MATH ECOLE

Problèmes additifs

Etoile magique

Math-Adore !
aventures interclasses mathématiques

35e année

171

février 1996

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 20.- / Etranger Fr.S. 25.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 5.-
anciens numéros : n°120 à 150 : Fr. 1.- / pièce (n°136 épuisé)
dès n°151: Fr. 3.- / pièce (n°152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 Fr. 16.- par abonnement
de 10 à 50 Fr. 15.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

35e année 5 numéros par an

171

février 1996

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (038) 24 41 91
Fax (038) 25 99 47

Abonnement annuel (5 numéros)
Suisse: Fr. 20.- Etranger: Fr. 25.-
CCP 12-4983-8

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 22 14 60

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Yvan Michlig

Sommaire

Editorial

Point de vue

«Effe égale aime gamma» relevait Gérard Chevalier dans un article paru dans *Les Cahiers de Science et Vie* portant, vous l'aurez peut-être compris, sur la compréhension des lois de Newton. «Faut faire avec les x, mettre un égal, tirer un long trait et ça donne la réponse» me répondait l'autre jour une élève que je questionnais à propos de l'algorithme de résolution d'équations du premier degré à une variable.

Les représentations de ce type, dépourvues de signification scientifique, sont fréquentes chez les élèves qui suivent nos cours de physique ou de mathématique. Une observation attentive de leurs comportements et une mise à jour de leurs conceptions montrent que notre enseignement scientifique, presque exclusivement fondé sur un ensemble de techniques opératoires et de connaissances, induit certains effets qui sont en parfaite opposition avec les buts qu'il poursuit. Son adéquation avec les besoins d'une société en constante évolution n'est qu'imparfaite et aléatoire et, de ce fait, la volonté démocratique de faire accéder une forte majorité d'enfants au savoir, source de liberté et d'épanouissement, semble de plus en plus irréalisable. L'accès à une large culture, la préparation aux défis imposés par le monde professionnel, l'acquisition de clés essentielles permettant de répondre à des questions scientifiques et techniques se posant dans la vie quotidienne, le développement de méthodes de pensée et d'attitudes sont autant d'objectifs qui devraient déterminer un cadre de référence à l'éducation scientifique.

Certes, ces finalités de l'éducation figurent en lettres d'or dans les premières pages des plans d'études. Malheureusement, elles sont reléguées au second plan, car, et c'est là que le bât blesse, ces mêmes plans d'études contiennent également une très longue liste de sujets à traiter. En conséquence, une grande majorité des leçons y sont consacrées. Plusieurs facteurs contribuent à accentuer cette dérive : les activités contenues dans la plupart des moyens d'enseignement, les pratiques pédagogiques héritées de nos prédécesseurs et reconnues efficaces par les parents et les autorités, les épreuves de sélection et d'orientation, les exigences des différents ordres d'enseignement qui, toutes, sont principalement centrées sur des connaissances.

Dans le but de consacrer une bonne partie du temps scolaire à des situations développant les compétences (création de modèles, mobilisation du savoir, maîtrise de l'information, etc.) et les attitudes (confiance en soi, désir de communiquer, esprit critique, etc.) et par là-même de permettre à l'enfant de se construire, les contenus de nos programmes doivent être revus à la baisse, et une approche différente de l'enseignement scientifique s'impose. Ce qui me paraît fondamental, c'est de plus porter l'accent sur les notions étudiées, mais sur les démarches intellectuelles nécessaires à leur appréhension. La longue gestation qui précède une acquisition solide et durable est source d'une multitude de processus mentaux qui, dans la mesure où ils sont décodables, révèlent des richesses insoupçonnables. Dans cette perspective, ils méritent une attention toute particulière.

Une véritable action pédagogique passe par le respect des sinuosités du chemin qui mène à la connaissance : en créant des dispositifs où l'élève aura le temps d'errer sur des fausses pistes et de traverser des périodes où se succèdent raisonnements incomplets et idées lumineuses ; en aidant l'élève à transformer ses conceptions initiales souvent erronées et à renverser les obstacles accumulés par l'expérience quotidienne ; en lui apprenant à conduire consciemment sa pensée et acquérir ainsi les gestes mentaux fonctionnant dans tout apprentissage ; en le considérant comme une personne capable d'élaborer ses propres connaissances; en résistant à la tentation de lui fournir des explications trop détaillées au point qu'il puisse «savoir» sans «apprendre».

Toutefois, ne l'ignorons pas, ces stratégies didactiques mènent l'enseignant dans le doute, le conduisent à abandonner l'idée que toute activité pédagogique est contrôlable et impliquent de sa part un accroissement de sa dépense énergétique.

Le doute tout d'abord, en regard des attitudes à adopter face à diverses réactions d'élèves relevant de l'incompréhension ou de l'irréflexion. L'incertitude encore, lorsque nous nous trouvons confrontés à des élèves qui s'obstinent à ne pas comprendre et dont la maîtrise des gestes mentaux les plus élémentaires est aléatoire. La perte de contrôle ensuite, lorsqu'il s'agit de déceler les opérations mentales effectivement réalisées et d'agir sur elles. L'augmentation de l'investissement personnel enfin, car la gestion de situations favorisant l'émergence des conceptions et le respect des démarches individuelles demandent de multiples ressources et obligent parfois l'enseignant à modifier le déroulement des séquences d'apprentissage prévues.

A cela s'ajoute la difficulté d'apprécier et d'évaluer les démarches et les diverses stratégies mises en place par les élèves, car, afin d'être cohérent avec le modèle pédagogique préconisé ici, l'appréciation et l'évaluation doivent être principalement centrées sur l'élève et son fonctionnement, et non sur un ensemble de connaissances.

Privilégier dans son enseignement la résolution de problèmes et porter une attention soutenue aux procédures mises en place par les élèves, en les valorisant dans la mesure du possible, constituent certainement des moyens d'améliorer leurs capacités d'apprendre à apprendre, de les rendre acteurs principaux de la construction de leurs savoirs et, par conséquent, de leur permettre de se développer dans toutes leurs potentialités. La tâche n'est pas aisée, elle nécessite un engagement considérable, mais au-delà des difficultés à surmonter, la satisfaction de mener un réel projet éducatif est bien présente.

Michel Brêchet

Les n'ombres chinoises (suite) (1ère partie, voir n° 170)

les débuts de la réflexion mathématique en Chine ancienne

par Jean-Paul Reding, Université de Zürich

3. LES GRANDES ETAPES DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE CHINOISE

Elles sont associées à des œuvres précises, et souvent aux commentaires des anciens classiques mathématiques. La notion de classique ou de livre canonique (*jing*) est extrêmement importante en Chine et s'utilise dans tous les domaines. Les premiers textes mathématiques de la Chine ancienne datent des derniers trois siècles avant notre ère. Ils sont anonymes, comme la plupart des autres textes classiques d'ailleurs, même s'ils portent un nom, comme par exemple les *Entretiens* de Confucius ou le *Daodejing* du philosophe mythique Laozi.

Commençons par le début :

I. *Zhoubi Suanjing "Le classique du gnomon et des voies célestes circulaires".* Abstraction faite d'un écrit récemment trouvé dans une tombe[1], ce texte est le traité mathématique le plus ancien (2e s. avant notre ère) que nous possédons aujourd'hui. Il est particulièrement important pour l'histoire de l'astronomie, puisqu'il décrit plusieurs modèles de l'univers, tous géocentriques avec une terre plate. Le théorème de Pythagore s'y trouve clairement énoncé. D'autre part, ce texte connaît déjà les fractions.

II. *Jiuzhang Suanshu "Les neuf chapitres de l'art mathématique".*
Ce texte se présente comme un véritable manuel dans lequel sont regroupés 246 problèmes répartis en 9 chapitres[2]. Cet ouvrage est la Bible des écrits mathématiques en Chine. Il date du 1er siècle avant notre ère et a beaucoup été commenté.

III. Sun Zi (vers 250 de notre ère)
Le troisième siècle de notre ère a vu éclore le talent de maître Sunzi, qui nous a laissé un traité intitulé "*Le classique mathématique de Maître Sun*".
Ce traité est surtout connu pour la solution qu'il donne au problème appelé justement "problème de Maître Sun", ou encore aujourd'hui *problème des restes* :

Soit des objets dont on ignore le nombre. En les comptant 3 par 3 il en reste 2 ; en les comptant 5 par 5, il en reste 3 et en les comptant 7 par 7, il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets ?[3]

Le texte de Sunzi donne la réponse : 23 ; mais la règle qu'il donne est assez obscure à première vue :

---

[1] Il s'agit d'un texte datant de 180 avant notre ère et qui porte le titre de *Suan shu shu "Traité d'arithmétique"*. Ce livre en forme de tablettes en bambou a été trouvé dans la province de Hubei en 1984.

[2] Il s'agit des neuf suivants :
1. Arpentage (calcul des surfaces ; traitement des fraction) ;
2. Riz et millet (pourcentages et proportions) ;
3. Progressions (règle de trois) ;
4. Diminuer les données (calcul des surfaces à partir de données partielles) ;
5. Calculs artisanaux (calcul des volumes) ;
6. Impôts équitables (problèmes de poursuite ; équations à plusieurs inconnues) ;
7. Excès et défaut (fausse position) ;
8. Méthode carrée (équations ; fait référence aux carrés dans lesquels on porte les données du problème, comme nous avons vu) ;
9. Angles droits (propriétés du triangle rectangle).

[3] Cité d'après J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, p. 129.

En comptant par 3, il en reste 2; poser 140;
en comptant par 5, il en reste 3 ; poser 63;
en comptant par 7, il en reste 2 ; poser 30.
Faire la somme de ces trois nombres, on obtient 233.
Soustraire 210 de ce total, d'où la réponse : 23.

En général, pour chaque unité restante d'un décompte par 3, poser 70 ;
pour chaque unité restante d'un décompte par 5, poser 21 ;
pour chaque unité restante d'un décompte par 7, poser 15. Si la somme ainsi obtenue vaut 106 ou plus, ôter 105 pour trouver la réponse.[1]

Comment Sunzi en est-il arrivé à ces valeurs ? 105 est le PPCM (plus petit multiplicateur commun) de 3, 5 et 7 (3 x 5 x 7 = 105). Les valeurs de 70, 21 et 15 sont plus difficiles à justifier, mais on y arrive :

70 est obtenu ainsi : $70 = 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{3}$

21 est obtenu ainsi : $21 = 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{5}$

15 est obtenu ainsi : $15 = 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{7}$

Ce type de problèmes a été particulièrement important en Chine, puisque beaucoup de calculs relatifs au calendrier prenaient cette forme.

IV. Liu Hui (milieu du 3e siècle de notre ère)
La prochaine grande figure est Liu Hui, célèbre pour le commentaire qu'il fit du *Jiuzhang Suanshu*. Liu Hui est le plus grand mathématicien de la Chine ancienne.
Liu Hui est célèbre dans toute l'histoire des mathématiques pour avoir tenté d'approcher la valeur de π au moyen d'une méthode originale. Nous y reviendrons.

[1] Cité d'après J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, p. 296.

V. Zhang Qiujian (milieu du 5e siècle de notre ère)
Son livre s'appelle simplement *Zhang Qiujian suanjing Le classique mathématique de Zhang Qiujian.*
On y trouve le fameux problème dit "des cents volailles", que l'on rencontre d'abord en Chine, puis en Inde et dans le monde musulman. Voici son énoncé :

Si un coq se vend 5 sapèques (unité de monnaie) l'unité, une poule 3 sapèques et 3 poussins une sapèque et si 100 sapèques permettent d'acheter 100 volailles, combien y a-t-il de coqs, de poules et de poussins ?

VI. Zu Chongzhi (429-500) est à la fois astronome, mathématicien et ingénieur. Il calcula comme valeur de π 355/113, et donna donc 6 décimales exactes avec : 3,141592.
Il calcula le volume de la sphère.

VII. Liu Zhuo (544-610) et Wang Xiaotong (début du 7e siècle de notre ère) effectuent des percées en algèbre.

VIII. A partir du 7e siècle de notre ère, les ouvrages de mathématiques indiens commencent à être connus en Chine. C'est le début d'un échange fructueux, qui met en contact les mondes indien, chinois et musulman.

IX. Les mathématiques chinoises atteignent une première apogée avec la compilation, vers 750, d'un vaste recueil de traités mathématiques, le *Shijing Suanshu "Les dix classiques de calcul"*.

X. Qin Jiushao (ca. 1202 - ca. 1261)
Auteur du *Shushu Jiuzhang "Neuf chapitres sur le calcul"*, Qin Jiushao amène les mathématiques chinoises à leur sommet. Il arrive à résoudre des équations jusqu'au dixième degré. La méthode des indéterminées fait son apparition.

