour comprendre la suite du message de P. Barbaud, n'ont pas place dans les activités d'une classe primaire. A ce stade, le message concret de P. Barbaud, sur ce plan, se borne, à mon avis, à utiliser en classe un instrument à tempérament fixe (piano, harmonium, «Glockenspiel» ou jeu de timbres, organetta, etc.) et à adopter les nombres naturels 0, 1, 2, 3, . . . , n comme symboles écrits des hauteurs de son que peut émettre cet instrument (procédé d'ailleurs déjà utilisé par certaines méthodes d'enseignement). Dans le cas du jeu de timbres, par exemple, les activités de classe se réfèrent alors au début aux deux bijections suivantes:

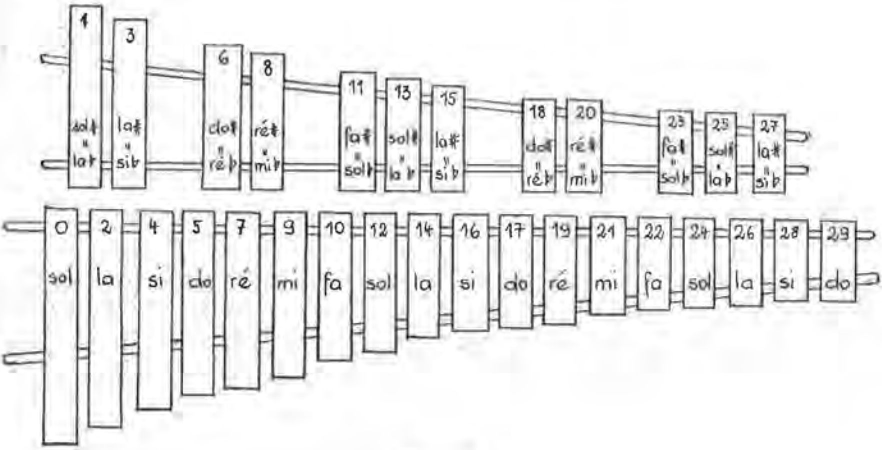


Figure 5

La gamme chromatique

Considérant l'échelle classique des hauteurs de sons émis par un piano de concert, la première démarche de P. Barbaud a été de définir cet ensemble de sons par référence directe aux fréquences. Ce qui nous a donné:

$$H = \{55 \cdot 2^{n/12} \text{ ; n entier et } 0 \leqslant n \leqslant 87\}$$

Sa deuxième démarche consiste à répartir ces sons en 12 classe d'équivalence, ces 12 classes donnant naissance à ce qu'on appelle communément la gamme chromatique. Il s'agit donc de définir dans l'ensemble H une relation adéquate, c'est-à-dire une relation d'équivalence qui détermine dans H exactement 12 classes d'équivalence: la classe des do ou si dièse, celle des do dièse ou ré bémol, celle des ré, ..., celle des si. Il suffit de parcourir les fiches d'élèves ER de 1re année ou de 2e année pour se rendre compte combien la notion de relation d'équivalence est familière aux enfants. On trouve même, dans la première partie de la fiche ER 38 de 2e année, une situation tout à fait analogue à celle qui nous occupe présentement. Nous reproduisons ci-après l'exercice proposé:

ER-38 Colle les images de la collection L

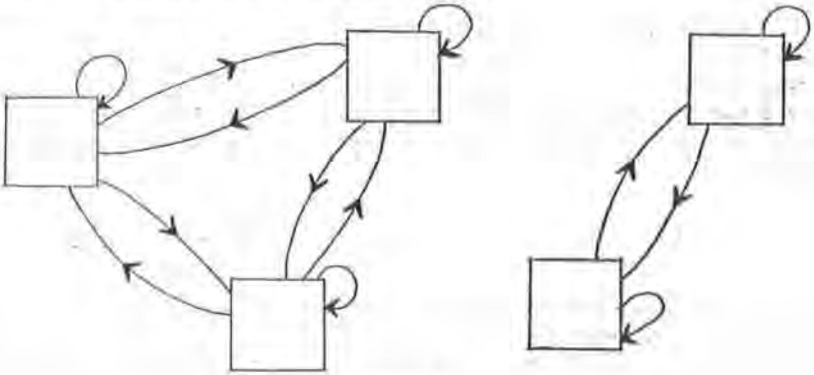


Figure 6

La flèche signifie: ______________________________

La collection étant constituée de cinq images autocollantes représentant les cinq parapluies suivants:

Figure 7

L'enfant peut coller les cinq images correctement de trois manières différentes suivant qu'il donne à la flèche la signification «a la même couleur que» ou «a même décoration que» ou encore «est disposé de la même façon que». Pour chacune de ces trois significations, formulées ainsi ou de manière équivalente, on a une relation d'équivalence sur l'ensemble des cinq parapluies, relation qui définit deux classes d'équivalence, l'une comprenant deux éléments et l'autre trois.

Revenons à l'ensemble $H = \{55 \cdot 2^{n/12}\ ;\ n \text{ entier et } 0 \leqslant n \leqslant 87\}$.

Pour une raison d'ordre purement pratique, à savoir désigner par 0 do (I) au lieu de la (I), nous allons considérer à la place de l'ensemble H un ensemble H' comprenant toutes les hauteurs de sons que pourrait émettre un piano auquel on aurait ajouté 9 touches à gauche du clavier et dont on aurait prolongé à l'infini le clavier à droite. Un tel piano comprendrait donc une infinité de touches à partir du do le plus grave. H' est donc défini de la manière suivante:

$$H' = \{x \cdot 2^{n/12} \; ; \; n \in \mathbf{N_0}\} \qquad \mathbf{N_0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

x étant la fréquence du son le plus grave émis par notre piano prolongé ($\approx$ 32,7 p/sec).
Envisageons maintenant la relation d'équivalence suivante dans H'. Deux éléments $x \cdot 2^{n/12}$ et $x \cdot 2^{n'/12}$ de H' sont équivalents, par définition, si et seulement si $(x \cdot 2^{n/12}) : (x \cdot 2^{n'/12})$ est une puissance entière de 2 (positive ou négative).

$$x \cdot 2^{n/12} \; \mathscr{R} \; x \cdot 2^{n'/12} \iff \frac{x \cdot 2^{n/12}}{x \cdot 2^{n'/12}} = k \in \mathbf{Z}$$

Nous pouvons contrôler que cette relation d'équivalence définit bien 12 classes d'équivalence. Déterminons, par exemple, la classe à laquelle appartient l'élément $x \cdot 2^{72/12}$ de H'. Par définition, cette classe est l'ensemble de tous les éléments $x \cdot 2^{n/12}$ de H' en relation avec $x \cdot 2^{72/12}$, donc tous les éléments $x \cdot 2^{n/12}$ de H' tels que $(x \cdot 2^{n/12}) : (x \cdot 2^{72/12})$ est une puissance entière de 2.

$$\text{classe de } x \cdot 2^{72/12} = \{x \cdot 2^{n/12} \in H' \; ; \; x \cdot 2^{n/12} \; \mathscr{R} \; x \cdot 2^{72/12}\}$$

$$= \{x \cdot 2^{n/12} \in H' \; ; \; \frac{x \cdot 2^{n/12}}{x \cdot 2^{72/12}} = k \in \mathbf{Z}\}$$

or $$\frac{x \cdot 2^{n/12}}{x \cdot 2^{72/12}} = \frac{2^{n/12}}{2^{72/12}} = 2^{(n/12 - 72/12)}$$

donc il suffit de trouver toutes les valeurs de n, $n \in \mathbf{N_0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ pour lesquelles (n/12 — 72/12) soit un nombre entier. On voit facilement qu'on obtiendra toujours un nombre entier si n prend l'une des valeurs suivantes: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, . . . En effet:

si n = 0, on a 0/12 — 72/12 = 0 — 72/12 = — 72/12 = —6 (nombre entier)
si n = 12, on a 12/12 — 72/12 = — 60/12 = —5 (nombre entier)
.
.
.
si n = 72, on a 72/12 — 72/12 = 0 (nombre entier)
si n = 84, on a 84/12 — 72/12 = 12/12 = 1 (nombre entier)
.
.
.

