# MATH ECOLE

35e année

173

Pestalozzi : l'homme des intuitions mathématiques

Rallye mathématique, la finale

L'enseignement moderne de la mathématique

août 1996

## *Math-Ecole,*
## pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

# MATH-ECOLE

35e année 5 numéros par an

**173**

août 1996



**Adresse**
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

**Administration**
Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (038) 24 41 91
Fax (038) 25 99 47

**Fondateur**
Samuel Roller

**Rédacteur responsable**
François Jaquet

**Comité de rédaction**
Chantal Richter
Janine Worpe
Michel Brêchet
Jacques-André Calame
Michel Chastellain
Roger Délez
Nicolas Dreyer
Yvan Michlig
Luc-Olivier Pochon
Alain Ramelet

**Abonnement annuel** (5 numéros)
Suisse: Fr. 20.- Etranger: Fr. 25.-
CCP 12-4983-8

**Imprimerie**
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 22 14 60


**Couverture**
spirale de carrés ayant pour côtés les nombres de la suite de Fibonacci


**Graphisme et mise en page**
Yvan Michlig


# Sommaire

## Y a-t-il une vie après l'école ?

*«Il y a des dessins humoristiques dans nos journaux, de la fantaisie dans certaines émissions de la radio et de la TV, des bandes dessinées comiques, des publicités drôles. Mais, au fait, a-t-on le droit d'introduire un peu d'humour dans l'école par le très officiel canal d'un moyen d'enseignement, dans une discipline réputée des plus sérieuses comme la mathématique ?»*


C'est par ces mots que débutait un article paru dans le n°113 de *Math-Ecole* du mois de mai 1984 et qui était intitulé «*Humour, fantaisie, non conformisme. Les limites !*» Dans cet article, F. Jaquet présentait la démarche des auteurs des moyens d'enseignement *Mathématique 5e et 6e*, démarche qui visait à démythifier l'enseignement des «maths», pour le rendre plus naturel, plus proche de la réalité quotidienne des élèves. L'une des idées retenues avait été l'apport de la plume humoristique de Barrigue, dans le but de «colorer» les ouvrages par des clins d'œil complices suggérant l'environnement habituel des jeunes : celui de la BD.

Cette première tentative, par ailleurs fructueuse, s'était cependant soldée par la censure de quelques propositions comme, par exemple, celle d'un dessin illustrant la division euclidienne. Celui-ci avait été considéré comme inopportun, voire provocateur.

Mais, toute idée novatrice fait son chemin, même en Suisse romande ! Ainsi, l'ironie du sort a voulu que ce dessin soit repris dans l'ouvrage *Mathématiques 8* du canton de Fribourg, sans qu'aucune opposition ne se manifestât !

D'ailleurs, depuis cette époque, l'apport d'un illustrateur professionnel est entré dans les mœurs lors de l'élaboration de nouveaux moyens d'enseignement. Cela a notamment été le cas en allemand, à l'occasion de la sortie de *Unterwegs 8/9*, en français pour le livre des classes de deuxième année primaire intitulé *Comme tu voudras*, ou encore dans le cadre des activités créatrices textiles avec l'ouvrage *Au fil du temps*. Bien évidemment, les styles divergent selon les coups de crayons, imprégnant les ouvrages d'une atmosphère propre à leur auteur, comme par exemple, celles de P. Reymond dans le document *Formation à l'Europe*, de Y. Giroud pour les manuels *Mathématiques 7/8/9* des classes DT du canton de Vaud, ou encore, de Bürki dans la brochure *Cabricolages*.

Aujourd'hui, et de manière exceptionnelle, *Math-Ecole* souhaite s'associer à la sortie d'un recueil de dessins humoristiques intitulé *Barrigue à l'école* (disponible en librairie), afin de souligner le rôle précurseur que ce dessinateur de presse a joué dans l'illustration des manuels scolaires et, plus spécifiquement, dans les ouvrages de mathématiques. Voilà pourquoi le lecteur découvrira, tout au long de ce n°173, quelques bouffées d'air frais qu'il pourra déguster selon son bon plaisir.

Michel Chastellain

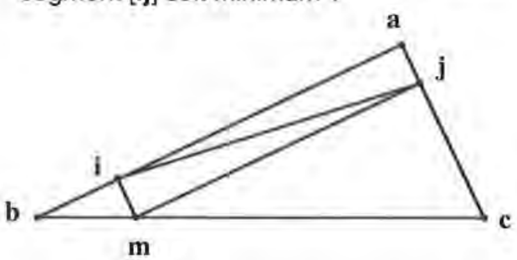
# CABRidées : «MIN-IJ»

par Michel Chastellain, maître de didactique des mathématiques au SPES (VD)

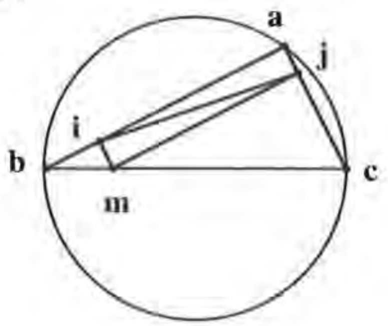
Comme promis dans le n°172 de *Math-Ecole*, la rubrique *CABRidées* se poursuit aujourd'hui. Et pour faire suite à l'article intitulé : «*PAIRIMÈTRE*», voici une nouvelle activité, vécue avec une huitième année prégymnasiale, de coloration scientifique.

La consigne était la suivante :

- Un triangle **abc** est rectangle en **a**.
- On projette un point **m** du segment [**bc**] perpendiculairement sur les côtés [**ab**] et [**ac**], respectivement en **i** et **j**.
- Où faut-il placer **m** pour que la longueur du segment [**ij**] soit minimum ?




La première tâche des élèves réside dans l'élaboration d'une figure, de telle sorte que celle-ci conserve, lors d'une manipulation ultérieure, toutes ses caractéristiques intrinsèques. Cela signifie, par exemple, que le sommet **a** doit être défini comme un point appartenant au cercle de diamètre [**bc**] (Thalès). Ainsi, le triangle **abc** demeure toujours rectangle, lors du déplacement de l'un de ses trois sommets, comme c'est le cas ici pour **c** :




Cette exigence est liée à l'aspect dynamique de «Cabri-géomètre», qui respecte le concept d'invariance des propriétés d'une figure. A titre d'exemple, voici quelques remarques, relevées dans les comptes rendus des élèves, qui illustrent les obstacles rencontrés dans ce domaine.[1]

- «*D'abord, on a utilisé l'outil triangle pour construire* ***abc****. Mais après, on a vu qu'en bougeant* ***c****, le triangle n'était plus rectangle !*»
- «*Nous n'avons pas trouvé immédiatement la réponse à la question, car chaque fois que l'on construisait la figure, une chose ne jouait pas. Par exemple, le cercle changeait de taille et bougeait sur l'écran.*»
- «*Nous avons construit le triangle* ***abc*** *de la manière suivante :*
  - *un cercle qui a le segment [****bc****] pour diamètre,*
  - *un point* ***a*** *sur le cercle,*
  - *relier* ***a*** *et* ***c****, ainsi que* ***a*** *et* ***b****. L'angle* ***bac*** *est un angle droit, puisque le cercle est le cercle de Thalès du segment [****bc****],*
  - *un point* ***j*** *sur le segment [****ac****],*
  - *une droite perpendiculaire à [****ac****] passant par* ***j****,*
  - *l'intersection de la perpendiculaire et du segment [****bc****] donne le point* ***m****,*
  - *une droite perpendiculaire à [****ab****] passant par* ***m****,*
  - *l'intersection de cette droite et du segment [****ab****] est le point* ***i****,*
  - *relier* ***i*** *et* ***j****.*

  *Mais, nous ne pouvons pas saisir le point* ***m****, donc nous ne pouvons pas répondre à la question. Nous construisons alors une deuxième figure.*»

[1] Par souci de lisibilité, les textes originaux figurent en italique avec une orthographe corrigée.

Après plusieurs tentatives, les différents groupes de deux élèves obtiennent une construction correcte. Plusieurs d'entre eux impriment l'énoncé disponible dans le menu «Divers» de «Cabri-géomètre», et le joignent à leur production écrite.

```
Enoncé de "Hélène-Lionel"
La figure comporte 16 objets (2 invisible).

m : point du segment [b c]

b : point quelconque
c : point quelconque
segment [b c]
o : milieu des 2 points b et c
C : cercle de centre o passant par b
a : point du cercle C
segment [a b]
segment [a c]
m : point du segment [b c]
F : droite passant par m et perpendiculaire au segment [a b] (invisible)
E : droite passant par m et perpendiculaire au segment [a c] (invisible)
i : intersection du segment [a b] et de la droite F
j : intersection du segment [a c] et de la droite E
segment [i m]
segment [m j]
segment [i j]
```

D'autres groupes préfèrent transcrire leur démarche, dans un langage plus proche de leur procédure, comme dans les deux cas suivants qui soulignent les difficultés relatives à l'apprentissage de l'écriture d'une marche à suivre :

- «*Nous construisons, en premier, le triangle rectangle* ***abc****, en traçant un segment [****bc****] et en construisant son cercle de Thalès. Ensuite, nous plaçons le point* ***a*** *sur le cercle. Nous vérifions que nous pouvons modifier le rayon du cercle pour faire différentes constatations. Nous plaçons le point* ***m*** *sur le segment [****bc****]. Nous traçons ensuite la parallèle au segment [****ab****] par* ***m*** *et la parallèle à [****ac****] par* ***m****. Ceci nous donne les points* ***i*** *et* ***j****. Nous traçons le segment [****ij****].*»

1) tracer [bc], quelconque.
2) construire cercle de Thalès. } => angle de
3) point a qcq sur le cercle } sommet a = 90°.
4) tracer [ba] et [ca].

5) point "m" sur le segment [bc].
6) ⊾ par "m", perp. à [ba] => i.
7) ⊾ par "m", perp à [ca] => j.
8) tracer [mj], [mi] et [ji].

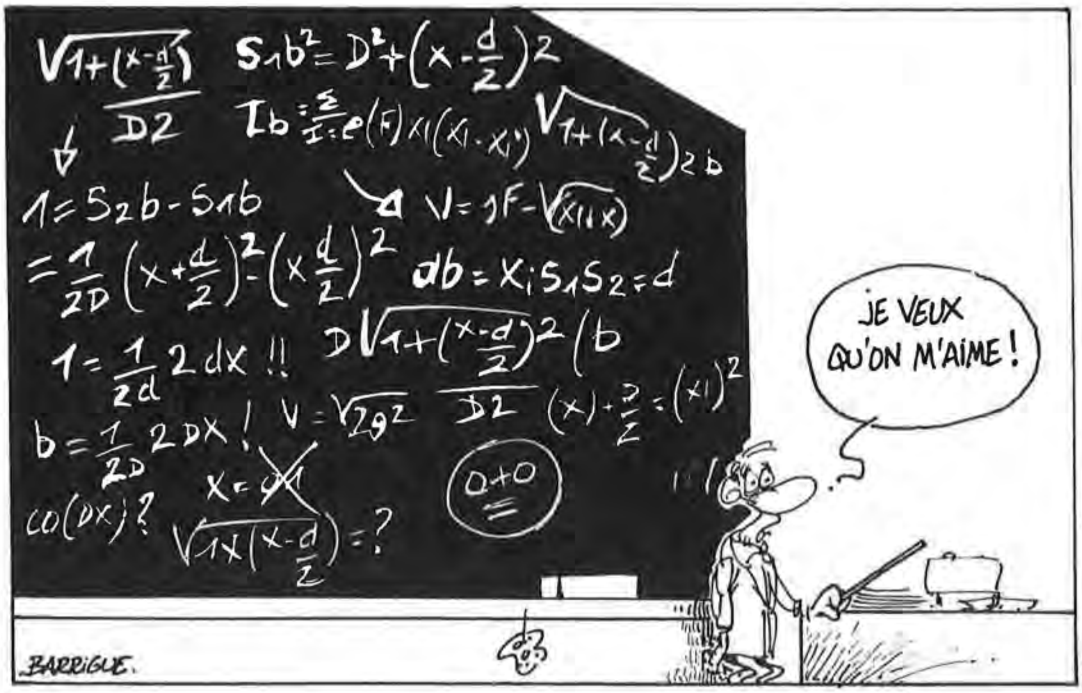
Intervient alors une phase plus ludique, durant laquelle, après avoir demandé l'affichage de la mesure du segment [**ij**], les élèves profitent pleinement des potentialités de «Cabri-géomètre» en déplaçant le point **m**. Ces manipulations successives les conduisent, tout naturellement, à observer une famille de figures et à formuler un certain nombre de remarques, plus ou moins pertinentes :

- «*Nous nous sommes trompés au début, car nous ne devions pas bouger le triangle* ***abc.***»
- «*Si nous éloignons* ***m*** *de* ***b****, le segment [****ij****] rapetisse.*»
- «*Si nous réduisons le segment [****ab****], le segment [****ij****] se réduit aussi.*»
- «*C'est la même chose, si nous réduisons le rayon du cercle (en rapprochant* ***c*** *de* ***b****).*»
- «*Pour que le segment [****ij****] soit minimum, il faut appliquer les trois observations précédentes.*»
- «*Nous nous rendons compte que si le point* ***m*** *est confondu avec* ***b*** *ou avec* ***c****, le segment [****ij****] mesure la même chose que [****ab****] ou [****ac****].*»
- «*Dans le triangle* ***abc****, on trouve quatre petits triangles qui sont rectangles.*»
- «*Avec l'outil «mesurer» on a trouvé que les segments [****ai****] et [****jm****] sont isométriques; c'est la même chose pour les segments [****aj****] et [****mi****]. Comme on a construit des angles droits en* ***a****, en* ***i*** *et en* ***j****, le segment [****ij****] est la diagonale du rectangle* ***aimj.***»
- «*Le segment [****ij****] est minimum lorsque le segment [****im****] mesure plus que 1,5 cm et moins que que 2,4 cm.*»
- «*Le triangle* ***imj*** *est le triangle diminué de* ***abc****, parce que si on place* ***m*** *sur le milieu du segment [****bc****], alors [****ij****] est le segment moyen du triangle* ***abc.***»
- «*Quand on bouge un des sommets d'un rectangle, les diagonales s'agrandissent plus il est «plat»*».

Ayant déterminé la position précise du point **m** qui engendre un segment [**ij**] minimum, – «Cabri-géomètre» offre la possibilité d'afficher la mesure des segments avec trois chiffres significatifs – les élèves terminent leur recherche en proposant alors des justifications :

- «*On a trouvé le segment [****ij****] minimum, mais on a pas trouvé comment expliquer.*»
- «*Pour que [****ij****] soit le plus petit possible, il faut que la droite* ***am*** *coupe [****bc****] perpendiculairement.*»
- «*[****ij****] est minimum quand le point* ***m*** *est l'intersection de la hauteur issue du sommet* ***a*** *avec le côté [****bc****].*»
- «*Les segments [****am****] et [****ij****] sont les diagonales du rectangle* ***aimj****; puisque la droite* ***am*** *est perpendiculaire, c'est le plus court chemin*».
- «*Le plus court chemin entre une droite et un point est la perpendiculaire passant par le point, ce qui explique que le segment [****ij****] est le plus petit, quand* ***m*** *est à l'intersection de la perpendiculaire à [****bc****] passant par* ***a***».