4. QUELQUES EXEMPLES TIRÉS DES CLASSIQUES MATHÉMATIQUES

4.1 Le théorème de Pythagore

C'est par la preuve de ce théorème qu'ouvre le plus ancien traité de mathématiques chinoises, le *Zhoubi Suanjing, Le classique du gnomon et des voies célestes circulaires.* Voici comment il s'énonce :

Si nous coupons un rectangle par sa diagonale, en prenant comme largeur 3 unités et comme longueur 4 unités, la longueur de la diagonale sera de 5 unités.

Le texte détaille ensuite comment on arrive à cette solution. Nous examinerons d'abord la première preuve que donne le texte lui-même, puis une autre proposée par un commentateur, le fameux Liu Hui.

Première preuve :

1. Soit un rectangle de côtés 3 et 4 ; traçons la diagonale ;
2. élevons un carré sur cette diagonale ;
3. ajoutons au carré ainsi obtenu trois nouveaux triangles, de sorte que le carré élevé sur la diagonale, l'hypoténuse[1], soit circonscrit par ce nouveau carré.

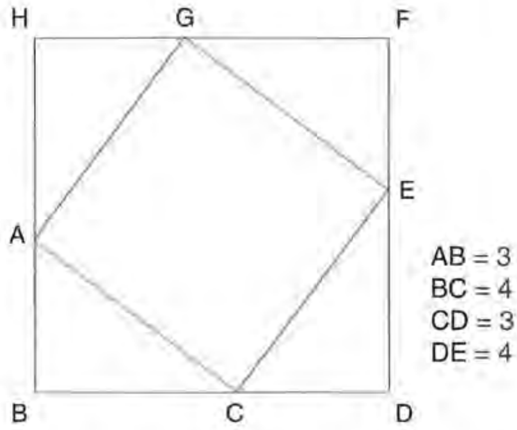


Fig. 6 Le théorème de Pythagore

La surface du carré BDFH est égale à $(4 + 3) \times (3 + 4) = 49$;
la surface des quatre triangles est de
$$\frac{3 \times 4}{2} \times 4 = 24 ;$$
la surface du carré ACEG est donc de $49 - 24 = 25$;
le côté, l'hypoténuse AC du triangle ABC est donc $\sqrt{25} = 5$.

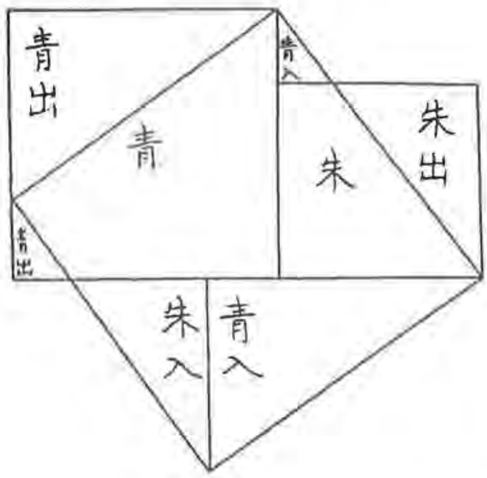
[1] Le terme chinois pour l'hypoténuse est *xian*, qui désigne proprement la corde d'un arc.

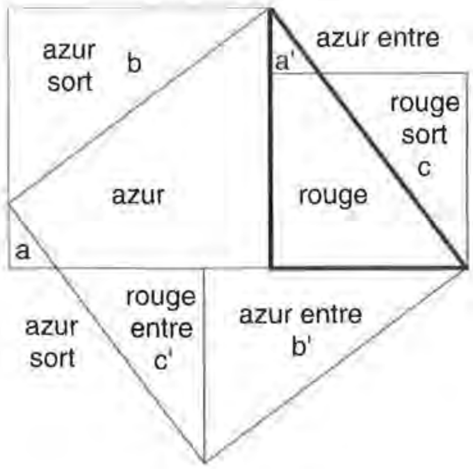
[2] Cité d'après J.-C. Martzloff, *op. cit.*, p. 284

La deuxième preuve, celle de Liu Hui opère avec les notions intuitives de recoupement de triangles égaux et de déplacements, un peu comme un puzzle ou tangram chinois. Le raisonnement proprement dit repose sur un ingénieux travail de recoupement. Liu Hui cherche à montrer que les surfaces engendrées par le carré construit sur la base du triangle et par le carré construit sur le côté du triangle recouvrent sans restes la surface du carré construit sur l'hypoténuse.

Fig. 7 Le théorème de Pythagore d'après Liu Hui

Le triangle dont nous partons est celui dessiné en gras sur la figure de la page suivante[2]. Le petit carré était dessiné en rouge ; le grand en azur.





4.2 Le calcul de π

Le fait que rayon et circonférence d'un cercle sont d'un rapport constant est probablement une découverte déjà ancienne. Ce qui nous intéresse, pourtant, sont les tentatives faites pour calculer très exactement ce rapport ainsi que les méthodes utilisées pour arriver à cette fin. Il faut noter également que π a toujours été conçu comme un rapport de grandeur en Chine. Le terme que les Chinois utilisent pour décrire π est justement *zhoujing milü,* ce qui veut dire "le rapport secret entre la circonférence et le diamètre".

Les Egyptiens et les Mésopotamiens avaient trouvé $25/8 = 3,125 < \pi < \sqrt{10} = 3,162 =$ 3,162. Mais c'est probablement Archimède (287-212) qui a tenté le premier calcul théorique de π. La méthode d'Archimède repose sur ce que l'on a appelé plus tard la quadrature du cercle[1]. Comme le périmètre d'un polygone peut être calculé en connaissant le rayon du cercle dans lequel il est inscrit et le nombre de côtés, Archimède a tenté de calculer la circonférence en augmentant toujours le nombre des côtés du polygone. Le propre de la méthode d'Archimède a été de travailler avec un polygone inscrit et un polygone circonscrit et son résultat s'exprime donc sous forme de deux valeurs, assez rapprochées l'une de l'autre et entre lesquelles π est compris. Archimède conclut ainsi que la valeur de π est plus grande que $\frac{223}{71}$ (3,1408) et plus petite que $\frac{22}{7}$ (3,1428). Ptolémée (+150) arriva à la valeur de 3,1416. Le mathématicien chinois Zu Chongzhi (429-500) proposa la valeur de 355/113. Le mathématicien arabe Al'Khwarizmi (c. 800) n'eût pas mieux que 3,1416 ; mais Al'Kashi (c. 1430) calcula 14 décimales. Les Européens feront parler d'eux au 17e siècle seulement, avec Van Ceulen, qui calcula 17 décimales. Il est intéressant de remarquer que le flambeau mathématique passe, pour un millénaire au moins, de l'Occident au monde oriental (chinois, indien et musulman). Il y eut donc beaucoup d'approximations de π, mais seulement deux tentatives théoriques, celle d'Archimède et celle de Liu Hui (+260) et de son continuateur Zu Chongzhi (429-500).

Tournons-nous donc vers la méthode de Liu Hui. Non satisfait de l'estimation de à 3, comme cela était écrit dans le *Jiuzhang Suanshu,* Liu Hui songea à développer non pas une meilleure approximation, mais chercha à trouver une véritable méthode. Il ne s'éloigne pas très loin d'Archimède, mais son raisonnement est plus économique et ses résultats sont plus exacts. Comme Archimède, Liu Hui part également de polygones, mais seulement de polygones inscrits et il tente de calculer la longueur des côtés des polygones de plus en plus complexes. En fait il est allé jusqu'au polygone de 192 côtés. Voici le raisonnement de Liu Hui :

Il part, comme Archimède, d'un hexagone inscrit dans un cercle. Le périmètre d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle peut être calculé ; il vaut 3 fois le diamètre du cercle circonscrit ; le côté de l'hexagone vaut donc le sixième de cette valeur. A partir de

[1] Tâche impossible, comme nous le savons depuis la fin du siècle passé.

là, s'est dit Liu Hui, nous pouvons calculer le côté d'un polygone régulier qui soit le double de l'hexagone, donc d'un dodécagone (la valeur de w). Il prend appui deux fois sur le théorème de Pythagore pour trouver les valeurs, d'abord du triangle OMP, puis du triangle RMQ. Ainsi :

$$OM = u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$MR = m = r - u$$

$$RQ = w = \sqrt{m^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

L'opération est ainsi répétée, jusqu'à 192 côtés. Liu Hui avait pris une valeur de 10 pour le rayon ; le côté de son hexagone vaut ainsi également 10, en vertu du calcul $\left(\frac{20 \times 3}{6}\right)$. Pour un polygone à 12 côtés, le calcul de π se fait ainsi :

$$u = \sqrt{100 - 25} = 8,660254037844$$
$$m = 10 - 8,660254037844 = 1,339745962156$$
$$w = 5,176380902051$$

Ensuite, il faut multiplier par 12, puisque c'est un dodécagone, et diviser par le diamètre, donc :

$$\frac{12 \times 5,176380902051}{20} = 3,105828541231.$$

Liu Hui a trouvé comme valeur[1] pour un polygone de 192 côtés $\pi = 3,141024$.

4.3 Le calcul par "fausse position"

Passons ensuite à une autre spécialité chinoise, à savoir le calcul dit par fausse position. En chinois, il s'appelle "technique du trop ou du pas assez" (*ying bu zu shu*). Il fait l'objet du chapitre 7 du *Jiuzhang Suanshu*. Voici un problème typique :

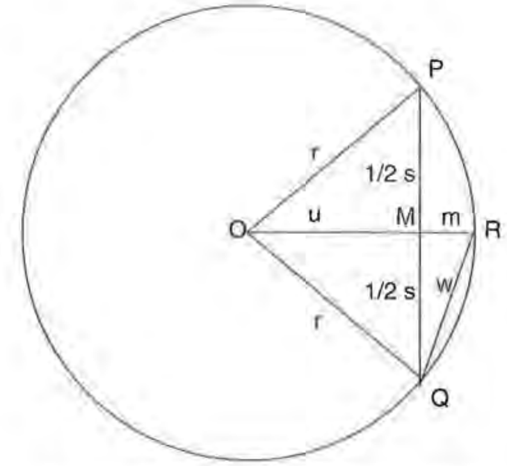


Fig. 8 Le calcul de π d'après Liu Hui

Un groupe de personnes achètent des poules. Si chaque personne avait donné 9 wen (unité de monnaie), on aurait pu acheter toutes les poules et garder en réserve une somme de 11 wen. Si, par contre, chaque personne avait donné seulement 6 wen, il aurait manqué 16 wen pour acheter toutes les poules. Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe et quel est le prix du lot de poules ?

Nous avons coutume, maintenant de donner des solutions algébriques ; mais la solution offerte ici par le *Jiuzhang Suanshu* est ingénieuse, et fait appel à nouveau aux fameuses baguettes de calcul.

1. Ecrire les contributions de chaque groupe sur la première ligne et l'excès ou défaut de chaque groupe sur la deuxième ligne.

9	6
11	16

[1] Plus tard, le mathématicien Zu Chongzhi (429-500) calcula comme valeur de π **3,141592**, ce qui correspond, selon la méthode de Liu Hui à un polygone de 24.576 côtés .

2. Multiplier en croix (9 x 16 ; 6 x 11) et noter ce résultat sur la première ligne.

144	66
11	16

3. Additionner les deux produits.

210
27

4. Diviser le premier produit par la différence qu'il y avait entre les deux contributions (3 = 9-6). Le résultat donnera le prix total des poules (210/3 = 70).

5. Diviser également le deuxième produit par cette même différence. Le résultat donnera le nombre des acheteurs (27/3 = 9).

Voici encore un autre problème du même type, pris dans le même chapitre 7 du *Jiuzhang Suanshu*. C'est la première fois que l'on rencontre des problèmes dit "de poursuite" dans l'histoire des mathématiques :

Soit deux chevaux, un bon et un mauvais, qui quittent Chang'an pour se rendre à Qi. La distance entre Chang'an et Qi est de 3000 li. Le bon cheval avance de 193 li le premier jour et, les jours suivants, augmente son parcours de 13 li par jour. Le mauvais cheval avance de 97 li le premier jour et diminue ensuite son parcours d'un demi li par jour. Le bon cheval atteint Qi le premier puis revient sur ses pas et rencontre le mauvais cheval. Après combien de jours les deux chevaux se rencontrent-ils et quelle distance auront-ils alors respectivement parcourue ?

Réponse : 15 jours et 135/191 jours ; le bon cheval a parcouru 4534 li et 46/191 de li ; le mauvais cheval 1465 li et 145/191 de li.

Procédé : supposons 15 jours. Le pas assez vaut alors 337 li et 1/2 de li[1]*. Supposons 16 jours. Le surplus vaut alors 140 li. Multiplions en croix les valeurs du trop et du pas assez, ajoutons [les résultats trouvés] et considérons [le total de ces deux valeurs] comme un dividende. En effectuant la division, on trouve le nombre de jours."*[2]

Les énigmatiques explications du *Jiuzhang Suanshu* sont désormais claires pour nous, puisqu'il faut, dans ce problème de poursuites, procéder exactement comme auparavant. Mathématiciens, à vos baguettes !

