août 1995

34e année

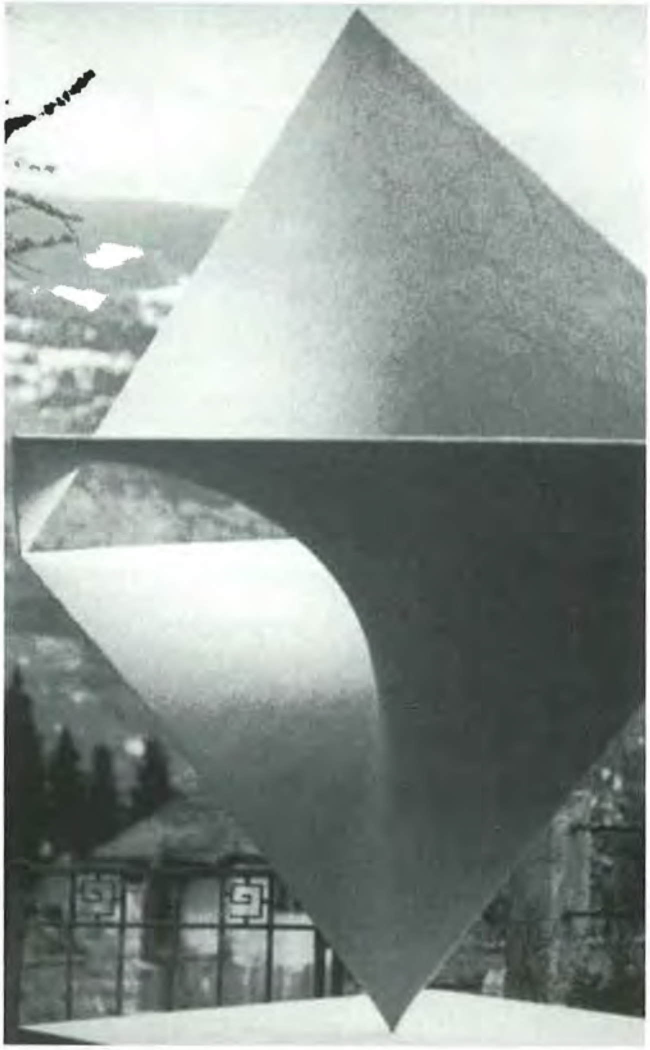
168

MATH ECOLE

Nombre et sens

Math 5 - 6... pas si mal !

De la pub pour le cube



MATH-ECOLE

34e année   5 numéros par an

168

août 1995

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (038) 24 41 91
Fax (038) 25 99 47

Abonnement annuel (5 numéros)
Suisse: Fr. 20.- Etranger: Fr. 25.-
CCP 12-4983-8

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 22 14 60

Couverture
E.11P. Acier inox et polyester blanc
œuvre d'Angel Duarte
(Banque nationale suisse, Berne)

Graphisme: François Bernasconi

Sommaire

Editorial

Lectures de vacances, lectures souvent réconfortantes.
Voici un extrait de l'une d'entre elles, qui vaut bien un éditorial !

«Enseigner la mathématique, ce n'est pas transmettre un savoir particulier, c'est faire fonctionner l'esprit et assurer le montage de ses mécanismes. En effet, les lois de la mathématique ne sont pas celles des mathématiques, ni celles des mathématiciens. Ce sont celles mêmes de toute intelligence qui fonctionne rationnellement. Si donc la mathématique est un mode de pensée, seul un enseignement actif, bannissant tout dogmatisme pourra lui convenir. Comprendre sera le centre du processus d'apprentissage. Car apprendre, sans comprendre, c'est acquérir une habitude mentale au moyen d'un dressage. Ensuite, quand il s'agit vraiment de comprendre, il faut désapprendre le premier acquis, se défaire d'une habitude. Temps et peine perdus. Il résulte de cela que les enfants ne doivent pas apprendre des techniques connues du maître et transmises par une voie autoritaire. Ils doivent réellement construire leur mathématique en formant eux-mêmes, peu à peu, les concepts de leur propre expérience . ...

Parlant de la transmission des notions, Piaget dit : *«On peut même aller jusqu'à dire que la transmission pure est toujours déformante, et que, pour qu'une notion se communique de façon adéquate, il faut qu'elle soit construite par celui à qui elle est transmise; en effet, une vérité non recréée n'est pas une vérité, mais une simple opinion consolidée par des facteurs extra-logiques (puisque la logique suppose la coordination dans l'échange).»*

L'enseignement, dès lors, ne peut plus consister en leçons faites par le maître devant ses élèves plus ou moins passifs. Il est fait de situations proposées aux élèves travaillant le plus souvent en petits groupes. Les situations donnent lieu à des questions. Les élèves alors cherchent, montent une stratégie de recherche. Les réponses auxquelles ils parviendront prenant alors le caractère d'outils intellectuels qui peur permettront d'aller plus avant dans leurs recherches comme dans leur compréhension.»

Ces propos ne sont pas ceux d'un mathématicien, ni d'un didacticien de la discipline. Ils ont été tenus, en 1969, par un pédagogue qui avait bien saisi les enjeux décisifs des innovations futures et que les anciens lecteurs de *Math-Ecole* connaissent bien puisqu'il a été le fondateur puis l'animateur de le revue durant de longues années.

Vingt-six ans plus tard, au moment où la Suisse romande met la dernière main à une nouvelle génération de moyens d'enseignement, on ne peut qu'être frappé de l'actualité de ces propos. Merci à Samuel Roller de nous avoir confié récemment le texte de sa conférence dont est extrait le passage ci-dessus, tenue à Bellinzona, sur «l'enseignement moderne de la mathématique». Et souhaitons que son message d'alors soit compris et mis en pratique par tous ceux qui, prochainement, seront appelés à donner à l'élève une part plus importante dans la construction de ses connaissances.

François Jaquet

Nombre et sens

par Colomba Boggini-Jan et François Jaquet, IRDP, Neuchâtel

Cadre général

Les nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques de la première à la quatrième année primaire seront expérimentés dans une quinzaine classes. Il s'agit là d'une entreprise de grande envergure qui, deux ans avant l'édition définitive, consiste à mettre à l'épreuve une première version du manuel, des fiches d'élèves et du livre du maître, en temps réel et dans des conditions analogues à celles de leur pratique future.

L'opération a commencé en août 1994, au niveau de la première année, dans 15 classes de Suisse romande. Au rythme d'un jour par mois, tout au long de l'année scolaire, les maîtres concernés se sont rencontrés, avec les auteurs, pour déterminer les plans de travail et d'avancement dans le programme, préparer les séquences d'enseignement et d'apprentissage, rendre compte des expériences des uns et des autres, apporter des propositions d'adaptation ou de modification des activités et documents proposés.

Pour tirer une information maximale de cette mise à l'épreuve, on a encore mis en place un dispositif d'observation afin de suivre l'évolution de quelques notions, de vérifier leur degré d'acquisition par les élèves, de comparer les niveaux de quelques connaissances construites à travers les «nouveaux» ou les «anciens» moyens d'enseignement.

Pour la première année, l'observation s'est intéressée aux domaines de la suite numérique, de l'addition, de la mesure, des formes géométriques, de la logique et du repérage, au sein desquels elle a imaginé les six activités suivantes:

1. **Le Halma** : comptage, correspondance terme à terme, addition «donner du sens au nombre».
2. Le jeu de l'oie : la «bande numérique»: recherche du prédécesseur et du successeur d'une séquence de cinq nombres consécutifs et vérification de la comptine.
3. Le kiosque : utilisation de la monnaie, formation de sommes et restitution de monnaie.
4. La nappe : repérage dans un quadrillage, codage et décodage de position, orientation.
5. Les trains : relation d'ordre, le nombre comme mesure, mesurage de longueurs.
6. Le puzzle : reconnaissance et comparaisons de formes, comptage des côtés, estimation des angles, classement selon les dimensions.

Cet article se propose de décrire la première d'entre elles, liée à l'utilisation du nombre dans la tâche de préparation des pions d'un jeu de «Halma».

Cadre conceptuel

Les nouveaux moyens d'enseignement proposent de prendre en compte le sens dont l'élève a besoin pour conduire son activité et d'utiliser ses connaissances initiales. A propos du nombre, ils précisent que : «L'enfant qui entre à l'école sait beaucoup de choses dans le domaine du nombre. Ce qu'il sait n'est certainement pas le "savoir savant", ni celui des plans d'études, ni celui qu'il aura à la fin de la première. Il connaît des éléments de la comptine, sait dénombrer des objets, comparer numériquement des collections, résoudre efficacement quelques problèmes d'arithmétique. Bref, il se sert de "son nombre", même s'il n'en a qu'un concept partiel».

La comptine, en particulier, a des statuts très variables d'un élève à l'autre, à l'entrée à l'école primaire. Pour certains, elle n'est qu'une simple récitation ininterrompue, pour d'autres, une suite de mots séparés et bien distincts, pour d'autres encore, elle peut correspondre, terme à terme, aux objets d'une collection ou être déjà un instrument efficace de dénombrement. Mais il y a encore un pas important à franchir pour accéder à la maîtrise du nombre. Il ne suffit pas de savoir compter les objets d'une collection, encore faut-il penser à retenir le nombre obtenu comme propriété permanente qui en fait un outil pour constituer d'autres collections équivalentes.

Dans le module *Approcher le nombre et lui donner du sens*, l'activité des *Cousins* place l'élève dans une situation où il a besoin du nombre comme «mémoire» d'une quantité :

Chaque élève a devant lui l'image d'un personnage étrange, constitué de 12 à 20 cases blanches. Sa tâche consistera à le recouvrir de petits cartons de couleurs, de même dimensions que les cases blanches. Mais ces cartons sont situés à bonne distance et il faut aller en chercher le nombre exact, en un minimum de voyages.

La consigne est la suivante :

Chacun de vous va recouvrir toutes les cases blanches de son personnage avec des petits cartons de couleur. Vous allez les chercher dans les paniers là-bas et vous en prendrez juste ce qu'il faut, pas plus, pas moins.

La stratégie optimale à mettre en œuvre pour réussir la tâche est de compter les cases, de retenir leur nombre, puis, sur l'emplacement où sont déposés les cartons à disposition, de les compter pour en ramener la quantité nécessaire.

La première partie de la situation du *Halma* propose une activité analogue. Au lieu de d'aller chercher des cartons pour recouvrir un motif, il s'agit ici de prendre des pions pour les placer sur les cases d'un des quatre «camps» du plateau de jeu (voir *figure 1* ci-dessous).

A la différence des *Cousins* où l'activité est pratiquée collectivement, dans le *Halma*, l'enfant travaille dans le cadre d'un entretien individuel.

Un autre fait à relever : tous les élèves interrogés pour le *Halma* avaient déjà fait en classe l'activité des *Cousins*.

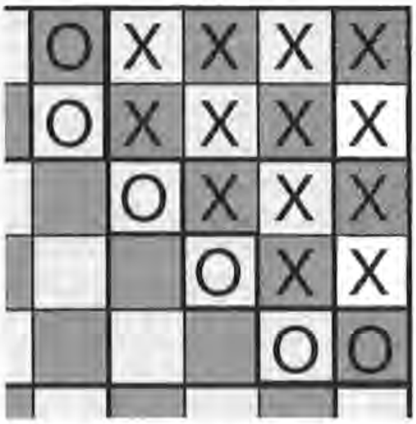


figure 1

Un des quatre «camps» à compléter du plan de jeu.

L'enfant doit aller chercher 13 pions à placer sur les cases, marquées d'un «**X**» (Q.11, Q.12).

Dans la deuxième partie de l'activité, il devra encore aller chercher six autres pions à placer dans les cases marquées d'un «**0**» (Q. 15).

1. Le nombre comme mémoire d'une quantité d'objets

Hypothèse

En début de première, l'élève peut savoir compter jusqu'à vingt environ sans que le nombre ait atteint le statut d'outil lui permettant de l'utiliser pour déterminer et mémoriser une quantité de pions à aller chercher (Q. 11 et 12).

Activité

L'enfant et l'expérimentateur sont assis l'un à côté de l'autre, le plateau de *Halma* est déjà posé sur la table. Dans l'angle de l'expérimentateur sont préparés 13 pions bleus et dans l'angle de l'enfant 13 pions jaunes.

Les autres pions, en quantités plus que suffisantes, sont dans une boîte qui se trouve à au moins deux mètres de la table.

L'expérimentateur accueille l'enfant, lui montre le jeu et le matériel.

Je vais te montrer comment on place les pions pour jouer à ce jeu. Dans chaque coin il y a une ligne noire [montrer les lignes noires], *nous, on place nos pions dans la maison noire* [montrer l'intérieur du camp déterminé par la ligne noire, marquées par des x sur la figure]. *Tu placeras les bleus, moi je placerai les jaunes.*

Lorsque l'enfant a mis ses pions correctement, et qu'il reconnaît les cases du camp (intérieur de la ligne noire) :

Q. 11 *Tu vas maintenant mettre des pions rouges dans ce coin,* [on montre un troisième camp, vide] *comme ici et là* [on montre les camps bleu et jaune]. *Tu vas aller chercher les pions rouges qu'il faut pour mettre ici, juste ce qu'il faut. Il y a des pions rouges, là-bas, dans la boîte.*

L'élève va chercher les pions rouges et revient les placer.

S'il en a pris le nombre exact :
Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour en prendre juste ce qu'il faut ?

S'il en a pris trop, ou trop peu :
Va rapporter ceux que tu as en trop / va rechercher ce qu'il te manque.

Q. 12 *Maintenant, tu vas mettre encore des verts dans ce coin. Cette fois, tu n'as droit qu'à un seul voyage. Tu dois prendre juste ce qu'il faut, ni trop, ni trop peu.* [On répète si l'enfant ne tient pas compte de la consigne].

Au cas où l'enfant n'y arrive pas en un seul voyage, on peut retirer les bleus et/ou les jaunes et recommencer une troisième ou quatrième fois.

Lorsqu'il arrive à accomplir la tâche :
Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour en prendre juste ce qu'il faut ?

Résultats

Utiliser le nombre ne vient pas immédiatement à l'idée de la majorité des enfants : seulement 11 élèves sur 55 (20%) pensent à compter au premier essai. Une première tentative infructueuse amène 18 autres élèves (33%), à se rendre compte de la nécessité de définir de façon précise la quantité de pions nécessaires, et donc à compter. Au troisième et quatrième essais la proportion d'enfants qui comptent monte encore, et en quatre essais au maximum, 43 enfants sur 55 (78%) ont compté. Il reste 13 enfants (24%) qui ne ressentent pas la nécessité de compter (voir *tableau 1* en page suivante).

Mais le comptage des cases n'assure pas la réussite de la tâche. Sur les 42 élèves ayant compté les cases , 27 ramènent les 13 pions nécessaire. Les 15 autres ont dû corriger leur total : 9 recomptent leurs pions, et 6 essayent de «corriger le tir» en tenant compte de l'erreur (par exemple, un enfant qui avait compté lors du deuxième essai, mais ramené un pion de trop, est reparti sans recompter et a pris *la même chose qu'avant sauf un de moins.*

	1	2	3	4	n.c.	total
N	11	18	9	4	13	55
f.r. [%]	20	33	15	08	24	100
f.c. [%]	20	53	68	76	100	-

Tableau 1 : Nombre d'enfants (**N**) et proportion (fréquence relative : **f.r.**) de ceux qui comptent, pour la première fois, au premier (**1**), deuxième (**2**), troisième (**3**) et quatrième (**4**) essai, ou ne comptent pas (**n.c.**) et taux cumulés (fréquences cumulées : **f.c.**)

Autres observations

1.1. Permanence de la stratégie

Les enfants qui comptent au premier essai utilisent-ils l'information obtenue pour aller chercher la deuxième collection de pions, ou doivent-ils recompter ?

Des 11 enfants qui avaient compté au premier essai, 5 ont réussi la tâche (ramener 13 pions en un seul voyage) : de ces 5 enfants qui auraient pu réutiliser l'information pour la collection suivante, 1 seul l'a fait avec succès, 2 autres ont recompté et les 2 derniers n'ont plus recompté et n'ont plus réussi la tâche.

1.2. Stratégies proches du comptage

Quatre enfants qui n'ont pas compté au premier essai ont cependant demandé *combien* de pions il faut. Le mot *combien* semble ici lié à la notion de quantité, mais pas immédiatement à l'idée de comptage. La difficulté à estimer exactement la quantité sans compter amène très vite ces enfants à utiliser le nombre. Certains sujets, spontanément ou pour expliquer leur démarche, disent ne pas avoir compté : *je n'ai pas compté* ou *je ne sais pas si c'est juste*. Ils introduisent donc l'idée de compter, mais ne la réalisent pas (du moins pas à ce moment là). Certains termes qui expriment la notion de quantité sont aussi utilisés : *assez, trop, moins*, ... Par ailleurs, une fillette compte ses pions en les posant, mais ne pense pas à réinvestir cette information : le comptage reste pour elle un exercice en soi, sans autre finalité, le nombre n'étant pas utilisé comme mesure d'une quantité.