Donc les éléments suivants de H':
$x \cdot 2^{0/12}, x \cdot 2^{12/12}, x \cdot 2^{24/12}, \ldots, x \cdot 2^{72/12}, \ldots$
appartiennent tous à la même classe d'équivalence.

On verrait de même que les éléments suivants de H':

$x \cdot 2^{1/12}$, $x \cdot 2^{13/12}$, $x \cdot 2^{25/12}$, ..., $x \cdot 2^{73/12}$, ...

forment une autre classe d'équivalence.

On obtiendrait encore une 3e classe d'équivalence avec les éléments:

$x \cdot 2^{2/12}$, $x \cdot 2^{14/12}$, $x \cdot 2^{26/12}$, ..., $x \cdot 2^{74/12}$, ...

et ainsi de suite jusqu'à la 12e et dernière classe d'équivalence qui comprendrait les éléments:

$x \cdot 2^{11/12}$, $x \cdot 2^{23/12}$, $x \cdot 2^{35/12}$, ..., $x \cdot 2^{83/12}$, ...

Si l'on concrétise l'ensemble H' en l'assimilant au clavier de notre «piano prolongé», on remarque que la première classe d'équivalence correspond à toutes les touches do ou si dièse du clavier, la deuxième classe d'équivalence à toutes les touches do dièse ou ré bémol et ainsi de suite, la douzième classe correspondant à toutes les touches si du clavier.
Revenons à l'exemple de la fiche 38 de ER 2e année. Si l'on envisage la relation «a même couleur que» dans l'ensemble des cinq parapluies, on obtient, comme souhaité, deux classes d'équivalence. Une première classe composée du parapluie penché rouge à pois et du parapluie droit rouge uni. La deuxième composée du parapluie droit bleu uni, du parapluie penché bleu à pois et du parapluie droit bleu à pois. Ainsi cette relation nous amène à voir dans la collection proposée deux types de parapluies, les rouges et les bleus, types que l'on peut indiquer en prenant un parapluie de chacune des deux classes, par exemple:

rouge

bleu

Figure 8

Dans l'ensemble H', la relation d'équivalence choisie nous a donné 12 classes d'équivalence. Elle nous amène donc à distinguer, dans l'ensemble H' des hauteurs de sons considérées, 12 types de hauteurs de sons, types que l'on peut indiquer en prenant un élément de chaque classe, par exemple celui dont la fréquence est la plus petite. Ce qui nous donne:

$x \cdot 2^{0/12}$, $x \cdot 2^{1/12}$, $x \cdot 2^{2/12}$, $x \cdot 2^{3/12}$, ..., $x \cdot 2^{11/12}$

en abrégé, si l'on se souvient que x, 2, et 12 sont constants:

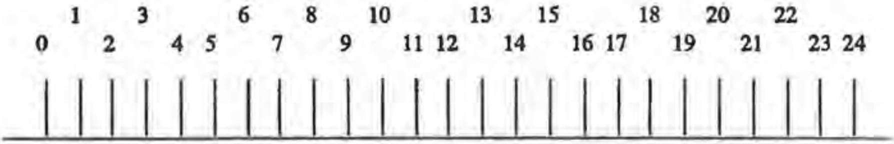
0 , 1 , 2 , 3 , ... , 11

qui est l'écriture que P. Barbaud utilise pour désigner respectivement:

do ,	do dièse , ré ,	ré dièse , . . . ,	si
ou	ou	ou	ou
si dièse	ré bémol	mi bémol	do bémol

c'est-à-dire la gamme chromatique.

La relation d'équivalence «savante» utilisée plus haut par P. Barbaud ne peut naturellement pas être utilisée telle quelle dans un enseignement du niveau de l'école primaire. Il faudra faire appel ici à l'ingéniosité de l'enseignant. On pourra, par exemple, par des exercices adéquats, former l'oreille des enfants à repérer l'octave puis, un son continu étant émis (exemple: le do $x \cdot 2^{48/12}$), à ressentir avec sûreté l'appartenance d'un autre son à la «famille de ce do» (la classe de $x \cdot 2^{48/12}$). La relation d'équivalence pourra alors s'énoncer «appartient à la même famille que». Pour les élèves moins doués, on pourra peut-être travailler directement sur le jeu de timbres ou sur le clavier du piano (dessiné ou réel) et obtenir le même résultat en utilisant des baguettes de longueur égale à la distance du milieu d'une touche au milieu de la touche supérieure d'une octave. La relation d'équivalence pourrait être alors «est à . . . baguettes de», les . . . étant remplacés par un nombre entier. Dans les deux cas, on en viendrait à repérer les classes d'équivalence en désignant par 0 chacun des éléments de la famille de 0, par 1 chaque élément de la famille de 1, etc., jusqu'à 11.
Dans le cas du jeu de timbres, ayant préalablement retiré du jeu les cinq lames de gauche de manière à obtenir 0 pour la classe de do, on amènerait donc les enfants à passer de la nomenclature



à la nomenclature

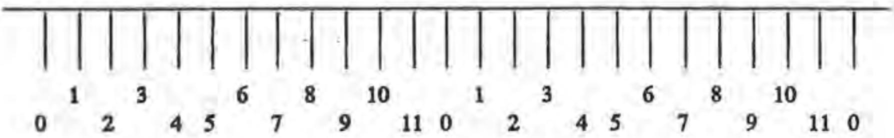


Figure 9

Groupes de transpositions

Dans un paragraphe intitulé «Esquisse d'une pédagogie efficace de la musique», P. Barbaud propose d'aborder l'étude de la gamme chromatique par l'étude de gammes liées aux différents sous-groupes d'un groupe de transpositions que nous définirons: le groupe $(T_{XII}, \circ)$. «Les enfants acquerront ainsi une connaissance rationnelle et progressive de tous les éléments de la gamme chromatique. On prendra soin de dessiner les figures géométriques isomorphes aux sous-groupes, c'est-à-dire respectivement le point, le diamètre, le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone et enfin le dodécagone». La notion-clef, à ce stade, est donc la notion de groupe.
La structure de groupe et la notion de groupes isomorphes ont déjà fait l'objet d'un article de M. Ch. Burdet paru dans Math-Ecole numéro 53. La notion de groupe figure d'ailleurs implicitement au point 2 de DE 4e année du programme CIRCE. Ce point 2 propose, en particulier, l'étude des rotations de figures géométriques simples et les commentaires au programme CIRCE précisent qu'il est utile de noter les compositions de ces rotations et de découvrir la structure mathématique sous-jacente à la situation étudiée.
Suivons ce conseil en prenant pour exemple de figure géométrique simple le triangle équilatéral. Nous découvrirons que l'ensemble R_3 des rotations du triangle équilatéral avec, comme opération sur R_3, la composition (que nous