1.

15	16
337,5	140

2.

2100	5400
337,5	140

3.

7500
477,5

4. Cette étape ne fait aucun changement, puisque la différence entre les deux valeurs supposées initiales est de 1.

5. Diviser. Le résultat est 15,70680628272, ou exprimé en fractions $\frac{15000}{955}$, c'est-à-dire $\frac{3000}{191}$ ou $15 + \frac{135}{191}$.

La distance parcourue par les deux chevaux se calcule aisément ensuite.

[1] En 15 jours, le bon cheval parcourt (15 x 193) + (105 x 13) = 4260 li ; le mauvais cheval 1402,5 li. En ajoutant ces deux valeurs et en les retranchant de 6000 li (aller-retour), le manque est de -337,5 li. En 16 jours, le bon cheval parcourt 4648 li ; le mauvais cheval 1492 li. En ajoutant ces deux valeurs et en les retranchant de 6000, l'excès est de 140 li.

[2] Cité d'après *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*, par Jean-Luc Chabert et autres, Paris : Belin, 1994, pp. 108-109.

5. LA DIFFUSION ET LA NATURE DU SAVOIR MATHÉMATIQUE CHINOIS

Pour conclure, ne parlons pas seulement des mathématiques, mais aussi des mathématiciens en Chine. Nous avons appris que le système d'éducation de la Chine ancienne et médiévale était fort bien développé. Il est d'autant plus décevant d'apprendre que les mathématiciens étaient moins estimés que les lettrés en Chine médiévale. Pourtant, les premiers mathématiciens ont toujours été principalement des astronomes de cour, plus précisément des calendéristes, et jouissaient d'une grande considération. On était souvent aussi mathématicien de père en fils. Pendant la dynastie des Sui et des Tang (6e au 10e siècle de notre ère), les mathématiques de haut niveau étaient enseignées dans des Académies. Toutefois, "les étudiants en mathématiques étaient recrutés parmi les gens du peuple et les fonctionnaires du bas de la hiérarchie"[1]. Les études étaient fort longues, 7 ans, et se basaient sur une collection et une anthologie de traités mathématiques, les fameux *Dix classiques de calcul*. Les examens avaient lieu une fois par an.[2]

Les mathématiques occidentales furent introduites vers la fin du 16e siècle, comme nous l'avons déjà vu, mais ne mirent pas fin à la tradition chinoise autochtone.

Que devons-nous, Occidentaux créateurs de la science expérimentale et de la technologie scientifique, aux mathématiques chinoises ? Les avis divergent profondément et la vérité est certainement à mi-chemin entre l'optimisme un peu démesuré de Joseph Needham et du scepticisme castrateur d'un Martzloff, spécialiste français contemporain des mathématiques chinoises.

S'il est difficile de répondre au problème des influences et des priorités, fort complexe, puisqu'il y a eu flux et reflux des découvertes, une chose pourtant est sûre : la Chine ancienne et médiévale n'a eu besoin de personne pour arriver là où elle est arrivée, c'est-à-dire :

- avoir travaillé avec le système décimal (2e millénaire avant notre ère) et une préfiguration du zéro (4e siècle avant notre ère) ;
- avoir su extraire des racines carrées et cubiques ;
- avoir découvert les nombres négatifs ;
- avoir découvert les fractions ;
- avoir prouvé le théorème de Pythagore ;
- avoir trouvé une méthode pour déterminer π ;
- avoir posé et résolu des problèmes algébriques, à trois inconnues et plus ;
- avoir développé une technique algorithmique efficace.

La grande différence se situe plutôt au niveau des applications : le monde Occidental moderne s'est servi des mathématiques pour arracher à la nature des secrets de plus en plus nombreux ; les mathématiques chinoises ont été, par contre, des mathématiques douces, conçues pour classer et trier ce qui était déjà là.

[1] Cité d'après J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, p. 80.

[2] *ibid.*

Pour en savoir plus

1. J. Needham, "Misères et succès de la tradition scientifique chinoise", in : *La science chinoise et l'Occident*, Paris : Seuil, 1973
2. J. Needham, *Science and civilisation in China. Vol. 3 Mathematics and the sciences of the Heavens and the earth*, Cambridge, 1975
3. *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*, par J.-L. Chabert et autres, Paris : Belin, 1994
4. J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris : Masson, 1988
5. G.G. Joseph, *The crest of the peacock : non-European roots of mathematics*, London ; New York : Tauris, 1991

Enfin, il y a un aperçu vraiment bien fait sur l'histoire des mathématiques sur le serveur WWW du Department of Mathematics and Computer Science de Clark University. L'adresse INTERNET est la suivante : **http ://aleph0.clarku.edu/**

Sens commun et concept de volume [1]

par Maria Becchere, Liceo Artistico, Cagliari
Lucia Grugnetti, Université de Parme
Rossana Tazzioli, Université de Rome
Elsa Uselli, Scuola Media, Dolianova,Cagliari [2]

1. Introduction

«*La connaissance vient à l'homme à la suite d'un inextricable entrelacs d'actes et de réflexions.*» (F. Gonseth, 1926)

Chaque fois que l'on dit «le Soleil se couche» ou «j'ai admiré le lever du Soleil», on prononce des phrases qui véhiculent l'idée que le Soleil tourne autour de la Terre. Or, on le sait bien, du moins depuis Copernic, c'est la Terre qui tourne autour du Soleil. Mais cette connaissance reste théorique. Dans notre représentation intérieure, c'est encore le Soleil qui est l'acteur de ces événements, il tourne, se lève et se couche.

Dans de nombreux domaines, le langage dissimule ou dénature les concepts nouveaux que nous apporte la science ; or, celle-ci vient renouveler complètement notre regard sur le monde.

Et lorsqu'on dit le mot *volume* ?
Notamment, dans le domaine de la didactique des mathématiques plusieurs recherches sur le volume ont été développées (dont celles de G. Vergnaud), mais sur l'aspect de la mesure, plutôt que sur la correspondance entre l'objet réel et son volume.

2. Définition de la problématique

Dans *Alice à travers le miroir* (chapitre VI), Humpty Dumpty déclare : «*Quand moi j'emploie un mot, il signifie exactement ce que je veux qu'il signifie - ni plus ni moins.*»

Le mot volume implique plusieurs acceptions : par exemple, dans *Le Petit Larousse Illustré* (1995), on trouve :

> **volume** : **1.** Espace à trois dimensions occupé par un corps ou limité par des surfaces ; mesure de cet espace ; l'objet lui-même. *Faire du volume :* être encombrant. **2.** Masse, quantité de quelque chose. Spécialement : masse d'eau débitée par un fleuve, une fontaine, etc. **3.** Force, intensité d'un son.

> **masse** : **1.** Grande quantité d'une matière, d'une substance sans forme précise. *Masse de terre, de pierres.* **2.** Quantité, volume important de liquide, de gaz formant une unité. *La masse du sang en circulation.* **3.** Volume d'un objet important par ses dimensions et par son poids ; bloc de matière homogène.

Comme le dit clairement Hans Freudental «la caractéristique la plus frappante de l'aire et du volume est leur riche contexte : en nature, dans la culture, dans la société d'un

[1] Cet article est le sujet d'une exposé tenu dans le cadre de la 47e rencontre de la CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de d'enseignement des mathématiques), à Berlin, en juillet 1995 dont le thème était : *Education mathématique et sens commun.* Cet article sera publié dans les actes de le rencontre. Nous remercions les auteurs et les responsables d'en donner la primeur aux lecteurs de *Math-Ecole.*

[2] Les quatre auteurs appartiennent au CRSEM (Centro Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica), Cagliari.

côté, et de l'autre côté l'extrême pauvreté de son enseignement».

Il est bien vrai que certains mathématiciens font tous leurs efforts pour chasser le sens hors des mathématiques. C'est ainsi que (caricature que nous voulons croire volontaire), le *Dictionnaire des mathéma-tiques* de L. Chambadal propose la définition suivante - si l'on ose dire ! - pour le mot «masse» : *Masse, nombre réel strictement positif.* Définition irréprochable d'un point de vue formel, certes, mais à laquelle il manque cependant l'essentiel : le lien avec l'intuition de ce qu'on appelle habituellement la masse d'un objet (Didier Nordon).

Qu'est-ce qu'on entend par le mot *volume* ? Qu'est-ce que c'est un *volume* pour les enfants ? Mais aussi : qu'est que c'est un *volume* pour vous, pour nous, pour un mathématicien, pour quelqu'un qui n'est pas mathématicien ? Est-ce que l'idée de *volume* est la même pour tout le monde ? Quel est le rôle des manuels dans l'acquisition du concept de volume ?

Notre recherche concerne une enquête «verticale», qui ne touche pas seulement les élèves, mais aussi les adultes, de même que la façon par laquelle les manuels introduisent le concept de volume.

3. Méthodologie

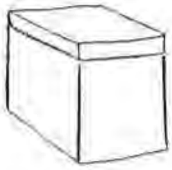
Le but principal de la recherche a été d'essayer de comprendre et puis de décrire les conceptions d'élèves de 8 ans à 18 ans, d'étudiants universitaires et d'adultes sur le concept de volume. On a soumis le même test à tous les groupes d'âge.

Les réponses sont analysées et comparées (selon des paramètres différents) à partir de différents points de vue : âge, niveaux scolaire, métier, sexe. Elles révèlent l'existence de nombreuses conceptions, interprétations, ambiguïtés et malentendus à propos de ce concept.

3. 1. Le test

Age : ____________ Sexe : ____________
Niveau d'étude : ____________
Profession : ____________

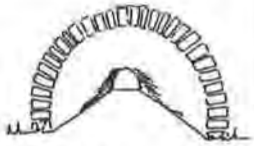
Est-ce que les objets suivants ont un volume ? Justifiez vos réponses.


boîte


casserole


cannolo
(petit macaroni)


tuyau


tunnel

Dans le test il y a cinq objets qui ont en commun la même caractéristique : tous les cinq sont creux. Parmi les propriétés qui les différencient, il y a surtout la forme, plus ou moins «régulière» et le fait d'être plus ou moins «complets».

3. 2. Analyse des résultats

Le test a été soumis à 521 personnes d'âges différents, d'élèves de 8 ans à des adultes. Comme on l'imagine facilement, les réponses «*non, cette figure n'a pas de volume*» se retrouvent, en pourcentages importants, pour les derniers objets. C'était d'ailleurs ce que nous attendions.

L'intérêt principal du test se situe dans l'analyse des motivations qui accompagnent les réponses «oui» et «non». On trouve sur-tout ces motivations dans les réponses des élèves des écoles secondaires et des adultes.

Le premier objet, la boîte, peut être assimilé à un parallélépipède. On en distingue facilement les sommets, les arêtes, les faces. Voici quelques réponses d'élèves : *Oui, parce qu'elle occupe une partie d'espace délimitée par une surface* (15 ans) ; *oui, parce qu'elle a tous les caractères : hauteur, longueur et hauteur et occupe un espace précis* (11 ans) ; *oui, parce qu'elle contient quelque chose, nous avons fait des expériences précises* (10 ans) ; *oui, parce que c'est un objet fermé* (12 ans) ; *oui, parce qu'elle contient des petit cubes* (10 ans) ; *oui, parce que la boîte a une forme cubique* (17 ans).

La casserole est comparable à un cylindre. Personne n'est dérangé, dans son abstraction, par les anses. Quelqu'un reste perplexe par l'absence de la «base supérieure». Mais, tout compte fait, savoir qu'une casserole contient des liquides rassure la plupart des répondants. Quelques réponses : *oui, parce qu'elle occupe un volume dans l'espace et parce qu'elle a une certaine épaisseur* (21 ans) ; *oui, parce que la casserole a une for-me cylindrique* (17 ans, l'étudiant déjà cité auparavant).

Dans le cas du tuyau, ce cylindre «plié» ne correspond à aucune figure géométrique connue. Pourtant, pour plusieurs répondants, de tous âges, il ne peut pas y avoir de volume : *non, parce qu'on ne peut pas calculer le volume dans la partie courbe* (l'étudiant de 17 ans déjà cité) ; *non, le tuyau ne peut rien contenir parce qu'il n'est pas dans la série des récipients* (44 ans) ; *non, parce que c'est une surface qui a un côté ouvert* (16 ans) ; *oui, parce qu'il est mesurable* (32 ans, musicien) ; *oui, parce que c'est un récipient* (43 ans, ménagère).

Dans le cas du tunnel le nombre de réponses négatives est le plus élevé : *non, parce qu'il ne peut pas être rempli* (19 ans, étudiante) ; *non, parce qu'il ne peut pas tout contenir (par exemple un liquide)* (17 ans) ; *non, parce qu'on ne peut pas le peser* (10 ans) ; *oui - volume d'air ou de terre retirée* (40 ans, employé) ; *oui, s'il arrive une inondation et le tunnel est inondé on peut dire qu'il est occupé par l'eau* (21 ans, géomètre) ; *oui, parce qu'il occupe un espace bien défini* (15 ans).