1.3. Capacités d'estimation

Sur les 44 élèves n'ayant pas compté les cases au premier essai - du moins apparemment - 5 ont pourtant réussi la tâche, 20 ont pris de un à trois pions en moins (17) ou en trop (3), et 19 ont obtenu des approximations plus imprécises, de plus de trois pions d'écart (voir *tableau 2*).

E	13	10 à 12, 14 à 16	autres	total
N	5	20	19	44
f.r. [%]	11	45	43	100

Tableau 2 : Estimations (**E**) au premier essai, pour les enfants qui n'ont pas compté.

Dans les essais suivants, 6 enfants, qui ne comptent pas les cases ramènent pourtant exactement 13 pions. Deux sujets, notamment, font cela à plusieurs reprises : le premier prend 11 pions au 1er voyage, 13 au 2ème, 13 au 3ème, 15 au 4ème, 11 au 5ème, 13 au 6ème et 11 au 7ème; le second prend tous les pions à disposition au 1er voyage , 13 au 2ème, 10 au 3ème, 13 au 4ème, 16 au 5ème et 13 au 6ème. Les sujets ont dit ne pas avoir compté, et ils n'ont pas regardé les pions suffisamment longtemps pour avoir pu les compter mentalement.

1.4. Les explications des enfants

Lorsque les enfants ont rapporté le bon nombre de pions, on leur demande (Q11 et Q12) : *Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour en prendre juste ce qu'il faut ?*

La réponse est évidente pour ceux qui ont compté les cases. Ils le disent. Pour les autres, il est assez difficile de leur faire expliquer la manière ont ils s'y sont pris :

Deux fillettes expliquent qu'elles se sont *rappelées des cases*, une des deux ajoute la description des cases : *2 + 3 + 2 x 4*. Cette stratégie n'a pas été classée comme comptage, et nous semble très élaborée.

Un certain nombre d'enfants ne comptent (apparemment) pas, mais estiment visuellement : *«j'ai vu qu'il y avait assez»*, ou à partir de la poignée qu'ils ont eu précédemment dans leur main.

On a aussi observé quelques enfants qui comptaient mentalement et sans désigner les pions en essayant de cacher cela, comme si le jeu consistait à «deviner la quantité, sans compter», cependant il ne nous semble pas que les réussites et les estimations proches, classées «sans compter», puissent être expliquées par un «comptage caché» (les enfants partent sans observer les pions, la pose des pions demande souvent beaucoup de concentration en elle-même, la réussite n'est pas constante).

Discussion

Chez la majorité des enfants testés en début de première année, le nombre n'est pas a priori un outil qui permet de déterminer et mémoriser une quantité de pions à aller chercher. 11 enfants seulement, sur 55, pensent à compter au premier essai.

On pouvait penser qu'ils seraient plus nombreux à envisager le nombre comme l'outil le plus efficace dans cette tâche, d'autant plus qu'ils l'avaient rencontré comme tel dans l'activité analogue des *Cousins*, conduite en classe quelques semaines plus tôt.

L'estimation exacte de la quantité de pions sans utiliser le nombre se révèle difficile à l'usage, c'est ce qui conduit la majorité des enfants à compter, au deuxième, troisième ou quatrième essai. Ceci nous permet de dire que le nombre «prend du sens pour ces élèves» dans cette situation.

Il reste cependant un quart des enfants, environ, pour qui le nombre n'a pas encore de statut suffisamment stable pour être utilisé spontanément en tant que mesure d'une quantité («nombre-cardinal»).

Mais les enfants qui ne comptent pas estiment relativement bien la quantité de pions à aller chercher, sans qu'on puisse vraiment savoir comment ils s'y sont pris.

2. Le dénombrement des pions

Hypothèse

A l'entrée en première primaire, les élèves sont, dans l'ensemble, capables d'effectuer le dénombrement d'une collection de dix à vingt éléments.

Activité

Q.13 Lorsque les quatre camps sont complets :

Maintenant, compte les pions rouges ....
Il y en a combien ?
Et les verts ? ...
Et les jaunes ? ...
Et les bleus ? ...

En cas d'erreur de comptage, faire en sorte que l'enfant vérifie.

Résultats

Tous les enfants, sauf un, peuvent dire, après avoir compté, combien de pions il y a dans la collection. Un seul enfant doit les recompter. Le mot «combien» révèle de nombreuses facettes, en effet même les enfants qui aux questions Q. 11 et Q. 12 ne pensaient pas à compter pour trouver la quantité de pions nécessaire peuvent réinvestir, dans ce contexte, le «nombre résultat d'un comptage» en «nombre permettant de répondre à la question combien» ou «nombre cardinal».

Sur la manière de procéder pour le dénombrement des pions des premiers camps, on obtient les résultats retranscrits dans le *tableau 3 :*

46 enfants sur 53 (86%) comptent sans problème. Quatre enfants ne maîtrisent pas la suite numérique jusqu'à 13 (D1). Six enfants ont des difficultés à coordonner le dénombrement des pions et la comptine orale (D2). Trois enfants manifestent à la fois des difficultés de type D1 et D2 : l'un compte par ligne et deux sans ordre apparent.

35 élèves sur les 53 observés (66%), dénombrent systématiquement les pions «par ligne», ce qui rend la tâche plus facile, comme le relève l'un d'eux, qui commence par compter sans ordre visible, mais change de stratégie en disant : *Je vais compter en ligne, c'est plus facile.* 11 enfants sur 53 (19%) comptent sans ordre apparent, mais cela ne représente une difficulté que pour un seul d'entre eux. Quelques enfants (4 sur 53) dénombrent les pions en spirale, et 3 autres les comptent mentalement et sans les désigner. Un enfant compte les pions en les prenant dans la main; cette stratégie est utilisée ailleurs par d'autres élèves en difficulté, soit spontanément soit à la suite de suggestions.

Certains élèves ont pu répondre sans compter aux questions Q.13 car ils se souvenaient des comptages qu'ils avaient effectués dans les tâches précédentes (Q.11 et Q. 12). D'autres on recompté les pions

Comptent...	**par ligne**	**en spirale**	**sans ordre apparent**	**sans désigner les pions**	**total**
... **sans difficultés**	32	4	7	3	46
... **D1** (diff. comptine)	2*	0	2*	0	4*
... **D2** (coordination)	2*	0	4*	0	6*
total	35	4	11	3	53

Tableau 3 : Nombre d'enfants par stratégie de comptage, et par type de difficulté. * Les catégories D1 et D2 ne sont pas disjointes, certains enfants figurent dans les deux simultanément.

	Sans compter	Recomptent un ou deux camps	Recomptent les quatre camps	Total
f.a.	14	4	36	54
f.r. [%]	26	7	66	100

Tableau 4 : Fréquences absolues (**f.a.**) et relatives (**f.r.**) des comptages lors de la question Q.13.

d'un ou deux camps et ont pu se passer du comptage pour les derniers. Certains ont recompté les pions de chacun des quatre camps. Les observations qui se rapportent à ces comptages figurent dans le *tableau 4*:

14 enfants peuvent dire que dans chaque camp il y a 13 pions, sans devoir les compter, 4 enfants comptent une ou deux collections et n'en ressentent plus le besoin pour les suivantes, 36 doivent compter les pions des quatre camps.

Discussion

Ces données montrent à l'évidence que, dans ce contexte précis, une majorité d'élèves est à l'aise dans le dénombrement.

Cependant on a pu observer quatre enfants qui présentaient des difficultés parfois considérables, déjà révélées par les questions précédentes, lors du comptage des pions à aller chercher.

On a aussi remarqué que plusieurs enfants ont de la peine à coordonner la récitation de la suite numérique et le dénombrement d'objets jusqu'à 13.

Une analyse de quelques cas montre encore que le comptage pour définir une quantité de pions à aller chercher (Q.11 et 12) est plus difficile que le dénombrement de pions déjà présents (Q.13).

Ces constations nous permettent de souligner la nécessité de prendre en compte le niveau conceptuel auquel se trouve l'enfant quand il utilise le nombre : compter pour aller chercher un certain nombre d'objets, compter pour répondre à la question «combien», compter pour montrer qu'on sait compter, compter des objets ou réciter la comptine numérique, sont des tâches qui font appel à des représentations du nombre non encore unifiées ou coordonnées pour certains élèves de première. Par conséquent, il paraît important de multiplier les occasions de confronter ces différentes représentations et de conduire une réflexion à leur propos, comme le proposent les moyens d'enseignement.

3. La «conservation» du nombre obtenu

Hypothèse

Les enfants vont utiliser les résultats des dénombrements des pions des quatre camps ou d'autres informations - comme la forme équivalente des camps - pour en déduire l'égalité des pions dans chacun d'entre eux.

Cette hypothèse est en quelque sorte celle d'une certaine stabilité du nombre obtenu après plusieurs comptages et manipulations, camp par camp. En ce sens, elle rejoint la «conservation» piagétienne du nombre.

Activité

Q. 14 Lorsque l'enfant a compté correctement et trouvé qu'il y a 13 pions dans chaque camp :

Où est-ce qu'il y en a le plus ?
Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour savoir ?

Résultats

Une première analyse permet de mettre en relation les réponses de 48 enfants (sur 54) avec les questions Q.13 et Q.14 (v. *tabl. 5*).

Sur 17 enfants qui avaient pu dire - lors de la question précédente (Q.13. v. *tabl. 4*) que dans chaque camp il y a 13 pions, sans devoir tous les compter, seulement neuf en sont suffisamment sûrs pour reconnaître sans hésitation l'équivalence des camps. Quatre d'entre eux fondent leur assurance sur la reconnaissance de l'équivalence de la forme, et un sur des connaissances extérieures : dans *ce type de jeux tous les joueurs ont le même nombre de pions.*

29 enfants sur 48 reconnaissent sans hésitation qu'il n'y a pas plus de pions dans un camp que dans un autre ou que c'est *la même chose partout*, 5 ont dû recompter les pions pour admettre l'équivalence, 5 ont, dans un premier temps, pensé que dans un des camps il y avaient plus de pions, mais ont changé d'avis et 9 ont nié l'équivalence, même après questionnement et recomptage.

Autres observations

3.1. Les justifications des enfants

On a pu relever les justifications de 31 enfants (v. *tabl. 6* en page suivante).)

Vingt d'entre eux appartenaient à la catégorie de ceux qui reconnaissaient sans hésiter l'équivalence des camps à la question Q.14. Parmi ceux-ci, quatorze justifient leur réponse en citant le nombre 13 ou le comptage précédent, trois se basent sur la forme équivalente des camps, l'un déclare que dans tous les jeux de société les joueurs ont le même nombre de pions et deux autres disent qu'*on voit qu'il y a la même chose.*

On a noté les justifications de sept enfants qui niaient l'équivalence des quatre collections. Il est intéressant de relever que quatre d'entre eux se réfèrent à un comptage précédent pour justifier que dans un coin il y a plus de pion: *j'ai compté, je compte et je réfléchis.*

Des enfants justifient leur réponse en utilisant

	Réponses à la question 14				
Réponses à la question 13	sans hésiter	recomptent	reconnaissent tardivement	nient l'équivalence	**Total**
sans les compter tous	9	2	2	4	17
en comptant les les quatre camps	20	3	3	5	30
Total	29	5	5	9	48

Tableau 5 : Réponses des enfants à la question Q.14 : en fonction des réponses à la question Q.13.

Répondent à la question Q. 14...	citent «13» ou se réfèrent aux comptages précédents	invoquent la forme des camps	autres justifications	Total
... sans hésiter	14	3	3	20
... reconnaissent tardivement	2	1	1	4
... nient l'équivalence	4	0	3	7
Total	20	4	7	31

Tableau 6 : Justifications des réponses à la question Q.14.

des termes qui expriment une quantité : *il y a plus de carrés; là il y a un peu, là assez, et ici beaucoup.* Un de ces quatre enfants fait conjointement référence au nombre et à la forme : *Il y a deux de plus, la ligne est plus grande.* 3 autres donnent des justification du type : *on voit, je regarde bien,...*

Tous ces enfants avaient compté les pions spontanément ou à la demande de l'observateur, et trouvé dans les quatre coins 13 pions.

Discussion

Dans ce contexte, qui requerrait une connaissance plus sûre du nombre, un tiers des enfants ont quelques difficultés à réinvestir le «nombre résultat d'un comptage» en «nombre cardinal». En effet, d'avoir obtenu après comptage le même nombre dans chaque collection ne suffit pas à en prouver l'équivalence, car, comme le dit un enfant, qui pour être sûr doit recompter, *«ça dépasse, en tout il y en a 13, mais peut-être il y en a un de plus»*. Si le nombre semble être «cardinalisé» à la question Q. 13 et pas à la question Q. 14, il ne faut pas oublier que le «combien», qui indique une quantité, est aussi souvent implicitement lié à l'idée de comptage; d'autre part il nous semble possible qu'une notion acquise à un niveau donné puisse se révéler instable à un niveau plus élevé.

4. Le réinvestissement du nombre dans une opération d'addition

Hypothèse

Le nombre de pions (13) confirmé par de nombreux comptages et questions, n'a pas encore de statut opératoire pour de nombreux enfants, qui vont devoir recompter tous les objets en cas d'adjonction de nouveaux pions.

Par conséquent, ils seront peu nombreux à transcrire le résultat de leur opération au plan des nombres, par une écriture additive.

Activité

Q.15 *On peut jouer comme ceci, avec 13 pions, mais il y a des personnes qui mettent des pions jusqu'à la ligne verte, comme ceci* [montrer une à une les six cases notées par un **0** dans la *figure 1*]. *Combien de pions bleus est-ce que je dois encore aller te chercher, pour remplir toutes les cases entre la ligne noire et la verte ?*

Lorsque l'élève a répondu «six», l'expérimentateur lui donne six pions bleu clair : *Voici six pions bleu clair. Place-les sur ces six cases.*

Q.16 *Combien y avait-il de pions bleu foncé ?...* [Confirmer: 13]
Et combien a-t-on rajouté de pions bleu clair ?... [Confirmer: 6]
Dis-moi combien il y a de pions bleus, en tout, ici. [Montrer tout le camp bleu.]
Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour savoir ?
En cas d'erreur : *Compte encore une fois.*

Q.17 *Maintenant, avant de ranger les pions, pour que je puisse me souvenir de ce que tu as mis, je te demande de marquer ici combien il y a de pions bleu foncé, de pions bleu clair et de pions bleusen tout.* [Donner un crayon et une feuille de papier.]

Résultats

A la question Q.16, 33 enfants sur 55 (60%) procèdent par recomptage de l'ensemble des pions bleus, 16 (29%) surcomptent à partir de 14: dix à haute voix en désignant les pions, quatre mentalement et deux sur leur doigts (sans désigner les pions) à haute voix. Deux enfants ont dit savoir que 13 + 6 font 16, ou 21 et, finalement, quatre enfants ont procédé de façon non compréhensible pour l'expérimentateur, ils ont répondu: 21, 18, 20 et 16.

Les enfants «écrivent» ainsi, à la demande de l'expérimentateur qui aimerait «se souvenir» la quantité de pions bleu foncé, bleu clair et le nombre total de pions bleus (13 + 6 = 19) :

37 enfants en tout sur 56 utilisent des écritures numériques : 19 écrivent le «13» le «6» et le «19» (ou le nombre qu'ils avaient trouvé («18» pour trois d'entre eux et «17» pour un quatrième). Quatre enfants écrivent le «13» «en miroir», et la même symétrie à propos du «19» se retrouve aussi quatre fois. Le «six» est relativement connu : 30 enfants l'écrivent, dont 11 le confondent avec son symétrique. Quelques enfants font un trait pour séparer les nombres (13 - 6 - 19 ou 13' 6' 19). Deux enfants utilisent des signes conventionnels (13 + 6 + 19 et 13 + 6 = 19). Quatre enfants ont des difficultés avec les nombres plus grands que dix : n'écrivent pas la dizaine («3» au lieu de «13» , «8» pour «18», «33» ou «30» pour 13; «dix 8» pour le «18», ou encore «10» et «9» transcrit en «109»). Un enfant écrit la suite numérique de 1 à 20 (il est arrêté par l'expérimentateur), et un autre écrit le 13 et la suite de 1 à 5.

Parmi les 13 autres notations on relève deux écritures en lettres, entièrement ou en partie: *«trèse ajoute 6»* et *«trèse rajoute six»* ; sept dessins des pions ou des cases, deux représentations par bâtonnets ou par «ronds» le dessin d'une maison (?).

Cinq enfants se refusent à dessiner ou écrire quoi que ce soit (*Je ne sais pas*).

Discussion

L'hypothèse selon laquelle les enfants procèdent encore par recomptage de tous les pions est confirmée. Le 60 % d'entre eux

	Recomptage de tous les pions	Surcomptage	Autre	Total
N	33	16	6	55
f. r. [%]	60	29	11	100

Tableau 7: Fréquences, absolues et relatives, par procédure d'addition.

envisagent la réunion des deux collections avant d'en déterminer le cardinal, par comptage. Mais 30% savent déjà qu'on n'a pas besoin de tout recompter et qu'on peut additionner directement les nombres d'éléments des deux parties pour trouver le cardinal du tout.