Finalement, la succession des démarches vécues par les élèves (élaboration d'une figure géométrique fondée sur des invariants, observation de propriétés, justification, écriture d'un compte rendu, apprentissage de l'autonomie, ...), tout comme l'intérêt qu'ils ont rencontré dans cette mise en pratique, compensent largement la «perte de temps» qu'il a fallu consentir à l'origine, pour leur apporter un minimum de maîtrise dans l'utilisation de «Cabri-géomètre». **Qu'on se le dise !**



# Rallye mathématique, la finale

par François Jaquet, IRDP, Neuchâtel

Le 4 juin 1996, à Yverdon, se déroulait la quatrième finale romande du rallye mathématique et, à Parme, pour la deuxième fois, la finale des classes d'Italie.

Depuis quatre ans, la formule est toujours la même :

Chaque classe arrive sous la conduite de son maître et s'installe dans la salle qui lui est attribuée. Il y avait 9 finalistes cette année, sur les 60 classes ayant passé les première et deuxième épreuves : 2 de troisième, 3 de quatrième et 5 de cinquième année primaire.

L'un des organisateurs apporte les énoncés des problèmes, vérifie que les consignes soient bien claires et quitte la classe avec le maître.

Dès ce moment, les élèves ont 50 minutes pour résoudre les problèmes de leur catégorie et en rédiger une solution, pour la classe.

Pendant ce temps, les portes restent ouvertes, les visiteurs peuvent passer de salle en salle sans déranger les élèves ni intervenir. Seule restriction : les maîtres sont interdits d'entrée dans la salle où travaillent leurs propres élèves.

Après 40 minutes, les élèves sont informés qu'il ne leur reste que 10 minutes.

A la fin du temps réglementaire, un des organisateurs vient chercher les solutions, le maître revient, on remet la salle dans l'ordre où on l'avait trouvée à l'entrée et c'est l'heure du goûter et de la récréation.

Il ne faut pas plus de 20 à 30 minutes pour corriger les épreuves car les critères ont été établis soigneusement au préalable, en fonction des démarches et réponses prévues. Pour s'assurer de l'équité de l'évaluation, une même équipe de correcteurs examine les solutions de l'ensemble des classes pour un même problème.

La proclamation des résultats, la distribution des prix et la remise des diplômes de participation sont conduits sur un rythme accéléré. Il y a peu de temps pour les discours, les élèves sont d'ailleurs plus intéressés par la répartition des prix ou par leurs résultats. Et il faut penser au retour de cette brève course d'école, en train, avec le bus de l'école, dans les voitures de parents dévoués ou encore, pour la classe d'un village voisin (Grandson), à bicyclette.

La formule a beau être bien rodée, il y a toujours quelques moment d'appréhension au moment du coup d'envoi. Pour les maîtres contraints à «abandonner» leurs élèves, pour les auteurs des problèmes qui se demandent si, cette fois-ci, ils n'ont pas un peu forcé la dose, pour ceux qui craignent les débordements, chahuts ou incidents d'une gestion totalement en main des élèves.

Il y a, certes, un peu de fébrilité au départ, quelques discussions vives sur l'une ou l'autre des solutions, des cris parfois ou une poursuite, mais dans l'ensemble, c'est l'intensité de l'activité qui domine. Même chez les plus jeunes, le travail est parfaitement organisé, en fonction des expériences précédentes : les tâches sont réparties entre les groupes, les contrôles s'effectuent, les échanges sont prévus, les responsabilités partagées. Et pour s'assurer de l'engagement de chacun, il n'y a qu'à observer les signes physiques de l'effort intellectuel : les couleurs de certains visages, les crispations devant les obstacles, les soupirs de soulagement ou les cris de joie lors de la découverte d'une solution (dont on est toujours sûr que c'est la bonne).

Finalement, l'ultime réponse à toutes les interrogations vient de l'analyse des résultats. C'est à ce moment que se dissipent les derniers doutes : à voir les solutions trouvées et les explications qui les accompagnent, on peut affirmer que, comme dans les étapes précédentes du rallye, les élèves ont réellement fait des mathématiques.

(Début de l'épreuve pour les classes de 3e.)

### 1. UNE SI BELLE RUE


Ma maison porte le numéro 23.
Si on avait numéroté les maisons depuis l'autre bout de la rue, ma maison porterait le numéro 15.

**Combien y a-t-il de maisons sur le côté de la rue où j'habite ?**

Expliquez votre réponse.

### 2. TARTES

M. Boulanger a préparé 19 tartes. Il les place dans 2 boîtes blanches et 3 boîtes noires.
Il doit y avoir le même nombre de tartes dans chacune des boîtes blanches et le même nombre de tartes dans chacune des boîtes noires.

**Comment M. Boulanger peut-il répartir ses tartes dans les boîtes ?**

Trouvez toutes les solutions et expliquez votre raisonnement.

(Début de l'épreuve pour les classes de 4e.)

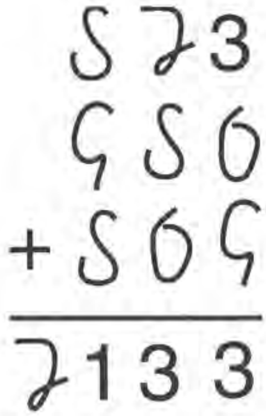
### 3. L'ADDITION DE TOTO

Toto ne forme pas bien ses chiffres. Il écrit de la même façon :

0 et 6 2 et 7 4 et 9 5 et 8

Par contre, on arrive bien à distinguer ses 1 et ses 3.

Sur sa feuille, il vient de faire une addition:




**Serez-vous capables de la reconstituer en formant bien les chiffres ?**

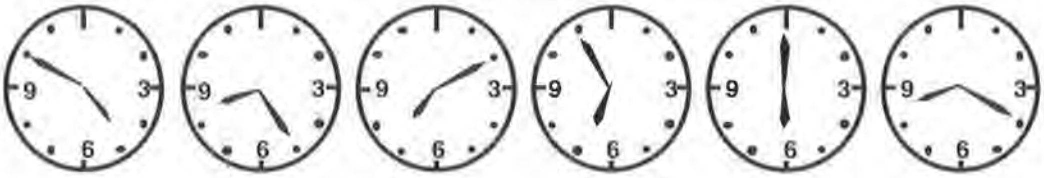
Ecrivez l'addition lisiblement et expliquez comment vous avez trouvé les bons chiffres.

(Début de l'épreuve pour les classes de 5e.)

### 4. CHEZ L'HORLOGER

Les six pendules de Mme Lamontre n'indiquent pas toutes la même heure. Trois pendules retardent et deux avancent. Une seule indique l'heure exacte.

Voici les six pendules de Mme Lamontre ce matin, au moment où elle s'est levée :




**A quelle heure Mme Lamontre s'est-elle levée ce matin ?** Expliquez votre réponse.

### 5. AVIS DE RECHERCHE

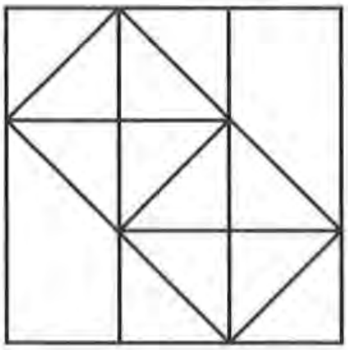
Vous devez retrouver un nombre de trois chiffres à l'aide des informations suivantes:

- Ce nombre est plus grand que 400.
- La somme de ses chiffres est 11.
- Le chiffre des unités est le même que celui des centaines.

**Y a-t-il plusieurs nombres possibles ? Lesquels ?** Indiquez votre raisonnement.

### 6. CARRÉS

**Combien de carrés peut-on compter dans ce dessin ?**



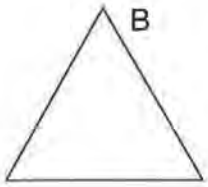
Expliquez votre réponse.

### 7. TUILES TRIANGULAIRES

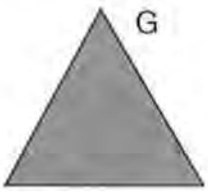
Voici six tuiles en forme de triangle :

une noire

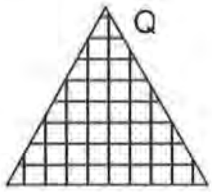

une blanche



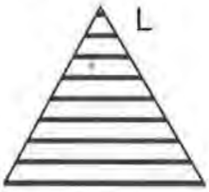

une grise



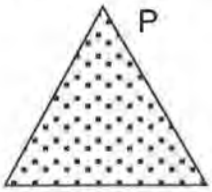

une quadrillée



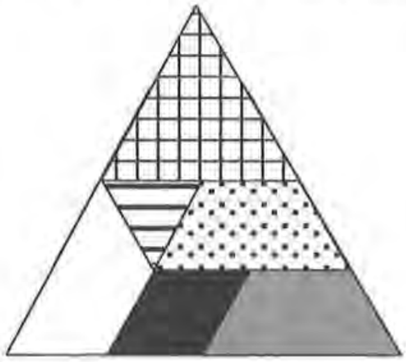

une lignée




une pointillée



On dépose une à une ces six tuiles sur un toit triangulaire. Chaque tuile recouvre en partie celle qu'on vient de poser. Voici ce qu'on voit lorsqu'elles sont toutes placées:



**Indiquez dans quel ordre on a placé les six tuiles de la première à la dernière.**

Expliquez comment vous avez fait pour trouver.

(Fin de l'épreuve pour les classes de 3e.)

## 8. LES SUCETTES

Jacques-André va faire les courses avec son papa.

«Combien coûtent vos sucettes?» demande Jacques-André à la marchande.

«Cela dépend de la grandeur. Nous en avons des grandes et des petites. Une grande coûte autant que trois petites. Avec 80 centimes, tu peux en avoir une grande et une petite.»

«J'en aimerais deux grandes, mais je n'ai pas encore compris combien elles coûtent. Je ne sais pas si j'aurai assez avec 1 Fr.»

**Jacques-André a-t-il assez d'argent pour acheter deux grandes sucettes ?**

Expliquez votre réponse.

## 9. QUI HABITE EN APPARTEMENT ?

Florianne, Loïse, Julie et Aurélie sont quatre amies de la même petite ville.

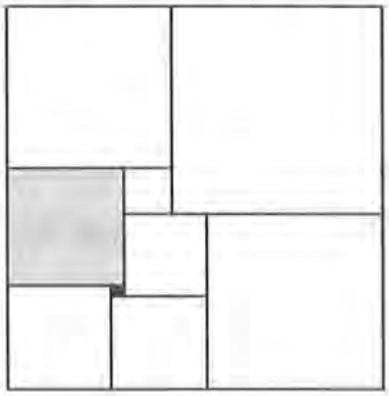
- Julie et sa camarade qui habite une villa se rencontrent régulièrement pour jouer au tennis alors que Loïse et celle qui loge à l'hôtel ne savent pas y jouer.
- La jeune fille qui habite la villa et Florianne ont un vélo de la même marque.
- Loïse habite à quelques centaines de mètres du château.

**Pouvez-vous dire qui habite au château et qui habite en appartement?**

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

(Fin de l'épreuve pour les classes de 4e.)

## 10. RECTANGLE DE CARRÉS

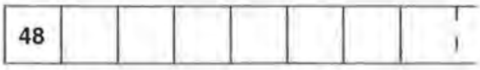


Ce rectangle est formé de neuf carrés. Le petit carré noir a 1 cm de côté, son voisin gris a 10 cm de côté.

**Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?**

Expliquez votre raisonnement

## 11. LE RUBAN




Sur un interminable ruban de papier divisé en cases carrées, on écrit le nombre 48 dans la première case, puis on continue de la manière suivante :

- si le dernier nombre qu'on vient d'écrire est pair, dans la case suivante on écrit sa moitié;
- si le dernier nombre qu'on vient d'écrire est impair, dans la case suivante on écrit la somme des deux derniers nombres écrits.

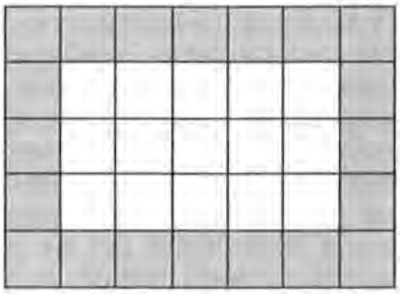
**Quel sera le nombre écrit dans la 94e case ?**

Expliquez comment vous avez trouvé.

## 12. BORDURES

Mombo Tapie est fabricant de couvertures quadrillées. Il aimerait créer un modèle «égalité» qui a autant de carrés gris touchant le bord que de carrés blancs à l'intérieur.

Son apprenti Amal lui a proposé ce modèle qui, malheureusement, ne convient pas, car il a 15 carrés blancs intérieurs et 20 carrés gris sur la bordure.



**Est-il possible de créer des tapis avec autant de carrés gris sur le bord que de carrés blancs à l'intérieur ?**

Expliquez votre réponse.

Dans un prochain article, nous publierons quelques analyses des ré-sultats de cette finale et des épreuves précédentes.

Les personnes intéressées par la cinquième édition du *Rallye mathématique*, qui sera à nouveau international, sont invitées à une réunion d'information et d'organisation,

**le mercredi 25 septembre 1996,**
**de 14h30 à 17h15,**
**au Buffet de la Gare d'Yverdon.**

# Pestalozzi : l'homme des intuitions mathématiques

par Simone Forster, IRDP, Neuchâtel

*On célèbre cette année le 250e anniversaire de la naissance de Johann Heinrich Pestalozzi. Un grand pédagogue qui, face à l'avènement d'une nouvelle société, eut l'intuition de l'importance de l'enseignement des mathématiques.*

La vie de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) s'inscrit dans une époque tourmentée, déchirée par les tumultes révolutionnaires, les guerres et les crises économiques. Les événements historiques se bousculent : fin de l'Ancien Régime, Révolution française, effondrement de la vieille Confédération, épisode napoléonien et Restauration. La Suisse est alors divisée par de graves tensions religieuses et politiques, appauvrie par les invasions des armées de l'Europe et par l'effondrement de son industrie textile, incapable de rivaliser avec les nouvelles machines de la révolution industrielle anglaise. En 1817, une grave famine ravage le pays.