Le «cannolo» (pâte alimentaire destinée à contenir des ingrédients doux) a une forme «plus régulière», il peut être comparé à un cylindre : l'étudiant de 17 ans, dont on a déjà vu d'autres réponses, a effectivement refait le dessin, à partir du cannolo pour obtenir un cylindre en expliquant que, *oui, il a un volume parce qu'il suffit de le considérer comme un cylindre.* D'autres réponses : *oui, parce qu'il peut contenir une masse* (16 ans) ; *le volume dépend de la quantité de crème qu'on y met* (16 ans) ; *non, parce qu'il est ouvert des deux côtés* (39 ans, géomètre).

On voit ainsi apparaître plusieurs conceptions du volume : un objet n'a un volume que lorsqu'il peut contenir quelque chose, du liquide ou des petit cubes ; un objet a un volume lorsqu'il a une forme «régulière» ; un objet a un volume même s'il est «ouvert», mais seulement si c'est possible d'imaginer la présence d'un couvercle, etc.

L'objet réel représenté par un dessin n'est parfois considéré que comme une figure géométrique et par conséquent le volume occupé par la partie matérielle qui le constitue n'est pas pris en considération.

Dans les réponses des élèves, en particulier ceux de l'école secondaire, la problématique concernant la distinction entre poids, capacité, volume comme mesure, émerge assez clairement. On perçoit aussi le conflit entre le sens commun et la nécessité de se relier aux notions mathématiques acquises à l'école. Par contre, il nous semble que, en général, chez les adultes l'expérience a «émoussé» ces conflits.

On s'est donc posé les questions suivantes : Quelle est l'influence de l'école dans la construction des conceptions du volume et parfois des malentendus ou des limites mis en évidence par le test ? Est-ce qu'il y a une relation entre ces conceptions et ces malentendus et le sens commun ?

4. L'enseignement de la géométrie: réformes et manuels scolaires

Cette étape de notre recherche consiste en une analyse de la manière dont les manuels (aux différents niveaux scolaires et depuis un siècle) introduisent et développent le concept de volume, en nous posant aussi une question plus générale, c'est-à-dire celle des définitions de figures à trois dimensions. En général il y a quelques confusions entre les définitions empiriques et théoriques. En fait, elles sont souvent justifiées par l'expérience, mais pas toujours d'une façon cohérente et correcte au niveau théorique.

L'étroit rapport entre les réformes et les manuels scolaires nous a amenés à les considérer parallèlement.

4.1. Les réformes

Le point de départ a été la réforme Coppino (1867 ; après l'unification de l'Italie). D'après cette réforme, conduite par les mathématiciens Cremona, Battaglini, Beltrami, Betti et Brioschi on enseigne à l'école secondaire la géométrie selon la méthode axiomatique, avec les «*Éléments d'Euclide*» comme manuel scolaire, dans le but *«d'enseigner comment on pense, on prouve, on infère»* sans mêler *«la géométrie... avec l'arithmé-tique et l'algèbre»*. Tout ceci entraîne une dure querelle, et après quelques années, le ministre Baccelli (1881) introduit la méthode intuitive pour l'enseignement de la géométrie. Employer ou non les *Éléments* à l'école, est aussi un problème débattu à cette époque en Angleterre et en France. Puis, finalement, le ministre Coppino (1884) sur l'avis de Beltrami, supprime la géométrie intuitive de Baccelli.

Au début du siècle, les mathématiciens F. Enriques et U. Amaldi, qui appartiennent au courant modéré et qui sont auteurs de nombreux manuels, soutiennent que la géométrie est une science qui doit se fonder sur l'observation et le raisonnement. Après l'observation on doit exprimer un postulat bien précis, d'où, au moyen du raisonnement logique, découlent différents théorèmes soutenus par des explications et des observations intuitives.

En 1923, la réforme Gentile se base sur une conception aristocratique de la culture et de l'éducation. Elle donne plus d'importance à l'aspect humaniste.

Le lycée scientifique est fondé, mais sans donner trop d'importance à l'enseignement scientifique. La séparation entre algèbre et géométrie s'affirme.

En 1939 le ministre Bottai présente la «Carte de l'école» où transparaît un essai de «modernité» : étude de la géométrie qui part de l'intuition pour aboutir à un raisonnement déductif.

En 1962, avec la «scuola media» (premiers degrés de l'école secondaire, 11-14 ans) unifiée, arrivent de nouvelles propositions méthodologiques : les premières tentatives d'enseignement «opératif» (actif, lié aux pratiques de la vie courante).

Des changements significatifs sont introduits en 1979 par la réforme pour la «scuola media» : réforme intéressante où la méthodologie envisagée est celle qui prévoit de partir du concret pour arriver à l'abstrait (et aussi à l'idée d'analogie des structures). Sur les sept thèmes du programme de mathématiques, trois concernent la géométrie.

A la réforme de la «scuola media» succède, en 1985, la réforme de l'école primaire : trois enseignants pour chaque classe. En ce qui concerne la notion de volume,

- les objectifs des deux premières années sont : *«localiser des objets dans l'espace... ; reconnaître dans l'environnement des objets et désigner par leur nom des figures géométriques; comparer et mesurer...»* ;
- les objectifs des trois dernières années sont : *«trouver le volume d'objets réguliers et irréguliers par des stratégies différentes ; ... il faut bien distinguer les notions de volume et d'aire. ...»*

En 1986, la réforme Falcucci prévoit l'introduction de l'informatique expérimentale dans les écoles supérieures ; dans les deux premières années on doit traiter les sujets suivants : *«logique et informatique; géométrie du plan et de l'espace; ensembles numériques; relations et fonctions; éléments de probabilités et statistiques»*.

En 1991, le programme Brocca pour l'école secondaire supérieure prévoit que *«l'étude de la géométrie dans les deux premières années part de l'intuition et arrive à une description rationnelle. ...*
La réflexion critique conduira l'élève, à la fin de ses études, à organiser d'un point de vue axiomatique la géométrie d'Euclide, et éventuellement des autres situations, [introduction de quelques éléments de géométrie non euclidienne] *et donc à acquérir le concept de théorie mathématique forma-lisée et la signification des problématiques métathéoriques».*

4.2. L'analyse des manuels scolaires à propos du volume : quelques considérations

Les méthodes utilisées (ou les définitions données) dans les manuels des différents niveaux scolaires pour introduire et définir le concept de volume peuvent être décrites selon les termes suivants : *méthode intuitive* (par le volume d'un modèle matériel - par exemple en métal ou en bois -) ; *méthode manipulatoire* (quand on se sert de la construction de modèles en papier, en carton, etc., ou bien quand on prend en considération des problèmes réels) ; *méthode physique* (par des concepts physiques comme la capacité, le poids, le déplacement d'un liquide) ; *méthode opérationnelle* (lorsqu'on détermine la mesure du solide considéré par l'intermédiaire d'une unité de mesure : petits cubes, etc.) ; *méthode des classes d'équivalence* (quand on emploie une relation d'équivalence entre des solides occupant la «même quantité d'espace») ; *méthode axiomatique*.

L'analyse systématique des manuels scolaires correspondant à chaque réforme ou période historique nous montre une tendance à introduire et définir le concept de volume par une seule méthode (quelquefois deux). Très rarement les manuels scolaires, même d'aujourd'hui, développent un projet didactique suffisamment riche à propos du volume et ils contribuent ainsi à former une sorte de sens commun qui peut devenir un obstacle.

Lorsque un élève n'a été confronté qu'au volume des polyèdres (c'est souvent le cas et, parfois, on se limite même au parallélépipède), il aura des difficultés à franchir cette limite pour transférer le concept à n'importe quel objet de la réalité. Et encore, lorsque l'approche didactique est seulement «physique», par immersion des objet par exemple, un élève peut avoir des difficultés à éliminer les facteurs *physiques* (qui deviennent un obstacle) pour arriver au volume *géométrique*. En effet, comme l'explique bien Freudenthal, les gens font généralement une distinction entre : quantité, poids, contenu (ou volume).

La détermination du volume par immersion pourrait être, dans un sens, le point culminant d'un projet didactique, mais cependant, il ne faudrait pas l'envisager avant que beaucoup d'autres choses, comme le poids et la force, ne soient abordées.

L'analyse des manuels met en évidence une certaine confusion sur le concept de volume surtout à propos de définitions «formelles» qui, naturellement, sont plus fréquentes dans les manuels d'école secondaire supérieure, en particulier lorsqu'on utilise la méthode des classes d'équivalence.

Les manuels d'école primaire et du collège, en proposant des approches méthodologiques et des définitions intuitives-opératoires, sont, tout compte fait, plus acceptables, bien que - comme on l'a déjà dit - il faut souligner que souvent ils ne tiennent pas compte des différentes acceptions du concept de volume.

5. Conclusions

Nous pensons que le concept de volume, à propos duquel l'école contribue souvent à la construction d'un sens commun qui ne correspond pas toujours au savoir savant, nécessite plusieurs approches didactiques.
Il faut, pourtant, tenir compte du degré de difficulté, des limites et des obstacles de chaque approche (lorsqu'elle est la seule à être développée) :

• L'usage exclusif des «petits cubes» :
  - difficulté : aucune ;
  - obstacle : il peut induire des blocages à propos du volume d'objets irréguliers. Il s'agit d'ailleurs d'une bonne approche (qui doit être suivie, comme on l'a vu, d'autres activités ; en particulier, à propos du volume d'objets courbes, une activité basée sur le principe de Cavalieri).

• L'usage exclusif de l'immersion :
  - difficulté : on ne tient pas compte du fait que certains élèves lient le niveau du liquide au poids plutôt qu'au volume (comme le montrent plusieurs expériences) ;
  - obstacle : l'influence des facteurs physiques sur le volume *géométrique*.

• L'usage exclusif des classes d'équivalence :
  - difficulté : on cherche à transférer la compréhension d'un concept sur celle d'un concept plus difficile;
  - obstacle : il peut induire des blocages à propos du passage de la théorie à la pratique. D'ailleurs, si l'on considère, seulement à la fin d'un parcours didactique «riche», le volume comme caractéristique commune d'un ensemble d'objets qui occupent le même espace, on permettrait de considérer le volume d'un objet quelconque, aussi irrégulier.

Tout ceci demande des processus d'apprentissage bien «équilibrés», qui doivent être explicités pour les enseignants et les élèves.

Références

Barra Mario. & all., (1992) *The Italian Research in Mathematics Education : Common roots and Present Trends*, CNR, quaderno n°12.

Davis, Philip J., Hersh , Reuben, (1986) *Descartes' Dream*. San Diego, Harcourt.

Freudenthal, Hans, (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster.

Gonseth, Ferdinand, (1926) *Les Fondements des Mathématiques*, Paris.

Nordon, Didier, (1993) *Les mathématiques pures n'existent pas !* Actes Sud.

Vergnaud, Gérard et all., (1982) *Didactique et acquisition du concept de volume*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 4. 1.

Vergnaud, Gérard, (1990) *Epistemology and Psychology of Mathematics Education*, In P. Nescher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition. Cambridge University Press, Cambridge.

Problèmes additifs (1) : d'états

par Alicia Bruno et Antonio Martinón, Universidad de La Laguna, Tenerife (Espagne)

1. Introduction

Voici le premier article d'une série de trois sur les problèmes additifs. Nous nous intéressons ici aux problèmes où sont en jeu trois nombres x, y, z (positifs ou négatifs), parmi lesquels deux sont connus (les données) et le troisième est inconnu (l'inconnue). La relation qui met en rapport ces trois nombres est :

$$x + y = z$$

Lorsque les chercheurs se sont penchés sur ce type de problèmes, ils se sont intéressés à divers aspects ; nous allons ici commenter brièvement certains des plus intéressants.

(1) **structure :** le problème «Jean avait 2 francs et il en a gagné 3. Combien en a-t-il en tout ?» a la structure suivante :

état + variation = état ;

c'est-à-dire, qu'il correspond à une situation dynamique, et de ce fait il n'existe qu'un état unique qui varie avec le temps. Cependant, le problème « Jean a deux francs et Pierre en a 3 de plus que Jean. Combien en a Pierre ?» a la structure suivante :

état + comparaison = état ;

maintenant nous avons une situation statique et la comparaison de deux états. D'une façon générale, les problèmes qui ont une structure du premier type sont plus faciles que ceux qui ont une structure du second type.

La **position de l'inconnue** est également importante. Les problèmes «Jean avait 2 francs, il en a gagné 3. Combien d'argent a-t-il maintenant ?» et «Jean avait 2 francs et maintenant il en a 5. Combien d'argent a-t-il gagné ?» sont des problèmes qui présentent la même structure, mais le degré de difficulté pour les élèves est différent.