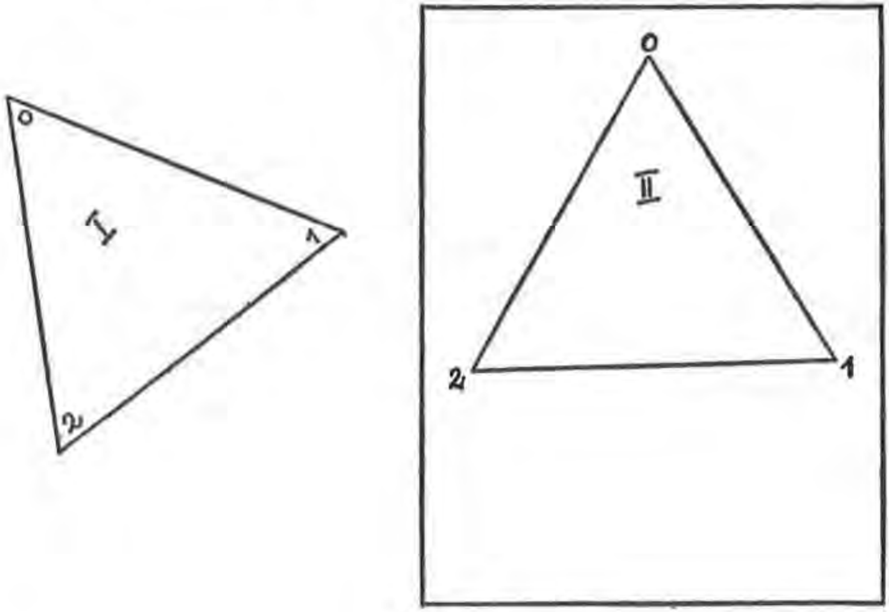


Figure 10

noterons par le signe ∘) forment un groupe commutatif (R_3, ∘) isomorphe à un groupe de transpositions que nous noterons (T_{III}, ∘).
Découvrons tout d'abord le groupe (R_3, ∘).
La première étape consiste à définir l'ensemble R_3 des rotations du triangle équilatéral (rotations dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).
Pour ce faire, découpons dans du carton, comme le montre la figure 10, un triangle équilatéral I et un rectangle suffisamment grand pour qu'on puisse y dessiner un triangle équilatéral II de même dimension que I.

Collons le rectangle portant le triangle dessiné II sur une planchette de bois et fixons ensuite le triangle I sur le II au moyen d'un clou planté en leurs centres, de façon que le sommet 0 de II coïncide avec le sommet 0 de I. Le triangle équilatéral I peut alors tourner autour de son centre et recouvrir de trois façons différentes le triangle dessiné II. Il est ainsi aisé de faire découvrir aux enfants que l'ensemble R_3 des rotations du triangle équilatéral comprend 3 éléments. A savoir:

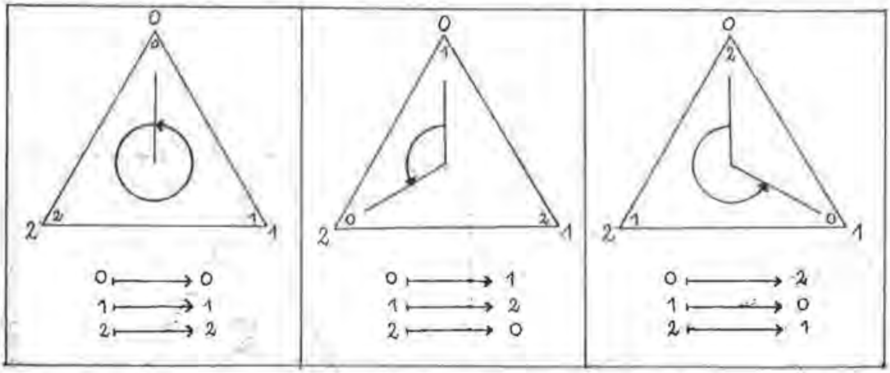


Figure 11

Convenant d'une notation pour chaque rotation de R_3, on obtiendrait par exemple

(0, 0) (0, 1) (0, 2)

ou simplement

0 1 2

On peut donc noter: $R_3 = \{0, 1, 2\}$

La deuxième étape consiste à faire de l'ensemble «amorphe» R_3 un ensemble muni d'une structure.

Que se passe-t-il par exemple si l'on effectue successivement la rotation 2 puis la rotation 1?

A 0, la rotation 2 fait correspondre 2 et à 2 la rotation 1 fait correspondre 0.

Donc en notant

$\bullet \xrightarrow{2} \bullet$ la rotation 2 et $\bullet \xrightarrow{1} \bullet$ la rotation 1 on a:

$$0 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{1} 0$$

De même on obtiendrait:

$$1 \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{1} 1$$

et

$$2 \xrightarrow{2} 1 \xrightarrow{1} 2$$

Ce qui signifie que la rotation 2, suivie de la rotation 1 (c'est-à-dire la rotatio 2 composée avec la rotation 1) donnent la rotation 0. Ce qui peut s'écrire ainsi

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \bullet \arrow[r, "2"] & \bullet \end{tikzcd}$$

ou (en notant $\circ$ la composition) $1 \circ 2 = 0$

ou encore dans le tableau suivant:

∘	0	1	2
0			
1			
2		0	

Figure 12

En examinant successivement les 9 possibilités de composition d'éléments de R_3, on obtiendrait le tableau complet suivant:

∘	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Figure 13

Nous remarquons alors que l'ensemble R_3 des rotations du triangle équilatéral avec, comme opération, la composition $\circ$, est bien un groupe commutatif. En effet l'opération $\circ$ a les cinq propriétés nécessaires (voir Math-Ecole numéro 53 p. 7).

1. $\circ$ est une opération interne:
   le tableau de la figure 13 montre qu'en composant deux rotations quelconques de $R_3 = \{0, 1, 2\}$ on obtient toujours une rotation de R_3.

2. $\circ$ est associative:
   pour les 27 possibilités qui existent de composer 3 rotations de R_3 (par exemple:
   $0 \circ 1 \circ 0$ ou $0 \circ 2 \circ 2$ ou $0 \circ 0 \circ 0$ etc.) on a toujours:

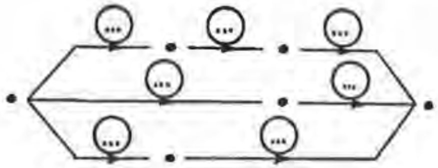


Figure 14

3. $\circ$ possède un élément neutre dans R_3:
   le tableau de la figure 13 montre que c'est la rotation 0

$\circ$	0	1	2
0	**0**	**1**	**2**
1	**1**	2	0
2	**2**	0	1

Figure 15

4. chaque élément de R_3 possède un élément symétrique pour l'opération $\circ$:
   le tableau de la figure 13 montre que l'élément symétrique de la rotation 0 est la rotation 0 elle-même, l'élément symétrique de la rotation 1 est la rotation 2 et l'élément symétrique de la rotation 2 est la rotation 1.

∘	0	1	2
0	**0**	1	2
1	1	2	**0**
2	2	**0**	1

Figure 16

5. ∘ est commutative
   le tableau de la figure 13 le montre par sa symétrie par rapport à la diagonale marquée d'un traitillé.

∘	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Figure 17

(R_3, ∘) est donc un groupe commutatif.

Revenons à la musique. Nous avons obtenu, dans l'ensemble H', 12 classes d'équivalence que nous avons notées 0, 1, 2, . . . , 11. Appelons G l'ensemble de ces 12 classes. On peut donc écrire G = gamme chromatique =
$\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$.

Décollons de notre planchette de tout à l'heure le rectangle de carton portant le dessin du triangle II pour le remplacer par un carré de carton sur lequel on aura dessiné un dodécagone comme le montre la figure ci-après.