Pestalozzi face à cette nouvelle société industrielle qui, lentement, émerge des bouleversements de l'histoire, sut mettre en lumière le rôle fondamental de l'éducation. «L'homme ne devient homme que par l'éducation». L'usage des machines implique des êtres armés d'outils intellectuels, des esprits critiques, capables de raisonnement. Les mathématiques sont un des instruments indispensables à cette intelligence des choses.

## Un précurseur qui dérange

L'histoire populaire n'a guère retenu les fantastiques intuitions de Pestalozzi ni la vigueur de sa critique sociale. On a préféré garder l'image d'un être fragile, au regard ardent, serrant contre lui des enfants en haillons. Zschokke, historien et commissaire au gouvernement de la République helvétique écrivait déjà : «Il ne pouvait qu'être méconnu. On s'est moqué de lui, on l'a traité de visionnaire, tout comme la populace bafouait Colomb lorsque, de ce côté-ci de l'océan, il parlait d'un nouveau monde». Le nouveau monde que Pestalozzi réservait à ses contemporains fut celui de la pédagogie et de l'instruction obligatoire. Des idées subversives à une époque où les enfants sont occupés à longueur de journée à filer et tisser le coton dans les chaumières, à travailler aux champs ou dans les nouvelles fabriques de textiles.

Pestalozzi revendique une école populaire gratuite et obligatoire quand le travail des enfants est jugé indispensable à la compétitivité de l'économie helvétique. Cinquante ans après sa mort, en 1877, le peuple suisse accepte, à une faible majorité, la loi sur les fabriques, laquelle interdit le travail des enfants de moins de quatorze ans. L'instruction devient alors obligatoire et les enfants de toutes conditions vont bientôt franchir le seuil des classes. Le rêve de Pestalozzi devient réalité.

Qui donc est cet homme qui revendique avec force et détermination le droit à l'éducation ? Qui est cet homme, véritable précurseur des droits de l'enfant ?

## A l'école de la vie

Johann Heinrich Pestalozzi est né à Zurich le 12 janvier 1746. Il n'a pas encore six ans lorsque son père, chirurgien, est emporté par une fièvre maligne. L'enfant grandit, entouré des soins attentifs de sa mère dans l'atmosphère confinée de la *Wohnstube* familiale. Il commence ses classes dans les tristes écoles élémentaires de l'époque où les enfants apprennent leurs lettres et le catéchisme sous la férule du maître. Comme tous les fils de bourgeois, il fréquente ensuite le Collegium Humanitatis puis, dès 1763, le prestigieux Carolinum du Grossmünster. Petit-fils de pasteur, sa voie est toute tracée : humanité, philosophie, théologie. Toutefois, le jeune Pestalozzi se rebelle et renonce au pastorat. Sa vie et son destin sont ailleurs. Pestalozzi reproche à ses maîtres, humanistes éclairés, du Carolinum «d'élever les esprits mais de laisser les mains vides». Ce souci d'application des connaissances va demeurer constant dans son œuvre pédagogique.

## Une découverte bouleversante

La parution de l'*Emile* de Rousseau, en 1762, va bouleverser la vie de Pestalozzi. Cette lecture fut «comme un embrasement» et le jeune homme, fidèle à ses principes, décide de «donner des mains» aux idées du grand philosophe. Le concept de nature doit engendrer des pédagogies qui permettent à chaque être d'éclore, c'est-à-dire de devenir ce qu'il est vraiment.

Pestalozzi, héritier du siècle des Lumières, va défendre avec fougue les idéaux révolutionnaires. Il veut élever la condition des hommes par l'éducation car éduquer c'est «se faire libre». Pour cela il rêve de «doter le peuple jusqu'en son foyer domestique, de procédés d'enseignement simplifiés».

## L'école et l'atelier

En 1769, Pestalozzi épouse Anna Schultess, quitte Zurich et s'installe à Birr en Argovie où il fait construire une ferme modèle, le Neuhof. L'agriculture ne lui réussit guère; les terres sont ingrates et les récoltes mauvaises. Dès 1773, Pestalozzi accueille les enfants pauvres des paysans et les petits mendiants qui courent les campagnes. Il tente, dans l'esprit du Contrat social, d'instituer une communauté autogérée où l'intérêt commun se confond avec celui de chacun. Les enfants cultivent la terre, filent le coton, apprennent à lire et à écrire. Associer travail et instruction est un principe de la pédagogie de Pestalozzi. L'école n'a de sens à ses yeux qu'associée à l'atelier car il faut assurer aux enfants les moyens d'une existence. Mauvaises récoltes et dettes s'accumulent et la petite entreprise du Neuhof qui accueillait quelque quatre-vingts enfants fait faillite. Ruiné, Pestalozzi écrit alors la plupart de ses ouvrages dont son célèbre roman populaire *Léonard et Gertrude* (1781). Sa renommée grandit. La France et l'Allemagne célèbrent ses talents.

## Une nouvelle pédagogie de la relation

Ce sont les tumultes de l'histoire qui vont permettre à Pestalozzi de réaliser son rêve : «devenir un maître d'école». Il obtient du gouvernement de la nouvelle République helvétique la tâche de diriger, à Stans, un orphelinat pour les nombreux enfants victimes de l'intervention d'un corps d'armée français. De janvier à juin 1799, seul au milieu des plus démunis, Pestalozzi va mettre en oeuvre ses idées. Il développe un climat de confiance et d'estime réciproque, une véritable «pédagogie de la relation». La sécurité affective doit précéder tout apprentissage. Aucun enseignement, aucun règlement ne sont conçus d'avance : «les deux devaient naître de ma relation avec les enfants». La démarche fait merveille et les visiteurs s'étonnent de la concentration et du travail des enfants. «Apprendre était, pour presque tous, quelque chose d'entièrement nouveau; et dès qu'ils virent qu'ils réussissaient, leur zèle devint infatigable».(...) «D'après mes expériences, le succès dépend de ce point : que toute chose enseignée aux enfants s'en fasse accepter comme vraie et soit intimement liée à une expérience intuitive et sensible.»*

Cette extraordinaire expérience est interrompue par la guerre et l'asile des orphelins transformé en hôpital militaire. Pestalozzi rédige alors l'admirable *Lettre de Stans*, laquelle évoque déjà les grands principes de sa Méthode.

## Deux laboratoires de recherches pédagogiques

De 1800 à 1805, Pestalozzi dirige un institut d'éducation au château de Berthoud. Il ouvre aussi une école normale. L'institution devient un véritable laboratoire de recherches pédagogiques. Les publications se succèdent. A l'automne 1801 paraît *Comment Gertrude instruit ses enfants*, quatorze lettres qui expliquent la Méthode, ses origines, sa structure, son esprit. Les élèves affluent. On vient de l'Europe entière s'initier à la pédagogie de Pestalozzi. L'établissement doit fermer ses portes, en 1805, en pleine prospérité. Le nouveau gouvernement de Berne veut en faire la résidence du préfet.

Pestalozzi répond à l'offre du Conseil municipal d'Yverdon et ouvre un nouvel institut dans le château de la ville. De 1805 à 1825, soit de 59 à 79 ans, il va poursuivre son œuvre de pédagogue. Yverdon comme Berthoud ne tarde pas à devenir une institution renommée qui accueille nombre d'élèves de Suisse et d'Europe. La Méthode a toutefois ses détracteurs. On reproche à Pestalozzi la prééminence des mathématiques et l'insuffisance de l'enseignement religieux. Querelles et intrigues divisent les professeurs et en 1826, Pestalozzi quitte Yverdon et se retire au Neuhof. Il meurt le 17 février 1827 à Brugg à l'âge de 81 ans.

## Intuition d'une méthode, Méthode de l'intuition

Pestalozzi dénonce l'enseignement de son temps : «Nos écoles, avec leur système anti-psychologique, ne sont pas autre chose que d'ingénieux étouffoirs qui détruisent tous les fruits de cette vigueur et de cette faculté d'apprendre que la nature a déposés en nous.»* Sa Méthode doit libérer les forces de vie des êtres et permettre à chacun de se faire libre. Elle trouve son principe dans l'enfant lui-même, dans sa manière de la vivre et de se l'approprier. Son fondement est l'intuition (*Anschauung*) c'est-à-dire l'expérience personnelle directe et la sphère plus intime des sentiments, des émotions, de l'affectif. Il faut partir de l'enfant, de son vécu, de ses représentations.

Les connaissances partent de l'intuition mais il leur faut un enchaînement, un ordre de développement. «Il doit y avoir pour chaque branche du savoir des séries d'exercices dont le point de départ soit à la portée de tous (intuition) et dont l'enchaînement régulier (gradation), mettant les facultés de l'enfant toujours en œuvre, sans les épuiser, ni même les fatiguer, contribue à un progrès facile et attrayant»*. L'enfant passe d'un exercice à l'autre à son rythme, sans hâte. Les éléments des connaissances deviennent palpables, accessibles. Ils sont placés entre les mains des enfants afin que ceux-ci se les approprient et créent ainsi les matières qu'ils ont à étudier. Aucune comparaison dans les apprentissages, aucune note, aucune compétition ni jugement de valeur. Le maître qui applique la Méthode apprend avec les enfants; son rôle est de guider les apprentissages sans presser ni pousser.

## Des succès en mathématiques

Les enfants découvrent le monde en apprenant le nom des choses qui les entourent, en les palpant et en les dénombrant. L'enseignement dans les petites classes doit donc suivre ce chemin d'acquisition des connaissances et se fonder sur le nom, la forme et le nombre. Ces apprentissages passent par les sens et doivent s'intégrer à l'expérience immédiate. La matière enseignée se construit sur les éléments les plus simples des connaissances.

L'arithmétique, cette science du nombre, s'enseigne avec des objets concrets: cailloux, noix, pommes etc. On additionne, on soustrait, on multiplie, on divise. Des petites questions : quand tu as deux pierres, combien de fois as-tu une pierre ? Et Pestalozzi d'insister sur l'importance de cette phase de manipulations, essentielle à tout apprentissage du calcul. «Combien de fois 7 dans 63 ? (...) L'enfant a sous les yeux neuf fois sept objets, il a appris à les compter comme 9 «7» placés les uns à côté des autres : il n'a donc pas à se creuser la tête pour répondre à cette question; il sait positivement, par ce qu'il a appris déjà, ce qu'on lui demande maintenant, bien qu'on le lui demande pour la première fois, à savoir que 7 est contenu 9 fois dans 63. Il en est de même dans toutes les branches de la méthode»*.

Pestalozzi invente des tableaux de calcul qui «servent de guide au même titre que l'abécédaire» (voir annexe). «Lorsque l'enfant s'est exercé à compter avec des objets et avec les points ou les traits qui les remplacent, lorsqu'il a étudié jusqu'au bout ces tableaux, la connaissance des rapports des nombres est si bien enracinée dans son esprit que les procédés abréviatifs par les chiffres ordinaires sont saisis avec une facilité incroyable.»* La géométrie s'enseigne de la même manière. Les enfants manipulent les formes avant d'en découvrir les propriétés.

Les visiteurs de Berthoud et d'Yverdon sont stupéfaits de l'ardeur au travail des enfants, du plaisir qu'ils prennent à ce qu'ils font et des résultats obtenus. C'est particulièrement vrai pour le calcul où Pestalozzi fait usage de tableaux qui visualisent les opérations les plus difficiles. Il a des idées nouvelles comme celles d'associer écriture et dessin ou de faire dériver l'apprentissage des fractions du carré et de ses divisions.

* Citations tirées de *Comment Gertrude instruit ses enfants* et *Lettre de Stans.*

## Expérimentation des méthodes de mathématiques

Les méthodes mathématiques sont expérimentées par Joseph Schmid, lequel publie en 1908 un *ABC de la perception mathématique*. Elles firent l'admiration des témoins de l'époque : « J'étais saisi de vertige quand je voyais ces enfants se jouer des fractions les plus compliquées comme de la chose la plus simple du monde. Je leur proposais des problèmes que je ne pouvais résoudre sans un travail sérieux et soutenu (...); ils faisaient leur calcul dans leur tête fort tranquillement; au bout de quelques instants, ils donnaient la réponse juste et ils expliquaient leur problème avec la plus grande facilité».

## La percée des mathématiques

Les mathématiques n'étaient guère enseignées à l'époque de Pestalozzi. Dans les écoles élémentaires, classes d'abécédaires et classes de grammaire se concentraient sur la lecture des Saintes Ecritures et la mémorisation du catéchisme. Seules quelques écoles communales, dans les cantons protestants surtout, prodiguaient un enseignement du calcul. Les résistances à cette discipline étaient grandes. L'arithmétique, issue de la culture marchande, détournait les écoles de leur mission : celle de former à la piété. Dans les écoles latines, la science des nombres est aussi suspecte. On la considère comme un savoir professionnel qui n'a guère sa place dans les humanités. Les mathématiques ne vont véritablement pénétrer dans les classes qu'au milieu du XIXe siècle avec l'avènement de la société industrielle.

Pestalozzi perçut l'importance de l'enseignement des mathématiques dans un monde en voie d'industrialisation. Ce pédagogue de l'intuition fut à vrai dire un homme d'intuitions.

***Annexe***

**Tableaux de calcul**

tirés de *Exposé de la Méthode Elémentaire* de H. Pestalozzi, par Dan.-Alex. Chavannes, Vevey, 1805.

Les tableaux de calcul servent à fixer dans l'esprit de l'enfant les rapports réels qui sont le point de départ de toute opération d'arithmétique; ils donnent une impression vive et durable des rapports numériques. Ainsi l'enfant assimile les rapports réels de toutes les fractions; et les opérations qu'il effectue sur ces fractions en se servant des chiffres ordinaires, sont bien facilitées. L'enfant compose et décompose les nombres et leurs rapports. Le travail est ainsi simplifié, clair et précis. (Extraits de *Comment Gertrude instruit ses enfants*, pp. 165 à 172).

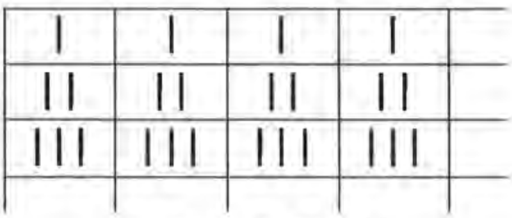


Tableau 1 (extrait)

Chaque tablette représente une unité; puis successivement on ajoute 1 tablette = 2; encore 1 tablette = 3; encore 1 tablette = 4; et ainsi jusqu'à 10. Ceci donne la notion de *l'addition*.

Même présentation de tablettes, mais on demande à l'enfant : Quand tu as deux tablettes combien de fois as-tu *une* tablette ? Il répond : Quand j'ai deux tablettes, j'ai deux fois *une* tablette, etc. Ceci donne *la multiplication*.

Puis on demande à l'enfant : Combien y a-t-il de fois *un* dans *deux* ? Combien y a-t-il de fois *un* dans *trois* ? Puis combien de fois *un* est-il contenu dans *deux*, dans *trois*, etc. ? Ceci donne la notion de *division*.