(2) **types de nombres :** les valeurs concrètes que prennent x, y, z ont une influence sur la résolution des problèmes correspondants. Par exemple, le problème «Jean avait 2 francs et il en gagné 3. Combien en a-t-il maintenant ?», qui correspond à l'égalité

$$2 + 3 = 5 ,$$

est bien différent du problème «Jean devait 2 francs et il en gagné 3. Combien d'argent a-t-il maintenant ?» qui correspond à l'égalité

$$-2 + 3 = 1 ,$$

(3) **contexte :** le problème «Jean devait 2 francs et il en gagné 3. Combien d'argent a-t-il maintenant ?» est différent du problème «Jean est né en l'an 2 avant Jésus Christ et il a vécu 3 ans. Quand est-il mort ?». Tous deux ont la même structure, la même position de l'inconnue et les mêmes nombres, mais on pose le premier dans le contexte «devoir-avoir», alors que le second se situe dans le contexte «chronologie», contexte qui en général présente plus de difficultés que le contexte «devoir-avoir» .

(4) **forme sémantique :** il existe plusieurs formes, équivalentes du point de vue sémantique, pour exprimer une variation : «Jean a gagné 3 francs», «Jean avait 3 francs de moins le matin que le soir», «Jean a 3 francs de plus le soir que le matin». La première forme est en général plus simple pour les élèves. De même, il existe plusieurs façons d'exprimer une comparaison.

Dans ce travail, nous avons céntré notre attention sur ce qui se rapporte à la structure (ainsi qu'à la position de l'inconnue) et à la forme sémantique, qui très souvent apparaissent confondues. Ces deux aspects permettent de classer d'une façon systématique les problèmes additifs et d'en donner une vision globale.

Dans ce premier article, nous nous penchons sur les **problèmes additifs d'états,** qui sont ceux que l'on propose aux élèves le plus fréquemment et ceux que l'on rencontre de façon la plus courante dans la vie. Ce sont aussi ceux qui ont été le plus examinés par les chercheurs. Nous étudierons les **problèmes additifs de variations et de comparaisons** dans des travaux ultérieurs.

Voyons les **problèmes d'états.** Avec cette expression, nous faisons référence à trois **types de problèmes ;** chacun de ces types de problèmes est déterminé par une structure :

Combinaison des états
état partiel 1 + état partiel 2 = état total

Variation des états
état initial + variation = état final

Comparaison des états
état 1 + comparaison = état 2

Dans chacun de ces types de problèmes, nous distinguons plusieurs **types structuraux,** en fonction de la position de l'inconnue. Dans chaque type structurel nous différencions plusieurs **types structuraux-sémantiques,** en fonction de la façon d'exprimer la variation ou la comparaison.

Tous les exemples que nous donnons se situent dans le contexte «avoir» et nous faisons toujours référence à l'addition 2 + 3 = 5. Ainsi, nous voulons insister sur les aspects que nous étudions (structure, position de l'inconnue et forme sémantique), laissant de côté tous ceux qui ne sont pas l'objet de notre travail (type de nombres et contextes).

2. Combinaisons d'états

Nous comprenons par ce terme, les problèmes où il y a deux états partiels et où le troisième (état total) est la somme des deux autres :

état partiel 1 + état partiel 2 = état total.

Par exemple, **x** représente (en francs) ce que Jean a à la banque, **y** ce qu'il a chez lui, **z** ce qu'il a au total. Ici, **x** et **y** représentent les états partiels, alors que **z** représente l'état total.

Exemple : A la banque Jean a 2 francs : **x**.
Chez lui, Jean a 3 francs : **y**.
Au total, Jean a 5 francs : **z**.

Types structuraux. On en distingue deux :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.

Exemple :
A la banque Jean a 2 francs et chez lui, il en a 3. Combien Jean a-t-il au total ?

(2) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**. Il y a un problème symétrique, que l'on considère identique à celui-ci :
Données : **y**, **z**. Inconnue : **x**.

Exemple :
A la banque, Jean a 2 francs et au total il en a 5. Combien Jean a-t-il chez lui ?

Exemple :
Chez lui, Jean a 3 francs et il en a 5 au total. Combien Jean a-t-il à la banque ?

Types structuraux-sémantiques. Etant donné qu'il n'existe qu'une façon élémentaire d'exprimer les états, il en résulte que pour chaque type structurel il n'existe qu'un type structurel-sémantique. Par conséquent, il y a deux types structuraux-sémantiques de problèmes de combinaison d'états.

Dans les différents travaux de recherches, on a désigné ce type de problèmes comme des problèmes de **combinaison** (Riley et al., 1983), **partie-partie-tout** (Carpenter et Moser, 1982), **composition de deux mesures** (Vergnaud, 1982) et **statique** (Nesher, 1982).

3. Variation d'états

Dans ce type de problèmes, il y a un seul état qui varie avec le temps. Ces problèmes ont un schéma du type :

état initial + variation = état final.

Par exemple, **x** représente les francs que Jean (J) a le matin, **y** ce qu'il a gagné au cours de la journée, **z** ce qu'il a le soir. C'est-à-dire : **x** est l'**état initial,** **y** est la **variation,** **z** est l'**état final.**

Exemple : Le matin, J avait 2 francs : **x.**
Au cours de la journée, J a gagné 3 francs : **y.**
Le soir, J avait 5 francs : **z.**

Types structuraux. On en distingue trois :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.

Exemple :
Le matin, J avait 2 francs et au cours de la journée il en a gagné 3. Combien de francs J avait-il le soir ?

(2) Données : **z**, **y**. Inconnue : **x**.

Exemple :
Le soir, J avait 5 francs et au cours de la journée il en a gagné 3. Combien J en avait-il le matin ?

(3) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**.

Exemple :
Le soir, J avait 5 francs et le matin il en avait 2. Combien de francs J a-t-il gagné au cours de la journée ?

Types structuraux-sémantiques. Il existe trois façons élémentaires d'exprimer la variation ; elles sont équivalentes d'un point de vue sémantique :

Différence directe :
Le soir, J a 3 francs de plus que le matin.

Différence indirecte :
Le matin, J avait 3 francs de moins que le soir.

Changement :
Au cours de la journée, J a gagné 3 francs.

Par conséquent, pour chaque type structurel de problèmes, on peut considérer 3 types structuraux-sémantiques. C'est à dire, que l'on doit prendre en compte 9 types structuraux-sémantiques différents de variation d'états.

Ces problèmes tels qu'ils sont exprimés dans leur forme sémantique de **changement** ont été classés comme problèmes de **changement** (Riley et al. 1983), **union et séparation** (Carpenter et Moser, 1982), une transformation unit deux mesures (Vergnaud, 1982) et **dynamique** (Nesher, 1982).

4. Comparaison des états

Ce type de problèmes regroupent tous ceux qui présentent deux états qui se comparent. Ils ont un schéma du type :

état 1 + comparaison = état 2.

Par exemple, **x** représente (enfrancs) ce que Jean (J) possède, **y** la différence entre ce que possède Pierre (P) et ce que possède Jean, **z** ce que possède Pierre. On peut dire que **x** et **z** représentent des **états,** alors que **y** représente la **comparaison** de ces deux états.

Exemple : J a 2 francs : **x**.
P a 3 francs de plus que J : **y**.
P a 5 francs : **z**.

Types structuraux. On en distingue trois :

(1) Données : **x, y**. Inconnue : **z**.

Exemple :
J a 2 francs et P a 3 francs de plus que ce qu'a J. Combien P a-t-il ?

(2) Données : **z, y**. Inconnue : **x**.

Exemple :
P a 3 francs de plus que J et P a 5 francs. Combien J a-t-il ?

(3) Données : **z, x**. Inconnue : **y**.

Exemple :
J a 2 francs et P a 5 francs. Combien P a-t-il de plus que J ?

Types structuraux-sémantiques. Il existe quatre façons élémentaires d'exprimer une comparaison ; elles sont équivalentes d'un point de vue sémantique :

Différence directe :
P a 3 francs de plus que J.

Différence indirecte :
J a 3 francs de moins que P.

Égalisation directe :
Si J gagnait 3 francs, il aurait la même chose que P.

Égalisation indirecte :
Si P perdait 3 francs, il aurait la même chose que J.

En résumé, dans chaque type structurel on peut considérer 4 types structuraux-sémantiques. C'est-à-dire qu'il y a 12 types fonctionnels-sémantiques de problèmes de comparaison d'états.

Ces problèmes, lorsque la forme sémantique pour exprimer une comparaison est une **différence (directe ou indirecte),** ont reçu divers noms : **comparer** (Riley et al, 1983 ; Carpenter and Moser, 1982 ; Nesher, 1982) et **une relation statique unit deux mesures** (Vergnaud, 1982). Lorsque la forme sémantique est une **égalisation (directe ou indirecte),** ont reçu les noms **égalisation en ajoutant ou égalisation en enlevant** (Capenter and Moser, 1982).

Bibliographie

- Carpenter, T. and Moser, J.M. 1982. The development of addition and subtraction problemsolving skills. In Carpenter, T., Moser, J.M. and Romberg, T. (eds). *Addition and Subtrachon : A cognitive Perspective,* pp. 9-24. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- Nesher, P. 1982. Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problem. In Carpenter, T., Moser, J.M. and Romberg, T. (eds). *Addison and Subtrachon : A cognitive Perspective,* pp. 25-38. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- Riley, M.S., Grceno, J.G. and Heller, J.I. 1983. Development of childrents problem-solving in arithmetic. In Ginsburg, H. P. (ed.). *The development of mathematical* thinking, pp. 153195. Academic Press, New York.
- Vergnaud, G. 1982. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J.M. and Romberg, T. (eds). *Addison and Subtrachon : A cognitive Perspective,* pp. 39-59. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

ndlr. La rédaction de *Math-Ecole* est heureuse d'accueillir, dans ce numéro, des articles ou commentaires de ses lecteurs de l'étranger (Italie, Espagne, France). C'est une contribution au développement de la revue et une ouverture sur d'autres problématiques, susceptibles de stimuler les réflexions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans notre petite région.

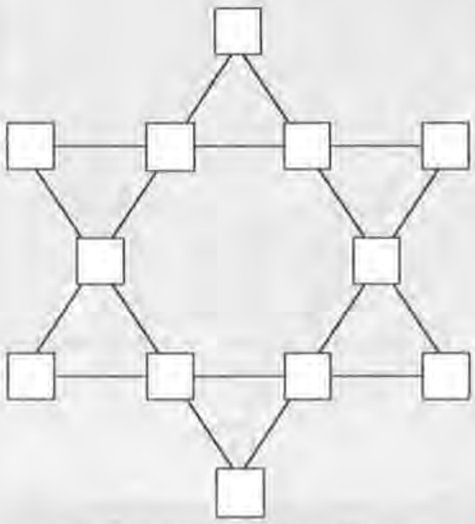
Etoile magique

Huitième année - Fichier de l'élève (NE) - Logique et raisonnement (LR - 7)

par Hervé Schild, Cycle d'Orientation d'Ayent (VS)

Comment placer les nombres naturels de 1 à 12 dans les cases pour obtenir une étoile "magique" ?

(dont la somme de quatre nombres alignés est toujours la même : ici 26)



Méthodologie et commentaires (Mathématique 7 - 8 - 9)

Chaque nombre apparaît sur deux branches, il faut jouer sur une "alternance" entre petits et grands nombres, comme dans un carré magique.

Courant décembre, j'ai proposé ce problème à ma classe de mathématique (2e niveau I) et je me propose ici de vous décrire entièrement le déroulement de cette activité, qui de prime abord ne paraissait pas très riche. (cf. *Méthodologie et commentaires*)

Contrat proposé aux élèves :

1. **Travail individuel** (20 minutes) : lecture, appropriation personnelle, recherche d'une solution, vérification.

2. **Mise en commun** (10 minutes) : noter les divers solutions trouvées au tableau.

3. **Travail par groupes de trois participants** (30 à 40 minutes) sous la responsabilité du groupe :

   - phase de recherche : découvrir des stratégies amenant à la solution et trouver une solution nouvelle, essais, conjectures, vérifications, ...

   - phase de formulation : rédaction d'une affiche - solution à communiquer aux autres.

4. **Débat en commun** (20 minutes) : sous la responsabilité des participants, l'animateur se contente de "présider" les débats : phase de discussion et défense des différentes stratégies et solutions présentées.

5. **Synthèse** (15 minutes) : phase d'institutionnalisation, sous la responsabilité de l'animateur.

6. **Recherche en commun de toutes les solutions possibles** (30 minutes)

Durée totale de l'activité :
environ 3 périodes.

Compte rendu et commentaires

La phase de travail individuel n'a posé aucun problème. Les élèves sont "entrés" dans cette activité très rapidement et ont cherché une solution principalement par tatônnement.