Bien qu'elles soient encore incorrectes, les écritures numériques sont fréquentes pour constituer une «mémoire» de l'activité.

5. CONCLUSIONS

Les enfants savent beaucoup de choses dans le domaine du nombre en entrant à l'école primaire. Mais ce qui frappe l'observateur est l'écart de développements entre les élèves d'une même classe à propos des connaissances numériques.

Le module proposé par les nouveaux moyens d'enseignement, *«Approcher le nombre et lui donner du sens»*, et ses activités permettant une différenciation répondent donc à un besoin d'une classe de première.

Le choix de partir des connaissances des élèves et de renoncer à une construction axiomatique du nombre semble aussi confirmé par les résultats : de nombreux élèves ne trouveraient aucun intérêt à suivre des activités programmées pour l'élaboration de notions qu'il maîtrisent déjà.

Par exemple : la pratique d'une activité comme les *Cousins*, en début d'année scolaire, a sans doute permis aux élèves de se rendre compte, sur le moment, que le nombre leur permet de mémoriser une quantité d'objets à aller chercher. Mais le sens donné au nombre dans ce cas précis n'est pas le même pour tous puisque, dans une activité analogue comme le *Halma*, certains ne pensent pas à compter. Il y a donc, pour eux, encore un travail à entreprendre pour que le nombre soit reconnu comme l'outil le plus efficace dans ce genre de situation. Pour les autres, la tâche paraît déjà élémentaire et il serait inutile de l'exercer encore.

C'est à ce moment qu'intervient la différenciation : sur une même tâche, on peut travailler à des rythmes et à des niveaux différents.

Dans l'exemple du *Halma*, certains élèves, convaincus qu'il y a 13 pions sur chaque camp de base, peuvent utiliser cette connaissance pour partir aussitôt dans l'addition de 13 et de 6, au plan des nombres. D'autres opèrent encore au niveau des objets et de leur réunion car ils ont besoin de ce modèle. Pour eux, ce sera peut-être l'occasion de constater, au passage, la réapparition du «13» et de se rendre compte qu'ils auraient pu éviter de repartir de zéro. Pour chacun, il y a un intérêt et un problème à résoudre.

Mais pour que cette différenciation porte ses fruits, le rôle du maître est essentiel. C'est à lui de régler les «variables didactiques» (grandeur des nombres, choix des objets et situations, organisation du travail, utilisation d'interactions entre élèves, etc.) permettant de chacun d'agir avec un maximum de profit.

Math 5 - 6... pas si mal !

par Jacques-André Calame, Ecole normale cantonale, Neuchâtel

Contexte

Les ouvrages romands de mathématiques 5e et 6e ont été soumis à une évaluation importante dans tous les cantons concernés. Utilisés depuis une dizaine d'années, ils ont constitué un tournant important pour l'enseignement des mathématiques.

Leurs auteurs, MM. Michel Chastellain, François Jaquet et Yvan Michlig, mandatés par les instances de la coordination romande, accompagnés d'une commission romande tout au long de leurs travaux, avaient pris en compte les données de la première évaluation du curriculum romand, conduite de 1975 à 1982; ils avaient aussi cherché à intégrer dans leur travail les nouvelles conceptions de l'époque sur la résolution de problèmes, la différenciation pédagogique, les interactions entre élèves.

Il n'est donc pas inutile de rappeler que la philosophie de ces moyens d'enseignement actuellement en vigueur est le fruit d'une réflexion qui s'inscrivait et s'inscrit aujourd'hui encore dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques.

Il s'agit d'ouvrages ressource et non linéaires, dans lesquels on perçoit le changement de perspective didactique des années 80 : le constructivisme commence à y être clairement présent, en particulier dans les ateliers mathématiques et dans les activités dites «points de départ» des différents thèmes abordés avec les élèves. L'idée clé est peut-être bien de faire des mathématiques plutôt que de les subir, ce qui suppose aussi une pédagogie de type essai-erreur qui redéfinit les rôles respectifs de l'élève et de l'enseignant.

Il a paru nécessaire d'évaluer ces moyens d'enseignement aujourd'hui pour les raisons suivantes :

- De nouveaux ouvrages 1P à 4P sont en voie d'élaboration. Souci donc, de cohérence !
- Dix ans d'existence... c'est beaucoup ! Est-il nécessaire d'envisager leur refonte ?
- Il serait intéressant de connaître l'avis des maîtres, en situation, sur quelques points liés à l'enseignement en général pour mieux comprendre leur avis sur l'évaluation des outils mathématiques dont ils disposent.

En étroite relation avec l'IRDP qui nous engageait pour cette évaluation et avec un groupe «mathématiques» de la Commission de coordination des centres de recherche pédagogique de Suisse romande et du Tessin, nous avons subdivisé notre évaluation en deux étapes.

1. Une vaste enquête, par voie postale, auprès de plus de 500 maîtres concernés, qui constitue la source la plus large de notre travail.
2. Quelques visites de classes de Suisse romande avec une brève enquête auprès des élèves en fin de rencontre. Visites souvent suivies d'un entretien informel avec le maître.

Nous donnons ici quelques éléments tirés de la synthèse du rapport que le lecteur intéressé pourra se procurer ou consulter à l'IRDP.

Comment les ouvrages sont-ils utilisés ?

1. Ils sont largement utilisés tant à l'école que pour les devoirs, en opérant des choix.

2. Le livre du maître fait office de référence.

3. Les ouvrages sont souvent utilisés comme des livres d'exercices, en contradiction partielle avec les lignes didactiques proposées.

4. Les activités qui réclament une nouvelle représentation du rôle du maître et de l'élève sont traitées diversement et assez peu souvent ! A titre d'exemple, relevons ce que sont devenus les ateliers mathématiques et les activités en petits groupes :

Première catégorie d'enseignants : aucune pratique de ce type d'activités, le maître privilégie les objectifs de catégorie II (maîtrise d'algorithmes et des opérations par des exercices d'entraînement).

La question est de savoir si les ouvrages ne perdent pas leur spécificité, lorsque le maître ne voit pas dans les activités ouvertes une source importante d'apprentissage de l'élève. La position du maître ne sera donc pas forcément critique face aux ouvrages, mais il en fera un usage réducteur.

Deuxième catégorie d'enseignants: ateliers et travaux en petits groupes sont traités à petites doses en marge de périodes liées par exemple à des épreuves cantonales; ou seulement avec des élèves qui ont de l'avance sur d'autres : dans ce cas, les objectifs de catégorie I (compétences générales) et catégorie II sont sans liens et les derniers sont privilégiés.

Troisième catégorie d'enseignants: activités dites ouvertes, activités dites traditionnelles sont deux facettes complémentaires de l'apprentissage des élèves. L'enseignant suit alors de près les objectifs proposés par les auteurs, eux-mêmes en accord avec le Plan d'Études romand. Ces maîtres estiment qu'un élève peut aussi bien se préparer à des épreuves cantonales par la poursuite des objectifs de catégorie I que par ceux de catégorie II.

Illustrons notre propos par quelques exemples cités dans *Math 5-6... pas si mal !* [1] :

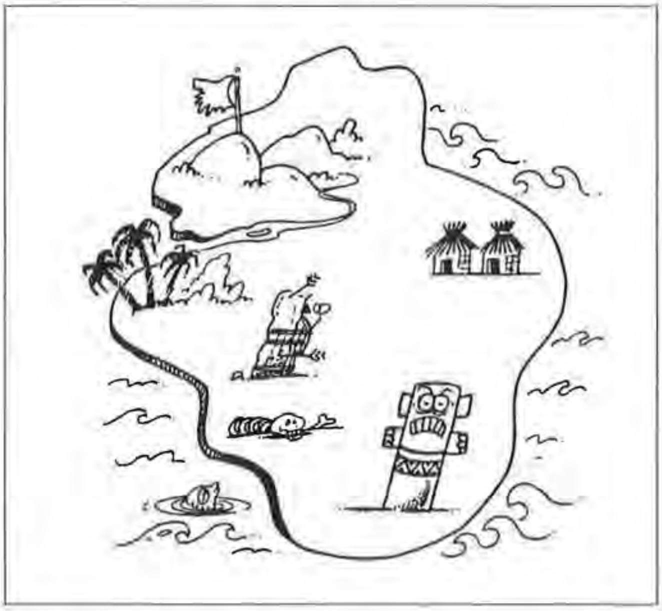
L'activité *L'île au trésor (fig.1)* récolte 82 suffrages pour figurer comme point de départ d'un thème classique et 33 voix contre son utilisation. Il faut s'interroger sur ce résultat en le confrontant à celui de l'activité suivante *(fig.2)* qui rallye tous les suffrages exprimés concernant le simple décodage de couples de coordonnées. Les maîtres qui tout simplement évitent l'activité *L'île au trésor* font certainement partie de ceux qui évitent aussi les ateliers.

De la même façon, l'activité *Carrelages (fig.3)* du thème classique des «Nombres naturels et opérations» serait à supprimer comme point de départ pour beaucoup d'enseignants, l'activité *Une addition (fig.4)* est controversée, mais *Le compte est bon (fig.5)* ou le *Calcul mental (fig.6)* remportent tous les suffrages. On est là au cœur du débat ! Car les deux dernières activités citées nécessitent précisément la compréhension de ce qui se cache, et qu'on évite trop souvent, dans les deux premières.

---

[1] CALAME, Jacques-André. *Math 5-6... pas si mal ! : évaluation des moyens romands d'enseignement de mathématique en 5ème et 6ème années,* avec la collabortion de Alex Blanchet, Jean-Luc Gurtner, Anne-Claude Hess-Crottet, Raymond Hutin, Antonella Melcarne, Gérard Piquerez, Werner Riesen, Elhadi-Saada. Neuchâtel : IRDP et Commission de coordination des centres de recherches pédagogiques de Suisse romande et du Tessin (Coll Recherches ; 95.102).

L'ÎLE AU TRÉSOR



Place un papier calque sur ceplan et reportes-y :

- le cadre du plan ;
- un point qui représente l'emplacement où tu choisis de cacher ton trésor.

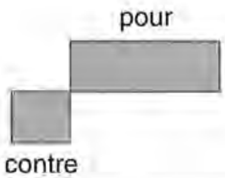
Essaie de coder le lieu de ta cachette. Note ce code sur un morceau de papier que tu donnes à ton voisin.

Demande-lui de retrouver l'emplacement précis de ton or, qu'il indiquera sur son calque. Vérifie sa proposition en posant ton calque sur le sien !

Et toi, peux-tu à l'aide de son code retrouver son trésor ?

> Citée 33 fois pour être supprimée, mais 82 fois pour être maintenue.
Des enseignants de quatre cantons (BE, FR, VS, JU) se sont prononcés pour la suppression de cette activité.
Mais dans tous les cantons les enseignants souhaitant la maintenir sont majoritaires.

Conclusion : Activité qui, finalement serait plutôt à maintenir.



Commentaires :

- Activité typique de point de départ pour aborder ce thème.
- Contient essentiellement des objectifs de catégorie I. Ici cette activité favorise la recherche, la confrontation d'idées entre élèves, l'imagination.
- Elle nécessite du matériel particulier, une présence non standard du maître (observateur et animateur).
- Elle donne un sens dès le départ à l'étude des systèmes de coordonnées.

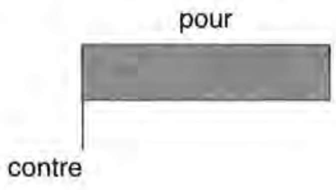
figure 1

Quel est l'animal qui se cache là-derrière ? (unité : 2 carrés)

1. $(-3;2)$	8. $(2;-4)$	15. $(-4;-3)$	22. $(-4;3)$
2. $(-2;0)$	9. $(1;-1)$	16. $(-3;1)$	23. $(-3;4)$
3. $(-1;2)$	10. $(0;-1)$	17. $(-4;-1)$	24. $(-1;3)$
4. $(2;2)$	11. $(-1;-4)$	18. $(-6;-2)$	25. $(-1;2)$
5. $(5;-3)$	12. $(-2;-4)$	19. $(-7;-2)$	
6. $(3;-1)$	13. $(-2;-1)$	20. $(-5;-1)$	
7. $(3;-4)$	14. $(-3;0)$	21. $(-4;1)$	

> Citée 132 fois pour son maintien, jamais pour sa suppression.
Tous les cantons se sont prononcés.

Conclusion : Activité à maintenir.



Commentaire :

Activité d'entraînement tout à fait standard pour apprendre ou approfondir le décodage.

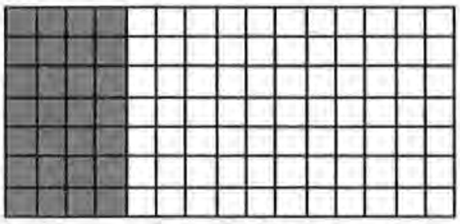
figure 2

CARRELAGES

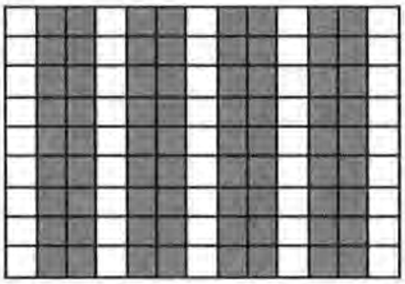
Il y a plusieurs manières de trouver le nombre de carreaux des carrelages suivants.

Pour chacun d'eux indique au moins deux façons d'écrire combien il y a de carreaux, sans effectuer les calculs.

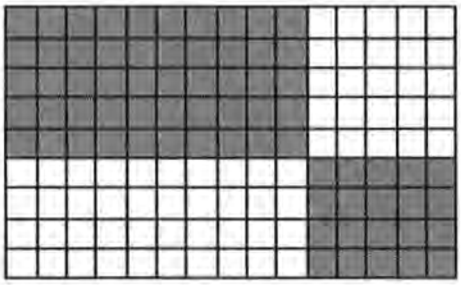
a)



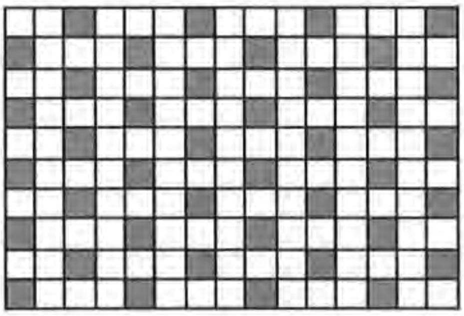
b)



c)

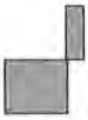


d)



> Citée 34 fois pour être supprimée, et 11 fois pour être maintenue.
Seuls les enseignants de Neuchâtel et Genève ne se prononcent jamais pour sa suppression.
Les enseignants favorables à son maintien viennent de Neuchâtel et de Berne.

pour



contre

Commentaires :

- Ce point de départ a pour objectif d'observer des écritures où interviennent l'addition et la multiplication, avec mise en évidence de la distributivité.
- Elle permet une large confrontation des solutions imaginées par les élèves entre eux.

figure 3

UNE ADDITION

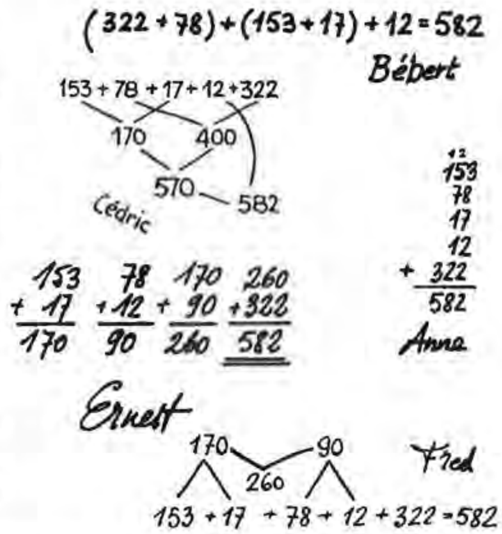
Il fallait additionner les cinq nombres : 153, 78, 17, 12, 322.

Voici comment Anne, Bébert, Cédric, Ernest et Fred ont procédé :

a) Trouve encore d'autres façons d'additionner ces nombres. Quelle méthode te paraît la plus habile ? Pourquoi ?

b) Additionne maintenant les nombres 475, 34, 22, 3 et 16 selon la méthode de Cédric et selon celle d'Anne.

c) Additionne 48, 194, 12, 6 et 29 selon la méthode de Bébert, en associant ces nombres pour faciliter les calculs.



> Citée 23 fois pour être supprimée, par des enseignants des cantons de Berne, Vaud et Valais, mais en revanche proposée par 20 personnes des cantons de BE, FR et NE pour être maintenue.

Commentaires :

- Activité qui sensibilise l'élève à la variété d'écritures d'un même nombre et aux diverses manières d'organiser un même calcul.
- Climat analogue à celui qui sous-tend l'activité «Carrelages» et offrant la possibilité d'une discussion ouverte sur les avantages et inconvénients des diverses procédures adoptées.

figure 4

Les ouvrages correspondent-ils à l'attente des maîtres et tiennent-ils compte du contexte dans lequel chacun enseigne ?