Puis des dix tablettes, on en ôte *une*, et on demande : Quand tu as ôté *un* de *dix*, combien reste-t-il ? L'enfant compte et trouve *neuf*. On ôte *un* de *neuf*, combien reste-t-il ? L'enfant compte et trouve *huit*. Ceci donne la notion de *soustraction*.

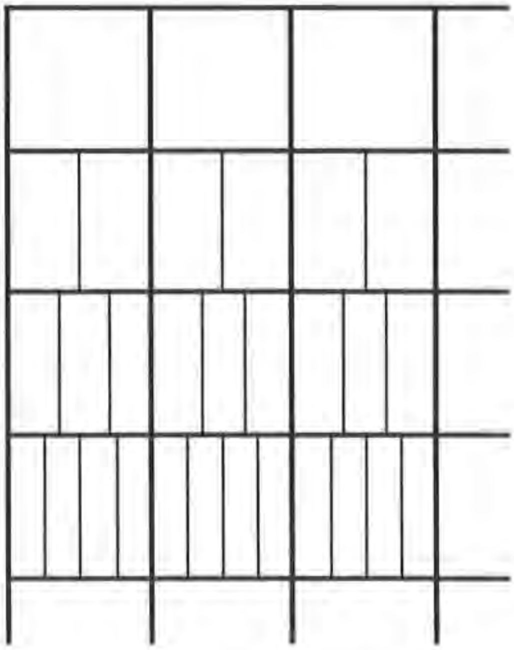


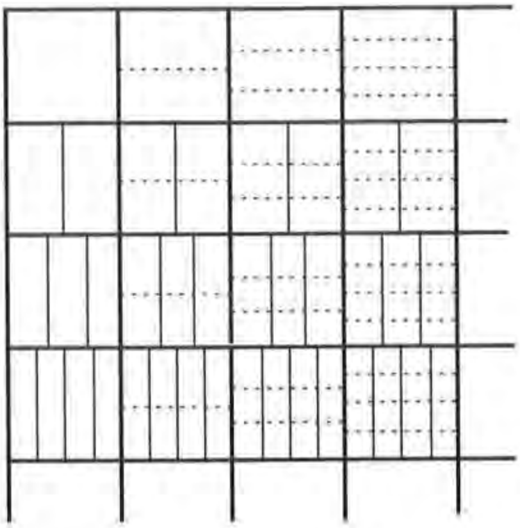
Tableau 2 (extrait)

Les rapports numériques sont remplacés par des traits. C'est l'étude des *fractions*.

La *base* est le nombre *un* ou le *carré*. Ce sont des séries progressives de fractions à partir du nombre un.

Le tableau intuitif des fractions comprend dix rangées, composées chacune de dix carrés. Les carrés de la première rangée sont entiers. La seconde rangée, les carrés sont partagés en *deux* parties égales, et ainsi jusqu'à dix parties. Ce sont donc les 1/2, 1/3, 1/4, etc.

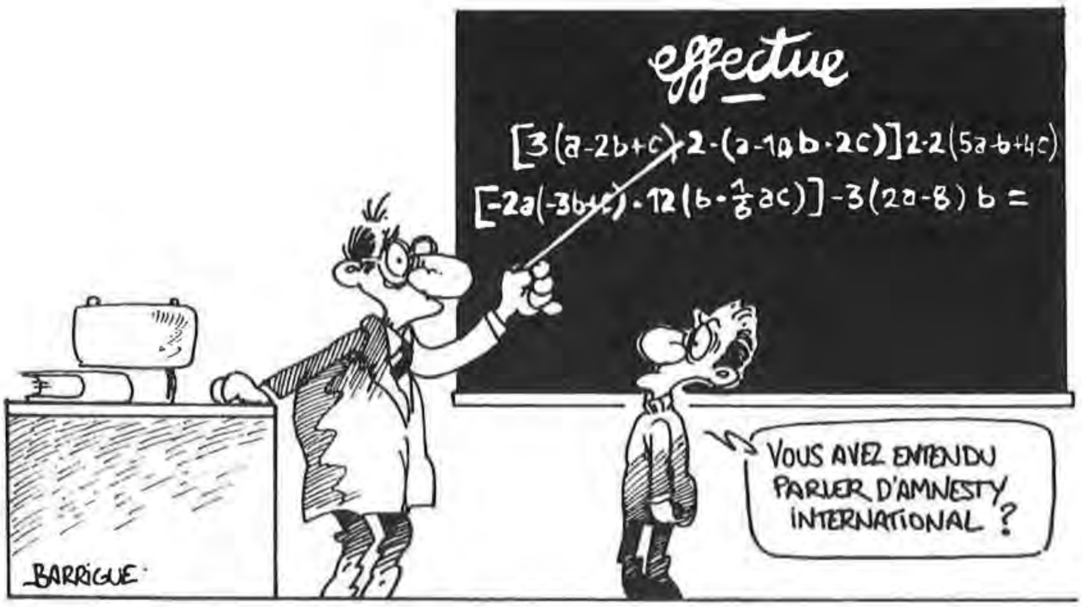
Tableau 3 (extrait)



Ce sont les fractions de fractions. Les rapports numériques sont remplacés par des traits ou des points.

Les carrés sont partagés:

Premier rang en: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 parties.
Deuxième rang en: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 parties.
Troisième rang en: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 parties.
Quatrième rang en: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 parties.
Cinquième rang en: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 parties.
Sixième rang en: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 parties.
etc., jusqu'à 100, ou centièmes.



# L'enseignement moderne de la mathématique

**Samuel Roller**

**Bellinzona, jeudi 24 avril 1969**

1. **Introduction. Le monde dans lequel nous sommes**
2. **La mathématique actuelle**
3. **L'enseignement nouveau de cette mathématique**
4. **Conclusion. La mathématique et l'homme**

***Note de la rédaction** (fj)*

*L'intitulé de cet article est inhabituel. par sa présentation, son titre et sa date. En fait, il s'agit du texte d'une conférence donnée par Samuel Robert il y a vingt-sept ans. Au vu de cet éloignement dans le temps, il est nécessaire de rappeler quelques éléments du contexte historique dans lequel cette présentation a été tenue en 1969 :*

*Nos cantons venaient de décider de coordonner leurs efforts dans le domaine de l'enseignement. Le plan d'études romand (CIRCE I) n'était pas encore en vigueur mais on y travaillait. On savait à cette époque que la coordination commencerait par l'élaboration de moyens d'enseignement des mathématiques et on avait des idées précises sur leur contenus, inspirés des expériences du canton de Genève. Cette réforme n'était pas fortuite, ses courants se manifestaient un peu partout dans notre monde occidental depuis la fin de la guerre. C'était le temps des premières rencontres internationales sur l'enseignement des mathématiques (la fondation de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques -CIEAEM - remonte à 1952), des innovations et des pionniers comme G. Cuisenaire, C. Gattegno, G. Papy, N. Picard, Z. Dienes, des réglettes, des blocs logiques, des arcs et des flèches, ... .*

*La Suisse romande ne restait pas en arrière et les idées des réformes y rencontraient un écho très favorable. Le Tessin était aussi intéressé par ces innovations. Il proposait à ses maîtres des conférences sur le sujet. Et c'est précisément pour l'une de celles-ci, tenue le 24 avril 1969 à Bellinzona et répétée le lendemain à Biasca, que le texte suivant a été rédigé.*

*Le professeur Samuel Roller était alors directeur du Service de la recherche pédagogique de Genève. Il n'était pas mathématicien mais, comme il l'affirme encore aujourd'hui, il se considérait comme un «instituteur» et, par conséquent, s'intéressait à toutes les disciplines. Auteur de cahiers de conjugaison française, il était aussi le fondateur du bulletin Les Nombres en couleurs qui est devenu, quelques années plus tard, la revue Math-Ecole.*

*On était donc, alors, à la veille d'une réforme importante de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande, celle des années septante, qui innovait et* *coordonnait tout à la fois; celle qu'on connaît sous l'appellation de «maths modernes»; celle de «la» mathématique.*

*Aujourd'hui, aussi, nous nous retrouvons en face d'un changement profond : celui qui est induit par la nouvelle édition des moyens d'enseignement «Mathématiques 1P-4P» et par tous les débats qui l'accompagnent.*

*Nous sommes à un tournant important de l'enseignement des mathématiques dans nos écoles, le dernier de ce siècle. C'est à ces moments-là qu'il est intéressant de jeter un regard sur notre passé récent et encore bien vivant , de s'accorder le temps de quelques pages de réflexion. C'est ce que propose Math-Ecole à ses lecteurs. En espérant qu'ils s'aperçoivent qu'une réforme ne se fait pas toujours «contre» la précédente, mais peut parfois en intégrer les éléments vraiment novateurs, avec l'éclairage que nous donne les instruments actuels de la didactique des mathématiques.*

---

## 1. LE MONDE DANS LEQUEL NOUS SOMMES

Au nombre des **caractéristiques** du monde d'aujourd'hui (parmi d'autres) :

- L'essor de la science et de la technique
- La double loi de la dimension et de la complexification
- L'accélération du changement

### *1.1 L'essor de la science et de la technique*

Essor **quantitatif** :

- Le volume du savoir humain double tous les 10 ans.
- Les découvertes biologiques se font au rythme de une à deux par mois.
- Le nombre des revues scientifiques, qui était de cent vers 1800, sera vraisemblablement de un million en l'an 2000.

Essor **qualitatif** :

Mais cet essor quantitatif, la science le doit à son développement **qualitatif**. Elle a perfectionné son édifice en réorganisant ses théories par une mise à jour de quelques grandes idées simples qui ordonnent l'acquis, mettent en lumière les raisons profondes des succès passés et ouvrent les voies de l'avenir.

Cet effort conduit la science à trouver des moyens nouveaux et plus puissants **d'expliquer** les phénomènes. Pour cela elle tente de dégager le plan de construction et les lois de fonctionnement. Mais ce plan de construction elle le découvre, non pas en structurant le réel et en se laissant informer par lui - ce que faisait Francis Bacon -, mais en commençant par **inventer** des plans qu'elle tire de son expérience et qu'elle confronte ensuite, a posteriori, au réel. Si une adéquation se produit entre le plan et le réel, la vérité - ou du moins une part de vérité - est acquise. Si cette adéquation ne se produit pas, la recherche reprend son cours entraînant le savant à élaborer de nouveaux plans.

Ces plans théoriques sont ce qu'on appelle des **modèles**. Le savant les construit méthodiquement et s'appuie, pour ce faire, sur les **mathématiques**.

Au nombre de ces modèles sont par exemple, les **espaces**.

La physique de Newton est construite sur l'espace de la géométrie d'Euclide (300 avant J.-C.).

La physique d'aujourd'hui, elle, se construit sur d'autres espaces. La relativité d'Einstein adopte l'espace de B. Riemann (1826-1866) qui pose que par un point on ne peut faire passer aucune parallèle à une droite donnée.

La théorie des quanta de Planck, celle de la mécanique quantique de Heisenberg adoptent l'espace des opérateurs de D. Hilbert (1862-1943), qui est un espace pluri-dimensionnel.

La **mathématique**, en fournissant à l'homme de science les modèles explicatifs du réel, prend le caractère d'un langage. Elle est, entre l'homme et le réel, l'intermédiaire - le truchement - qui rend ce réel intelligible. Notons que si la science doit son prodigieux essor actuel à l'outil mathématique c'est, souvent les besoins mêmes de la recherche scientifique qui ont suscité l'activité exploratrice des mathématiciens.

Si la science est constituée par un ensemble de **savoirs**, elle produit des **savoir-faire** qui constituent la **technique**. Ces savoir-faire techniques sont essentiellement des **machines**. Il y a eu - et il y a encore - celles qui relaient le muscle et la main de l'homme : du moteur à la chaîne de production. Il y a aussi - et cela est nouveau et relativement récent - les machines qui relaient le cerveau de l'homme : les **ordinateurs**.

Ceux-ci sont le produit direct de la mathématique. Ils sont faits par elle et ils l'aident à se faire. Le cerveau humain se dilate : processus d'encéphalisation des activités de l'homme. Si l'homme a réussi sur la planète Terre c'est à cause de son cerveau. S'il veut continuer à réussir ce sera en se donnant un cerveau toujours plus vaste et toujours plus puissant. «La puissance d'un pays, dit Alain Jenny, sera de plus en plus fonction du nombre et de la capacité de ses ordinateurs».

### *1.2 La double loi de la dimension et de la complexification*

Les entreprises humaines industrielles, commerciales ou agricoles fusionnent pour grandir et donner plus de puissance. La recherche du profit peut expliquer ce processus. Mais, sous-jacent, il y a un fait capital et aussi nouveau : pas de progrès sans une analyse toujours plus fine des processus de production, sans une recherche attentive, professionnelle, longue et méthodique. Cela entraîne des frais énormes et commande la collaboration. La collaboration, au sein d'entreprises devenues très grandes, implique à son tour une organisation très poussée des tâches et des études spéciales. Le progrès impose l'agrandissement mais un agrandissement plus qualitatif que quantitatif qui rende possible la diversité des tâches, les spécialisations. Cela entraînant un processus de complexification extrêmement poussé.

Ce processus s'observe dans tous les secteurs de l'activité humaine. Le CERN en est un exemple : l'analyse de plus en plus fine des composantes ultimes de la matière (le noyau de l'atome) a exigé la construction d'accélérateurs à protons qui ne peuvent voir le jour que par la collaboration de nombreux pays, de nombreux savants.

Mais de nouveau, le problème de l'outillage mental se pose : pour planifier les recherches, pour formuler les hypothèses, pour faire aboutir les travaux. Et, ici aussi, le recours à la mathématique s'impose. C'est elle qui fournira les règles d'organisation et assurera le fonctionnement des organismes géants. Recherche opérationnelle.

### *1.3 L'accélération du changement*

Tout dans le monde se modifie à une allure exponentielle. Chaque génération apporte avec elle plus de changements que toutes celles qui l'avaient précédée.

Les hommes ainsi, entraînés dans ce tourbillon, auront, de plus en plus souvent, à changer d'occupation, voire de profession au cours de leur carrière productive.

«Le citoyen, dit Elgozy, est condamné aux travaux forcés de l'adaptation à perpétuité. Pendant toute sa vie, il devra refaire ses classes : réviser ses connaissances, ses méthodes, ses outils. Et toutes ses habitudes, à commencer par ses vertus de tradition dont les plus traditionnelles deviennent des vices.»

«L'homme, a dit encore Paul Valéry, doit se disposer à affronter ce qui n'a jamais été [et qui, certainement, sera].»

Comme par ailleurs, il est presque toujours impossible de savoir ce que demain sera, il faut repenser fondamentalement, le problème de l'équipement de ceux qui vivront ce demain lourd de choses inconnues et imprévisibles. Cet équipement, de nature essentiellement instrumental, pourrait bien, encore une fois, être de la mathématique, en ce sens qu'elle fournit à l'homme, moins des connaissances statistiques utilisables dans un petit nombre de secteurs bien délimités, que des instruments de pensée dynamiques et polyvalents utilisables dans les situations les plus diverses et les plus neuves.