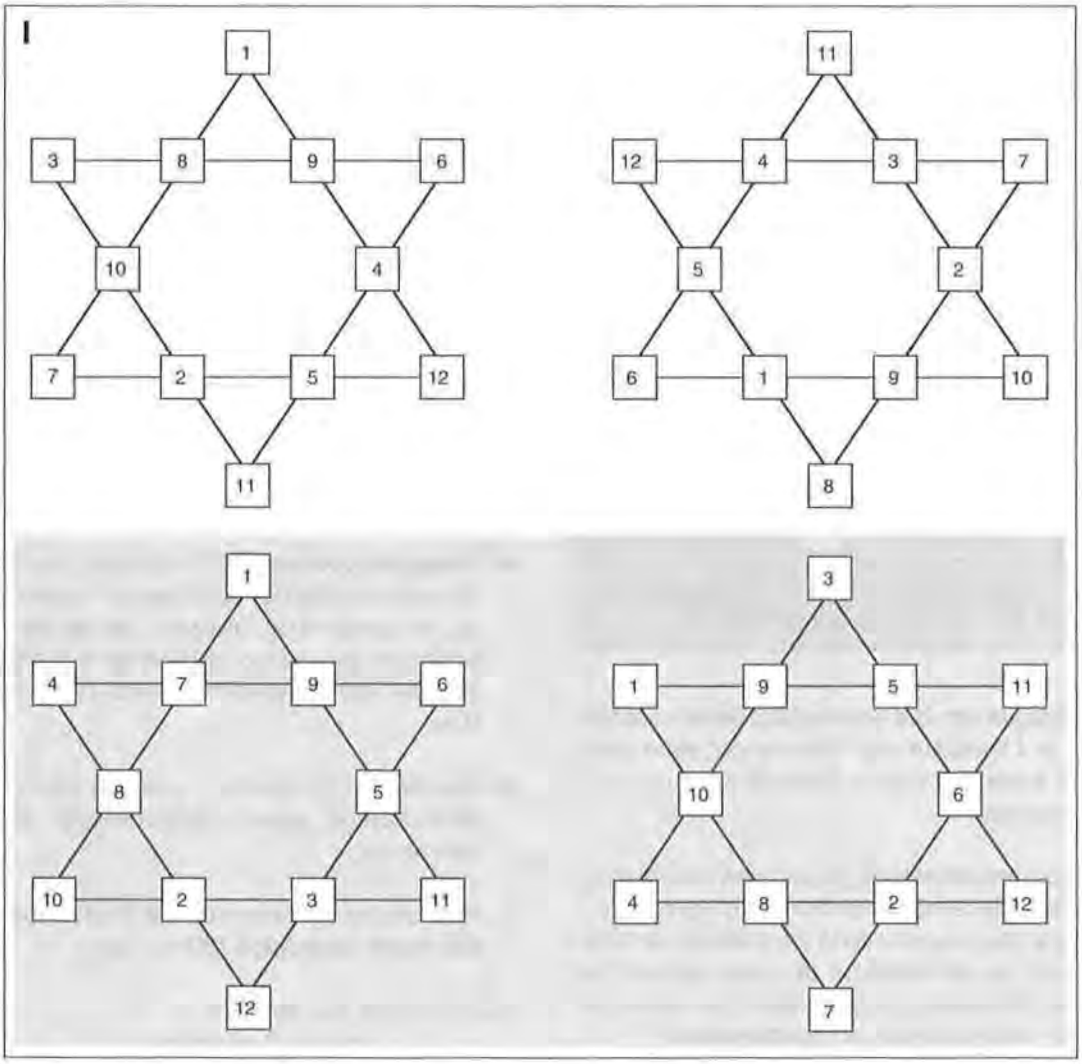
Après 20 minutes, trois d'entre eux avaient trouvé une solution. Deux autres pensaient aussi avoir trouvé, mais une rapide vérification a montré que les consignes de départ n'avaient pas été totalement respectées.

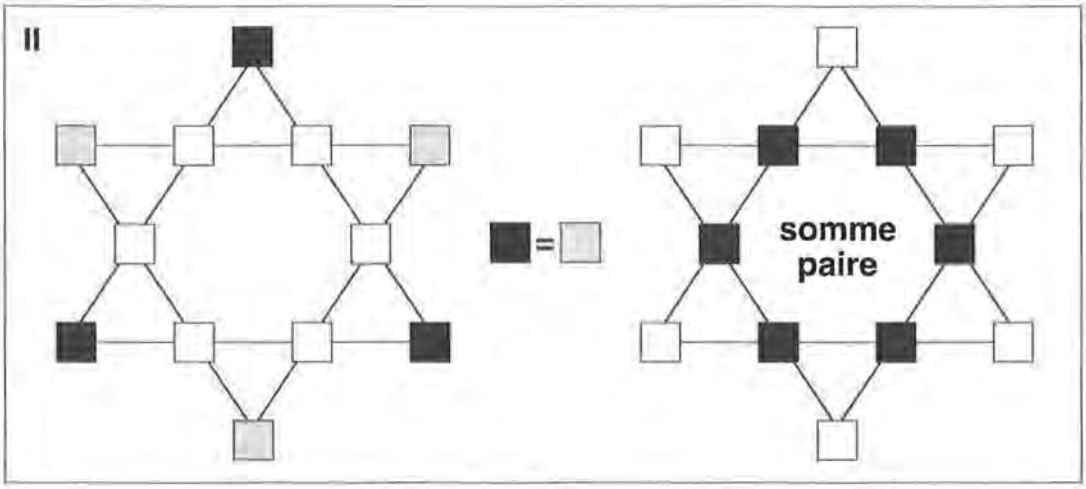
Les élèves ont donc noté leurs découvertes au tableau, mais comme deux d'entre elles étaient identiques (à une rotation et une symétrie près) j'en ai rajouté une troisième différente. (cf. tableau I)

Qu'ont-elles en commun ?

Après que chacun les eut relevées, les groupes se mirent au travail pour trouver, à l'aide des solutions connues, des stratégies "cachées" et découvrir de nouvelles solutions. Le débat de mise en commun fut très animé et permit de mettre en évidence trois stratégies fondamentales de résolution :

I





A. La somme des "grands" triangles opposés est toujours identique !

A noter : cette somme peut varier d'une solution à l'autre.

La somme du "rond central" est toujours paire ! (cf. tableau II)

J'ai lié cette découverte à la précédente car, comme nous allons le voir, elle en découle directement.

En effet, la somme des nombres naturels de 1 à 12 vaut 78.

$$1 + 2 + ... + 12 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$$

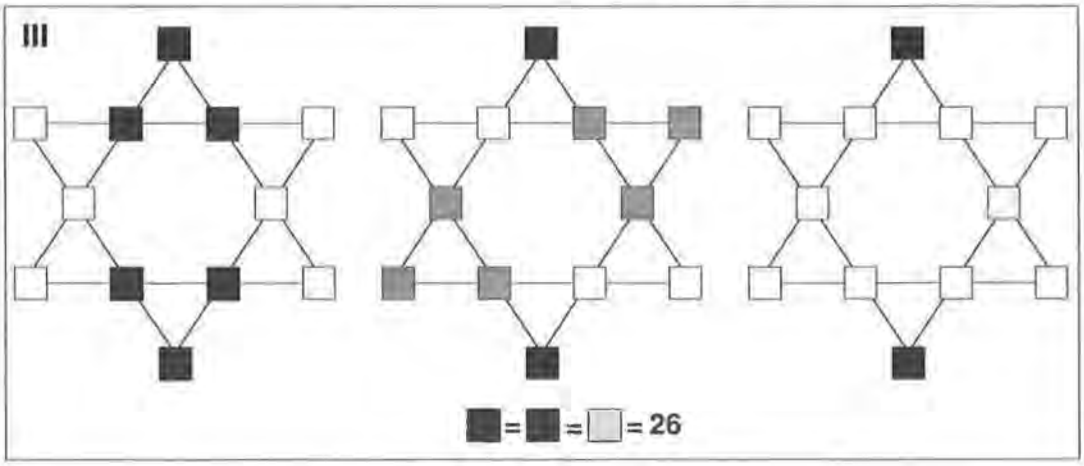
On peut ici aborder avec les élèves la somme des n premiers nombres naturels:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{(n + 1) \cdot n}{2}$$

Appelons x la somme d'un "grand" triangle et y la somme du "rond central". On peut alors poser l'égalité suivante :
$78 - 2x = y$, ce qui entraîne que y est forcément un nombre pair !

B. La somme des "petits" triangles opposés est toujours identique.
(cf. tableau III)

C. L'étoile magique peut être décomposée en trois losanges distincts. La somme de chacun des losanges est toujours égale à 26 .
(78 : 3 = 26 ; ou la proportion 4/12 = x/78 donc x = 26) (cf. tableau IV)



Nous avons utilisé cette dernière propriété pour rechercher toutes les solutions possibles.

Dans un premier temps nous avons listé, avec les nombres naturels de 1 à 12 à disposition, toutes les additions de quatre nombres dont la somme vaut 26. Nous avons trouvé 33 possibilités différentes. Ensuite, nous les avons groupées par groupe de trois pour obtenir la somme recherchée de 78,

V Nombres naturels à disposition :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Somme = A + B + C + D = 26

	A	B	C	D
1	1	2	11	12
2	1	3	10	12
3	1	4	9	12
4	1	4	10	11
5	1	5	8	12
6	1	5	9	11
7	1	6	7	12
8	1	6	8	11
9	1	6	9	10
10	1	7	8	10
11	2	3	9	12
12	2	3	10	11
13	2	4	8	12
14	2	4	9	11
15	2	5	7	12
16	2	5	8	11
17	2	5	9	10
18	2	6	7	11
19	2	6	8	10
20	2	7	8	9
21	3	4	7	12
22	3	4	8	11
23	3	4	9	10
24	3	5	6	12
25	3	5	7	11
26	3	5	8	10
27	3	6	7	10
28	3	6	8	9
29	4	5	6	11
30	4	5	7	10
31	4	5	8	9
32	4	6	7	9
33	5	6	7	8

Possibilités : 33

Combinaisons envisageables : 32

1	-	23	-	33
1	-	26	-	32
1	**-**	**27**	**-**	**31**
1	-	28	-	30
2	-	14	-	33
2	**-**	**16**	**-**	**32**
2	-	18	-	31
2	-	20	-	29
3	**-**	**12**	**-**	**33**
3	-	16	-	27
3	-	18	-	26
3	-	19	-	25
4	**-**	**11**	**-**	**33**
4	**-**	**15**	**-**	**28**
4	-	20	-	24
5	-	12	-	32
5	**-**	**14**	**-**	**27**
5	-	18	-	23
6	-	13	-	27
6	-	19	-	21
7	-	12	-	31
7	**-**	**14**	**-**	**26**
7	-	16	-	23
7	-	17	-	22
8	**-**	**11**	**-**	**30**
8	**-**	**15**	**-**	**23**
8	**-**	**17**	**-**	**21**
9	-	13	-	25
9	**-**	**15**	**-**	**22**
9	**-**	**16**	**-**	**21**
10	-	11	-	29
10	-	14	-	24

Solutions possibles : 12

en étant attentifs au fait qu'un nombre ne devait en aucun cas se répéter. Cela nous a permis de relever 32 solutions "envisageables". (cf. tableau V)