Le moment et le type de sélection/orientation, variable d'un canton à l'autre, ne peuvent tout expliquer, mais la composante cantonale est ressortie comme la plus forte de toutes les variables. Nous avons relevé que la quantité de devoirs est toujours en augmentation aux moments clé de l'orientation, que le travail en ateliers et en petits groupes ne peut plus alors être une priorité.

Il y a donc un double problème : les devoirs, le statut du travail en petits groupes et le statuts des ateliers mathématiques sont les trois facteurs qui font le mieux apparaître les divergences entre les cantons. En outre, l'orientation des élèves ne s'opère pas en même temps, ni au même moment d'un canton à l'autre. Mais partout le maître se forge des convictions liés à l'efficacité. Il n'est pas étonnant par conséquent que deux maîtres de même formation présentent des profils différents selon qu'ils vivent ou ne vivent pas en année d'orientation/sélection.

LE COMPTE EST BON

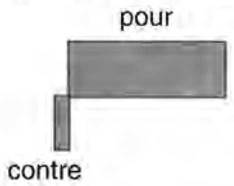
Voici six nombres :

$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{25}$

Utilise chacun de ces nombres une fois au plus (il n'est pas nécessaire de les utiliser tous) pour atteindre le « nombre-but » $\boxed{135}$ à l'aide des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division).

Si tu n'arrives pas à atteindre exactement le « nombre-but » $\boxed{135}$, essaie de t'en approcher le plus possible.

> Citée 86 fois pour être maintenue et dans tous les cantons, avec seulement 8 opposants en Valais.



Commentaire :

Tirée du célèbre jeu télévisé, cette activité est un point de départ du thème très ouvert permettant de rechercher, de justifier les opérations et les écritures utilisées en cours de démarche.

figure 5

Les ouvrages romands répondant fort bien, dans leur ensemble et leur esprit, aux désirs des maîtres, qui souhaitent souvent en revanche plus de théorie ou d'exercices d'entraînement en vue d'épreuves cantonales par exemple, on devrait se poser cette question :

Étant donné l'acceptation d'un plan d'études auquel répondent les ouvrages romands, quelles modalités d'évaluation nouvelles doit-on se donner pour ne pas être en contradiction avec les objectifs à atteindre ?

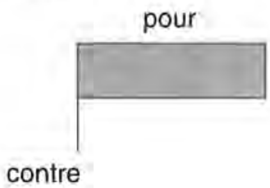
Si nous devions résumer en quelques mots cette première partie de l'évaluation des ouvrages nous affirmerions que :

- une refonte des ouvrages ne s'impose pas actuellement ;
- des modifications/maintiens de certaines activités dites «ouvertes» devraient faire l'objet de discussions en formation continue, et permettre en outre de donner davantage d'indications pour les maîtres, sur la pertinence, les cheminements possibles et leur rôle en situation ouverte.

CALCUL MENTAL

a) (17 · 5) + (3 · 5)	b) 31 · 11	c) 80 · 70
8 · 50	1509 + 191	100 · 25
2 · 17 · 5	(1450 − 17) + 18	11 + (9 · 11)
(121 + 768) − 121	(123 · 5) · 2	25 · 8
14 + 36 + 36 + 14	18 + 19 + 20 + 21 + 22	34 + 17 + 17
11 · 72	367 − (60 + 7)	90 · 12
9 · 35	(7 · 13) + (7 · 7)	(40 + 1) · 8
12 · 13	1100 − 1	(100 − 3) + (100 − 4)
25 · 9 · 4	(37 + 17) + 13	50 · 29 · 2
(47 · 8) − (7 · 8)	17 + (9 · 17)	(15 · 19) − (14 · 19)
d) 170 · 20	e) 400 : 50	f) 600 · 80
(453 − 37) + 47	(19 · 8) + 8	98 + 89 + 102 + 11
(11 · 45) − 45	10 · 20 · 30	693 : 3
420 + (42 · 10)	693 : 7	(43 · 15) − (15 · 43)
25 + 13 + 75 + 15	12 · (20 + 3)	(7 · 32) : 7
(35 + 47) − 12	11 + 13 + 15 + 17 + 19	101 · 16
1414 : 7	(8 · 25) : 4	(234 : 2) · 20
54 · 11	2 · 5 · 2 · 5 · 2 · 5	2 · 365 · 5
(19 − 19) · 46	(9 · 57) + 57	202 · 7
(7 · 8) − (14 · 4)	26 + (8 · 13)	66 + 49 + 134

> Plébiscitée dans tous les cantons par 100 personnes, sauf dans le canton de Genève. Aucune opposition.



Commentaire :

Activité classique d'entraînement qui ne suscite aucune opposition et représente un outil lié au calcul élémentaire considéré par tous comme essentiel.

figure 6

En l'état actuel de la question, nous suggérons donc :

- que les études menées jusqu'ici ne soient que le premier volet d'une recherche appelée à se poursuivre (à noter qu'au moment où nous écrivons ces lignes, la poursuite du travail est engagée auprès des élèves par une évaluation visant en particulier à connaître leurs démarches dans des activités classiques ou plus ouvertes);

- que les études menées par d'autres personnes (étudiants, enseignants et chercheurs) s'inscrivent dans un dialogue à tous les niveaux entre la recherche et la pratique de la mathématique.

Dans cette perspective, la formation continue des maîtres en liaison avec la recherche en didactique devrait jouer un rôle important parce qu'indispensable à la qualité de l'enseignement. Une telle formation doit favoriser le dialogue entre chercheurs et enseignants.

A propos de l'avis des quelques 454 élèves consultés au cours de 25 visites effectuées dans les différents cantons de Suisse romande, nous relèverons notamment que la grande majorité des élèves aiment les mathématiques, qu'ils préfèrent les activités géométriques et les situations ouvertes aux problèmes classiques. On pouvait raisonnablement s'en douter, mais alors on peut s'interroger, précisément parce que ce n'est pas une surprise, sur la réticence face à ce qui est à la fois aimé des élèves et clairement exprimé comme part importante de l'apprentissage des élèves dans les ouvrages mathématiques. Nous pensons que la proportion des leçons vécues en situation «frontale» (env. 75% des visites) nous ramène à cette question: pourquoi une distance si grande entre un «oui» de principe à des cours allant à la rencontre de l'élève et le «non» de fait par le maintien de l'enseignement frontal ?

Nous terminons notre article par deux remarques personnelles :

- Nous croyons que dans le monde scolaire actuel, souvent épié et sujet aux critiques, c'est en se risquant soi-même, en exposant ses doutes, ses craintes, que nous irons à la rencontre des élèves, de leurs représentations souvent étrangères à celles de l'adulte, et ceci notamment par des activités ouvertes et porteuses de sens, alliant plaisir, découverte et recherche mathématique. Et en faisant preuve d'imagination pour que les activités même très traditionnelles trouvent sens aux yeux de l'élève parce qu'elles sont ancrées dans une «vraie réalité» (par exemple en utilisant l'actualité des événements transmis par la presse, la radio ou la télévision).

- Nous croyons aussi que les enseignants doivent trouver des lieux où «se dire sans être jugés», car le métier d'enseignant reste exposé et que, pour bien le vivre, la tolérance et la confrontation d'avis et de sentiments même contradictoires, doivent être possibles, souhaitables et bientôt souhaitées par tous !

ndlr. *Le point sur la recherche* est un bulletin d'information des centres cantonaux et romand de recherche pédagogique. Son numéro 2, de mai 1995, est consacré essentiellement à l'évaluation des ouvrages *Mathématique 5e/6e*. Nous remercions sa rédaction de nous autoriser à reproduire les articles de R. Hutin, A. Melcarne et E.H. Saada, en complément du texte précédent de J.-A. Calame.

Mathématique : Evaluation 5e - 6e

Introduite à partir des années septante, soit depuis plus de vingt ans déjà, la profonde refonte de l'enseignement de la mathématique est à la recherche de son second souffle. La polémique à propos des mathématiques dites modernes, même si elle resurgit occasionnellement dans quelque journal en mal de copie, n'intéresse plus guère. Les outrances semblent avoir été gommées, une grande partie des parents d'aujourd'hui constatent que leurs enfants sont confrontés à des notions qu'ils ont eux-mêmes étudiées naguère et l'aspect quelque peu subversif d'un enseignement qui cherchait avant tout à aider les élèves dans leur approche du raisonnement logique s'est estompé.

Au-delà des ajustements indispensables face à certains excès de formalisme qui ont pu marquer la période 1960-1980, il faut s'interroger sur les conditions d'une évolution qui pourrait parfois oublier l'essentiel : la simple acquisition de techniques et d'algorithmes, objets utilitaires nécessaires, ne constitue qu'une partie mineure par rapport au développement du raisonnement et à l'apport formateur de l'apprentissage des mathématiques.

Au moment où les autorités scolaires de Suisse romande entreprennent la réalisation de nouveaux manuels pour les degrés 1 à 4, il a paru nécessaire, en vue de garantir une continuité d'action, de procéder à une évaluation de cet enseignement dans les degrés 5 et 6P afin de disposer en temps utile, c'est-à-dire en 1997, des éléments d'appréciation nécessaires à la modernisation des manuels correspondant à ces degrés. On notera au passage que les plans d'études en vigueur en Suisse romande, adoptés par les cantons en 1972, auront perduré durant vingt-cinq ans, ce qui est considérable eu égard aux profonds changements enregistrés dans le monde socio-économique durant cette génération.

Les textes qui suivent rendent compte, à partir des données patiemment recueillies et finement analysées par Jacques-André Calame, de quelques-uns des domaines soumis à l'investigation. Pour ma part, je n'en retiendrai qu'un, à mes yeux très significatif, le degré de satisfaction des élèves. Ils ne sont que 13% à déclarer ne pas aimer cette matière, ce qui correspond à deux ou trois élèves par classe. Nous sommes bien loin de l'épouvantail que représente cette discipline dans le discours ambiant. Plus encore, les trois quarts des élèves apprécient de se plonger dans des situations de recherche. Il y a là une indication fort intéressante. Les travaux des didacticiens mettent en évidence l'effet bénéfique des situations-problèmes sur la formation des élèves; ces derniers y trouvent un fort intérêt. Reste à convaincre ceux qui, parmi les parents et les enseignants, sont réservés à ce sujet. Le drill et le remplissage de nombreuses fiches d'exercices, outre leur efficacité parfois discutable du point de vue du rapport entre le temps utilisé et le profit qui en découle, ne sont de loin pas les seuls moyens d'apprendre à faire et à aimer faire de la bonne mathématique.

Raymond Hutin
Président de la commission de coordination
des centres de recherche, Genève

Activités mathématiques 5e - 6e : le choix des enseignants

L'objectif de cette analyse vise surtout à mettre en évidence des tendances romandes et cantonales. Sur l'ensemble de toutes les activités de 5e et 6e, 15 % seulement sont remises en question. Globalement, les Genevois se sont montrés peu critiques contrairement aux Valaisans.

Livre de l'Elève et Livre du Maître : un bon mode d'emploi ?

Le Livre de l'Elève et le Livre du Maître constituent une des ressources principales des enseignants, mais d'autres ressources peuvent être utilisées. Les choix effectués attestent de l'adhésion des enseignants aux grandes lignes des ouvrages mais aussi la distance qui sépare cet accord de principe de la réalité des pratiques observées.

Il est donc nécessaire de tenter de comprendre les raisons de cet écart pour le réduire, par une formation continue, par exemple. Les enseignants sont conscients de la difficulté à conduire dans la classe des activités plus ouvertes, plus riches aussi. Ils ne proposent pourtant pas de les supprimer et de créer de nouveaux moyens d'enseignement. En effet, la plupart d'entre eux ne contestent pas les grandes lignes du Livre du Maître, mais souhaiteraient être mieux orientés vers les activités dites «ouvertes» et davantage formés.

Situation problème(atique)

De manière générale, ce sont les activités dites «point de départ» qui entraînent le plus de résistance chez les enseignants.

En effet :

- ce genre d'activité exige souvent un matériel précis supplémentaire et/ou une animation particulière ; aussi, l'enseignant préfère partir tout de suite avec des données mathématiques traditionnelles ;
- il peut y avoir quelquefois plusieurs réponses possibles; la confrontation d'avis peut désécuriser l'enseignant ;
- le temps imparti ne permet pas de trop s'attarder sur une activité «point de départ». Il faut aller directement au but visé, alors que, souvent, il faudrait justement perdre du temps pour en gagner.

Par contre, les activités dites «classiques» sont nettement plus soutenues.

En effet :

- le matériel utilisé est plus simple et se suffit à lui-même ;
- la solution est unique; ainsi l'enseignant peut dominer la situation ;
- un seul thème est traité (parfois, au détriment d'autres thèmes, par exemple : ex.3, thème 5P/6P. Il s'agit d'une activité de manipulation et d'observation, où l'élève procède par des pliages et des découpages, mais l'enseignant pourrait également introduire les axes de symétrie, rotations, etc.). Il faut en débattre...

Ces activités devraient faire l'objet d'échanges entre enseignants lors de journées de formation, où différents points de vue seraient présentés et discutés, et des solutions de mise en œuvre construites en commun.

Antonella Melcarne
Office de recherche et de documentation pédagogiques, Sion

La formation continue et l'enseignement de la mathématique

L'enquête sur la réforme des moyens d'enseignement romands de mathématique en 5e et 6e a permis d'aborder entre autres deux questions, celle des pratiques d'enseignement et celle de la formation continue.

A propos des pratiques d'enseignement, on peut dire qu'il y a unanimité chez les enseignants pour considérer que les fiches et les exercices proposés aux élèves en 5e et 6e ne sont pas assez abondants. Ils souhaitent donc que la nouvelle rédaction prenne en charge la réalisation de plus de fiches et d'exercices d'entraînement à disposition du maître. La demande est certainement liée aux enjeux et aux contraintes de l'évaluation de la fin de 5e et 6e conditionnant le passage au secondaire moyen ou au cycle d'orientation; il convient de souligner qu'il n'y a pas de différence notable entre les enseignants sur l'approche pédagogique de l'utilisation des fiches et des ateliers comme moyens d'enseignement.

Cependant, à la lecture attentive des résultats des questionnaires, on constate qu'ils apprécient et analysent d'une manière différente l'apport pédagogique des ateliers et des situations ouvertes en mathématique.

Cette différence d'appréciation a retenu particulièrement notre attention; c'est ce que nous allons examiner à travers la deuxième question portant sur la formation continue.

En ce qui concerne la formation continue, la question suivante a été posée : quelle est la priorité donnée par les enseignants entre la formation continue et la rédaction des nouveaux moyens d'enseignement ?

	BE	FR	VD	VS	NE	GE	JU	Total
N	60	77	100	98	100	67	34	536
NME %	35	27	42	33	35	36	53	36
OFC %	55	59	40	55	54	54	30	51
NR	10	14	18	12	11	10	17	13

N : nombre de questionnaires
NME : nouveaux moyens d'enseignement 5e - 6e
OFC : offre de formation continue en mathématique
NR : non-réponse

Elle a été présentée aux enseignants dans ces termes : «S'il fallait opérer un choix entre la rédaction des nouveaux moyens d'enseignement et les offres de formation continue, que choisiriez-vous ?»

Comme le montrent ces résultats, on peut distinguer deux grandes catégories d'enseignants ayant une approche et une appréciation relativement différentes des priorités accordées aux deux aspects de la question.

Une première catégorie met l'accent en priorité sur la rédaction des nouveaux moyens d'enseignement en mathématique. Les commentaires suivants accompagnent les réponses : *«Le fichier seulement»*, *«Nouveau fichier»*, *«Pour le classeur, pas le livre !»*, *«Avec des exemples de la vie pratique»*, *«Il faut que le CO suive aussi !»*, *«En prolongement immédiat des moyens math. 3P et 4P»*.

Par ailleurs, les considérations suivantes ont été recueillies à propos des ateliers mathématiques dans leur enseignement : *«Cela demande passablement de temps, motivation des élèves, habitude du travail de* *groupe», «Trop difficiles, trop de temps pour quelle efficacité ?», «Temps, recherche, discipline», «Temps, niveau de la classe, efficacité et évaluation», «Avoir du temps, avoir des élèves éveillés, passionnés par la recherche, avec l'envie de gagner».*

Ces arguments mettent en évidence une certaine difficulté de compréhension des situations de recherche en mathématique, où l'élève est censé prendre une part active dans la compréhension et la résolution des problèmes proposés. Celles-ci se traduisent objectivement par l'importance du temps consacré, l'organisation et la gestion exigées par les ateliers.