### *1.4 Conclusion*

L'expansion de la science et de la technique, la complexification et l'ampleur des tâches humaines, l'accélération du changement exigent que l'on prenne soin de l'organe qui seul permettra à l'homme de dominer ses tâches, le **cerveau**.

Si, physiologiquement et psychiquement, il faut lui assurer une hygiène de haute qualité, il faut aussi, pédagogiquement l'entraîner à travailler de la manière la plus profitable. Et cet entraînement, il se trouve que c'est l'apprentissage de la mathématique qui le lui assurera le mieux. Car cette mathématique est essentiellement instrumentale. Elle n'est pas quelque chose d'extérieur à l'esprit humain. **Elle est cet esprit lui-même travaillant au plus haut niveau.** C'est l'outil de l'adaptation de l'homme aux exigences de son époque.

«Au temps de la machine à vapeur, il suffisait que certains ingénieurs seuls sachent la théorie de l'intégration; à l'époque des ordinateurs et de l'automatisation, la lecture d'un organigramme et le maniement des symboles doivent faire partie de la culture de tous» (Charte de Chambéry, Pâques 1968). Si au temps de cette même machine à vapeur, il suffisait, à l'homme moyen, de savoir les quatre opérations pour se tirer d'affaire dans la vie, aujourd'hui, celui qui ne posséderait que ce bagage, fait figure de sous-développé.

L'apprentissage de la mathématique est ainsi, moins un problème d'instruction de l'individu, qu'un problème **d'éducation**. C'est surtout, un esprit mathématique qu'il faut désormais communiquer à la nouvelle génération, une attitude mathématique, le goût et les moyens d'opérer, en toute chose, selon les règles de la raison droitement conduite.

## 2. LA MATHÉMATIQUE ACTUELLE

### *2.1 Des mathématiques à la mathématique*

Il n'existe pas d'anciennes mathématiques, dépassées, et une mathématique nouvelle, plus juste et plus vraie. Il n'existe, en réalité qu'**une** mathématique en évolution depuis 2000 ans. Ce qui a changé, au cours de l'histoire, ce qui a augmenté, c'est la prise de conscience des lois et des structures de la mathématique, prise de conscience plus profonde aujourd'hui qu'hier, moins pénétrante que demain. Ainsi peut-on définir la mathématique actuelle comme «la conception constructive, axiomatique et structurelle des mathématiques» (Charte de Chambéry).

L'ancienne mathématique égale une sorte de science d'observation : on démontrait une foule de théorèmes sur les propriétés des nombres ou des figures, tout comme en biologie on observe la croissance d'une plante. Aujourd'hui, en biologie, on se demande **pourquoi** la plante pousse. Idem en mathématique contemporaine : on examine **pourquoi** les nombres et les grandeurs permettaient aux théorème d'être vrais (Cahier EDMA 40, page 1). Avant, on décrivait des collections (nombres, points), aujourd'hui on étudie les propriétés de ces collections, on cherche si d'autres collections ont les mêmes propriétés, on invente de nouvelles collections avec d'autres propriétés.

Le renouveau - qui est un renouveau de mise en ordre, de structuration de l'édifice mathématique - a pu être comparé à l'opération d'un urbaniste mettant de l'ordre dans une ville crue au hasard des siècles.

Ce renouveau est de taille et il prend le caractère d'une **mutation intellectuelle**. Et celle-ci s'est produite - et continue à se produire - à un rythme qui dépasse de fort loin celui du renouvellement des générations humaines.

## *2.2 L'édifice mathématique actuel*

### 2.2.1 Caractères fondamentaux

La nouvelle mathématique se caractérise par son **unité**, son **dynamisme** et sa **liberté**.

Son **unité**. Elle est la science des structures qui englobent les secteurs classiques qui, par rapport au nouvel ensemble prennent figure de cas particuliers (géométrie euclidienne, trigonométrie, algèbre, géométrie analytique).

Son **dynamisme**. Elle est la science des **opérations**. L'ancienne mathématique était **statique**. La géométrie d'Euclide, par exemple, étudiait la nature des figures et leurs propriétés. La nouvelle mathématique est **dynamique** : elle met l'accent sur les notions de transformations et d'applications.

Sa **liberté**. Elle est une science dont la nature est de s'auto-transformer, de s'auto-perfectionner. Il apparaît toujours possible d'inventer de nouvelles structures avec de nouveaux axiomes. L'ancienne mathématique prédisposait au déterminisme. La nouvelle ouvre la porte à la liberté, celle de l'invention perpétuelle. Avec elle on passe de la raison close (fermée sur des axiomes immuables) à la raison **ouverte**.

Les mathématiques fournissent un nouveau langage à la pensée qui, par elles, est mieux structurée, plus cohérente, plus efficace. Nul ne peut avancer s'il n'est mathématicien.

### LA MATHÉMATIQUE

De l'allocution d'André Delessert (université de Lausanne) à la journée d'étude du GRETI[1] sur «**Mathématique moderne et technologie éducationnelle**» :

Reprenant une vieille image, on a justement pu opposer les **mathématiques faites** et les **mathématiques à faire**. Les mathématiques faites sont presque entièrement contenues dans les ouvrages et les publications agréés par les mathématiciens. Les mathématiques à faire, dans une situation

---

[1] [ndlr] : Groupe de réflexion et d'étude sur l'éducation et les techniques d'instruction.

historique donnée, comportent, outre les connais-sances mathématiques acquises, l'en-semble des problèmes ouverts qui en naissent, la tendance ou le besoin de les attaquer, les critères d'utilité, d'intérêt ou de beauté qui vont influencer la démarche du chercheur.

Dans l'école traditionnelle, le maître se place au point de vue des mathématiques faites, tandis que l'élève - tout comme le chercheur, d'ailleurs - se meut dans le monde des mathématiques à faire. L'évolution à laquelle on assiste aujour-d'hui, et dont il faut reconnaître qu'elle est préconisée depuis longtemps par de nombreux esprits clairvoyants, a pour but d'amener le maître, lui aussi, dans le domaine des mathématiques à faire. L'enseignement traditionnel se définissait en termes de **programmes**. L'enseigne-ment d'aujourd'hui se détermine en termes d'**objectifs de pensée et d'action**. Le but premier n'en est plus d'étudier le triangle, ou les fractions ordinaires, ou l'espace vectoriel; c'est d'apprendre à inventorier, à classer, à ordonner, à choisir, à décider, à critiquer, à corriger et aussi d'acquérir l'envie de comprendre.

### 2.2.2 Les concepts de bases

La mathématique nouvelle est plus abstraite que l'ancienne en ce sens qu'elle véhicule avec elle moins d'éléments concrets mais, en revanche, elle prend son appui sur des données intuitives simples et naïves.

La mathématique d'avant 1800 s'appuyait sur les notions de point, de ligne droite, de courbe, de tangente, de surface, de fonctions, d'infiniment grand, de sommes infinies.

Au 19ème siècle, la donnée intuitive se réduit à l'ensemble des nombres réels.

Aujourd'hui, le champ intuitif se restreint encore. Il se limite à la théorie intuitive des **ensembles**. En revanche, la mathématique, dépassant le plan des choses, des objets, s'intéressera fondamentalement aux **relations** entre ces objets et aux **opérations** qui en découlent. Georges Boole, 1854 : «Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper des idées de nombre et de quantité, mais les mathématiques traitent des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées.»

La nouvelle mathématique s'appuie désormais sur trois piliers qui sont les concepts d'**ensembles**, de **relation** et de **structure**.

#### La notion d'ensemble

Un ensemble ne se définit pas. C'est une donnée intuitive de base. C'est une collection d'objets, mais d'objets rigoureusement qualifiés, cette qualification seule les autorisant à être admis dans l'ensemble. A l'ensemble correspond la notion logique de **classe**, notion qui a aussi un caractère épistémologique puisque toute connaissance suppose attribution à une classe, et cette opération consiste à conceptualiser.

Si, au sein de l'ensemble, on définit des sous-ensembles, ceux-ci peuvent donner lieu à trois opérations universelles : la réunion, l'intersection et le complément. Boole a montré, en 1854, que la logique des propositions d'Aristote (base elle-même de tous nos raisonnements) avait la même **structure** que les sous-ensembles d'un ensemble.

A l'intersection correspond la conjonction **et** [Un bloc jaune **et** carré].

A la réunion correspond la conjonction **ou** (non exclusive) [Les blocs jaunes **ou** carrés].

A la notion de complément se rattachent le principe du **tiers exclu** (une proposition est vraie ou fausse) : dans un ensemble, il ne peut y avoir qu'un sous-ensemble et son complément, et le principe de la **non-contradiction** : un sous-ensemble et son complément ne peuvent pas avoir des éléments communs (une proposition et sa négation ne peuvent être vraies en même temps).

### Les notions de relation et de structure

Les éléments d'un ensemble peuvent être mis en relation avec les éléments du même ensemble ou avec les éléments d'autres ensembles.

Cette notion englobe la notion de fonction et sert à définir un certain nombre d'opérations qui permettent de passer d'un élément à un autre élément. Quand ces derniers sont symbolisés et que les relations entre eux sont posées comme vérités premières de départ, on aboutit à l'axiomatisation. Les axiomes sont des relations.

Les relations qui unissent entre eux les éléments des ensembles peuvent donner lieu, selon les opérations qu'elles expriment et selon la nature des éléments que celles-ci combinent, à des figures particulières qui sont les **structures.**

Ainsi a-t-on les structures de groupes, d'anneaux et de corps.

La structure de groupe est particulièrement féconde. C'est un système de relation qui unit les éléments d'un même ensemble au moyen d'une opération interne (on reste toujours dans le même ensemble) telle que deux éléments combinés au moyen de cette opération donnent un élément du même ensemble. De plus, on distingue dans cet ensemble, un élément particulier, l'élément neutre qui combiné avec un autre élément ne change pas ce dernier. De plus, chaque élément a toujours, au sein de l'ensemble, son inverse ce qui veut dire que cet élément combiné avec son inverse donne l'élément neutre. Enfin les opérations, au sein du groupe, sont associatives.

### Exemples du groupe abélien à 4 éléments

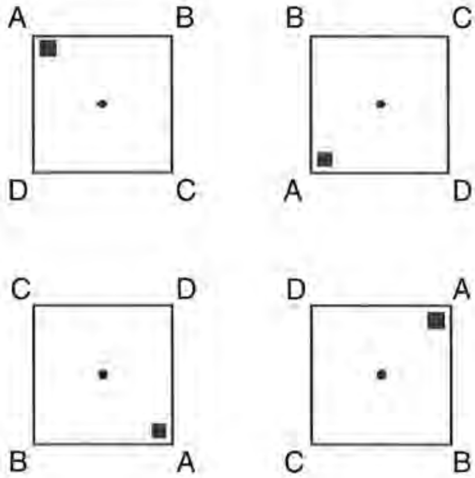
a) La classe des restes, modulo 4

Les classes de reste, modulo 4 : 0 1 2 3

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

b) Les rotations du carré

Rotation du carré




| + | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

Remarques :

a) Les deux ensembles ont une structure. Isomorphisme. Caractère de généralité de ce groupe. Instrument d'investigation. Modèle.

b) La notion d'ensemble permet de faire de la mathématique avec n'importe quoi. Mathématiser ce n'est pas opérer avec des nombres, c'est établir des relations avec **n'importe quoi** et systématiser ces relations. Et comme les relations sont des opérations; mathématiser, c'est **opérer**; c'est **transformer**.

c) A propos des systèmes de relations que sont les structures, le mathématicien Kurt Gödel (né en 1906 en Autriche) a montré, en 1938 qu'il était impossible d'obtenir un système qui fût à l'abri de la non-contradiction. Les mathématiques ne pourront donc jamais répondre à toutes nos questions. Ainsi la vérité, même mathématique, est relative. Un théorème vrai dans un système d'axiomes peut être faux dans un autre.

Le 20ème siècle a détruit le mythe des mathématiques dépositaires de la vérité universelle et absolue. Mais en même temps, il a décuplé leur puissance pratique : les mathématiques pénètrent dans tous les domaines.

### *2.3 Les applications de la mathématique actuelle*

A propos des **nombres** de la mathématique

- Les entiers naturels (N) - Dénombrement d'objets en nombres finis.
- Les entiers relatifs (Z) - Monnaie, commerce.
- Les nombres rationnels (Q) - Partages, poids et mesures
- Les nombres réels (R) comprenant, les nombres rationnels et irrationnels ( $\sqrt{2}$ , $\pi$) - Géodésie, cartographie.
- Les nombres imaginaires ($\sqrt{-1}$) - Electronique, architecture, résistance des matériaux.
- Les vecteurs à n dimensions - Force, astronomie, physique des atomes.
- Les espaces de fonctions (la mathématique du 20ème siècle travaille sur des doublets, des triplets, de n-uplets de fonctions. Et là, aux opérations classiques (addition, multiplication) s'ajoutent d'autres opérations : la dérivation, l'intégration, etc.).

L'histoire des sciences montre qu'aucune théorie mathématique, aussi abstraite, irréelle ou dénuée d'intérêt qu'elle ait pu paraître au premier abord, n'est restée sans applications pratiques.

#### Mathématique (abstraite) et applications

Les dérivées que l'évêque George Berkeley (1685-1753) nommaient «des fantômes de quantités disparues» servent à tous les ingénieurs. Les nombres complexes que le 17ème siècle qualifiait d'»irréels» interviennent dans les calculs des postes de TV et dans tous les problèmes d'électricité. Les matrices sont couramment employées depuis 1950. Certains ordinateurs emploient des logiques qui semblaient «exotiques» en 1920. Les géométries non euclidiennes, purs jeux de l'esprit pour leurs fondateurs, trouvent maintenant des applications en physique nucléaire (Cahier EDMA, 40, p.1).

#### Mathématique / Descriptive / Applications

- physique;
- ordinateurs;
- recherche opérationnelle, gestion de stocks, organigrammes des grandes administrations, plannings des grands travaux;
- sociologie;
- linguistique;
- médecine (établissement des diagnostics), pharmacie.

**Mathématique / Appliquée**
**Sciences de l'homme**

Journées d'études du Centre international du calcul, Rome, juillet 1966 :

- Analyse automatique qualitative et quantitative des mythes.
- A propos des évangiles synoptiques.
- Possibilités du scalogramme dans l'étude des bronzes chinois archaïques.
- La structure des coalitions politiques.

(N. Picard, *Math-Ecole*, 26, pp. 9-10).