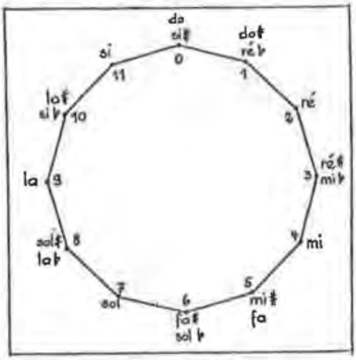


Figure 18

Sur ce dodécagone, à l'aide d'un clou, fixons comme précédemment le triangle équilatéral I de tout à l'heure dont les sommets sont désignés, cette fois, par 0, 4 et 8 (do ou si dièse, mi, sol dièse ou la bémol).
Nous sommes à même, maintenant, de définir le groupe de transpositions $(T_{III}, \circ)$ isomorphe au groupe commutatif $(R_3, \circ)$.
Définissons tout d'abord les éléments de T_{III}. Il est aisé de voir que chaque rotation de R_3 définit maintenant une transposition. La rotation 0 (élément neutre du groupe $(R_3, \circ)$ définit la transposition neutre T_0 qui, par exemple, à do ou si dièse fait correspondre do ou si dièse (plus haut de 12 demi-tons), à mi fait correspondre mi (plus haut de 12 demi-tons) et à sol dièse ou la bémol fait correspondre sol dièse ou la bémol (plus haut de 12 demi-tons). On a donc:

$$\begin{array}{l} \quad T_0 \\ 0 \longmapsto 0 \\ 4 \longmapsto 4 \\ 8 \longmapsto 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{ou, exprimée comme} \\ \text{application de H' dans H',} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ T_0 : H' \longrightarrow H' \\ x \cdot 2^{n/12} \longmapsto x \cdot 2^{n+12/12} \\ \end{array}$$

La rotation 1 de R_3 définit la transposition T_4 qui, par exemple, à do ou si dièse fait correspondre mi (plus haut de 4 demi-tons), à mi fait correspondre sol dièse ou la bémol (plus haut de 4 demi-tons et à sol dièse ou la bémol fait correspondre do ou si dièse (plus haut de 4 demi-tons). Donc:

$$\begin{array}{l} \quad T_4 \\ 0 \longmapsto 4 \\ 4 \longmapsto 8 \\ 8 \longmapsto 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{exprimée comme} \\ \text{application de H' dans H'} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ T_4 : H' \longrightarrow H' \\ x \cdot 2^{n12/} \longmapsto x \cdot 2^{n+4/12} \\ \end{array}$$

La rotation 2 de R_3 définit la transposition T_8 qui, à do ou si dièse fait correspondre sol dièse ou la bémol (plus haut de 8 demi-tons), à mi fait correspondre do ou si dièse (plus haut de 8 demi-tons) et à sol dièse ou la bémol fait correspondre mi (plus haut de 8 demi-tons). Donc:

$$\begin{array}{l} \quad T_8 \\ 0 \longmapsto 8 \\ 4 \longmapsto 0 \\ 8 \longmapsto 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{exprimée comme} \\ \text{application de H' dans H'} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ T_8 : H' \longrightarrow H' \\ x \cdot 2^{n/12} \longmapsto x \cdot 2^{n+8/12} \\ \end{array}$$

On obtient donc immédiatement une bijection $\varphi : R_3 \longrightarrow T_{III}$

$$\begin{array}{l} 0 \longmapsto T_0 \\ 1 \longmapsto T_4 \\ 2 \longmapsto T_8 \end{array}$$

(bijection qui nous servira tout à l'heure à montrer l'isomorphie des groupes $(R_3, \circ)$ et $(T_{III}, \circ)$.

Composant maintenant, de 9 façons différentes, les éléments de T_{III} nous obtenons le tableau suivant:

$\circ$	T_0	T_4	T_8
T_0	T_0	T_4	T_8
T_4	T_4	T_8	T_0
T_8	T_8	T_0	T_4

Figure 19

tableau qui fait de $(T_{III}, \circ)$ un groupe commutatif (le lecteur sceptique peut contrôler que $\circ$ possède, ici encore, les cinq propriétés requises).

Il reste à voir que $(R_3, \circ)$ et $(T_{III}, \circ)$ sont deux groupes isomorphes. Pour cela il suffit de contrôler que la bijection φ ait la propriété suivante:

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

pour n'importe lequel des 9 couples (x, y) de $R_3 \times R_3$ (voir Math-Ecole numéro 53, page 9). Prenons, par exemple, le cas où $x = 1$ et $y = 2$; on a:

$$\varphi(1 \circ 2) = \varphi(0) = T_0$$
$$\varphi(1) \circ \varphi(2) = T_4 \circ T_8 = T_0 \qquad \text{donc}$$
$$\varphi(1 \circ 2) = \varphi(1) \circ \varphi(2)$$

Le lecteur peut vérifier qu'on obtient l'égalité dans les 9 cas. $(R_3, \circ)$ et $(T_{III}, \circ)$ sont donc bien isomorphes.

Ce que nous avons réalisé, en détail, en partant des rotations du triangle équilatéral, nous pourrions le réaliser aussi en partant des rotations de chacune des figures géométriques simples représentées ci-dessous: le dodécagone, l'hexagone, le carré, le triangle équilatéral, le diamètre, le point.

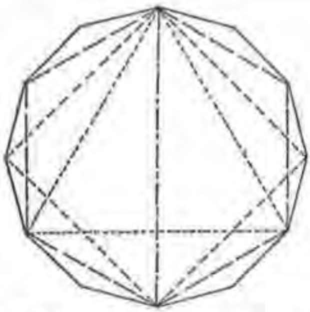


Figure 20

A chaque fois nous obtiendrons un groupe de transposition isomorphe au groupe des rotations.

Figure géométrique	Groupe de rotation	Groupe de transpositions
Dodécadone	$(R_{12}, \circ)$ $R_{12} = \{0, 1, 2, \ldots 11\}$	$(T_{XII}, \circ)$ $T_{XII} = \{T_0, T_1, T_2, \ldots T_{11}\}$ où $T_k : H' \longrightarrow H'$ $x \cdot 2^{n/12} \longmapsto x \cdot 2^{(n+k)/12}$
Hexagone	$(R_6, \circ)$ $R_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$(T_{VI}, \circ)$ $T_{VI} = \{T_0, T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}\}$
Carré	$(R_4, \circ)$ $R_4 = \{0, 1, 2, 3\}$	$(T_{IV}, \circ)$ $T_{IV} = \{T_0, T_3, T_6, T_9\}$
Triangle équilatéral	$(R_3, \circ)$ $R_3 = \{0, 1, 2\}$	$(T_{III}, \circ)$ $T_{III} = \{T_0, T_4, T_8\}$
Diamètre	$(R_2, \circ)$ $R_2 = \{0, 1\}$	$(T_{II}, \circ)$ $T_{II} = \{T_0, T_6\}$
Point	$(R_1, \circ)$ $R_1 = \{0\}$	$(T_I, \circ)$ $T_I = \{T_0\}$

Figure 21

Du point au dodécagone, voilà donc les six étapes toutes désignées que nous propose P. Barbaud dans la découverte «rationnelle et progressive» des éléments de la gamme chromatique G, chacune d'elles comprenant une étude mélodique et harmonieuse des éléments de G obtenus par applications successives sur un élément de G de toutes les transpositions du groupe envisagé.

Par exemple, pour le groupe $(T_{IV}, \circ)$, les éléments de T_{IV} appliqués sur $0 \in G$ donnent (T_0 (0) = 0, T_3 (0) = 3, T_6 (0) = 6, T_9 (0) = 9) c'est-à-dire «l'accord de septième diminuée» (*si dièse* ou do, *ré dièse* ou mi bémol, *fa dièse* ou sol bémol, *la*).

Ces mêmes éléments de T_{IV} appliqués sur $1 \in G$ donnent alors (T_0 (1) = 1, T_3 (1) = 4, T_6 (1) = 7, 7_9 (1) = 10) c'est-à-dire «l'accord de septième diminuée» (*do dièse* ou ré bémol, *mi*, *sol*, la dièse ou *si bémol*).

Et pareillement, en appliquant les éléments de T_{IV} sur $2 \in G$, «l'accord de septième diminuée» (*ré*, *fa*, sol dièse ou *la bémol*, *do bémol*).