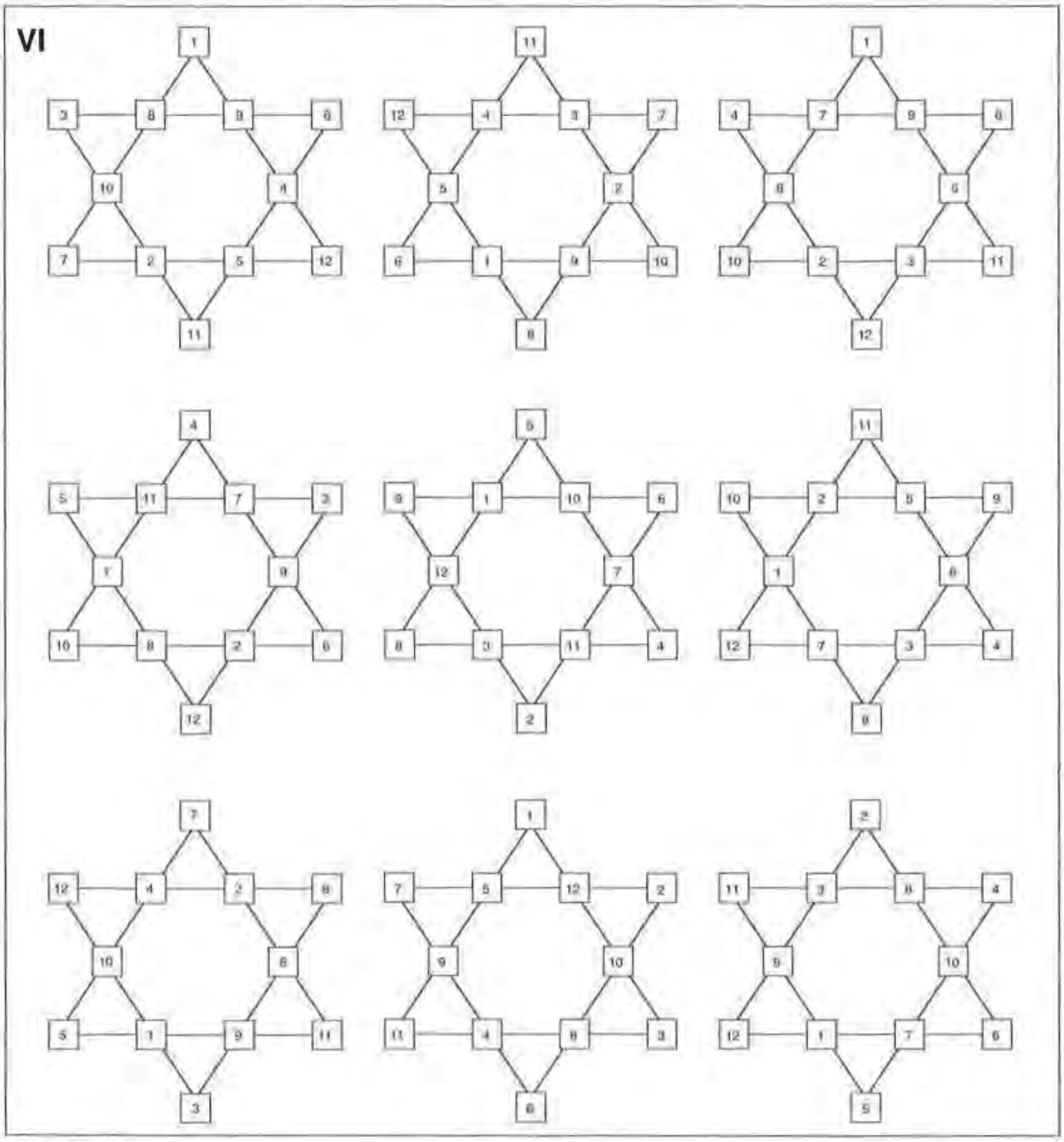
A notre grande surprise, nous n'avons pu reconstituer que 12 étoiles magiques différentes, les 20 autres nous conduisant à des impasses. **Pourquoi?**

Malheureusement, l'intérêt de la recherche commençant à décliner auprès des élèves, nous sommes restés sur cette interrogation.

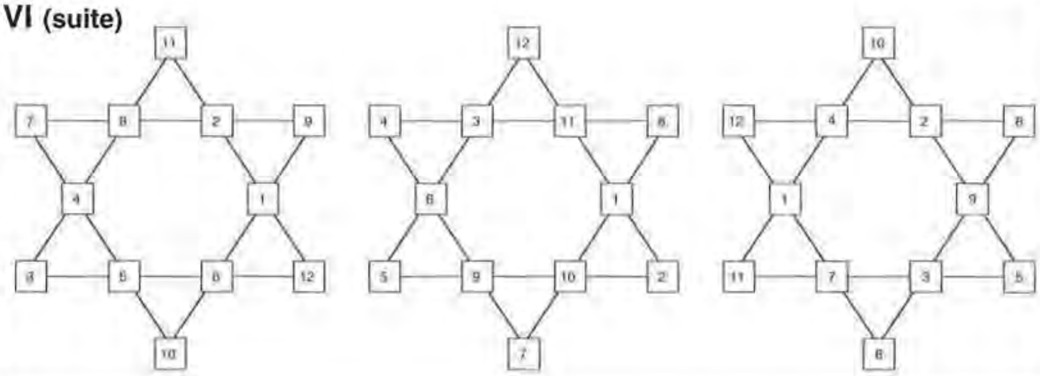
Voici, pour terminer, la liste "exhaustive" de nos solutions. (cf. tableau VI)

Cette activité, qui reste ouverte, s'est avérée donc nettement plus riche que prévue initialement et nous a permis de passer des moments d'intense réflexion. L'investissement des élèves fut exemplaire tout au long de la recherche, certains d'entre eux demandant même parfois des "travaux supplémentaires" à faire à domicile.

VI



VI (suite)



Notes de lecture

Tous les ouvrages mentionnés dans cette rubrique *Notes de lecture* sont disponibles à :

IRDP / Secteur de la Documentation
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. : (038) 24 41 91
Fax : (038) 25 99 47

et peuvent être empruntés gratuitement pour une durée de 1 mois à raison de 5 documents à la fois.

Le Secteur de Documentation de l'IRDP regroupe, dans sa bibliothèque, des ouvrages (monographies, périodiques, cassettes vidéos) dans les domaines de la pédagogie, de la sociologie et de la psychologie à destination des groupes et des personnes associés à la Coordination scolaire romande, ainsi qu'à la coopération interrégionale.

Le Trésor de tonton Lulu

par J. Lubczanski,
G. Chaumeuil et B. Chareyre

Le volume 1, pour la classe de seconde (degré 10 - première gymnasiale en Suisse romande), a été unanimement salué par la critique.

Le volume 2, "niveau première" (degré 11, deuxième année de gymnase), rassemble 24 problèmes empruntés à l'histoire des mathématiques, à la vie de tous les jours, à la culture scientifique ou, tout simplement, à l'imagination ! En tout cas, des problèmes qui ont du sens, utilisables en totalité dans les sections scientifiques, et, pour partie d'entre eux, dans les autres sections. Pour les enseignants qui désirent l'utiliser dans leurs classes, un fascicule "élèves" rassemble les seuls énoncés (commande par 25 exemplaires au minimum).

En vente par l'intermédiaire de *Math-Ecole* (voir page 3 de couverture du présent numéro), ou directement auprès des
Éditions Archimède
5 rue Jean Grandel
F - 95100 ARGENTEUIL

Le dixième championnat international des jeux mathématiques et logiques

Rien qu'en Valais, près de 2000 concurrents ont participé aux quarts de finale du 10e championnat international des jeux mathématiques et logiques. C'est dire que l'édition de cette année risque bien de battre de nouveaux records en Suisse romande.

Les élus en demi-finale se rencontreront le samedi 23 mars 1996, répartis en quatre joutes qui se dérouleront à Pully, Prilly, Neuchâtel et Sion.

La finale suisse aura lieu le samedi 11 mai 1996 à Yverdon et les qualifiés à la "superfinale" internationale seront convoqués début septembre à Paris.

Les problèmes proposés sont toujours aussi ingénieux dans l'ensemble. En voici quelques-uns extraits des quarts de finale individuels ; qui peuvent intéresser les lecteurs de *Math-Ecole* et leurs élèves.

Pour des élèves dès la 4e primaire, une petite recherche en rapport étroit avec leurs activités en numération :

AU COURS PRÉPARATOIRE

L'institutrice vient de montrer avec des objets placés dans des colonnes représentant des centaines, les dizaines et les unités, que l'on peut figurer le nombre 196 avec seize objets (voir dessin).

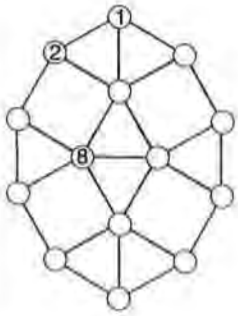
Mathias intervient : « Si on n'est pas obligé de mettre moins de dix objets par colonne, on peut aussi représenter 196, mais avec beaucoup plus d'objets !»

«C'est vrai, c'est tout l'intérêt de notre système, mais Mathias, avec ta méthode, peut-on représenter 196 avec exactement 70 objets ?»
Combien y a-t-il de ces représentations ? Donnez-en une.

Pour tout âge. Il faut de l'ordre et de la méthode pour compléter ce réseau et, surtout pour déterminer le nombre de solutions différentes :

LE DIAMANT

Les cercles de ce diamant doivent contenir les nombres de 1 à 14, de telle sorte que la différence entre deux nombres reliés par un segment, prise en valeur absolue,



- soit toujours un nombre inférieur ou égal à 5
- ne soit jamais égale à 3.

Complétez le diamant.

Ce problème de diviseur et quotient était proposé aux élèves (et adultes) dès le degré 6:

QUOTIENT = RUESIVID

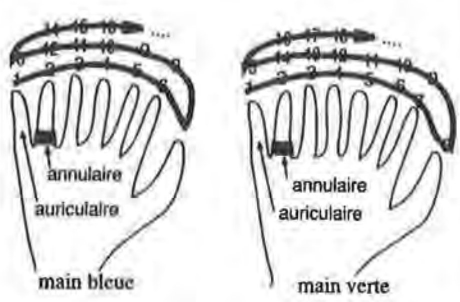
En divisant 100 000 par un nombre à trois chiffres tous différents, j'obtiens un quotient entier et un reste. Le quotient est égal au diviseur renversé (ses chiffres sont écrits dans l'ordre inverse).

Quel est le diviseur ?

Le problème suivant était réservé aux plus grands, dès le degré 10, ce qui n'empêche pas de le proposer en 6e et 7e, en lien avec les multiples communs :

COÏNCIDENCES ANNULAIRES

Dans une lointaine région de l'espace, des petits hommes bleus rencontrent des petits hommes verts. A leur grand étonnement, ils constatent que leurs mains ne comportent pas le même nombre de doigts : 7 pour les bleus, et 8 pour les verts. Mais les savants des deux peuples ne sont pas longs à remarquer que, si l'on compte sur les doigts comme indiqué sur la figure, certains nombres se comptent à la fois sur l'annulaire des mains bleues et sur celui des mains vertes !



Combien y a-t-il de telles coïncidences entre 1896 et 1996 ? Donnez-en deux.

Ici, pour trouver combien il y a de signes + à escamoter, il faut beaucoup de patience ou chercher les relations entre la suppression des signes et l'augmentation de la somme. On pourra trouver alors, non seulement le nombre de ces signes mais encore lesquels, et, comme c'est toujours le cas dans ce championnat, le nombre de solutions en un minimum de suppressions :

LA SOMME FATIDIQUE

On donne la somme de :
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 94 + 95 + 96 des nombres entiers de 1 à 96. Si, dans cette somme, on supprime des signes d'addition (en remplaçant, par exemple 2 + 3 par 23, ou 2 + 3 + 4 par 234), on obtient une nouvelle somme.

Quel est le nombre minimum de signes d'addition qu'il faut supprimer pour obtenir un total de 9696 ?

Pour la catégorie HC (Haute Compétition), deux jolies recherches, artistiques :

DÉFLATION GALOPANTE

Cheapland est un pays connu où le tourisme commence à se développer. La monnaie locale, le «Foiryen» (Fr.) n'est pas à proprement parler une devise forte, mais la vie n'est pas chère à Cheapland, bien que pour 3 Foiryens, on n'ait pas grand chose ...

Non seulement le coût de la vie est bon marché dans ce petit paradis, mais de plus, il baisse constamment en vertu d'une déflation galopante. Le souvenir local, par exemple, coûte beaucoup moins cher cette année que l'année dernière, puisque, bien que n'étant pas donné, il vaut maintenant moins de 100 Foiryens. Le nombre entier qui exprime son nouveau prix, exprimé en Foiryens, est exactement égal au taux de baisse, exprimé en «pour cent», dont il a bénéficié depuis un an.

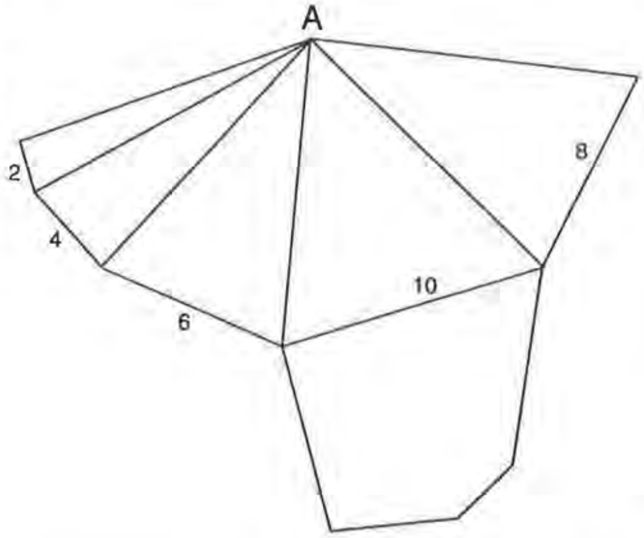
Quel est le prix actuel d'un souvenir de Cheapland ?

LA PYRAMIDE DE 1 A 16

La pyramide développée ci-dessous a 6 faces dont les aires sont en progression arithmétique : S, 2S, 3S, 4S, 5S pour les faces triangulaires, et 6S pour la base pentagonale.