Une deuxième catégorie d'enseignants souhaite, dans l'immédiat et en priorité, une formation continue. Elle est exprimée dans les termes suivants : *«Un tel livre (ouvrages 5e-6e) ne peut être donné aux nouveaux enseignants sans un complément de formation (et non d'information)», «On est peu préparé (formé) pour animer un travail en groupe ou une situation ouverte en mathématique», «Je donnerais volontiers des ateliers mathématiques, mais je ne connais presque jamais les réponses : il faut un corrigé !», «Il conviendra de s'interroger davantage sur l'accompagnement dans le temps des moyens d'enseignement de mathématique».*

En effet, les différentes interrogations et affirmations posent le problème crucial de la formation continue concernant les processus d'enseignement et d'apprentissage en mathématique. Autrement dit, ce constat montre relativement bien l'insuffisance des moyens de formation dans certains cantons, et la demande explicite à ce sujet devant accompagner toute réforme des moyens mathématiques. Ces propos témoignent donc d'une demande de réflexion relative aux situations d'apprentissage en relation aux contenus et aux objectifs en 5e et 6e.

Implicitement, la demande porte sur les problèmes de gestion, d'observation et d'analyse des situations d'apprentissage. Ils se traduisent par l'analyse du champ notionnel dans les tâches mathématiques, l'organisation et le dispositif d'une situation, les démarches mathématiques des élèves et l'analyse de leurs erreurs.

Ajoutons que cette catégorie d'enseignants interprète d'une manière différente les ateliers et les situations ouvertes en mathématique. A propos des conditions et du déroulement des ateliers, les considérations suivantes sont recueillies auprès de ces derniers : *Temps : «la recherche, l'essai, le tâtonnement "prennent" effectivement du temps si on est susceptible à ce propos». Efficacité : «toute stratégie découverte par l'enfant contribue efficacement à sa formation, son autonomie, son sens critique», «Il faut que les élèves aient du temps pour progresser chacun à leur rythme, les stimuler à poursuivre leur recherche en faisant des mises en commun de leurs constats en cours de recherche», «Bonne préparation du maître, laisser les élèves tâtonner, progresser à leur niveau, n'intervenir que pour relancer l'activité, ne pas évaluer les résultats uniquement».*

Notons, enfin, que ces différents arguments attestent d'une approche pédagogique élaborée des ateliers et situations mathématiques ouvertes où la résolution est entièrement sous la responsabilité des élèves. Dans ce cadre, le problème peut avoir différentes solutions impliquant des démarches cognitives multiples qui sont validées en commun. Ainsi, une partie des enseignants consultés perçoit bien tout l'intérêt didactique de cette approche et demande une formation continue approfondie dans cette direction.

E. H. Saada
Service de la recherche pédagogique, Genève

De la pub pour le cube

par André Calame, Sauges, NE

Voici le problème, ou si vous préférez, l'activité mathématique à l'origine de cet article :

> «Place les nombres de 1 à 8 sur les sommets du cube de telle manière que la somme des nombres de chaque face soit la même.»

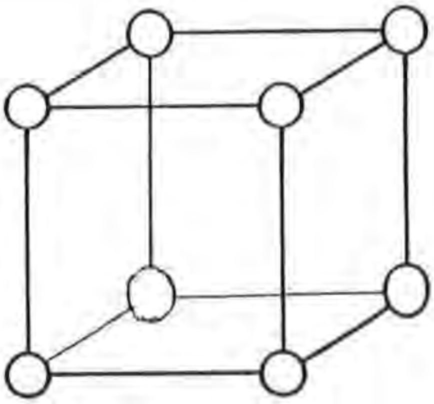


fig.1

On trouve cet énoncé, par exemple, dans [1] sous le titre de *Cube magique.*

Nous n'avons aucune expérience pédagogique qui nous permettrait de rendre compte des hésitations des élèves, de leur manière de procéder systématique ou non, de leur intérêt pour la question. Mais nous nous plaçons dans la situation de l'enseignant qui reçoit les solutions des élèves et se demande assez naturellement :

> (A) Combien y a-t-il de solutions différentes ?

Dès que se pose cette question, il en surgit une autre qui lui est liée :

> (B) Faut-il considérer comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par la position du cube ?

Par exemple, examinons les solutions proposées dans les figures 2 et 3 :

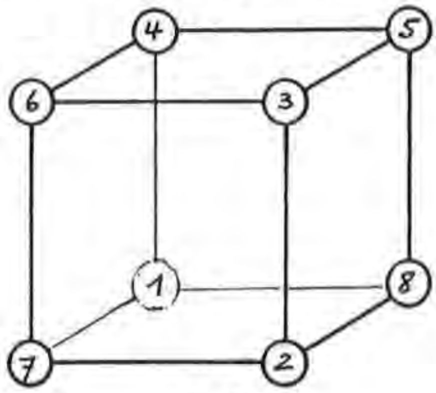


fig. 2

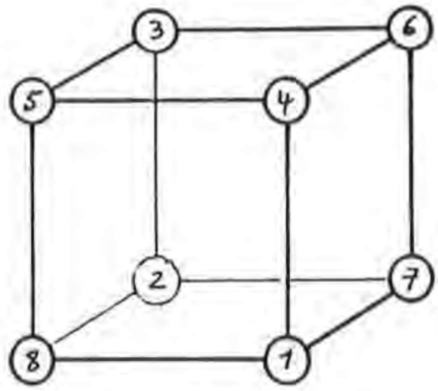


fig. 3

On voit qu'on passe de la solution de la figure 2 à celle de la figure 3 en tournant le cube de 180° autour d'un axe passant par le milieu des faces supérieure et inférieure.

Référence :

[1] J.-A. Calame, F. Jaquet
Mathématique - 7ème année, page 104

Par souci de simplification, on peut considérer comme équivalentes deux solutions qui se correspondent par une isométrie du cube.

Encore faut-il savoir combien le cube admet d'isométries qui le ramènent sur lui-même et pouvoir les reconnaître. C'est l'objet de cet article. Dans le prochain numéro, nous répondrons alors à la question (A). D'ici là, les lecteurs peuvent chercher d'autres solutions, indépendantes de celles des figures 2 et 3.

Parmi les isométries du cube, les plus connues sont les **rotations** autour d'un axe passant par le centre du cube. On peut les réaliser matériellement en tournant le cube sur lui-même. On distingue trois types de rotations :

1°) Les rotations autour d'un axe passant par les milieux de deux faces opposées.

Autour d'un tel axe, tel que (1) sur la figure 4, la rotation peut être de 90°, 180°, ou 270°. En choisissant la rotation r_1 qui amène A sur B, on a :

$A \longmapsto B \qquad E \longmapsto F$

$B \longmapsto C \qquad F \longmapsto G$

$C \longmapsto D \qquad G \longmapsto H$

$D \longmapsto A \qquad H \longmapsto E$

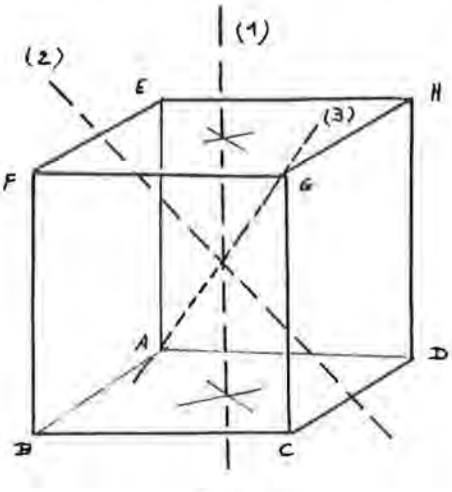


fig.4

On notera cette rotation plus brièvement :

$r_1 = (ABCD)(EFGH)$

(On écrit à la suite de chaque sommet son image par r_1; on ferme la parenthèse pour signifier que l'image de D est A, l'image de H est E.)

Avec cette écriture, la rotation r_2 de 180° s'écrit:

$$r_2 = r_1 * r_1 = (ABCD)(EFGH) * (ABCD)(EFGH) = (AC)(BD)(EG)(FH)$$

Ensuite, la roration r_3 de 270° s'obtient par :

$$r_3 = r_2 * r_1 = (AC)(BD)(EG)(FH) * (ABCD)(EFGH) = (ADCB)(EHGF)$$

C'est l'occasion de rappeler qu'on effectue r_1 d'abord, r_2, ensuite. Par r_1, l'image de A est B; ensuite, par r_2, l'image de B est D; donc, par r_3, l'image de A est D, etc.

Le cube possède trois axes passant par les milieux de deux faces opposées, ce qui donne

$\boxed{3 \cdot 3 = 9 \text{ rotations}}$

2°) Les rotations autour d'un axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.

Ce sont des demi-tours qu'on appelle aussi des **renversements.** Sur la figure 4, le renversement (2) se note :

$s = (AG)(BH)(CD)(EF)$

Le cube ayant 12 arêtes, il existe

$\boxed{6 \text{ renversements}}$

3°) Les rotations autour d'un axe passant par deux sommets opposés.

Ce sont les rotations autour des diagonales du cube.

Sur la figure 4, la rotation t d'axe AG qui envoie B sur D se note :

$t = (A)(BDE)(CHF)(G) = (BDE)(CHF)$

(En général, on ne note pas les éléments fixes.)

L'angle de rotation est de 120° ou de 240°. Comme le cube a quatre diagonales, cela donne

$4 \bullet 2 = 8$ rotations

A ces rotations, il convient d'ajouter l'**identité**, c'est-à-dire la rotation qui laisse fixe chacun des sommets du cube. Nous obtenons au total :

$9 + 6 + 8 + 1 = 24$ rotations

Mais, le cube admet encore d'autres isométries qui ne sont pas des rotations. La plus simple est la **symétrie centrale**, par rapport au centre du cube, qui échange les sommets opposés :

$c = (AG)(BH)(CE)(DF)$

Cette symétrie ne peut pas être matérialisée par un mouvement du cube. Combinée avec chacune des 24 rotations du cube décrites précédemment, elle va fournir 24 nouvelles isométries. Ainsi,

le cube admet 48 isométries.

Parmi les 24 nouvelles isométries, on s'attend, bien sûr, à trouver des **symétries planaires**. Chaque plan passant par deux arêtes opposées est un plan de symétrie du cube. Il y a six symétries planaires de ce type. De plus, il existe trois plans de symétrie parallèles à deux faces opposées. Mais, avec la symétrie centrale, cela ne fait jamais que dix isométries sur 24. Et les autres ?

Il n'est pas aisé de se représenter les 14 isométries manquantes, D'ailleurs, on se garde bien de les évoquer, même dans l'enseignement secondaire obligatoire ! Pour y voir clair, on utilisera avec profit une propriété fondamentale de la symétrie centrale (voir figure 5) :

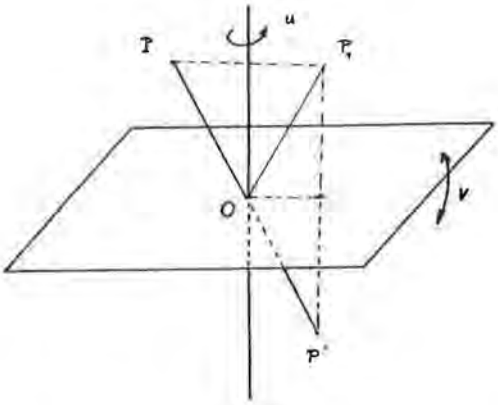


fig. 5

La symétrie centrale est égale à la composition d'un **renversement d'axe quelconque** passant par le centre de symétrie et de la **symétrie planaire** par rapport au plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe du renversement.

Si c désigne la symétrie centrale, u le renversement et v la symétrie planaire, cette propriété s'écrit : $c = v * u = u * v$

Il y a commutativité, car l'ordre de composition n'a pas d'influence sur le résultat.

Dans tout ce qui suit, il sera sous-entendu que chaque axe de rotation passe par le centre du cube et que tout plan de symétrie passe aussi par le centre du cube; nous ne le rappellerons pas chaque fois.

Considérons une rotation r du cube et son axe d. Nous voulons étudier la composition $c * r$. Pour ce faire, nous remplaçons c par la composition du renversement u de même axe d et de la symétrie planaire dont le plan est perpendiculaire à d.

On a : $c * r = (v * u) * r = v * (u * r)$

Le résultat fait intervenir $u * r$ qui est la composition de deux rotations de même axe d.

Commençons par le cas le plus simple, celui où la rotation r est elle-même un renversement. Alors $u * r$ est la composition de deux rotations de 180° autour du même axe d. C'est l'identité ! On a alors :

$$c * r = v$$

qui est une symétrie planaire. Ainsi, à chaque renversement du cube (il y en a 9), correspond une symétrie planaire. Comme exemple, prenons le renversement de la figure 6.

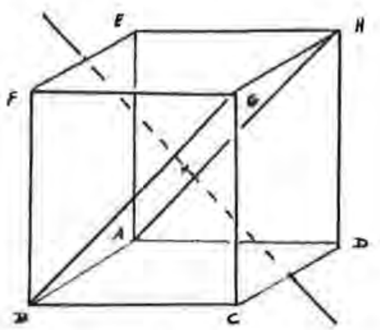


fig. 6

L'axe passe par les milieux des arêtes CD et EF. Cet axe est perpendiculaire au plan ABGH. On a :

$$c = (AG)(BH)(CE)(DF)$$
$$r = (AG)(BH)(EF)(CD)$$
$$c * r = (CF)(DE)$$

C'est bien la symétrie planaire qui conserve les 4 sommets A, B, G, H et qui permute C et F d'une part, D et E d'autre part.

Si la rotation r n'est pas un renversement, mais une rotation d'angle α ($\alpha \neq 180°$), on a toujours :

$$c * r = v * (u * r)$$

$u * r$ représente une rotation d'angle $\alpha + 180°$ combinée avec une symétrie planaire de plan perpendiculaire à l'axe de rotation. C'est ce qu'on appelle une **symétrie rotatoire**.

En voici deux exemples :

Premier exemple : Soit r_1 la rotation d'un quart de tour, d'axe vertical (voir figure 7)

$$r_1 = (ABCD)(EFGH)$$
$$c = (AG)(BH)(CE)(DF)$$

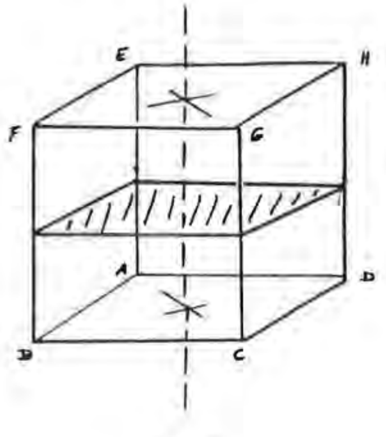


fig. 7

$$c * r_1 = (AG)(BH)(CE)(DF) * (ABCD)(EFGH)$$
$$= (AHCF)(BEDG)$$

Pour analyser cette symétrie rotatoire, introduisons le renversement autour du même axe vertical

$$u = (AC)(BD)(EG)(FH)$$

et la symétrie planaire dont le plan est horizontal

$$v = (AE)(BF)(CG)(DH)$$

Alors, comme on l'a vu précédemment :

$$c * r_1 = (v * u) * r_1 = v * (u * r_1)$$

avec

$$u * r_1 = (AC)(BD)(EG)(FH) * (ABCD)(EFGH)$$
$$= (ADCB)(EHGF)$$

qui est bien la rotation de 180° + 90° = 270° d'axe vertical. Ainsi $c * r_1$ est la composition de la rotation de 270°, d'axe vertical, suivie de la symétrie de plan horizontal.

Second exemple : Soit t la rotation d'axe AG dont nous avons déjà parlé : (voir figure 8)

$$t = (BDE)(CHF)$$
$$c = (AG)(BH)(CE)(DF)$$
$$c * t = (AG)(BH)(CE)(DF) * (BDE)(CHF)$$
$$= (AG)(BFEHDC)$$

Surprise ! La composition contient un cycle d'ordre 6, alors que le cube n'admet aucune rotation de cet ordre.

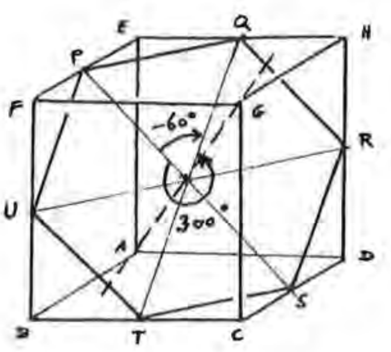


fig. 8

Introduisons, comme nous en avons pris l'habitude, le renversement u d'axe AG et la symétrie planaire v dont le plan est perpendiculaire à AG. Ce plan passe par les points PQRSTU.

Alors : $c * t = (v * u) * t = v * (u * t)$

$u * t$ est la rotation d'angle $120° + 180° = 300°$ d'axe AG qui ne conserve pas le cube !

On peut lever la difficulté au prix d'un bref effort de calcul. Introduisons un système de coordonnées (voir figure 9). L'origine est le centre du cube et les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ aboutissent au milieu de trois faces du cube. Il en résulte que la mesure de chaque arête du cube est de 2 et les sommets du cube ont les coordonnées suivantes:

A(-1;-1;-1) B(1;-1;-1) C(1;1;-1) D(-1;1;-1)
E(-1;-1;1) F(1;-1;1) G(1;1;1) H(-1;1;1)

Dans la rotation $u * t$ de 300°, un point quelconque P(x;y;z) est transformé en P'(x';y';z') par les formules :

$$u * t = r : \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

(Pour ce calcul, voir la note en fin d'article.)