Pour cette étude de l'accord de septième diminuée, les enfants réalisent bien entendu la figure ci-dessous:

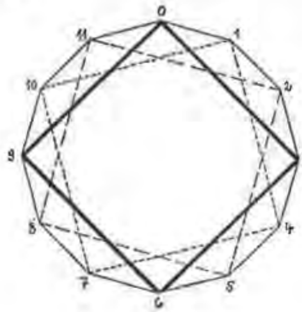


Figure 22

Les gammes majeures

Chacun de nous est capable de chanter la gamme de do majeur. C'est même, pour la plupart d'entre nous, la seule gamme dont nous sachions, sans hésitation, énoncer et chanter les éléments successifs (pour autant, encore, qu'on nous «donne le ton»). Ceci signifie donc que nous avons, gravés dans notre mémoire, les rapports entre les fréquences des éléments successifs qui la composent. Respectant la correspondance que nous avons établie entre les notes et les chiffres, nous pouvons écrire la gamme de do majeur que nous désignerons par G_0 ($= G_{do}$) ainsi $G_0 = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$.

Si, comme nous l'avons fait pour la figure 18, nous associons à la gamme chromatique G un dodécagone, nous associerons alors à la gamme G_0 un heptagone comme l'indique la figure suivante:

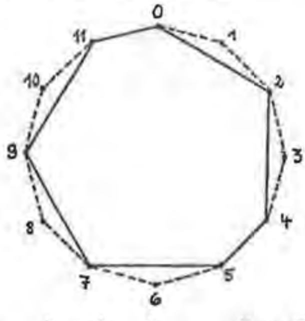


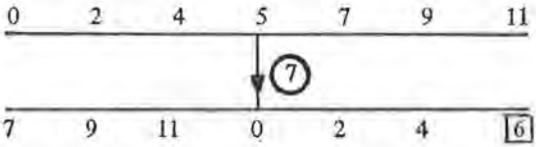
Figure 23

Nous sommes alors à même de suivre le conseil de P. Barbaud qui, à ce stade, suggère de «faire remarquer aux enfants que G_0 est isomorphe à un heptagone irrégulier dont chacune des rotations de R_{12} fait apparaître au moins un sommet nouveau».

Comme nous l'avons fait pour le triangle équilatéral, nous utiliserons deux figures géométriques I et II de mêmes dimensions, l'une dessinée, l'autre découpée dans du carton. Nous pourrons alors illustrer chacune des étapes suivantes:

1re étape: découverte de la gamme de sol majeur (G_7)

La rotation $7 \in R_{12}$ (rotation de 210° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) appliquée à notre heptagone I donne la correspondance suivante:



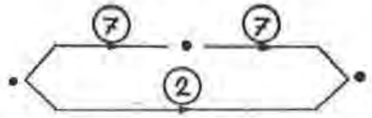
On remarque alors que sur les 7 éléments de G_0, 6 réapparaissent (0, 2, 4, 7, 9, 11) au côté d'un unique élément nouveau (6). Nous souvenant que le groupe $(R_{12}, \circ)$ est isomorphe au groupe $(T_{III}, \circ)$ des transpositions (voir fig. 21), nous pouvons écrire:

$$T_7 (G_0) = G_7$$

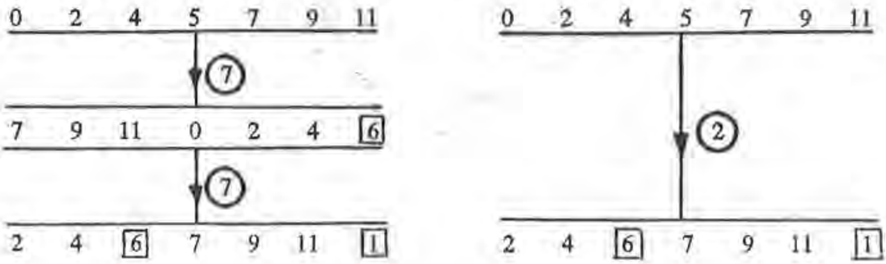
ce qui exprime qu'en transposant (de 7 demi-tons plus haut) les éléments de la gamme de do majeur, on obtient les éléments de la gamme de sol majeur.

2e étape: découverte de la gamme de ré majeur (G_2)

Remarquons tout d'abord (la table de groupe $(R_{12}, \circ)$ nous le donnerait) que $7 \circ 7 = 2$



Ce qui signifie que le résultat obtenu en appliquant 2 fois successivement la rotation 7 est le même que celui obtenu en appliquant uniquement la rotation 2. On peut donc écrire les deux correspondances suivantes:



On remarque l'apparition d'un élément nouveau (1). En transposant de 2 demi-tons plus haut les éléments de la gamme de do majeur G_0 nous obtenons donc les éléments de la gamme de ré majeur G_2. Ce qui peut s'écrire:

$$T_2 (G_0) = G_2$$

Continuant ainsi, nous obtiendrons successivement les douze tonalités majeures: G_0, G_7, G_2, G_9, G_4, G_{11}, G_6, G_1, G_8, G_3, G_{10}, G_5 (do majeur, sol majeur, ré majeur, ..., fa majeur). Activité qui, liée aux rotations sur des figures géométriques, est tout à fait à la portée d'élèves de 4e année.

Tonalités plus ou moins voisines

Dans cette dernière partie, nous nous proposons de définir, sans suggérer une interprétation pour une activité scolaire, une relation d'ordre que P. Barbaud nous montre étroitement liée au phénomène de la modulation.

Tout comme la notion de relation d'équivalence, celle de relation d'ordre est exercée en des activités simples et concrètes, dès la 1re année primaire. Nous l'avons vu tout au début de cet article, la donnée d'une relation d'équivalence sur un ensemble permet d'obtenir une partition de cet ensemble en classes d'équivalence. Une relation d'ordre, elle, nous amène à voir les éléments de l'ensemble sur lequel elle est définie comme formant une ou plusieurs chaînes suivant qu'il s'agisse d'une relation d'ordre total ou partiel.

Prenons, pour illustrer simplement cela, un ensemble E constitué de 6 ensembles de nombres:

$$E = \left\{ \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\} \right\}$$

Définissons maintenant sur E trois relations binaires:

a) une relation d'équivalence:

$$X \mathscr{R} Y \iff \text{card}(X) = \text{card}(Y) \qquad (X \in E, Y \in E)$$

b) une relation d'ordre total:

$X \mathscr{R}' Y \iff$ la somme des nombres de X $<$ la somme des nombres de Y

$(X \in E, Y \in E)$

c) une relation d'ordre partiel:

$X \mathscr{R}'' Y \iff$ X est inclus dans Y

La représentation fléchée de ces trois relations donne:

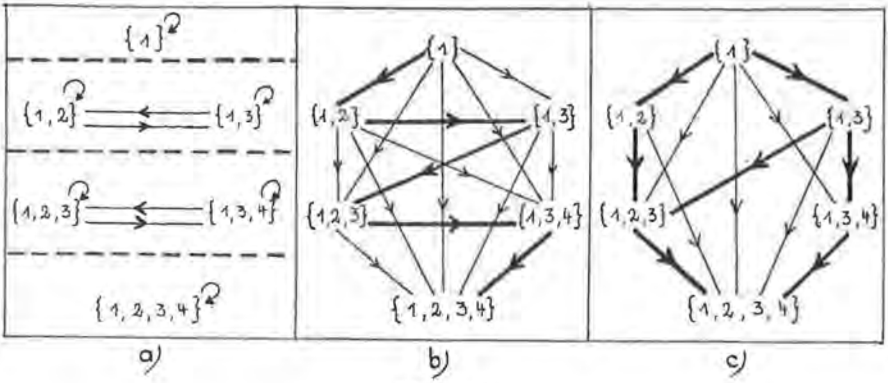


Figure 24

En a), nous obtenons donc 4 classes d'équivalence par la relation $\mathscr{R}$. En b) la relation $\mathscr{R}'$ donne l'unique «chaîne» suivante:

$$\{1\} - \mathscr{R}' - \{1,2\} - \mathscr{R}' - \{1,3\} - \mathscr{R}' - \{1,2,3\} - \mathscr{R}' - \{1,3,4\} - \mathscr{R}' - \{1,2,3,4\}$$

tandis qu'en c), $\mathscr{R}''$ donne 3 «chaînes»:

$$\{1\} \begin{cases} \xrightarrow{\mathscr{R}''} \{1,2\} - \mathscr{R}'' - \{1,2,3\} - \mathscr{R}'' - \{1,2,3,4\} \\ \xrightarrow{\mathscr{R}''} \{1,3\} \begin{cases} \xrightarrow{\mathscr{R}''} \{1,2,3\} - \mathscr{R}'' - \{1,2,3,4\} \\ \xrightarrow{\mathscr{R}''} \{1,3,4\} - \mathscr{R}'' - \{1,2,3,4\} \end{cases} \end{cases}$$