Il n'est pas jusqu'aux objets de l'art qui ne puissent être appréhendés par l'analyse mathématique. L'œuvre des peintres modernes comme Piet Mondrian (1872-1944). Les autres peintres aussi. Il y a sous-jacentes à leurs productions, des lignes de force que la mathématique dégage soulignant les caractères fondamentaux des productions, expliquant leur force de rayonnement et les mettant en relation avec d'autres productions humaines ou d'autres aspects du réel. Le grand jeu des mises en relation. «**Le jeu des perles de verre**» de Hermann Hesse (1877-1962).

## 3. L'ENSEIGNEMENT NOUVEAU DE LA MATHÉMATIQUE

### *3.1 Introduction*

Nous en avons assez dit, je pense, pour que chacun admette que désormais c'est un devoir impératif que de préparer les enfants de ce siècle à comprendre leur monde qui est un monde mathématisé et à devenir, à leur tour, des mathématiseurs de leur réel afin qu'ils soient en mesure de le maîtriser et de le soumettre à leur liberté. Apprendre la mathématique est un devoir d'homme libre.

«Elever le niveau mathématique moyen de ses membres et former suffisamment de mathématiciens qualifiés sont devenus des impératifs de toute nation soucieuse de son indépendance et de ses possibilités de développement.»
(Rapport de la Commission Lichnérowicz, 1967; cité dans *Math-Ecole*, 32, pp. 2-3.).

«Cela n'est pas nécessaire, seulement, pour les futurs mathématiciens, ce l'est aussi pour les futurs citoyens quels qu'ils soient, si nous voulons qu'ils se meuvent avec naturel et sans méfiance dans le monde d'aujourd'hui, qu'ils se servent des instruments nouveaux et puissants mis à leur disposition, qu'ils recourent aux schémas de pensée qui peuvent conduire utilement leurs démarches.» (Rapport cité ci-dessus).

«L'enseignement des mathématiques est devenu un des problèmes mondiaux de l'enseignement, de **l'éducation**». (Rapport cité ci-dessus).

### *3.2 Le contenu*

**Mathématique / Enseignement**
**Contenu / Aspect historique**

«Au 15ème siècle, l'addition et la soustraction n'étaient enseignées que dans de rares écoles de France; pour la multiplication, on était prié de s'adresser à quelques rares et prestigieuses universités d'Italie; au 16ème siècle, la division était un l'exploit de spécialiste; au 20ème siècle, l'introduction des méthodes vectorielles dans la pédagogie des mathématiques s'est heurtée à une vive résistance, alors qu'actuellement il serait bien gênant de s'en passer, tout comme personne ne peut se passer des chiffres arabes».
(Charte de Chambéry, 1968; cité dans *Math-Ecole*, 36, p. 2.).

Et pourtant, il y a encore aujourd'hui des écoles où le contenu de l'enseignement mathématique est fait d'objets mathéma-tiques datant de 100, 200 ans, voire de 2000 ans (Euclide). Et c'est avec un tel contenu qu'on ose encore préparer des enfants qui verront le 21ème siècle. Leur outillage intellectuel est contemporain de la traction animale et de la lampe à huile !

«L'homme cultivé, qui est en définitive l'homme que nous cherchons à former tout au long du cycle scolaire, ne doit pas avoir, en mathématiques, deux siècles de retard sur son temps et ce, pour la seule raison qu'il ne s'est pas spécialisé dans les disciplines à une époque où les mathématiques évoluent si fortement et jouent un tel rôle dans des domaines de pensée si divers. D'un point de vue purement pratique également, nous sommes tenus d'éliminer de l'enseignement les notions qui, fussent-elles consacrées par la tradition, sont devenues lettre morte et ont perdu leur utilité, leur actualité ou leur importance, si nous voulons que nos étudiants poursuivent leurs études avec assiduité et dynamisme, et si nous voulons leur présenter les mathématiques sous leur aspect le plus vivant et le plus enthousiasmant pour leur permettre de mieux comprendre le sujet et stimuler leur esprit d'imagination.» (Stone, M.H., 1961, cité par Laurent Pauli, dans : «Pour une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques», *Gymnasium Helveticum* / Vol. 15/3 Aarau, pp. 178-179.).

**Que faut-il dès lors enseigner ?**

**La mathématique moderne**
**Son enseignement**

«Le but de l'enseignement de la mathématique n'est pas de faire connaître aux adolescents une collection de théorèmes dont ils ne feront jamais usage plus tard, mais de **leur apprendre à ordonner et à enchaîner leurs pensées, de développer chez eux la clarté d'esprit et la rigueur du jugement.**»

En mathématique, comme dans toutes disciplines, mais sans doute plus encore que dans chacune d'elles, ce qui compte, ce sont les **fondements** et, ici, ces fondements seront :
- les ensembles;
- les relations;
- les structures.

Ce sont là de grandes idées simples dégagées par les mathématiciens et qui sont présentes dans les démarches les plus familières de l'humanité.

Il s'agit de **savoirs** (savoirs instrumentaux) plus que de **techniques**.

Autrefois (et encore un peu aujourd'hui), on enseignait surtout des **techniques** (les quatre opérations, par exemple). Les «raisonnements» des problèmes étaient aussi, souvent de telles techniques. C'était un ensemble de procédés figés qui permettaient de se tirer d'affaire dans un certain nombre de cas pratiques (calcul de volumes, problèmes élémentaires de vitesse, calcul d'intérêts).

Aujourd'hui, les savoirs instrumentaux dont on dote les élèves ont valeur de principes : les propriétés des opérations (associativité, commutativité, distributivité), propriétés des systèmes de numération, caractéristiques des structures de groupe. Cet équipement est fait de **compréhensions.** Il est essentiellement dynamique et adaptable à de multiples situations. Il est donc efficient. Une simple technique, apprise de manière mécanique et sans compréhension de son mécanisme, reste toujours fragile; et, ce qui est plus grave, elle demeure inadaptable. Elle n'est qu'une habitude mentale avec toute la rigidité que comporte l'habitude.

Ceci dit, des jalons directeurs peuvent être posés (cf. Hutin). Rappelons-nous cependant ceci qui, en pédagogie est très nouveau : «Il n'y a pas, il ne peut y avoir une conception confortable et définitive des mathématiques dites élémentaires, fin en soi, perfection fermée sur elle-même, une conception qu'il

suffirait d'affiner uniquement à la lumière d'expériences pédagogiques.»
(Rapport de la Commission Lichnérowicz, 1967; cité dans *Math-Ecole*, 32, p. 3).

Savoir ainsi que nos plans d'études pourront changer, qu'ils devront changer.

**Mais quand donner cet enseignement ?**

«Si l'on veut faire un enseignement cohérent des mathématiques sans reprise ni déconditionnement[1], il faut commencer au jardin d'enfants et enseigner les mathématiques dans un même esprit du jardin d'enfants à l'université, dans un même esprit, mais pas de la même manière, bien sûr.»
(N. Picard, *Math-Ecole*, 26, p. 6.).

**Mathématique / Enseignement**
**Quand ?**

«C'est à l'école maternelle que commence l'apprentissage de la mathématique, c'est au niveau de l'enseignement primaire que se jouera la bataille décisive de l'élévation du niveau culturel moyen de nos pays. Chaque niveau d'enseignement ne doit pas être considéré isolément, mais comme un maillon de la chaîne qui va, selon le mot d'ordre de l'association française des professeurs de mathématiques, «de la Maternelle aux Facultés».
(A. Revuz, *Math-Ecole*, 30, p. 5.).

### *3.3 Les méthodes*

Enseigner la mathématique, ce n'est pas transmettre un savoir particulier comme l'histoire ou la chimie, c'est faire fonctionner l'esprit et assurer le montage de ses mécanismes. En effet, les lois de la mathématique ne sont pas celles des mathématiques, ni celles des mathématiciens. Ce sont celles mêmes de toute intelligence qui fonctionne rationnellement. Si donc la mathématique est un mode de pensée, seul un enseignement actif, bannissant tout, dogmatisme pourra lui convenir. Comprendre sera au centre du processus d'apprentissage. Car appendre, sans comprendre, c'est acquérir une habitude mentale au moyen d'un dressage. Ensuite, quand il s'agit vraiment de comprendre, il faut désapprendre le premier acquis, se défaire d'une habitude. Temps et peine perdus. Il résulte de cela que les enfants ne doivent pas apprendre des techniques connues du maître et transmises par une voie autoritaire. Ils doivent réellement **construire** leur mathématique en formant eux-mêmes, peu à peu, les concepts en jeu. Il faut leur donner la possibilité réelle d'abstraire (au sens étymologique du terme) ces concepts de leur propre expérience. «Ce faisant, ajoute Madame N. Picard, nous leur permettrons par surcroît, peut-être, de construire leur personnalité.»
(*Math-Ecole*, 26, p. 11).

Jean Piaget s'exprime de la même manière :

**Mathématique / Véritable science NC**
**Enseignement / Méthode**

Parlant de la transmission des notions, Piaget dit : «On peut même aller jusqu'à dire que la transmission pure est toujours déformante et que, **pour qu'une notion se communique de façon adéquate, il faut qu'elle soit reconstruite par celui à qui elle est transmise**; en effet, une vérité non recréée n'est pas une vérité, mais une simple opinion consolidée par des facteurs extra-logiques (puisque la logique suppose la coordination dans l'échange).»
(Piaget, Jean, 1960. «Problème de la psycho-sociologie de l'enfance». in : *Traité de sociologie*, publié sous la direction de G. Gurvitch. n° 250, T.II, p. 235.).

Cette méthode «constructive» s'inscrit de manière harmonieuse dans le développement génétique de la pensée enfantine.

[1] cf. A. Morf, *Math-Ecole*, 33, p. 2-5.

Les structures de l'intelligence sont celles mêmes de la mathématique. Les groupements des opérations intellectuelles de Piaget répondent, point par point, aux groupes des mathématiciens.

Il s'ensuit que les progrès en mathématiques coïncidant avec le développement général des possibilités de l'intelligence, on observe, simultanément des progrès dans les **autres disciplines**, en français notamment (en lecture chez les enfants de 6 ans) observe Madame Picard.

L'enseignement, dès lors, ne peut plus consister en **leçons** faites par le maître devant ses élèves plus ou moins passifs. Il est fait de **situations** proposées aux élèves, travaillant le plus souvent en petits groupes. Les situations donnent lieu à des **questions**. Les élèves alors cherchent, montent une stratégie de recherche. Les réponses auxquelles ils parviendront prenant alors le caractère d'outils intellectuels qui leur permettront d'aller plus avant dans leurs recherches comme dans leur com-préhension. Les élèves ainsi ont l'impression d'acquérir, à chaque coup, une puissance accrue. Ce qui augmente leur confiance en eux et accroît leurs pouvoirs. Cet accrois-sement de pouvoir est d'ailleurs source de joie. Il est frappant, à cet égard de constater que l'apprentissage de la mathématique suscite l'enthousiasme des enfants.

A propos des autres enseignements, on observe qu'ils peuvent donner lieu à une mathématisation eux aussi. Ainsi la mathématique se trouve présente dans la classe à toutes les heures de la journée, dans toutes les situations où il y a quelque chose à ordonner, à classer, à structurer. Ainsi les connaissances prennent toute leur valeur informationnelle. Elles s'intègrent à la culture naissante des élèves et se trouvent constamment mobilisables. Mais encore faut-il que le travail qui consiste à les ordonner, à les structurer soit l'œuvre de l'enfant lui-même inventant ses propres ordonnancements.

### *3.4 L'expérimentation*

La mise en place des dispositions propres à assurer le nouvel enseignement suppose du temps et des moyens. Elle suppose d'abord une **expérimentation** soigneusement conduite.

Exemples :

- Les IREM de France - N. Picard, M. Glaymann, A. Revuz, A. Lichnérowicz.
- Angleterre - M. Fletcher, La Nuffield [Foundation].
- Canada - Dienes.
- Belgique - Papy.
- Pologne - Mme Krygowska (Cracovie).
- Genève.

### *3.5 Les maîtres*

**Mathématique / Enseignement**
**Les maîtres**

«La qualité d'un enseignement, la possibilité de mutations soigneusement élaborées reposent en premier lieu sur les **maîtres** qui dispensent cet enseignement. La Commission irait volontiers jusqu'à affirmer que ces maîtres ont pris place parmi les hommes les plus importants de notre société, ceux qui conditionnent étroitement l'avenir. C'est de leur nombre, de leur qualité intellectuelle et morale, de leur dévouement, du sens profond qu'ils ont de leur vocation que beaucoup de chose dépendent.»
(Rapport de la Commission Lichnérowicz, 1967; cité dans *Math-Ecole*, 32, p. 4.).

Formation :

- initiale - mathématique et psychologie;
- continue - recyclages périodiques en mathématique, psychologie et méthodologie.

Activité : relations permanentes

- horizontale : avec les maîtres du même degré (relations entre les disciplines);

- verticale : avec les maîtres de mathématiques des autres degrés (avant et après) (cf. Glotton à Paris).

### *3.6 Conclusion*

Enseigner dans un esprit nouveau la nouvelle mathématique, c'est former l'esprit, c'est jeter les bases de toute culture productive.

**Faire des mathématiques**
**Enseigner des mathématiques**

«Faire des mathématiques, c'est adopter une attitude particulière d'esprit au regard de laquelle ce qui est l'objet d'intérêt c'est ce que nous appelons des **relations en soi**. On est mathématicien lorsqu'on extrait, des situations réelles et complexes, des relations dont on se sert ensuite pour créer de nouvelles situations en vue de découvrir encore des relations nouvelles.

Enseigner les mathématiques, c'est aider les élèves à **prendre conscience de leur pensée relationnelle** et de la liberté de l'esprit dans sa création des relations; c'est les encourager à développer en eux le goût d'une telle attitude et à la considérer comme une richesse humaine qui confère à l'intellect, dans son dialogue avec l'univers, un pouvoir accru.»
(Gattegno, C. 1965. *Pour un enseignement dynamique des mathématiques*, Neuchâtel : Delachaux & Niestlé, p. 49.).

## 4. CONCLUSION

Le renouvellement de la pensée mathématique qui va de pair avec celui de la pensée humaine dans son ensemble participe, en l'accentuant et en l'accélérant, au processus qui, depuis des millénaires conduit l'humanité vers toujours plus de **conscience**. En entraînant les élèves à penser, à penser droitement, on développe leur conscience (la conscience psychique) et on les rend de mieux en mieux hommes. La mathématique prend ainsi figure d'humanisme moderne. Elle relaie les anciennes disciplines formatrices qu'était, notamment l'étude des langues anciennes, le grec ou le latin. Elle a d'ailleurs sur ces anciennes études l'avantage de l'universalité et elle a particulièrement sa place dans le mouvement de démocratisation des études.

Il ne faudrait pas croire cependant que la mathématique puisse être seule à régner sur l'esprit humain et sur l'homme. La dialectique hégélienne nous avertit : une thèse suscite - doit susciter - toujours son contraire afin que de leur affrontement se dégage une synthèse grâce à quoi le progrès est assuré.