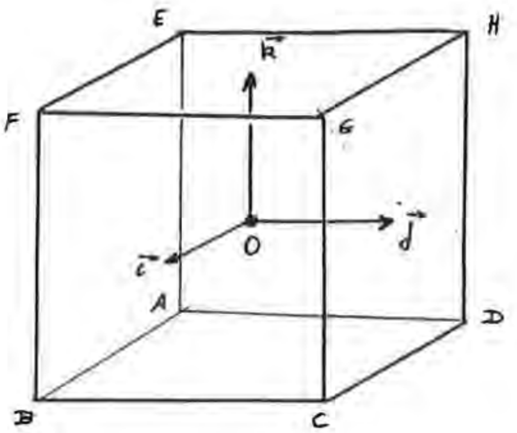


fig. 9

On vérifie aisément que G(1;1;1) reste fixe par r. Quant au sommet B(1;-1;-1), il a pour image le point $B'\left(\frac{1}{3};\ -\frac{5}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ qui n'est plus sur le cube.

A son tour, la symétrie planaire v fait passer d'un point P'(x';y';z') au point P"(X;Y;Z) selon les formules :

$$v : \begin{cases} X = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ Y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' \\ Z = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \end{cases}$$

On vérifie facilement que les points T(1;0;-1), S(0;1;-1) restent fixes par v.

Le point $B'\left(\frac{1}{3};\ -\frac{5}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, situé hors du cube, a pour image par v :

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 + 10 - 2}{9} = 1$$

$$Y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2 - 5 - 2}{9} = -1$$

$$Z = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2 + 10 + 1}{9} = 1$$

C'est le point F (1;-1;1) qui se retrouve sur le cube, conformément à $c * t$ = (AG)(BFEHDC) qui envoie B sur F.

En conclusion, dans la symétrie rotatoire, le cube n'est invariant ni par la rotation de 300°, ni par la symétrie planaire v qui con-serve le plan PQRSTU; toutefois, par composition de ces deux isométries, le cube est globalement invariant.

Pour terminer, nous donnons un tableau des 48 isométries du cube. A gauche, on a les rotations; à droite, les symétries:

rotations	symétries
1 identité	1 symétrie centrale
9 renversements	9 symétries planaires
6 rotations de ±90°	6 symétries rotatoires avec angle droit
8 rotations de ±120°	8 symétries rotatoires avec angle de ±300°

Note : on démontre en algèbre linéaire que toute isométrie qui conserve l'origine dans l'espace à 3 dimensions peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= dx + ey + fz \\ z' &= gx + hy + iz \end{aligned}$$

(x,y,z) sont les coordonnées d'un point P quelconque et (x',y',z') sont les coordonnées du point image P'.

Pour déterminer les coefficients a, b, c, ..., i, on utilise trois points particuliers dont les images sont faciles à calculer. Par exemple, pour la rotation r donnée dans le texte, on sait que P va sur Q, Q va sur R, tandis que G reste sur G.

P(0;-1;1) va sur Q(-1;0;1) :

(1) $-b + c = -1$
(2) $-c + f = 0$
(3) $-h + i = 1$

Q(-1;0;1) va sur R (-1;1;0) :

(4) $-a + c = -1$
(5) $-d + f = 1$
(6) $-g + i = 0$

G(1;1;1) va sur G (1;1;1) :

(7) $a + b + c = 1$
(8) $d + c + f = 1$
(9) $g + h + i = 1$

Ce système de 9 équations à 9 inconnues est, en fait, formé de 3 systèmes séparés à 3 inconnues. Nous ne résolvons que le système des équations (1), (4) et (7) en a,b,c :

(1) + (7) : $a + 2c = 0$
(4) $-a + c = -1$

d'où $3c = -1$ $\quad c = -\frac{1}{3}$ puis

$a = -2c = \frac{2}{3}$ et enfin $b = c + 1 = \frac{2}{3}$

On a ainsi l'expression de x' :

$$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \qquad \text{etc.}$$

(Suite dans *MATH-ECOLE* n°169)

Rapport sur la première épreuve du *3e Rallye mathématique romand*

par l'équipe des animateurs

Élaboration des problèmes

Un des objectifs du *Rallye mathématique romand* (RMR) et des autres concours de ce type est de faire résoudre des problèmes aux élèves. Mais pas n'importe lesquels ! Et les premières questions à se poser concernent le choix de ces problèmes. Doivent-ils se distinguer de ceux qu'on trouve dans les manuels, qu'on propose en classe, qu'on place dans un «coin mathématique», qu'on utilise pour évaluer les connaissances ou les compétences de élèves ?

Tous les problèmes doivent évidemment satisfaire à certains critères de qualité :

- La langue de leur énoncé doit être claire et rigoureuse pour éviter les implicites et les non-dit liés à des pratiques locales.
- On souhaite un style plaisant, adapté au niveau de langage des élèves, en rupture avec les formulations bien souvent stéréotypées des exercices d'application traditionnels.
- Au plan mathématique, il faut s'assurer de leur pertinence, de l'existence d'une ou plusieurs solutions, de l'adéquation des connaissances requises pour les résoudre au développement des élèves.
- Au plan didactique, les critères de choix sont également fort nombreux : possibilités d'exploitation dans le cadre du programme, compatibilité avec différents modes de gestion de la classe, potentialités de différenciation, intérêt des stratégies de résolution et des représentations susceptibles d'apparaître.

Les critères de choix spécifiques des problèmes de concours, sont déterminés avant tout par le «contrat» ou le règlement :

- La limitation du temps conduit à éviter des situations trop ouvertes qu'il serait impossible de développer sur la durée de l'épreuve, à proposer des problèmes dans lesquels les élèves doivent pouvoir s'engager rapidement.
- En absence du maître, on ne peut pas compter sur ses relances, ni sur d'autres aides extérieures pour débloquer une situation.
- Il ne peut y avoir aucune ambiguïté sur les questions. Leur interprétation doit être la même pour tous, puisque la correction est commune et aboutit à un classement.
- Le concours collectif exige une grande variété de sujets et de difficultés, afin que chaque élève de la classe puisse participer efficacement, selon ses capacités, à l'une ou à l'autre des résolutions.
- Pour des raisons de régularité de la compétition, on ne peut expérimenter les problèmes sans risquer de les dévoiler et de favoriser ceux qui en auraient connaissance.
- Pour les mêmes motifs, il faut éviter de proposer des sujets proches de ceux des manuels officiels, des anciennes éditions du concours, de «traditions locales», etc.

Cette dernière contrainte est la plus forte : le concours doit présenter de «vrais» problèmes, que tous les participants rencontrent pour la première fois.

Toutes les conditions évoquées ci-dessus montrent les difficultés de la conception de sujets d'épreuves et l'illusion qu'il y aurait à penser que la tâche est réalisable par une seule personne.

Nos collègues de *Mathématiques sans frontières* ont créé une commission de rédaction composée d'une quinzaine de membres qui, au rythme d'un après-midi par semaine, se charge de la préparation des sujets, de leurs premières esquisses aux derniers détails graphiques de leur mise en page définitive. Au cours de cette longue élaboration, chaque énoncé subit les feux d'une critique implacable, de tous les membres du comité de rédaction. La plupart des propositions initiales subissent de trois à cinq transformations successives avant de satisfaire aux exigences de l'épreuve.

L'équipe de la *FFJM,* composée de «semi-professionnels» et dont les problèmes présentent aussi un haut niveau de qualité travaille également en permanence, sur l'année entière. Certaines de leurs créations sont de véritables chefs d'oeuvre en originalité et en ingéniosité.

L'élaboration des problèmes de cette première épreuve du *3e RMR* n'a pas pu être conduite selon le modèle esquissé par les remarques précédentes. Ses problèmes ne peuvent pas prétendre à une grande originalité, puisque la plupart d'entre eux ne sont pas inédits. Mais leur choix a toutefois été accompagné d'une réflexion plus approfondie que par le passé.

L'équipe de la première épreuve du *3e RMR* a travaillé dans la composition suivante : Francine Ferranti, Eliane Guye (dactylographie et mise en page), François Jaquet, Edith Pfändler, Pierrette Rochat, Françoise Villars. Ses travaux se sont organisés ainsi:

- Premier choix individuel parmi les recueils de problèmes et collections personnelles de chacun. Il est difficile d'établir les origines précises de ces sujets; certains d'entre eux proviennent des championnats de la *FFJM,* de la brochure «Jeux» (Ed. Chantecler), de «Astuce, le grand jeu des astucieux» (Ed. Lito. Juniors Poche), de «Mathématiques en liberté» (J-M. Blanchet, Ed. OCDL) et d'autres collections personnelles.

- Première séance commune (24 janvier), avec confrontation d'une quarantaine de propositions. Les critères de choix sont: la clarté des énoncés, l'originalité (il faut éviter de reprendre des problèmes proposés les années précédentes ou proches de ceux des moyens d'enseignement officiels), l'intérêt des situations et l'adéquation des tâches au niveau de développement des élèves. Vingt sujets sont sélectionnés pour un second examen.

- Les problèmes retenus sont mis en forme ou modifiés selon les propositions émises lors de la première séance. Ils sont envoyés aux membres de l'équipe qui les examinent individuellement et les classent en fonction des critères suivants: degré (3e, 4e, 5e), type d'activité (géométrique, logique, numérique), liens avec le programme (en vue d'exploitations ultérieures en classe), intérêt potentiel des solutions et explications (pour déterminer les stratégies de résolution et les représentations des élèves).

- Deuxième séance commune (14 février). Seize problèmes sont retenus en fonction des critères d'examen pour constituer l'épreuve. Quelques corrections des énoncés sont encore proposées.

- Mise en forme finale, relectures, tirage.

L'avis des maîtres et élèves participants, à propos des sujets de cette première épreuve, est assez positif. C'est une première indication. L'analyse des résultats, problème par problème, permettra d'affiner ce premier jugement. Dans un troisième temps, ce sont les exploitations en classe de ces situations qui détermineront la qualité et l'intérêt des problèmes proposés.

Passation de l'épreuve

D'après les questionnaires reçus, l'épreuve s'est déroulée dans de bonnes conditions en général. Mais cette petite enquête ne permet pas - et ce n'est pas son but - de contrôler le respect du «règlement», la neutralité des maîtres ou leur influence sur la préparation (le «coaching») de leur élèves, leur absence de la classe durant la passation. Le fonctionnement du *RMR* repose sur une relation de confiance entre tous les participants qui s'engagent implicitement à ne pas favoriser leur classe ni à conduire une politique de «bachotage».

Au plan de l'administration et de l'organisation, le calendrier et les délais ont été respectés, malgré une période de vacances intervenant, dans plusieurs cantons, durant la période proposée. La participation élevée a posé quelques problèmes d'identification, en particulier pour les classes provenant d'un même collège. Les formulaires d'inscription devront être plus précis à l'avenir.

Il faudra préciser certaines consignes pour la deuxième épreuve, afin d'obtenir une seule solution de problème par feuille. C'est-à-dire qu'on souhaite recevoir une enveloppe par classe contenant autant de feuilles réponses que de problèmes résolus, pour des raisons de contrôle et pour une meilleure organisation de l'évaluation. Les maîtres peuvent faire des photocopies de ces feuilles-réponses avant de les envoyer, les évaluateurs doivent recevoir les originaux. (Ils n'accepteront plus de fax ni copies).

Au niveau de l'activité de la classe, la plupart des observateurs mentionnent une activité fébrile, des problèmes de gestion, quelques conflits entre élèves, et, d'une façon générale, l'importance des interactions au sein de la classe dans ce type d'épreuve.

Correction des épreuves et évaluation

13 personnes ont consacré leur mercredi après-midi du 15 mars, à l'Ecole catholique de Neuchâtel, à la correction et l'évaluation: les responsables de l'élaboration des épreuves, cités précédemment, et d'autres collègues de la région Est: Jacques-André Calame, Sylvie Charrière, Marie-Thérèse Farine, Caroline Joseph, Marie-Louise Meyer, Pierre-Alain Noirjean, Rachèle Monnin, Gisèle Rochat.

Afin d'assurer un jugement le plus équitable possible, chaque problème, pour l'ensemble des classes, a été évalué par une même équipe de deux correcteurs. Cette équipe a déterminé elle-même ses critères pour l'attribution des points aux deux ou trois problèmes qu'elle devait corriger. Mais le temps a manqué pour les discussions et vérifications, ce qui a entraîné quelques réclamations justifiées et des rectifications des points attribués pour quelques problèmes.
Il a donc été nécessaire d'établir un second tableau de résultats.

Analyse, problème par problème

1. *Gomme à mâcher* (Catégorie 3)

Carine s'achète deux paquets de chewing-gum.
Dans chaque paquet, il y a 5 morceaux.
Elle mange 4 morceaux et partage le reste avec Jean.

Combien de morceaux a reçu Jean ?

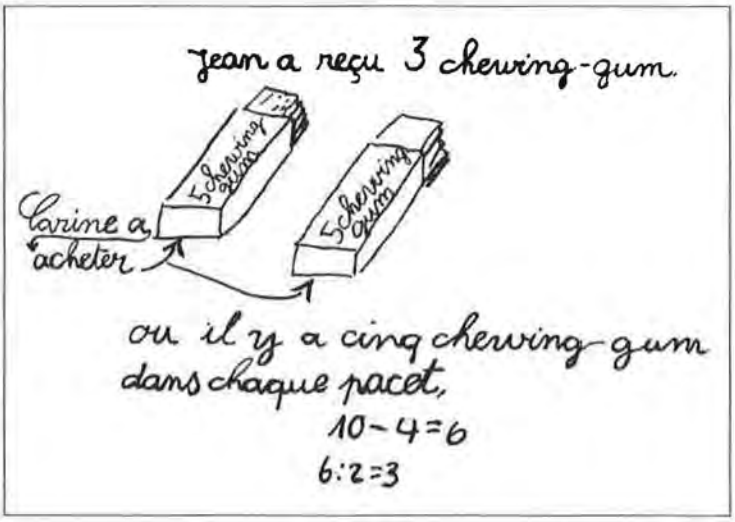
(Bonus pour une bonne explication)

3 pts pour une réponse juste, 2 pts pour une réponse incomplète.

Un «bonus» a été attribué aux solutions où les opérations mathématiques étaient indiquées.

Réussite : 70%

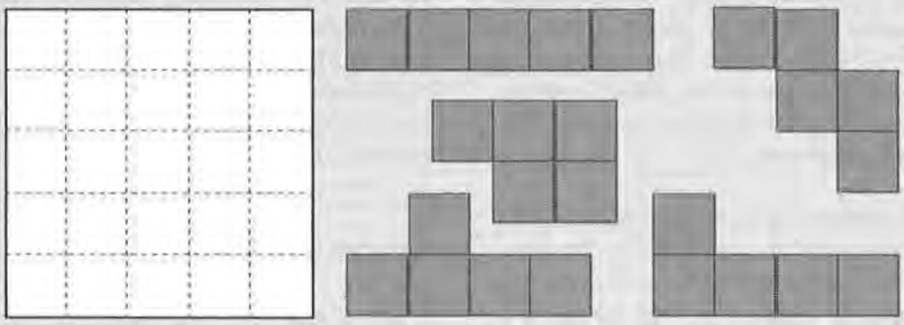
Plusieurs classes ont oublié de partager les six morceaux. Quelques solutions se contentaient de recopier la consigne en croyant expliquer la démarche.



2. *Pentaminos* (Catégorie 3)

Les pentaminos sont des assemblages de 5 carrés.

Placez ces cinq pentaminos pour qu'ils recouvrent toute la grille.



3 pts pour une réponse lisible ou bien reproduite.

Beaucoup de solutions ont été données au moyen de couleurs, une seule par découpage (avec difficulté de s'y retrouver) et une solution présentée par des flèches (mais mal reproduite) et une solution illisible.

Excellente réussite de l'ensemble : 93%.

On ne tire pas beaucoup d'informations de ce type d'activité. Mais ce genre de problème a toutefois sa place dans une épreuve comme le *RMR* car il permet une participation productive de tous les élèves, quel que soit leur niveau.

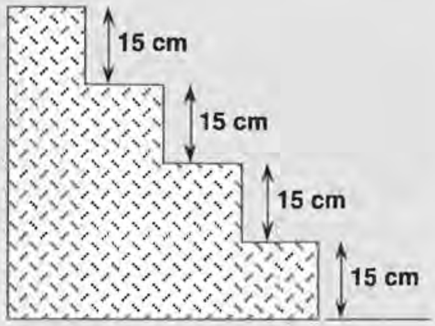
3. *L'escalier* (Catégorie 3)

Papa mesure 1 m 80 cm.
Pierre mesure 1 m 50 cm et
Marie 1 m 20 cm.

Papa se place au pied de l'escalier.

Sur quelles marches doivent se placer Pierre et Marie pour que les trois personnes aient le sommet de la tête au même niveau ?