Quelle est l'aire du plus petit triangle ?

On donnera la réponse arrondie au dixième.



Le dernier de ces problèmes mériterait une palme d'or pour son ingéniosité et la richesse des champs d'activité qu'il permet d'explorer.

Solutions dans le prochain numéro de *Math-Ecole*.

Courrier des lecteurs

Chers amis de Math-Ecole,

Décidément, je prends toujours grand plaisir à lire votre revue, très vivante et toujours à l'affût de ce qui ce fait un peu partout pour l'amélioration et le partage des connaissances mathématiques. A mon sens, lorsque l'on trouve des approches pour présenter, utiliser, mettre en situation n'importe quel aspect des mathématiques c'est vraiment le savoir proprement dit que l'on accroît, et pas seulement un savoir-faire que beaucoup parmi les chercheurs que je rencontre considèrent au mieux comme accessoire voire superflu. Sachez donc que pour moi votre revue est une sorte d'inspiration et me procure d'agréables surprises. Permettez-moi de vous souhaiter une bonne année 1996 et que vous arriviez à maintenir l'excellent niveau de Math-Ecole.

Cordialement

Olivier Gérard
Rédacteur de QUADRATURE
Les Éditions du Choix
Boîte postale 129
F - 95103 ARGENTEUIL Cedex

MATH-ADORE !

aventures interclasses mathématiques... le retour (1)

par Caroline Joseph, étudiante à l'Ecole normale de Neuchâtel

D'un problème à l'autre

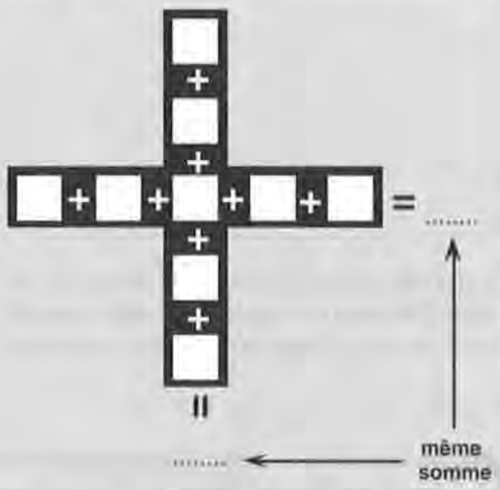
Souvenez-vous... il y a de cela deux mois, je vous présentais la première étape de notre nouveauté neuchâteloise, sous la forme d'un problème assez ouvert, adressé aux élèves de classes volontaires de 4ème et 5ème années :

Problème n°1

En disposant astucieusement les nombres de **1 à 9** dans cette croix, il est possible d'obtenir **la même somme sur chacune des branches**. La croix devient alors " magique ".

Combien de croix magiques différentes peut-on fabriquer ainsi ?

Bonne chance et beaucoup de plaisir à faire des mathématiques !



Pour mémoire, plus de 70 classes s'étaient inscrites. On n'a enregistré pratiquement aucun désistement. Mon intention était notamment de responsabiliser les élèves dans leur recherche : «il serait souhaitable que la plus grande part d'initiative revienne aux élèves et qu'une démarche autonome de leur part soit sauvegardée.» L'immense majorité des enseignants concernés ont parfaitement compris l'intention. En voici une illustration frappante, parmi d'autres :

Comment j'ai fait...

- Au début, j'y suis allé "au pif".
- J'ai placé les nombres impairs verticalement et les nombres pairs horizontalement (sauf au milieu).
- J'ai placé la même somme dans chaque " bras " de la croix.

<u>Combien esciste-t-il de sommes différentes ?</u>

On sait que : $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$

Avec 1 au centre, on aura $\rightarrow (45+1) : 2 = 23$

Avec 3 $\rightarrow (45+3) : 2 = 24$

Avec 5 $\rightarrow (45+5) : 2 = 25$

Avec 7 $\rightarrow (45+7) : 2 = 26$

Avec 9 $\rightarrow (45+9) : 2 = 27$

} 5 sommes différentes

<u>Ce que nous avons fait ensemble</u>

1.) Nous avons cherché dans toutes les directions.

2.) Nous avons placé toujours le 5 au milieu.

3.) Puis, nous avons placé le 5 au milieu et le 1 tout en haut.
etc....

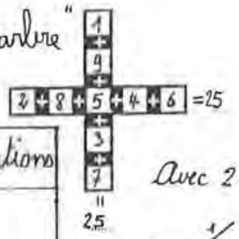
Proposition de Denis

Je pense qu'il y a 2025 croix différentes.

Calcul: $(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 2025$

Un essai de calcul, en faisant un "arbre"

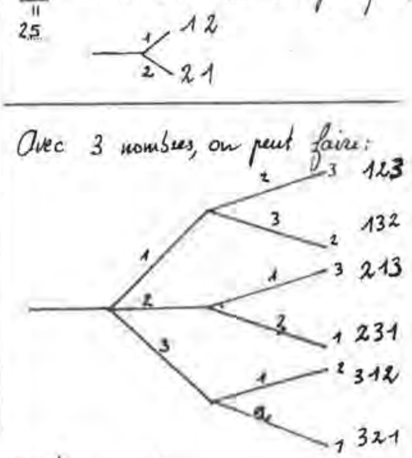
Voici une croix magique



Si on change.....	Nombre de solutions
aucun chiffre	1
2 chiffres	2
3 chiffres	6
4 chiffres	24
5 chiffres	120
6 chiffres	?

Avec 2 nombres on peut faire:

Avec 3 nombres, on peut faire:



Oui, mais, on ne peut pas mettre n'importe quel nombre au milieu.....

etc...

L'ouverture voulue du problème a suscité de nombreuses présentations intéressantes, tant par la forme que par le contenu.

Certaines classes ont cherché plusieurs solutions avec un même nombre impair au centre de la croix. D'autres, plusieurs solutions en changeant le nombre central. D'autres enfin, en tentant de chercher toutes les solutions possibles... sans forcément y parvenir.

Donnons ici des exemples de démarches différentes :

Bonjour Madame Le Locle le 9 nov. 1995

Nous avons bien aimé chercher des solutions.

Nous avons mis un peu de temps pour trouver la première et après cela a été très facile.

1 Nous avons trouvé 5 solutions vraiment différentes en changeant le nombre du milieu qui est toujours impair (1,3,5,7,9)

2 Ensuite nous avons essayé de trouver toutes les solutions différentes possibles en gardant le même nombre au milieu (5)

Au bout de trois périodes nous avons trouvé plein de solutions, mais en changeant de place les chiffres. Nous trouvons que ce n'est pas de nouvelles solutions.

- 3 solutions pour le 1 au milieu
3 " " " " 3 " " "
4 " " " " 5 " " "
3 " " " " 7 " " "
4 " " " " 9 " " " soit 17

3 Nous avons pris 1 soulution et nous avons inversé les chiffres de la ligne (voir feuille 3) nous avons trouvé 24 solutions puis pour la colonne aussi 24 solutions on a fait 24 x 24 = 576

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times\ 17 \\ \hline 4032 \\ +5760 \\ \hline 9792 \end{array}$$

Au milieu on peut mettre 1, 3, 5, 7, 9 Robin

Quand on a une croix juste on en trouve trois autres en la faisant tourner. Nicolas

On peut aussi inverser les chiffres

Ex. 28 5 73 en 82 5 37. Pablo

Je cherche combien de positions différentes avec le 5 au milieu et 19(5)46 (1 devant) = 6 p.

en tout il y a 24 p.

La verticale = 24 p.

Au total avec (5) = 24 x 24 = 576 p.

Au total 576 x 5 = 2880 possibilités.

Vanessa

On a procédé comme avec les Dalton (livre de math p. 12) Fabien

Jolies recherches, pertinentes, et finalement pas très éloignées de la réponse au problème donnée par

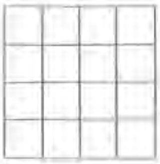
$n = 18 \times 2 \times 24^2 = 36 \times 576 = 20736$

(trouvée par une seule classe).

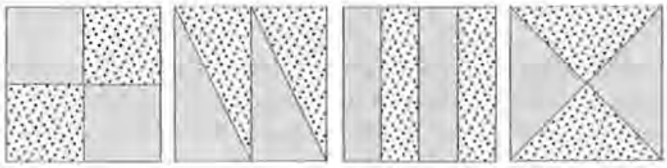
A découvrir la qualité des comptes rendus des élèves, on comprend que la difficulté ne les a pas rebutés : ils sont repartis de plus belle dans la résolution de deux problèmes dont voici les énoncés :

Problème n° 2 — Pavages

Voici un carré de côté 4 :



A titre d'exemples, voici 4 pavages, très simples, auxquels on pense en premier lieu:



Si on désire recouvrir entièrement ce carré avec 4 pavés identiques, on a l'embarras du choix.

Mais on peut réaliser bien d'autres pavages, avec des pavés aux formes plus élaborées. Combien en trouverez-vous ?

Important !

- Seule la forme des pavés compte. Peu importe s'il est possible de les disposer de différentes façons dans le carré.
- Les pavés doivent être des polygones dont les sommets correspondent à des nœuds du quadrillage.

Bonne chance et beaucoup de plaisir à faire des mathématiques !

Problème n° 3 — Maxima et minima

1	2	3	4	5	6 six	7	8	9 neuf	+	-	x	:

- Choisissez trois *cartes-chiffres* et une *carte-opération.* Avec deux des trois *cartes-chiffres* choisies, formez un nombre de deux chiffres. Effectuez ensuite l'opération.

  7 2 5 x

  7 x 5 2 = *364*

- Recommencez cela en choisissant trois nouvelles *cartes-chiffres* et une nouvelle *carte-opération.*

  1 + 9 4 = *95*

- Terminez avec les trois dernières *cartes-chiffres* et une troisième *carte-opération.* (La dernière *carte-opération* reste inutilisée.)

  6 3 – 8 = *55*

  \+

- Additionnez les trois résultats intermédiaires pour obtenir la somme finale.

  514

Quelles sont les deux plus grandes et les deux plus petites sommes finales que vous réussirez à obtenir ainsi ?

Bonne chance et beaucoup de plaisir à faire des mathématiques !

Le lecteur découvrira les nouvelles trouvailles des élèves dans le prochain numéro de *Math-Ecole,* et nous lui proposons, pour l'heure, d'imaginer les procédures que les participants à *Math-Adore* nous réservent !

Annonce

Rendez-vous d'enseignement mathématique

Comme chaque année, et pour la dernière fois, des maîtres, enseignant les mathématiques de l'école enfantine à l'Université se réuniront aux «Rendez-vous d'enseignement mathématique«. Cette année, le thème choisi est :

Il n'y a pas de difficulté en mathématique !

Les participants pourront choisir de participer à un certain nombre de «stands-ateliers-discussions«.

Deux rendez-vous sont fixés, se déroulant chacun sur un après midi :

le mercredi 6 mars 1996
le mercredi 13 mars 1996

Ces deux rendez-vous se déroulent à Lausanne. Vous pouvez déjà vous y inscrire au moyen du coupon ci-dessous, photocopié et envoyé à l'adresse indiquée.
Ces rendez-vous sont ouverts aux enseignants de tous les cantons. Nous les recevrons avec plaisir.

Rendez-vous d'enseignement mathématique : inscription

Je m'inscris au rendez-vous du mercredi ..... mars 1996. (Indiquer la date choisie.)

Nom : .... Prénom : ....

Adresse complète : ....

....

Téléphone : ....

Lieu et niveau d'enseignement habituel : ....

A retourner à : CVEM, Rendez-vous
École normale
Av. de Cour 33
1007 LAUSANNE

Signature :

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Le Trésor de tonton Lulu (vol.1, 28 probl. de niveau "10") ..... (ex. à Fr. 25.-)*

Le Trésor de tonton Lulu (vol.2, 25 probl. de niveau "11") ..... (ex. à Fr. 27.-)*

Le nombre π , ADCS ..... (ex. à Fr. 42.-)*

Les jeux de NIM, par Jacques Bouteloup, ADCS ..... (ex. à Fr. 52.-)*

Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP ..... (ex. à Fr. 28.-)*

Fichier Evariste APMEP ..... (ex. à Fr. 20.-)*

Les anciens numéros de *Math-Ecole*

(prix en page 2 de couverture) : ....

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques (Fr. 13.- l'ex.)* :

- Niveau CM (degrés 4 et 5) : ***Récrémaths*** .... ex.
- Niveau collégiens :

  Les Pentagones patagons (n° 8) .... ex. ***Le Serpent numérique*** (n° 10) .... ex.

  Le Trésor du vieux Pirate (n°12) .... ex. ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) .... ex.
- Niveau lycéens et adultes :

  La Biroulette russe (n° 9) .... ex. ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex.

  Le Roi des Nuls (n°13) .... ex. ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex.
- Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 4, 5, 6 et 7) : ....

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐Mme ☐M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7