P. Barbaud, dans les dernières pages du premier chapitre de son livre définit sur l'ensemble M des gammes majeures: $M = \{G_0, G_1, G_2, \ldots, G_{11}\}$ une relation d'ordre partiel qui explicite ce que les musiciens entendent lorsqu'ils parlent de tonalités plus ou moins voisines. Moduler par exemple de do majeur à sol majeur est «plus naturel» que moduler de do majeur à do dièse majeur. Nous le comprenons bien si nous nous souvenons que do majeur et sol majeur ont six éléments communs (exactement: $G_0 \cap G_7 = \{0, 2, 4, 7, 9, 11\}$ alors que do majeur et do dièse majeur n'ont que deux éléments communs

$(G_0 \cap G_1 = \{0, 5\})$.

Dressons le tableau des intersections de G_0 avec chacun des éléments de l'ensemble M des gammes majeures. Nous obtenons:

$$
\begin{aligned}
G_0 \cap G_0 &= \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}\\
G_0 \cap G_1 &= \{0, 5\}\\
G_0 \cap G_2 &= \{2, 4, 7, 9, 11\}\\
G_0 \cap G_3 &= \{0, 2, 5, 7\}\\
G_0 \cap G_4 &= \{4, 9, 11\}\\
G_0 \cap G_5 &= \{0, 2, 4, 5, 7, 9\}\\
G_0 \cap G_6 &= \{5, 11\}\\
G_0 \cap G_7 &= \{0, 2, 4, 7, 9, 11\}\\
G_0 \cap G_8 &= \{0, 5, 7\}\\
G_0 \cap G_9 &= \{2, 4, 9, 11\}\\
G_0 \cap G_{10} &= \{0, 2, 5, 7, 9\}\\
G_0 \cap G_{11} &= \{4, 11\}
\end{aligned}
$$

Figure 25

Nous pouvons alors définir cette relation d'ordre ainsi (pour une modulation à partir de do majeur)

$$G_n \ \mathscr{R} \ G_m \iff \text{card}\ (G_0 \cap G_n) > \text{card}\ (G_0 \cap G_m)$$

$G_n \in M,\ G_m \in M$

$G_n \ \mathscr{R} \ G_m$ pouvant par exemple s'exprimer ainsi:

«Passer de G_0 à G_n est «plus naturel» que de passer de G_0 à G_m.

Une des nombreuses chaînes que nous donne cette relation est par exemple la suivante:

$$G_0 - \mathscr{R} - G_7 - \mathscr{R} - G_2 - \mathscr{R} - G_9 - \mathscr{R} - G_4 - \mathscr{R} - G_{11}$$

(le lecteur reconnaîtra dans cette chaîne l'ordre d'apparition des 6 premières gammes majeurs découvertes à la fin de la partie précédente).

De manière générale, c'est-à-dire pour une modulation à partir d'une gamme majeur quelconque G_x la relation se définit alors ainsi:

$$G_n \ \mathscr{R} \ G_m \iff \text{card}\ (G_x \cap G_n) > \text{card}\ (G_x \cap G_m).$$

Conclusion

Tout au long de cet article, nous n'avons cessé d'osciller entre musique et mathématique, montrant par là, grâce à l'ouvrage de Pierre Babaud, qu'entre ces deux disciplines des liens existent qui révèlent des parentés de raisonnement ou des analogies de situations allant même, dans certains cas (isomorphie des groupes de rotations et des groupes de transpositions) jusqu'à une réelle identité de structure. Cette constatation me pousse à citer ici une phrase tirée de la préface du livre «Algèbre linéaire et géométrie élémentaire» du mathématicien français Jean Dieudonné: «A notre époque de prolifération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer.» Le Plan d'introduction des programmes romands sous les yeux, j'interpréterais la citation précédente ainsi: «Dans les dix années à venir, qui verront l'élaboration et l'introduction progressive de méthodes et de moyens d'enseignement nouveaux, tout ce qui rapproche les différentes disciplines du Plan d'études romand, nous révélant des analogies réelles entre des situations apparemment étrangères, a une vertu qu'on ne saurait surestimer.» Le livre «La musique, discipline scientifique» de P. Barbaud est, à mon sens, un tel moyen de rapprochement.

• Nouvelles de France

La Charte de Caen

Etapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1972, 1976, 1980.

Cette Charte fait suite à celle de Chambéry dont Math-Ecole avait parlé dans son numéro 36 de janvier 1969.

Un extrait significatif:

1.3 *Quelles sont les finalités de l'enseignement des mathématiques?*

Même si, dans ce qui suit, il est question de la société de l'enseignement des mathématiques ou des maîtres qui les enseignent, il faut affirmer dès l'abord que le souci de l'A.P.M.E.P.[1] est, avant toute chose, l'enfant, l'élève, l'étudiant, l'homme. C'est en voulant contribuer, même pour une petite part, à son bonheur que, maladroitement peut-être, nous pensons à ce que l'école peut lui apporter, à ce que l'école ne devrait pas lui imposer, au rôle que l'enseignement mathématique peut ou doit jouer dans sa formation.

1.3.1 Dans la phase de formation générale une éducation mathématique commune à tous les enfants doit:

— Donner à l'élève un outil de pensée s'ajoutant à la panoplie d'explorateur du monde nécessaire à tout individu parcourant à son tour le destin de l'humanité.

— Contribuer à la formation de son intelligence et de son caractère, au développement de ses capacités de jugement, de création, d'émotion, de rigueur, de résistance à l'argument d'autorité, toutes qualités qui pourront l'aider un jour à supporter la vie en société, à s'y adapter ou à la transformer.

— Participer dans l'immédiat, c'est-à-dire dès l'âge scolaire, à son épanouissement dans des activités faisant également place à son goût du rêve, du jeu, de l'action et de la discussion.

1.3.2 Dans les phases suivantes, certaines spécialités se dégageant, des finalités particulières pourront intervenir.

Au cours de cette spécialisation, au C.E.T., au lycée, dans les enseignements suivant le baccalauréat, les objectifs de l'enseignement mathéma-

[1] Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public.

tique ne sont pas fondamentalement différents de ce qui vient d'être dit, ses méthodes non plus. Cependant une spécialisation progressivement accentuée peut, dans les enseignements professionnels, enrichir l'esprit formateur de l'enseignement mathématique. Mais les nécessités de cette spécialisation ne doivent pas empêcher l'enseignement mathématique de rester ouvert dans son déroulement et dans son fond pour que tous ceux qui en auront bénéficié gardent le goût de l'activité mathématique.

1.3.3 Cela est particulièrement vrai pour la phase de la formation permanente des adultes qui doivent trouver dans l'activité mathématique un moyen de comprendre et de transformer le monde autant qu'une aide pour s'y intégrer, des possibilités accrues de perfectionnement dans le cadre professionnel ou dans le rôle important de parents d'élèves.