(Bonus pour un bon dessin, clair)



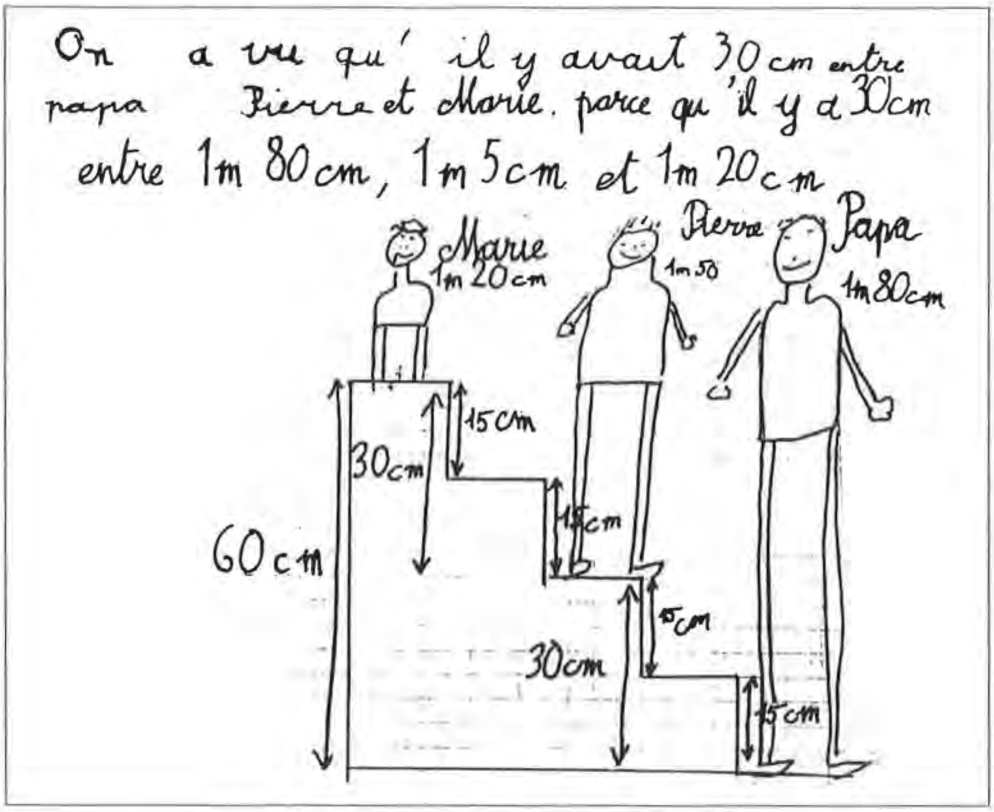
3 pts (1pt par personnage bien placé)

2 «Bonus» attribués pour les classes qui donnaient des explications claires et un dessin avec les têtes à la même hauteur. Parmi les explications claires, deux classes ont indiqué que la différence de taille correspondait, dans chaque cas, à la heuteur de deux marches.

Bonne réussite : 80%.

Quelques beaux dessins très intéressants.

Il faut remarquer que le travail avec des nombres «complexes» tels que «1 m 20 cm» ne posent pas de problèmes, bien qu'ils ne figurent pas dans les objectifs des programmes.



4. *Les poules* (Catégories 3 et 4)

Un fermier vient de perdre toutes ses poules. Le voilà obligé de les rattraper.
A la fin de la journée, il a récupéré la moitié de sa volaille.
Le lendemain, il rattrape la moitié des poules encore en fuite.
Le troisième jour, il y avait encore 40 poules en liberté.

Combien de poules s'étaient échappées ?

(Bonus pour une bonne explication)

3 pts pour une solution juste.

2 pts si le raisonnement est correct mais avec une confusion entre «quart» et «moitié» ou une étape de trop (160 x 2).

1 pt pour deux erreurs combinées.

Le «Bonus» est accordé en cas de dessin ou d'explication du compte à rebours.

Problème assez difficile : 30% de réussite en 3e, 57% en 4e.

Une explication fréquente :

40 poules x 2 de la moitié qui l'avait ratrapé
=80 x 2 qu'il a récuperer 160.
Donc le fermier a eu 160 poules échapées.

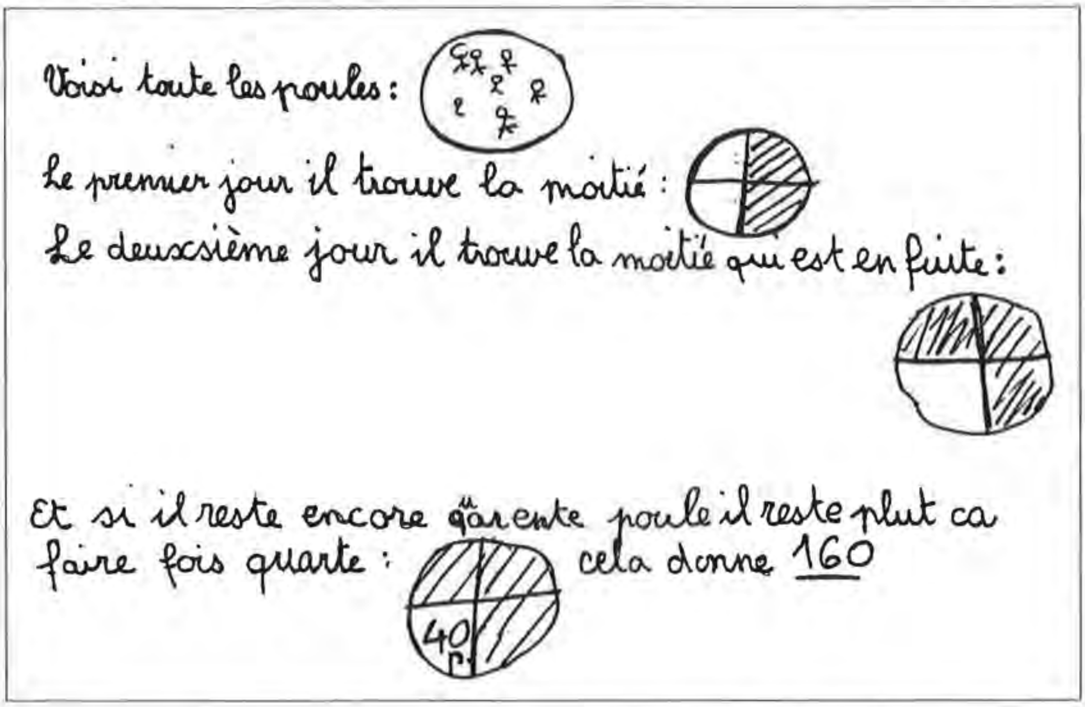
Dans cette solution, erronée, on peut se demander si les cinq calculs proposés sont là pour confirmer le point de vue des élèves ou pour répondre à une clause du «contrat» implicite demandant que toute solution soit accompagnée d'argumentations de type «mathématique».

La troisieme journée il y avais encore 40 poule dehors du poullailer et il avais déja attraper deux moitier. Dans la première moitier il y en avait 40 poules. Et dans la deuxime il y avait aussi 40 poules. Donc entou il y en a 120 poules.

Nous avons fait cinq calcules pour arrivé à 120

$$40 \times 3 = 120 \qquad 40 + 40 + 40 = 120 \qquad 80 + 40 = 120 \qquad 100 + 20 = 120 \qquad 110 + 10 = 120$$

Ici, le problème des poules est fort bien résolu par des représentations fractionnaires :


Voici toute les poules :

Le premier jour il trouve la moitié :

Le deuxsième jour il trouve la moitié qui est en fuite :

Et si il reste encore quarente poule il reste plut ca faire fois quarte : cela donne 160

40 p.

5. *Tous sportifs* (Catégories 3 et 4)

Dans cette classe, tout le monde est sportif! Lorsqu'on demande : «Qui fait de l'athlétisme ?», 16 mains se lèvent ; et à la question «Qui fait du basket ?», 10 mains se lèvent. Quatre élèves ont levé la main deux fois.
Combien cette classe compte-t-elle d'élèves ?

3 pts pour une solution juste.
2 pts s'il n'y a que le nombre indiqué.

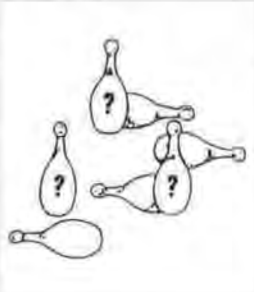
La plupart des classes ont fait l'opération 16 + 10 - 4 ou l'ont expliquée par une phrase.

Trois classes (sur 28) ont produit un diagramme de Venn.

Bonne réussite pour ce problème : 70% en 3e, 83 % en 4e.

6. *Jeu de quilles* (Catégories 3, 4 et 5)

Dans ce jeu, il y a 7 quilles qui valent: **28**, **27**, **19**, **15**, **25**, **18** et **22** points.
Au cours du jeu, quatre quilles sont renversées. Les trois qui restent debout totalisent 66 points.
Trouvez la valeur de chacune de ces trois quilles.



(Bonus pour une bonne explication)

3 pts pour une addition correcte.

«Bonus» pour une explication complémentaire, attribué à une classe seulement en 3e, à la moitié des classes de 4e et à la grande majorité de celles de 5e.

Beaucoup d'élèves ont cherché d'abord à faire correspondre les chiffres des unités

Problème réussi globalement à 80% en 3e, 94% en 4e et 96% en 5e.

TRIGAM SA présente

PUZZLES à trois dimensions

(demande de brevet déposée)

Généralités

Dans un puzzle plan traditionnel, les différents composants sont à 2D. On peut imaginer un puzzle 3D formé également de composants 2D reliés ensemble par leurs côtés ou leurs extrémités (par exemple, pointes s'il s'agit de polygones) selon des plans non parallèles pour former des images distinctes, et simultanées.

Puzzles 3D

A notre sens un véritable puzzle 3D est formé de composants 3D qui remplissent progressivement toute une portion de l'espace. (De même qu'un puzzle 2D est formé de composants 2D remplissant toute une portion du plan progressivement).

Puzzle 3D formé d'un ou deux polyèdres

Nous nous intéressons ici à des puzzles 3D dont les composants constitutifs sont des polyèdres réguliers de formes géométriques simples, uniques ou complémentaires, empilables sans vide. Les empilements considérés répondent à des raisons pratiques, c'est-à-dire que les couches successives s'amenuisent pour assurer la stabilité de l'ensemble, et forment un polyèdre composé pyramidal régulier ou pyramidal tétraédrique.
Les faces apparentes de polyèdre composé réalisent un puzzle à plusieurs plans non parallèles.

Multipluzzle 3D

Une notion est spécialement intéressante : les polyèdres élémentaires ne présentant pas toutes leurs faces à l'extérieur du polyèdre composé, il est possible, **avec un même ensemble de polyèdres élémentaires** (à partir d'un certain nombre de pièces), de réaliser **successivement** plusieurs configurations extérieures, et donc plusieurs puzzles simplement en combinant autrement les arrangements de polyèdres élémentaires.

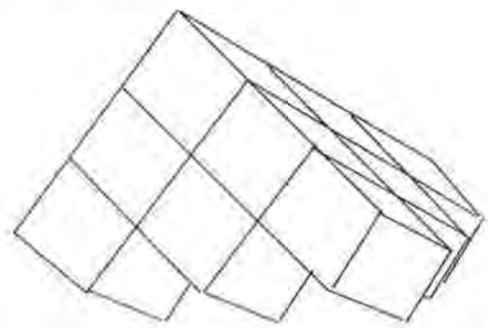
Nombre maximum de configurations **S**max

Nous définirons **S**max comme étant un nombre entier de configurations possibles, à partir d'un ensemble de polyèdres élémentaires, pour constituer un polyèdre composé (où chaque facette de polyèdre élémentaire n'apparaît qu'une fois à l'extérieur du polyèdre composé dans l'ensemble des configurations).

Nous aurons :

Smax ≤ nombre total de faces à disposition / nombre de faces apparentes

Cas 1 Pyramide tétraédrique formée de cubes posés sur la pointe



Nombre de couches	Nombre de cubes	Nombre de faces à disposition	Nombre de faces apparentes	**S**max
1	1	6	3	2
2	4	24	9	2
3	10	60	18	3
4	20	120	30	4
5	35	210	45	4
6	56	336	63	5
7	84	504	84	6
...	...	...	...	...
N	**N(N+1)(N+2)/6**	**N(N+1)(N+ 2)**	**3N(N+1)/2**	**≤ 2(N+2)/3**

Application : N = 4 est à retenir, 4 configurations de 3 images sont possibles.
C'est le cas du jeu TRIGAM CIRCUS 1 comportant 20 cubes.

La probabilité de placer les 20 cubes au hasard et d'obtenir une image triple correcte est de: $\dfrac{24 \times 4 \times 3}{24^{20} \times 20!} = \dfrac{1}{3{,}4 \times 10^{43}}$

En effet, on tient compte des 4 éléments suivants:

1. Un cube peut être placé de 24 manières différentes dans une cavité (6 faces et 4 orientations possibles pour chaque face).

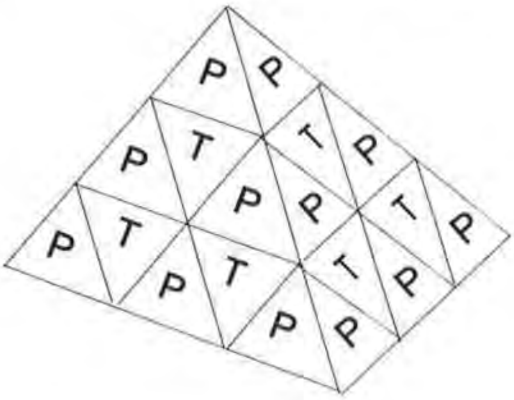
2. Il y a 20! permutations possibles des 20 cubes.

3. L'un des cubes n'apparaît pas en surface: il peut donc être orienté arbitrairement.

4. 4 configurations sont possibles et 3 orientations pour chacune de ces configurations.

Un adulte réalise une configuration de puzzle, pour la première fois, en 15 minutes environ. Ceci montre combien l'intelligence humaine est performante.Car il faudrait 2.1 x 10^{28} années à un ordinateur qui ne pourrait qu'effectuer des permutations aléatoires de positions de cubes à raison de 50'000'000 par seconde.

Cas 2 Pyramides régulière de pyramides et de tréaèdres élémentaires



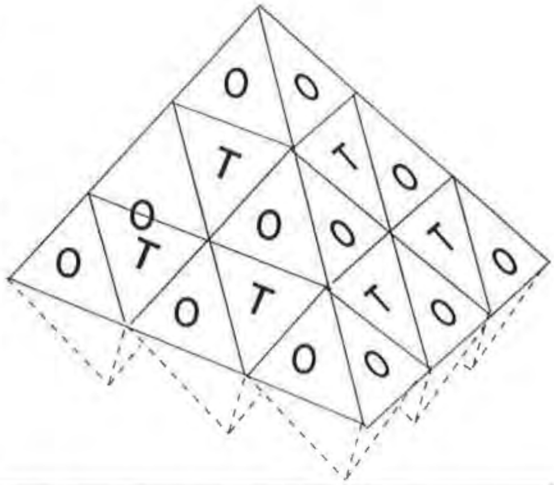
Nb. de couches	Nb. de pyramides élém.	Nb. total de triangles élém. des pyramides	Nb. de tétraèdres élém.	Nb. total de triangles élém. des tétraèdres	Smax,p (pyramides)	Smax,t (tétraèdres)
1	1	4	0	0	1	2
2	6	24	4	16	2	4
3	19	76	16	64	3	5
4	44	176	40	160	4	6
5	85	340	80	320	5	8
6	146	584	140	560	6	9
7	231	924	224	896	8	10
...	...	...	...	...	...	...
N	**$N(2N^2+1)/3$**	**$4N(2N^2+1)/3$**	**$2N(N^2-1)/3$**	**$8N(N^2-1)/3$**	**$\leq (2N^2+1)/3(N+1)$**	**$\leq 4(N+1)/3$**

Remarque :
Le plus petit de Smax,p et Smax,t est déterminant pour le nombre de configurations possibles.

Un cas intéressant pour les puzzles est N=3 avec Smax=3 : on peut réaliser 3 configurations de 4 images différentes avec 19 pyramides et 16 tétraèdres.

Cas 3 Pyramides formées d'octaèdres et de tétraèdres élémentaires

Pour des questions de stabilité des 2 premières couches de base il peut être intéressant de réunir les pyramides élémentaires 2 par 2 en octaèdres élémentaires. Dans ce cas, la couche de base n'est plus plane et présente N^2 pyramides dirigées vers le bas (et pouvant être logées dans des alvéoles).



Nb. de couches	Nb. d'octaèdres élém.	Nb. total de triangles élém. des octaèdres	Nb. de tétraèdres élém.	Nb. total de triangles élém. des tétraèdres	Smax,o (octaèdres)	Smax,t (tétraèdres)
1	1	8	0	0	2	2
2	5	40	4	16	3	4
3	14	112	16	64	4	5
4	30	240	40	160	6	6
5	55	440	80	320	7	8
6	91	728	140	560	8	9
7	140	1120	224	896	10	10
...	...	...	...	...	...	...
N	**$N(N+1)(2N+1)/6$**	**$4N(N+1)(2N+1)/3$**	**$2N(N^2-1)/3$**	**$8N(N^2-1)/3$**	**$\leq 2(2N+1)/3$**	**$\leq 4(N+1)/3$**

Remarque : Le plus petit de **S**max,o et **S**max,t est déterminant pour le nombre de configurations possibles.