La pensée rationnelle est aujourd'hui à l'honneur. Elle l'est même tellement qu'un professeur comme Jacques Monod a pu prétendre qu'il n'y avait plus, en définitive, parmi les hommes, qu'une seule valeur : la connaissance objective. Il est permis de mettre en doute une pareille affirmation. L'homme raisonne, l'homme mathématise. Mais l'homme ne vit pas que de mathématique. Il ne pourra jamais ne vivre que d'elle. Les structures sont utiles mais elles ne sont cependant que des squelettes, fussent-ils des squelettes en mouvement, des squelettes dynamiques. Encore faut-il qu'il y ait sur ces ossements une chair, des nerfs et de la peau et que sur cet être réel souffle un esprit humain c'est-à-dire, pour finir, un esprit de bonté et de charité. L'homme est intelligence. Il est cœur aussi. Et, avec Jean Rostand, osons affirmer qu'«on gagne plus à aimer qu'à avoir compris.»

# Problèmes additifs (3) : de comparaisons

(1ère et 2e parties, voir n° 171 et 172)

par Alicia Bruno et Antonio Martinón, Universidad de La Laguna, Tenerife (Espagne)

Dans les deux articles précédents, nous avons analysé les problèmes additifs d'états et de variations. Dans ce troisième et dernier article, l'analyse porte sur ceux de comparaisons, parmi lesquels on peut distinguer quatre types de problèmes :

**Combinaison de comparaisons contiguës**

comparaison 1 + comparaison 2
= comparaison 3

**Combinaison de comparaisons**

comparaison partielle 1
+
comparaison partielle 2
= comparaison totale

**Variation de comparaisons**

comparaison initiale + variation
= comparaison finale

**Comparaison de comparaisons**

comparaison 1 + comparaison
= comparaison 2

Dans les différents travaux réalisés à ce sujet, nous n'avons rien trouvé sur la différence que nous établissons entre les deux types de combinaison de comparaisons.

Ainsi que nous l'avons fait dans les deux articles précédents, dans chaque type de problèmes nous envisageons plusieurs types structuraux, en fonction de la position de l'inconnue (se reporter au premier article pour plus de détails). Dans chaque type structurel, nous distinguons plusieurs types structuraux-sémantiques, en fonction de la forme d'expression utilisée pour la variation ou la comparaison. Rappelons qu'on peut exprimer une variation de trois façons :

Le soir, Jean a 3 francs de plus qu'il n'avait le matin.
Le matin, Jean avait 3 francs de moins qu'il n'a le soir.
Au cours de la journée, Jean a gagné 3 francs.

D'une façon analogue, il y a quatre manières d'exprimer une comparaison :

Pierre a 3 francs de plus que Jean.
Jean a 3 francs de moins que Pierre.
Si Jean gagnait 3 francs, il aurait la même chose que Pierre.
Si Pierre perdait 3 francs, il aurait la même chose que Jean.

Dans les problèmes, nous faisons toujours référence à l'addition 2 + 3 = 5 et tous les problèmes se situent dans le contexte "avoir".

## 9. Combinaison de comparaisons contiguës

Dans ce type de problèmes, on compare trois états entre eux et ils correspondent à un schéma du type :

comparaison 1 + comparaison 2
= comparaison 3

Par exemple, **x** représente les francs que Jean a de plus que Pierre, **y** ceux que Pierre a de plus qu'Edouard et **z** ceux que Jean a de plus qu'Edouard. On peut dire que **x** représente la **première comparaison, y** la **seconde comparaison, z** la **troisième comparaison.**

Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre : **x**
Pierre a 3 francs de plus que Edouard : **y**
Jean a 5 francs de plus que Edouard : **z**

**Types structuraux.** On en distingue 3 :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre et Pierre a 3 francs de plus que Edouard. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Edouard ?

(2) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre et Jean a 5 francs de plus que Edouard. Combien de francs Pierre a-t-il de plus que Edouard ?

(3) Données : **y**, **z**. Inconnue : **x**.
Exemple :
Jean a 5 francs de plus que Edouard et Pierre en a 3 de plus que Edouard. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre ?

**Types structuraux-sémantiques.** Etant donné qu'on peut exprimer chaque comparaison de 4 façons différentes, il y a 64 types structuraux-sémantiques pour chaque type structurel, et il y a donc 192 types structuraux-sémantiques de problèmes de combinaison de comparaisons contiguës.

Vergnaud (1982) a appelé ces problèmes, exprimés en tant que différence (directe ou indirecte) **composition de deux relations statiques.**

### 10. Combinaison de comparaisons

En réalité, dans ce type de problèmes, on trouve six états, deux d'entre eux étant la somme de deux autres. La structure provient de la combinaison des états :

état partiel 1 + état partiel 2 = état total,

mais maintenant, avec le schéma antérieur, il y a 2 "personnages" qui sont comparés, le schéma étant du type :

comparaison partielle 1
+
comparaison partielle 2
= comparaison totale

Par exemple, **x** représente les francs que Jean a de plus que Pierre à la banque, **y** ce que Jean a de plus que Pierre chez lui et **z** ce que Jean a de plus que Pierre au total. Ainsi, **x**, **y** représentent les **comparaisons partielles** et **z** la **comparaison totale**.

Exemple :
A la banque, Jean a 2 francs de plus que Pierre : **x**
Chez lui, Jean a 3 francs de plus que ce qu'a Pierre : **y**
Au total, Jean a 5 francs de plus que Pierre : **z**

**Types structuraux.** On en distingue 2 :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre à la banque et il en a 3 de plus chez lui. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre au total ?

(2) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**.
Le problème suivant est identique :
Données : **y**, **z**. Inconnue : **x**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre à la banque et 5 de plus au total. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre chez lui ?

Exemple :
Jean a 3 francs de plus que Pierre chez lui et 5 de plus au total. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre à la banque ?

**Types structuraux-sémantiques.** Etant donné que l'on peut exprimer chaque comparaison de 4 façons différentes, il y a 64 types structuraux-sémantiques pour chaque type structurel. Il y a donc 128 types structuraux-sémantiques de problèmes de combinaison de comparaisons.

### 11. Variation de comparaisons

Ce type de problèmes regroupe ceux qui correspondent à deux états qui se comparent initialement, qui varient et qui se comparent à la fin. Ils ont un schéma du type :

comparaison initiale + variation
= comparaison finale

Par exemple, **x** représente ce que Jean avait de plus que Pierre hier, ce qui est la **comparaison initiale**, **z** ce que Jean a de plus que Pierre aujourd'hui, ce qui est la **comparaison finale** et **y** ce que Jean a gagné de plus que Pierre aujourd'hui, ceci étant la **variation des comparaisons**.

Exemple :
Hier, Jean avait 2 francs de plus que Pierre : **x**
Ce que Jean a de plus que Pierre a augmenté de 3, entre hier et aujourd'hui : **y**
Aujourd'hui, Jean a 5 francs de plus que Pierre : **z**

En réalité, ce type de problèmes ressemble de très près à la comparaison de variation que nous avons étudiée dans l'article précédent :

variation 1 + comparaison = variation 2

Afin de mettre en évidence cette ressemblance, nous allons utiliser la notation suivante :

$J_h$ = francs que Jean avait hier.
$J_a$ = francs que Jean a aujourd'hui.
$v_J = J_a - J_h$ = variation de l'argent de Jean.
$P_h$ = francs que Pierre avait hier.
$P_a$ = francs que Pierre a aujourd'hui.
$v_p = P_a - P_h$ = variation de l'argent de Pierre.
$c_h = J_h - P_h$ = comparaison hier de l'argent de Jean et de Pierre.
$c_a = J_a - P_a$ = comparaison aujourd'hui de l'argent de Jean et de Pierre.

Le problème de comparaison de variations correspond au schéma : $v_J + c = v_p$

Exemple :
Jean a gagné 2 francs et Pierre en a gagné 3 de plus que Jean. Combien Pierre a-t-il gagné ?

Le problème de variation de comparaisons a le schéma : $c_a + v = c_h$

Exemple :
Hier Jean avait 2 francs de plus que Pierre et ce que Jean a de plus que Pierre a augmenté de 3, entre hier et aujourd'hui. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre aujourd'hui ?

Observons l'égalité de c et v :

$$c = v_p - v_J = (P_a - P_h) - (J_a - J_h)$$
$$= (P_a - J_a) - (P_h - J_h) = c_a - c_h = v$$

Ainsi, on peut aussi exprimer la variation «ce que Jean a de plus que Pierre a augmenté de 3, entre hier et aujourd'hui» de la façon suivante «aujourd'hui Jean a gagné 3 de plus que Pierre» C'est l'expression que nous utiliserons dans les exemples que nous donnerons par la suite, afin de faciliter leur lecture.

**Types structuraux.** Il y en a 3 :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.
Exemple:
Hier Jean avait 2 francs de plus que Pierre et aujourd'hui il en a gagné 3 de

plus que Pierre. Combien de francs Jean a-t-il de plus aujourd'hui que Pierre ?

(2) Données : **z**, **y**. Inconnue : **x**.
Exemple:
Aujourd'hui Jean a gagné 3 francs de plus que Pierre et il en a 5 de plus que ce que Pierre a. Combien de francs Jean avait-il de plus que Pierre hier ?

(3) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**.
Exemple:
Hier Jean avait 2 francs de plus que Pierre et aujourd'hui il en a 5 de plus. Combien de francs Jean a-t-il gagné de plus que Pierre aujourd'hui ?

**Types structuraux-sémantiques.** On peut exprimer chacune des comparaisons de 4 façons différentes. La variation peut s'exprimer de trois façons :

Ce que Jean a de plus que Pierre a augmenté de 3, entre hier et aujourd'hui.
Ce que Jean a de plus que Pierre aujourd'hui, est 3 de plus que ce que Jean avait de plus que Pierre hier.
Ce que Jean avait de plus que Pierre hier, est 3 de moins que ce que Jean a de plus que Pierre aujourd'hui.

Comme nous avons pu voir, cette variation a aussi 4 formes d'expression, comme s'il s'agissait d'une comparaison :

Jean a gagné aujourd'hui 3 francs de plus que Pierre.
Pierre a gagné aujourd'hui 3 francs de moins que Jean.
Si Jean avait gagné 3 francs de moins, son gain serait égal à celui de Pierre.
Si Pierre avait gagné 3 francs de plus, son gain serait égal à celui de Jean.

Par conséquent, cette variation a 7 formes de expression. Ainsi donc chaque type structurel a 112 types structuraux-sémantiques de problèmes et, par conséquent, il y a 336 types structuraux-sémantiques de problèmes de variation de comparaisons.

## 12. Comparaison de comparaisons

Il y a quatre états dans ce type de problèmes, qui sont comparés par deux et ces deux comparaisons sont ensuite comparées. Voici le schéma :

comparaison 1 + comparaison
= comparaison 2

Par exemple, **x** représente ce que Jean a de plus que Pierre, **z** ce qu'Édouard a de plus que André, **y** la comparaison entre x et y.

Exemple:
Jean a 2 francs de plus que Pierre : **x**
Ce que Edouard a de plus que André c'est 3 francs de plus que ce qu'a Jean a de plus que Pierre : **y**
Edouard a 5 francs de plus que André : **z**

**Types structuraux:** Il y en a trois :

(1) Données : **x**, **y**. Inconnue : **z**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre et ce que Edouard a de plus que André c'est 3 francs de plus que ce que Jean a de plus que Pierre. Combien de francs Edouard a-t-il de plus que André ?

(2) Données : **z**, **y**. Inconnue : **x**.
Exemple :
Edouard a 5 francs de plus que André et ce que Edouard a de plus que André c'est 3 francs de plus que ce que Jean a de plus que Pierre. Combien de francs Jean a-t-il de plus que Pierre ?

(3) Données : **x**, **z**. Inconnue : **y**.
Exemple :
Jean a 2 francs de plus que Pierre et Edouard a 3 francs de plus que André. Ce que Jean a de plus que Pierre. Combien y a-t-il de francs en plus que ce que Edouard a de plus que André ?

**Types structuraux-sémantiques.** Dans ce type de problèmes, il y a un grand nombre de formes sémantiques équivalentes. La combinaison d'une forme qui exprime la comparaison 1 (4 formes) avec une autre qui exprime la comparaison 2 (4 formes) donne lieu à une forme d'expression de la comparaison : 16 formes différentes, bien que certaines de ces formes peuvent sembler très peu naturelles. Ainsi donc, on peut considérer que chaque type structurel a 256 formes structuraux-sémantiques. Par conséquent, on peut dire qu'il y a 768 formes structuraux-sémantiques de problèmes de comparaison de comparaisons.

## 13. Conclusions

Dans la série d'articles que nous venons d'achever, nous avons donné une vision globale des différents problèmes additifs à nombres positifs en nous appuyant sur trois aspects : la **structure**, la **position de l'inconnue** et la **forme sémantique**. L'étude que nous avons faite nous montre la richesse de sens que peut revêtir une égalité telle que 2 + 3 = 5.

Le mode de classement des problèmes que nous avons exposé dans ces articles constitue un cadre approprié pour effectuer des recherches qui nous permettent de connaître la difficulté que présentent, pour les élèves, les formes de résolution et la compréhension du langage. Dans le cas de certains problèmes, nous ignorons leur degré de difficulté auprès des élèves, et ce que ces derniers imaginent lorsqu'ils sont en train de les résoudre; ainsi par exemple, existe-t-il pour les élèves des différences entre la **combinaison de variations** et la **combinaison de comparaisons** ?

Nous avons mis en évidence la distinction entre la structure d'un problème et la forme sémantique qui est utilisée dans l'énoncé. Fuson et Willis (1986) ont étudié, à partir de plusieurs groupes d'élèves, les problèmes de **comparaisons d'états** et ils sont parvenus à la conclusion que, pour les élèves, les problèmes où on utilise les formes sémantiques **d'égalisation** sont plus simples que ceux où on utilise la **différence**. Ainsi, ils concluent que la position de l'inconnue joue un rôle important quant au degré de difficulté d'un problème.

Nous pensons qu'il n'est pas nécessaire que les onze types de problèmes auxquels nous avons fait référence fassent partie des activités de la classe. En particulier, les problèmes de **variation de comparaisons** et ceux de **comparaison de comparaisons** qui ont des formes d'expressions très confuses et peu usuelles. Il s'agit de familiariser l'élève avec une grande variété de situations additives, afin d'élargir ainsi son champ numérique.

Bien que dans cette série de travaux nous n'avons pas considéré que les problèmes à nombres positifs, la méthode de classement peut s'appliquer aux problèmes où apparaissent des nombres négatifs. Dans ce cas, il faudrait tenir compte, en plus du cas qui nous occupe ici (positif+positif+positif), des autres types de nombres.