1.4 En conformité avec ces principes, des voies s'offrent à l'A.P.M.E.P.

1.4.1 Affirmer et faire en sorte que, dans la réalité, tous les enfants aient le même accès aux Mathématiques, de la Maternelle à la fin de la scolarité obligatoire.
Cependant, enseignement mathématique pour tous ne signifie pas enseignement mathématique selon une formule unique. Des méthodes diversifiées doivent permettre dans une même classe à tous les enfants d'acquérir la formation mathématique jugée indispensable à tous par les voies et avec le temps nécessaires à chacun.

1.4.2 A tous les niveaux, mais spécialement à ceux de la scolarité obligatoire, la poursuite de ces objectifs pour tous les élèves (mise à part la frange indécise et qui devrait être de plus en plus réduite des inadaptés ou des débiles) impose à notre enseignement de se transformer en profondeur.
Le contenu de notre enseignement a une importance que nous reconnaissons tous — et l'étendue des domaines de l'activité humaine dans lesquels le recours à des modèles mathématiques s'avère fructueux le prouve surabondamment — aux niveaux de l'enseignement scolaire et spécialement jusqu'à la fin du premier cycle. Mais une rénovation des méthodes, une véritable mutation du climat pédagogique, joueront un rôle autrement efficace que la simple modification des programmes pour améliorer le rendement de notre enseignement. Ce qui nous conduit, quittant ici le domaine des principes pour celui des modalités pratiques d'action, à préconiser une modification des structures des programmes qui consisterait, au lieu de la liste exhaustive des matières qu'il faut enseigner coûte que coûte dans telle classe, à distinguer:

— un noyau de notions fondamentales qu'au terme de l'année tout élève de la classe doit avoir acquises (ce qui pose le difficile problème de l'évaluation des résultats scolaires);

— une liste de thèmes parmi lesquels les élèves et le maître pourront choisir ceux qu'ils étudieront, soit pour motiver l'introduction des notions fondamentales, soit pour illustrer des utilisations de ces notions, soit encore pour nourrir des recherches supplémentaires dont l'apparente gratuité donnerait aux élèves un avant-goût des études libres que, devenus adultes, ils entreprendront peut-être.

Remarques

1) La mise en pratique de cette nouvelle conception des programmes suppose qu'une vaste documentation soit mise à la disposition des maîtres pour éclairer leur choix et pour les guider dans la réalisation de ces études; en dehors des études que l'A.P.M.E.P. pourrait mener et publier à cette fin, il est dans la vocation des I.R.E.M. de contribuer à cette tâche.

2) Le maintien de la formule actuelle des programmes avec sa tendance bien connue à la surcharge marquerait la volonté délibérée de faire de l'enseignement mathématique un instrument de sélection; c'est ce que nous refusons non moins délibérément.

1.4.3 Un aménagement des horaires doit permettre de donner à tous les élèves le temps d'acquérir les notions fondamentales, aux plus rapides d'entreprendre des recherches libres, à ceux momentanément en difficulté de bénéficier du soutien effectif du maître ou des camarades pour rejoindre le peloton.

Remarque

Ces aménagements dans les programmes et dans les modalités de l'enseignement devraient permettre, au moins durant toute la scolarité obligatoire, un brassage des élèves déjà réalisé à l'Ecole Elémentaire, favorisant la cohésion du peuple enfantin sans étouffer ses diversités individuelles, et promouvant ainsi, dans la réalité des choses vécues, une certaine démocratisation de l'enseignement.

● Aux «lecteurs-liseurs» de Math-Ecole

Le service de la Documentation de l'IRDP (Jean Combes) a constitué un groupe de lecteurs qui ont accepté, contre modeste rémunération, de lire un certain nombre d'ouvrages qui arrivent à l'IRDP et de rédiger des comptes rendus. Ceux-ci paraissent dans les «*Listes d'acquisitions*» de l'IRDP (4-5 fois l'an) et sont repris par des périodiques comme l'«Educateur», «Techniques d'instruction» ou «L'Ecole valaisanne».

Question: Qui, parmi les lecteurs de Math-Ecole, accepterait de rendre compte des ouvrages que l'IRDP reçoit dans le domaine de la mathématique?

Les «abstracts» paraîtraient dans Math-Ecole et, bien sûr, dans la *Liste des acquisitions* sus-mentionnée.

Au nombre de ces ouvrages:

— *«Initiation à la mathématique de base»*
par Mlle J. Bolon, Claude Blanzin et Mme et Jean Sauvy. Brochure 1 de la collection «Chantiers de pédagogie mathématique». Paris, 1969.
Secrétariat de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, av. Marcel-Cachin, F - 92 - Chatillon-sous-Bagneux.

— *«La mathématique à l'Ecole élémentaire»*
A.P.M.E.P., Paris 1972 - 45 fr français - 29, rue d'Ulm, F - 75 Paris. CCP, Paris 5 708-21.

Les lecteurs de Math-Ecole y retrouveront des noms connus:
Maurice Glaymann: *Enseigner, c'est apprendre encore... et encore;*
Marguerite Robert: *Un nouvel état d'esprit;*
Madeleine Goutard et F. Lemay: *Langages et ensembles;*
Nicole Picard et M.A. Girodet: *Chercher pour se former;*
M.A. Touyarot: *Variations sur le thème des applications linéaires;*
G. Walusinski: *Matériaux pour une bibliographie.*

— *Les manuels de calcul dans l'enseignement primaire français,*
par Guy Vincent.

Etude réalisée par le Centre de sociologie de l'éducation de Lyon, 47, rue Philippe de Lassalle. Brochure offset, A5, 114 pages.

Benjamin S. Bloom, dans un article intitulé *l'Innocence en pédagogie,* a fort bien montré que l'école était gouvernée par deux sortes de programmes, le programme explicite, imprimé noir sur blanc et dûment agréé par les autorités politiques, et le programme implicite, non-écrit, apparemment agréé par personne. Le premier fait état de grands principes et paraît en accord avec une pédagogie avancée, généreuse, libératrice. Le second, qui en réalité ne fait état de rien, contredit le plus souvent les «principes» et, de ce fait, traduit le désir profond, quoique soigneusement refoulé, du pouvoir politique de ne rien changer à l'école. Jusqu'ici, on aurait pu croire que seuls les ouvrages de lecture, de géographie ou d'histoire, véhiculaient une idéologie cachée. Guy Vincent, dans l'ouvrage sus-mentionné, montre que cette idéologie, celle du pouvoir, celle de l'ordre qu'il est chargé de maintenir, est incluse aussi dans les manuels d'arithmétique. Ceux-ci transportent une conception économique qui est celle du capitalisme; ils ne donnent pas aux élèves l'occasion de la mettre en cause: «Le «calcul» primaire en France diffuse moins l'esprit capitaliste que l'esprit bourgeois, moins une économie et une morale populaires (au sens des vertus et principes de conduite économique utiles aux gens de condition modeste) qu'une morale pour le peuple, fondée sur le respect du capital et de la propriété privée». (P. 97).

Guy Vincent constate aussi que l'arithmétique des manuels est quelque chose qui faisait l'objet d'une inculcation, celle-ci étant considérée comme la seule manière de transmettre des connaissances (en calcul) aux enfants du peuple. En revanche l'arithmologie ou réflexion sur l'arithmétique était réservée aux enfants de la bourgeoisie qui, dans les lycées, recevaient, dès 6 ans, un enseignement plus ouvert.

La question se pose — et l'auteur ne fait qu'une allusion à cela — de savoir si le nouvel enseignement de la nouvelle mathématique comblera le fossé entre enfants du peuple et enfants de la bourgeoisie et si, révoquant l'inculcation, il formera des esprits ouverts, critiques, capables de construire un ordre nouveau.

Remarquons encore que la modeste, mais combien dense, publication de Guy Vincent, apporte une contribution méthodologique précieuse à ceux qui se chargeront de l'analyse du contenu des manuels scolaires.

S. R.

— *Modèles mathématiques et méthodologie des sciences humaines,*

par G. Leresche, professeur à l'Ecole des sciences sociales et politiques de l'Université de Lausanne. Publication de l'ESSP, No 7 - Genèève, Libr. Droz, 1972.