Les multipuzzles seront disponibles dans les magasins spécialisés. Comme il s'agit d'une nouveauté, on peut déjà se les procurer chez ***Interlude*** (Givisiez, 037 / 26 71 10) et ***Vivishop*** (Lausanne, 021 / 312 34 34).
Les prix sont de l'ordre de Fr. 22.- à Fr. 25.-.

Trigam a développé également d'autres jeux qui feront l'objet de prochains articles.

Courrier des lecteurs

Blonay, le 10 avril 1995

Monsieur,

A la lecture de votre article dans *MATH-ECOLE* n° 166 (p. 26 à 36), je ne résiste pas à l'envie de vous relater un moment de cours de perfectionnement donné ce mois de janvier à Lausanne par Mme B. Gueritte-Hess:

Une trentaine d'enseignants, venus étudier le raisonnement logico-mathématique, à qui on montre 12 rubans de 12 couleurs différentes, de 12 longueurs différentes; mais les rubans sont alignés sur un carton dont un cache nous empêche de voir la longueur.

Tâche : par groupe de deux et par le jeu de questions auxquelles le partenaire répond par «oui» ou «non» il faut établir la série du plus petit au plus grand. Le partenaire note le nombre de questions posées.

Les stratégies ont été variées: beaucoup de listes du genre :

$b > r$; $r < 0$; etc.

mais la coordination de toutes les informations posait problème!

Ma partenaire a tracé une longue ligne sur laquelle elle plaçait provisoirement des traits de couleurs selon mes réponses. Bien gérée, cette méthode est excellente.
Bref, une multitude de démarches ont été décrites, mille observations relevées, mais aucun tableau à double entrée, ni aucun diagramme sagittal. Etonnant non, de la part d'enseignants qui justement les enseignent! Ceci vient parfaitement illustrer ce que vous dites dans cet article.

...

Si on résume le message, ce pourrait être : les diagrammes, ça ne construit pas les sériations ! Ce qui est parfaitement vrai : ce sont des illustrations à l'usage de ceux qui ont déjà construit la structure de pensée sous-jacente. Mais qu'on ne renonce pas du même coup aux activités de sériation : ce serait jeter le bébé avec l'eau du bain !

Il faudrait donc que ce message soit l'occasion de rechercher ou proposer d'autres activités de classification et de sériation que le remplissage de diagrammes. Le problème central est celui de la coordination entre les deux ou plusieurs informations. Dans la classification, pour dominer la multiplication de classe, il faut pouvoir se dire : celui-ci fait partie à la fois des bleus et des carrés. C'est le nœud de l'affaire. Dans la sériation, il faut pouvoir se dire celui-ci est à la fois plus grand que le rouge et plus petit que le vert.

Problème de coordination, et en plus, de transitivité dans la série. Et ce ne sont pas les diagrammes qui offrent la possibilité de construire mentalement ces structures. Quoi alors ?

Des activités où le matériel est toujours mobile, c'est l'essentiel. Varié d'une fois à l'autre, même s'il est très bricolé. Mieux vaut une dizaine de maisons dessinées sur de petits cartons (pas plastifiés!) que des blocs logiques. On déplace, on range, on nomme, on note, on dérange pour trouver autre chose, on cache, on devine. Rien de bien nouveau, mais il faut rappeler l'importance de ces exercices. Dès qu'ils sont mis en fiches, ils se figent et perdent leur intérêt.

A propos de sériations deux astuces à proposer :

- La première est de ne pas donner tous les éléments de la série au départ. On en garde 2 ou 3 cachés. Au bout d'un moment, on les fait intercaler dans la série. Le succès rapide ou alors les tâtonnements en disent long sur la structuration de l'enfant.

- La deuxième est de faire constituer une série (p. ex. 5 réglettes Cuisenaire) sous un cache. La démarche de l'enfant nous renseigne tout de suite sur sa faculté de coordination et s'il a la transitivité.

Le premier projet de nouveaux moyens d'enseignement des maths ne m'a pas paru riche en activités de sériation. On emploie beaucoup la série numérique mobile, ce qui est excellent. Peut-être n'ai-je pas vu les autres activités de ce domaine...

Janine Cosandey, 1807 BLONAY

Activité de sériation* (E2 - 1P)

par Janine Cosandey, maîtresse d'appui, Blonay

* Cette activité m'a été inspirée par les travaux du GEPALM (Groupement d'étude psychopathologique des activités logico-mathématiques) de Paris.

Note théorique :

Avant ou parallèlement à l'apprentissage de la suite des nombres, il est important de sérier des objets de toutes sortes (réglettes Cuisenaire, poupées russes, récipients, etc.). La sériation est acquise assez tôt chez les enfants pour autant qu'elle revête un aspect visuel (escalier des réglettes, «bon» arrangement des poupées, ...). Mais la structure de la série, faite d'inclusions successives, est difficile à maîtriser mentalement.

$$\begin{array}{lll} a < b < c < d & \text{implique} & a < b, c \text{ et } d \\ & & b < c \text{ et } d \\ & & c < d \\ & \text{et} & d > c, b \text{ et } a \\ & & c > b \text{ et } a \\ & & b > a \end{array}$$

D'autre part, la relation est transitive :

si $c > b$ et $b > a$, alors $c > a$.

Tout ceci est-il bien nécessaire à un élève de 6-7 ans ? Eh, bien, s'il n'a pas cette structure mentale, il ne peut pas situer un élément dans une série ou constituer une série sans support visuel. Pour contrôler où il en est, faites-lui sérier 5 ou 6 bâtons à l'aveugle, les mains sous un cache, et vous verrez s'il a une stratégie cohérente ou non. Ou alors, faites-le vous-même en observant bien chacun de vos gestes avec son pourquoi.

Activité :

Cette activité (inspirée des travaux du GEPALM, Paris - voir encadré de la page suivante) est propre à faire réfléchir les enfants et à les aider à se construire.

I. Fabrication du matériel

Les élèves, lors d'une première séance, fabriquent des boules de pâte à modeler de 7 grosseurs différentes: comme un grain de poivre - pois jaune - pois chiche - noisette - noix - balle de ping-pong - balle de tennis. On les calibre en les faisant passer dans des trous judicieusement percés dans un carton épais.

Les boules de chaque grosseur sont d'une couleur différente.

Cette activité de calibrage travaille déjà la sériation : dans le plus petit trou ne passent que les rouges. Dans le trou suivant passent les rouges et les bleues, dans le suivant : les rouges, les bleues et les vertes, etc.

A volonté, on peut aussi prendre du matériel tout prêt (par ex. justement des graines, noix, billes, etc.).

II. Jeux

On a 7 gobelets opaques recouverts d'un papier ou d'un tissu tendu et percé d'un trou (comme les trous du carton de calibrage). On les place en désordre sur la table.

Jeu 1 : Le maître dit avoir caché 1 objet inconnu (1 des boules, ou 1 des objets) dans le gobelet qui a le plus petit trou. Les élèves devinent lequel: ça ne peut être que le grain de poivre / la boule rouge. Un objet caché dans le gobelet suivant : ça peut être le grain de poivre / rouge ou le pois jaune / bleu. Il apparaît alors le mot : c'est peut-être la rouge, peut-être la bleue. Plus le trou est grand, plus il y a de possibilités : on en fait le tour.

Jeu 2 : Le maître dit avoir caché, par exemple, la noix dans un gobelet inconnu. Où peut-elle être ? Peut-être là, peut-être là, ... C'est la même activité que le jeu 1, mais la pensée travaille dans l'autre sens. On en fait le tour.

Jeu 3 : Un élève cache un objet de son choix, connu, dans un gobelet à identifier. Un autre élève secoue des gobelets pour savoir lequel contient l'objet. A chaque essai, il a un point (négatif). Puis on inverse les rôles et celui qui a le moins de points a gagné.

L'enfant qui maîtrise la sériation comprendra vite qu'il a avantage à cacher un petit objet pour rendre la recherche plus difficile (davantage de possibilités).

Jeu 4 : On change la règle : on essaie de **ne pas** tomber sur l'objet caché: chaque essai où l'on secoue un gobelet vide vaut 1 point (positif). Après avoir échangé les rôles, celui qui a le plus de points a gagné.

Cela fait une gymnastique mentale propre à faire progresser les enfants encore mal structurés. Et, pendant ce temps, ils prennent plaisir au jeu, chacun avec la stratégie qu'il est capable de mettre en place.

GEPALM

Créé il y a 20 ans par Madame Jaulin-Mannoni, qui en est le «cerveau», le GEPALM (Groupement d'étude psychopathologique des activités logicomathématiques) est un lieu de formation, essentiellement suivi par des orthophonistes qui désirent prendre en charge des enfants en difficulté en logique et en mathématiques. Madame Gueritte-Hess est une des formatrices et elle a été appelée chaque année, depuis 4 à 5 ans, à donner un cours de formation continue à des enseignants vaudois, à Lausanne. Un projet est à l'étude pour qu'elle offre une formation GEPALM complète à Yverdon, dès l'année prochaine.

Petite bibliographie :

Jaulin-Mannoni, F. «Le pourquoi en mathématiques». Paris : Apect, 1975.

Jaulin-Mannoni, F. «L'apprentissage des sériations», Paris : Apect, 1974.

Jaulin-Mannoni, F. «Pédagogie des structures logiques élémentaires». Paris : Apect, 1974.

Gueritte-Hess, B. «Le nombre et la numération», Montreuil : Ed. du Papyrus, 1982.

Gueritte-Hess, B. «Le tour du problème », Montreuil : Ed. du Papyrus, 1994.

Notes de lecture

Tous les ouvrages mentionnés dans cette rubrique *Notes de lecture* sont disponibles à :

IRDP
Secteur de la Documentation
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. : (038) 24 41 91
Fax : (038) 25 99 47

et peuvent être empruntés gratuitement pour une durée de 1 mois à raison de 5 documents à la fois.

Le Secteur de Documentation de l'IRDP regroupe, dans sa bibliothèque, des ouvrages (monographies, périodiques, cassettes vidéos) dans les domaines de la pédagogie, de la sociologie et de la psychologie à destination des groupes et des personnes associés à la Coordination scolaire romande, ainsi qu'à la coopération interrégionale.

L'envers du tableau

Quelle pédagogie pour quelle école ?

Philippe Meirieu

ESF éditeur, 1993

Dans cet ouvrage, l'auteur livre au public, sur un mode très personnel, son itinéraire, ses convictions et ses inquiétudes. Plusieurs thèmes sont développés.

Philippe Meirieu présente tout d'abord les avantages de divers modèles d'apprentissage avant d'en fixer les limites. Sur un autre plan, il précise les conditions indispensables à l'intégration d'un nouveau savoir : la nécessité de placer l'élève dans une situation de recherche, la confrontation de ses découvertes avec ses connaissances et l'expérience vécue d'un conflit socio-cognitif. Selon lui, ces trois éléments favorisent la mise en place d'une nouvelle connaissance.

Pour Philippe Meirieu, la relation pédagogique est d'une importance capitale. Elle repose sur deux principes : le principe d'éducabilité, qui veut que l'on attende toujours que l'autre réussisse et le principe de non-réciprocité, qui veut que l'éducateur n'exige ni reconnaissance, ni admiration, ni même réussite de l'éduqué. On constate à quel point la tâche du pédagogue est difficile.

Outre ses réflexions et ses propositions à propos de la scolarité obligatoire, des structures pédagogiques et de l'unification du système éducatif, Philippe Meirieu apporte à la formation des maîtres un éclairage nouveau. «Celle-ci doit intégrer une formation pédagogique solide qui n'est pas un "supplément d'âme" qui vient s'ajouter aux savoirs disciplinaires; elle est une réflexion sur les fins.» Quand au système d'évaluation et de promotion des enseignants, il doit, toujours selon lui, aussi être revu; si l'institution ne le fait pas, les parents ne tarderont pas à imposer leurs points de vue aux autorités scolaires.

Plus loin, l'auteur prononce un véritable plaidoyer en faveur de la pédagogie différenciée : centré à la fois sur un projet de formation commune pour tous les élèves et veillant à ce que chaque apprenant devienne véritablement responsable de ses propres apprentissages, ce dispositif pédagogique mérite une attention toute particulière de la part des enseignants.

Faut-il offrir toutes ses chances à un élève ou s'attacher en priorité à faire émerger «les véritables intelligences» ?

Ce débat, qui oppose les partisans de dispositifs pédagogiques aux tenants du seul savoir dispensé de façon unilatéral, n'échappe pas à la perspicacité de Philippe Meirieu. Toujours animé par la foi du pédagogue qui intéresse toutes les personnes concernées par l'éducation.

Enfin, la pensée de l'auteur ne saurait être mieux résumée par l'extrait suivant : «Eduquer c'est s'attacher minutieusement à tout ce qui peut libérer l'homme de la violence, lui enseigner la patience du connaître et la patience du comprendre. C'est aussi transmettre les outils qui lui permettent d'échapper à toutes les formes de violence sociale ou intellectuelle qui s'exerce sur lui.»

Destinataires : enseignants de tous niveaux et de toutes disciplines.

Mots-clés : institution scolaire, formation des maîtres, dispositifs pédagogiques, relation pédagogique, finalités de l'enseignement, acte d'apprendre.

M. B.

---

ndlr : Dans *Libération* du mardi 30 mai, nous avons trouvé ce petit article, qui nous paraît très significatif de l'évolution actuelle de l'usage de la calculatrice en classe.

Education : Toutes les calculettes seront autorisées.

Les candidats au bac vont compter avec l'infrarouge

Toutes les calculatrices de poche, y compris à infrarouge, sont autorisées lors des épreuves du baccalauréat, à condition de ne pas utiliser la fonction de communication entre calculatrices, ni d'imprimantes, indique une note de direction des lycées et collèges adressés aux centres d'examen. Précisions qui iront droit au cœur de ceux des candidats au bac qui s'étaient émus d'une note jointe à leur convocation interdisant l'usage des calculatrices à infrarouge qui peuvent communiquer entre elles. Sur le marché depuis 4 à 5 ans, ces calculatrices très performantes, au prix oscillant entre 1'000 et 2'000 francs, n'avaient d'ailleurs pas fait l'objet jusqu'à présent, si l'on en croit leur principal fabricant Hewlett Packard, d'une interdiction. L'entreprise précise également que pour se passer des programmes enregistrés, il faut que les calculatrices ne soient pas éloignées de plus d'une dizaine de centimètres, ce qui devrait rendre difficile la communication entre candidats dans une salle d'examens. L'utilisation des calculatrices au bac est réglementée et autorisée depuis 1986. Les candidats peuvent en avoir autant qu'ils le désirent; leur nombre n'est pas limité. Mais toutes doivent comporter l'indication du nom, du prénom et le numéro du candidat, ceci afin d'éviter les échanges de machines pendant l'épreuve.

L'usage des calculatrices est interdit dans les disciplines de langues vivantes, français, lettres, histoire-géographie et philosophie. Il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider, pour chacune des épreuves, si l'usage de l'ensemble des instruments de calcul est autorisé ou non. Les données contenues en mémoire dans les calculatrices n'ont pas à être effacées en début d'épreuve.

Dans les matières scientifiques, les exercices proposés aux élèves sont conçus en fonction de l'usage des calculatrices, désormais intégrées à l'enseignement et aux modes de résolution des problèmes.

A toutes fins utiles, on se souviendra que la fraude, quelle qu'elle soit, est sévèrement punie. Si le candidat soupçonné continue de participer à l'examen - il n'est plus expulsé -, il risque après délibérations de la section disciplinaire, au mieux un blâme, au pire une interdiction définitive de participer à tout examen conduisant à un titre ou un diplôme d'enseignement public supérieur.

Abonnements et commandes

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 20.- / Etranger Fr.S. 25.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 5.-

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :

de 5 à 9 Fr. 16.- par abonnement

de 10 à 50 Fr. 15.- par abonnement

(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande)

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

Je suis abonné(e) à *Math-Ecole.* OUI - NON

☐ Veuillez m'abonner à *Math-Ecole.* (tarifs en page 2 de couverture)

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ____________________

Adresse (rue et numéro) : ____________________

Localité (avec code postal) : ________ ____________________

Date : ____________ Signature :

Veuillez me faire parvenir :

...... exemplaire(s) de «π» (Fr. 42.- l'exemplaire + port)

...... ***Mathématiques du Kangourou*** (Fr. 26.- l'exemplaire + port)

Les Annales du Championnat international de jeux mathématiques et logiques

...... n°10 ***Le serpent numérique*** (Fr. 13.- l'exemplaire + port)

...... n°11 ***Le pin's tourneur*** (Fr. 13.- l'exemplaire + port)

...... n°12 ***Le trésor du vieux pirate*** (Fr. 13.- l'exemplaire + port)

...... n°13 ***Le Roi des Nuls*** (Fr. 13.- l'exemplaire + port)

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7