Ce petit ouvrage contient la leçon inaugurale du professeur Leresche, prononcée le 20 avril 1972 à l'Université de Lausanne. Il cherche à préciser l'apport des mathématiques à la méthodologie des sciences humaines.

Le lecteur n'a pas à craindre un exposé ardu, présenté dans un langage ésotérique. Au contraire, le texte se veut accessible à chacun.

Il est d'erreur fréquente de considérer la quantification et la rigueur comme garantes d'objectivité. L'exemple des notes scolaires est à ce titre significatif. C'est en effet un domaine que l'on a raffiné avec zèle, échafaudant des opérations subtiles sur des estimations de base grossières: «moyenne des moyennes où l'on tient compte du dixième ou du centième».

Les mathématiques actuelles, qu'il ne suffit pas de considérer comme un outil quantitatif, fournissent «un référentiel structurant et opérationnel» permettant la rationalisation du réel. Le recours aux mathématiques nouvelles, plus souples, favorise la distanciation par rapport au réel pour saisir de façon plus globale et plus profonde.

Les «ensembles» sont de ces modèles mathématiques dont on est friand en sciences humaines. Les relations sur des ensembles conduisent à un nouveau modèle: les graphes, très prometteurs également pour les sciences sociales parce que, tout en étant un modèle descriptif, il offre les avantages mathématiques de l'algèbre matricielle.

Grâce aux mathématiques, les sciences humaines gagnent en compréhension et en communicabilité.

J. Weiss, IRDP

— *Initiation à la théorie des graphes,*

par G. Leresche, Publications de l'Ecole des sciences sociales et politiques de l'Université de Lausanne, No 9 - Genève, Libr. Droz, 1972.

Cette publication témoigne d'un bel esprit communautaire et interdisciplinaire. Son auteur a désiré mettre ses collègues non-mathématiciens (sociologues, psychologues, pédagogues, spécialistes en sciences politiques et économiques) au courant des méthodes d'analyse que la mathématique a mises au point et qui sont susceptibles de les aider dans l'élucidation de leurs problèmes spécifiques. Le professeur Leresche avait organisé un séminaire qui, pendant un semestre, toutes les semaines, de 12 à 14 heures réunissait professeurs et assistants de l'Ecole. C'est la substance de ce séminaire que nous offre le présent opuscule. Sous une forme accessible à l'honnête homme d'aujourd'hui, le lecteur fait connaissance avec le langage et la logique ensemblistes, les relations, les graphes et les opérations matricielles. On verra ainsi que la «math moderne» peut être entendue par quiconque n'a pas de formation initiale, qu'elle est utile et, enfin, que la génération montante se trouvera convenablement équipée si on veut bien lui apprendre à penser selon les catégories nouvelles, celles-mêmes qui sont proposées dans l'ouvrage tout récent destiné aux enfants de six ans, Math - Première année.

S. R.

— *«Mathématique 2e année»*. Méthodologie-Commentaires. Ouvrage collectif, réalisé par Mario Ferrario, directeur du Centre d'information mathématique, secondé par Mesdames Nadia Guillet, Josée Wetzler, Mademoiselle Françoise Waridel, Messieurs François Brunelli et Charles Burdet.

Second volume d'une série de quatre destinés aux enseignants de la Suisse romande. On y retrouve, l'enseignement de la mathématique étant cyclique, les quatre avenues [1] du premier volume: Ensembles et relations (ER), Numération (NU), Opérations (OP), Découverte de l'espace (DE).

[1] Voir «Math-Ecole», numéro 55, novembre 1972.

«Le renouvellement du programme de mathématique favorise une prise de conscience au niveau de la pédagogie. L'épanouissement de l'enfant est la préoccupation dominante des enseignants; c'est pourquoi il est indispensable de susciter et de développer constamment:

— l'activité libre et spontanée;
— la manipulation de matériels variés, liée à une recherche;
— la recherche individuelle ou par groupe;
— la communication orale ou écrite;
— l'expression et la créativité;
— le respect de l'opinion d'autrui.

Dans la pratique scolaire, cela signifie que les situations présentées aux enfants doivent être riches en possibilités de recherche et ouvertes à des solutions variées et parfois inattendues; ainsi chacun y trouve de l'intérêt et peut progresser selon ses aptitudes intellectuelles et en accord avec le niveau de son développement psychologique.»

Illustrations de Mme Claire Comment.

Réalisation: Fournitures et éditions scolaires, Lausanne, 1973.

● Echanges de revues

Math-Ecole recevait, pour échange, trois revues consacrées à l'enseignement de la mathématique: «NICO», de Papy, «Mathematica et Paedagogica», organe de la Société belge des professeurs de mathématique et A.C.B. (Association Cuisenaire Belgique). Une quatrième revue vient de lui être proposée. Il s'agit de «*Chantiers de pédagogie mathématique*», bulletin trimestriel de la Régionale parisienne de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (A.P.M.E.P.). Le directeur en est le professeur Gilbert Walusinski.

Adresse de la Régionale parisienne: 13, rue du Jura, F - 75013 Paris.

Contribution aux frais de la publication: 10 fr. français (il faudrait sans doute, pour les Suisses, ajouter quelque-chose pour les frais de port, disons 10 fr. suisses en tout).

Au sommaire de la dernière livraison, numéro 25, janvier 1973: Echos des journées de 1972: *Une expérience d'analyse de notre comportement dans la lecture d'un texte mathématique*, par Josette Adda;

Les représentations graphiques, par Mlle Lopata;

Exercices et formation permanente des maîtres, par Evariste Dupont;

Mauvaises lectures et autres; etc.

- **«A.C.B.»** - Association Cuisenaire Belgique. No 5, 1973.

— Le nombre 72 par Denise Van Haeren.
— Première initiation à la géométrie du plan par Isabelle Lejeune.

- **«NICO 13»**

La revue de Papy, avril 1973.
Extraits du sommaire:

— Initiation vectorielle à l'équation de la droite à 10 ans par Frédérique et Papy.
— Quelques réflexions sur l'enseignement de la mathématique à 9 ans et au-delà par M. J. Papazian.
— Un enseignement moderne de la mathématique à des enfants mentalement handicapés par R. Dieschbourg.
— La mathématique peut-elle être une thérapeutique par F. Lowenthal.

Ce numéro contient les actes de la 2e rencontre du G.I.R.P. à Barletta (Italie) en avril 1972.

- **A signaler aussi:**

La revue «*A.R.P.*» (Activités Recherches Pédagogiques), directeur S. Sauvy, 27, av. du 11 Novembre, F - 92190 Meudon.
Abonnement: 20-25 fr. français. CCP Paris 2611-84.
Elle fait une large place à la mathématique.
No 6, septembre 1972: *Topologie en 8e* (enfants de 9-10 ans) - *La réforme de l'enseignement des mathématiques en Hongrie* (enseignement élémentaire);
No 7, novembre 1972: *Français et mathématiques*, - *Le jeu de quatre lettres et ses variantes* (élèves de 9-11 ans);
Codes et apprentissages de nombres à virgules au cours moyen 2e année (10 ans);
Difficultés rencontrées par les jeunes enfants dans les questions de mesure (9-11 ans);
Formation complémentaire d'adultes en mathématiques;
No 9, mars 1973: *L'art du SOMA au cours moyen 1* (le SOMA est un matériel danois comprenant sept morceaux de bois, sept assemblages irréguliers de trois à quatre cubes conçus par Piet Hein). Martin Gardner consacre aux cubes SOMA un chapitre de son ouvrage: «*Problèmes et divertissements mathématiques*» (édition Dunod);
Formes et espaces: quelques idées de jeu;
Topologie en 8e (suite).

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

SOMMAIRE

Abonnements:

Suisse F 7.—, Etranger F 8., CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).