## BIBLIOGRAPHIE


Fuson, K. Willis, G.B. (1986). First and second graders' performance on compare and equalize word problems. *Proceedings of the tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 19-24. London.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In : Carpenter, T., Moser, J.M. and Romberg, T. (eds). *Addition and Subtraction: A cognitive Perspective*, pp. 39-59. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

# A propos de l'équivalence

par Jacqueline Brandt, Le Locle

[ndlr] *Voici un troisième article qui s'inspire des travaux et réflexions du GEPALM (voir Math-Ecole 168, pp. 44-47 et 172, pp. 32-34). Notre lectrice, Jacqueline Brandt, nous dit que les nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques n'abordent que très peu une notion importante, l'équivalence :*

*«Confrontée quotidiennement à des enfants en difficultés, pour lesquels cette structure de pensée est loin d'être en place, je me vois dans l'obligation d'imaginer une quantité de situations permettant une telle acquisition. Peut-être cette réflexion aurait-elle une place dans votre revue et pourrait sensibiliser les enseignants au faits que nos évidences d'adultes ne sont pas manifestes et visibles pour les enfants.»*

*Nous sommes heureux d'accueillir cette réflexion dans nos colonnes, dans un esprit d'ouverture et pour faire progresser le débat.*

Il y a quelques années, une élève de 5e primaire, voulait acheter une cassette à Fr. 12.-. Elle n'avait qu'un billet de Fr. 10.- placé devant elle; elle me déclara : " si je change tout en pièces de Fr. 1.- ça ira ! ", vous devinez que mes bras n'avaient plus rien à envier à ceux des chimpanzés ou à ceux de ... la Vénus de Milo...! Mais que faire ?

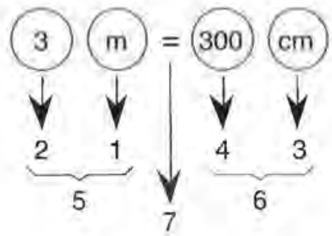
De par ma formation au GEPALM (Groupe d'Etudes psychopathologiques des activités logico-mathématiques) à Paris, je suis maintenant en mesure non seulement de répondre à cette interrogation, mais aussi d'aider les enfants à atteindre cette structure de pensée nécessaire à l'équivalence.

C'est une évidence, que dis-je une lapalissade pour nous, adultes, que de déclarer : " une semaine, c'est 7 jours ". Et pourtant, à y regarder de plus près, je rencontre des enfants pour qui une telle affirmation n'est pas comprise. Il suffit pour cela, de leur demander : " tu pars en vacances 7 jours et moi 1 semaine. Qui se repose le plus ? " Nombre d'entre eux s'empressent de répondre " moi, bien sûr, 7 c'est plus que 1"...

Mais que se passe-t-il alors dans nos chères têtes blondes, pourtant capables de dire " une main, c'est 5 doigts " ou " trente c'est 3 dizaines " ? Ces affirmations sont en quelque sorte des explications qui ne prennent pas valeur d'équivalence, ni d'égalité opératoire, mais sont des postulats du genre " les leçons de gymnastique, c'est le pied ! ".

Avant tout, j'aimerais que nous réfléchissions à une question de ce genre : 1 litre = ? $m^3$ Est-ce si évident pour nous ? Que faisons-nous alors ? Comment raisonner face à cette l'interrogation ?

L'équivalence suivante comporte **7 éléments** :




1. je prends " **mètre** ".
2. j'en compte **3**.
3. je prends " **centimètre** ".
4. j'en compte **300**.
5. je prends cette première longueur, ce " **1 (3m)** ".

6. je prends cette deuxième longueur", ce " **1 (300cm)** ".
7. je compare les deux.

L'équivalence est une notion difficile, puisque, à chaque fois, nous devons considérer " **tous les uns** ", **les effacer** au profit de " **un tout** ", donc ***ignorer le contenu pour ne regarder que le contenant***, tout en le gardant présent. Et l'enfant qui répond, à propos de la semaine, " 7, c'est beaucoup plus que 1 " **n'a pas ce double regard**, qui permet **simultanément** de voir " un " et penser " beaucoup ".

L'équivalence joue un rôle essentiel dans la numération, dans le système métrique, dans les additions avec retenue[1], les soustraction avec emprunt, les divisions, les notions algébriques. Nous la rencontrons même en français. En effet, dans " la foule hurle " le verbe ne prend pas de " nt ", il y a pourtant beaucoup de personnes...!

Le travail consiste donc à proposer à l'enfant des activités qui lui permettront de mettre en place cette structure logico-mathématique.

**Jeux d'échanges :** (par petits groupes)

Les élèves ont, chacun à leur disposition, le même nombre de petites cartes sur lesquelles sont dessinés des canards, des cochons et des chevaux. Ensemble, nous établissons une règle d'échange, par exemple :

5 canards valent 1 cochon,

3 cochons valent 1 cheval.

Entre eux et moi s'installe alors un troc, pour lequel toute transaction est discutée : " Qui est le plus riche ? Comment le sais-tu ? Et vous les autres qu'en pensez-vous ? L'un des deux s'est-il fait " rouler " ?...

Peu à peu certains enfants commandent plusieurs cochons d'un coup et même ne passent plus par l'intermédiaire " cochon " pour obtenir un cheval.

Au bout d'un certain temps, certains enfants n'ont que des canards, en grand nombre, d'autres que des chevaux, en petit nombre. La question " qui est le plus riche ? " est alors le sujet d'une discussion fort intéressante, très révélatrice sur le stade de pensée de chacun d'eux, et qui peut même déboucher sur la découverte de : " plus l'unité est grande, moins il en faut ", donc que le nombre est inversement proportionnel à l'unité choisie.

**Jeux de magasin :** (par petits groupes)

Les sous seront des jetons, tous de même valeur et les articles à vendre auront les " prix " marqués dessus. Au début, l'enfant n'achète qu'un objet à la fois, puis petit à petit, il en demande plusieurs pareils, plusieurs différents.

Ensuite, le groupe crée des " billets " **selon son propre code**, par exemple :

2 jetons valent $\boxed{\ast}$ ,

5 jetons valent $\boxed{\heartsuit}$ , etc.

Progressivement donc, ils franchiront les étapes successives, qui sont :

- j'ai une chose qui équivaut à une chose;
- j'ai plusieurs choses qui équivalent à plusieurs fois la même chose;

[1] Un calcul du genre 2 + 3 = 5 nécessite, non seulement la compréhension de l'équivalence (une quantité exprimée de deux façons différentes), mais encore la conservation du tout et des parties (Piaget) - ce qui donnerait matière à un autre débat - c'est pourquoi j'ai limité le sujet à la " retenue " de l'addition, à l'" emprunt " de la soustraction..., dans lesquelles l'échange porte sur " 10 unités contre 1 dizaine ", ou " 1 dizaine contre 10 unités ", ou encore dans la division 321 : 4 = ?, c'est d'abord des 32 dizaines dont il va falloir s'occuper.

- j'ai une chose qui équivaut à plusieurs choses différentes;
- j'ai plusieurs choses qui équivalent à une chose;
- j'ai plusieurs choses qui équivalent à plusieurs choses différentes.

**Activités collectives ou individuelles :**

Bien entendu, je profite de toute situation analogue, telle que : la main et les cinq doigts, l'année et le calendrier, ou la page de janvier et les 31 de l'éphéméride, etc.

A chaque fois je note :

$$\begin{cases} \text{1 semaine} \\ \text{7 jours} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{6 œufs} \\ \text{1 boîte} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{10 allumettes} \\ \text{1 fagot} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{1 dizaine} \\ \text{10 unités} \end{cases}$$

en demandant " qui se repose le plus longtemps ", " avec quoi je ferai la plus grosse omelette ? " etc. et encore : " quand je dis 1, je parle de quoi ? quand je dis 10 (6 ou 7) je parle de quoi " ? car il arrive souvent que cette équivalence, comprise dans l'action et le langage, s'écroule devant l'écriture...

Il est donc très important de ne **jamais** dire juste ou faux, ni de marquer son approbation ou sa désapprobation par une grimace, un regard qui en dit long, ni même de verbaliser soi-même, dans toute situation et plus particulièrement encore à propos de l'équivalence. Cela ne pourrait que conforter l'enfant dans une attitude de mémorisation non réfléchie avec le désir de donner **la** bonne réponse attendue, donc de fonctionner par personne interposée et non de manière autonome.

Il faut donc patienter et profiter des situations analogues dans lesquelles l'enfant verbalisera les règles d'échanges tandis que nous noterons dans les deux sens

$$\begin{cases} \text{1 main} \\ \text{5 doigts} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{5 doigts} \\ \text{1 main} \end{cases}$$

tant il est vrai que la symétrie de l'équivalence n'est pas toujours perçue.

**Bibliographie :**


*Le nombre et la numération* de B. Guéritte-Hess et M. Bacquet. Ed. Papyrus, 1990.

*Entretiens de Bichat : orthophonie* article de M.-P. Legeay «Et si on jouait à la marchande ?», 1994.

Cours de formation GEPALM de F. Jaulin-Mannoni.

*La Genèse du nombre chez l'enfant* de J. Piaget, A. Szeminska et al. Neuchâtel: Paris: Delachaux & Niestlé, 1941.


N.B. La formation du GEPALM pourra se faire, dès cette année, en Suisse, à Yverdon. Renseignements auprès de : GEPALM, 60 Bd Saint-Michel, 75005 PARIS

# Calcul et botanique : atelier de création d'images fractales

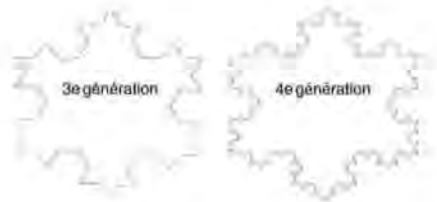
par Luc-Olivier Pochon

*Dans le cadre de l'exposition "Le nombre et les plantes " une deuxième activité sur ordinateur (pour la première, voir Math-Ecole no 172) était proposée au visiteur. Les calculs sur lesquels elle se base sont légèrement plus complexes et ils ne seront pas exposés. C'est une une excursion dans le monde des paysages et de la botanique virtuels à laquelle le lecteur est convié ici. Les collègues intéressés par les calculs nécessaires (transformations affines dans le plan et calcul matriciel) trouveront les références qui leur permettront d'aller plus loin.*

Le terme fractal a été créé en 1975 par B. Mandelbrot. Il s'utilise comme adjectif: objets fractals, géométrie fractale ou comme nom: une fractale. Cette notion s'enracine toutefois dans une longue tradition de recherches qui traitent de la modélisation de phénomèmes très " discontinus " (en fractal il y a l'idée de " fractionné "). La structure d'un object fractal réside dans un aspect symétrique particulier qui peut se résumer par: *toute partie est " similaire " au tout.*

### *Construction d'une fractale simple*

On peut voir sur la figure *du flocon de neige* ou *courbe de von Koch* comment une fractale s'obtient par approches successives. Chaque segment d'une figure est remplacé dans la figure de la génération suivante par un module 


### *Constructions plus complexes*

Il existe des algorithmes qui permettent de construire des fractales moins régulières. En particulier, un algorithme permet de générer un ensemble fractal à 4 dimensions dont chaque coupe est aussi spectaculaire qu'inattendue[1].

### *Fractales et images de synthèse*

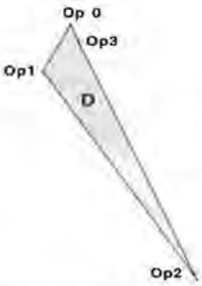
Les fractales peuvent être utilisées pour créer des images de synthèse. Plusieurs phénomènes naturels peuvent se représenter à l'aide de fractales : nuages, arbres, nature du sol, etc. Chacun possède son ou ses algorithmes spécifiques. Cette méthode permet une économie de mémoire : un ensemble de points est remplacé par " quelques " données initiales.

[1] Cette fractale de même que le paysage de synthèse sont dues à Bastian Pochon. Ces images ont été créées avec les logiciels Mandeltour et VistaPro.

Par ailleurs, il est possible de procéder au calcul en variant l'angle de vision, le grossissement et le degré de précision (le grain).

### *L'activité*

L'activité proposée se base sur un algorithme relativement simple connu sous le nom d'IFS (Iterated functions system). Plutôt que constructive, la manière de faire proposée ici peut être qualifiée de créative. Les étapes sont les suivantes: tout d'abord on dessine un polygone, le domaine fondamental D, qui représente les lignes de force de la figure que l'on veut créer.

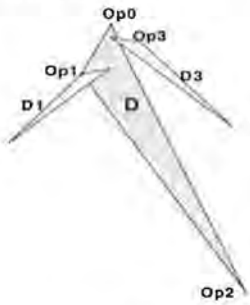



Les opérateurs Op1, Op2, Op3, Op4 qui agissent sur le domaine fondamental D correspondent à des transformations affines du plan

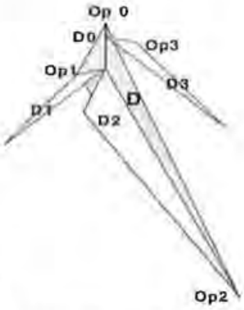
Chaque sommet du domaine fondamental représente une règle de transformation, un opérateur. Les images du domaine fondamental par ces opérateurs donnent les lignes de force secondaires. On obtient ainsi la structure de l'image. L'algorithme travaille à partir de ces quelques données.

En prenant quelques points et en leur faisant subir les transformations Op0, Op1, Op2 et Op3 de façon répétée, mais dans un ordre aléatoire, une image apparaît!

Par la suite, on peut procéder à des ajustements en modifiant graduellement le domaine fondamental et les opérateurs. Les nuances de gris sont obtenues en ajustant la fréquence d'utilisation de chaque règle de transformation.




D1 est l'image de D par Op1, D2 est l'image de D par Op2.

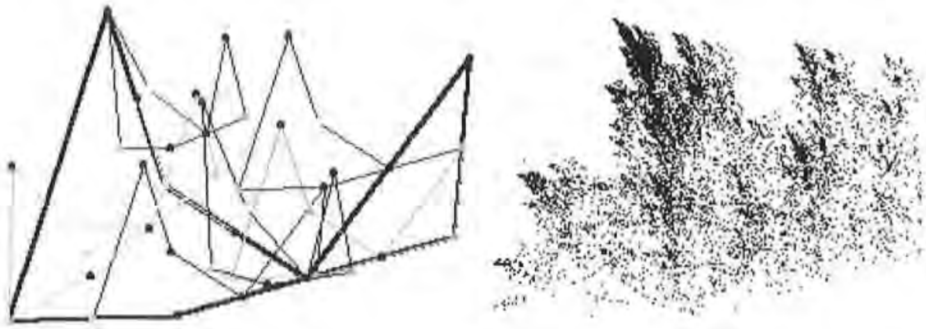



Les quatre transformées de D. Maintenant, il faut imaginer que le processus va se répéter,

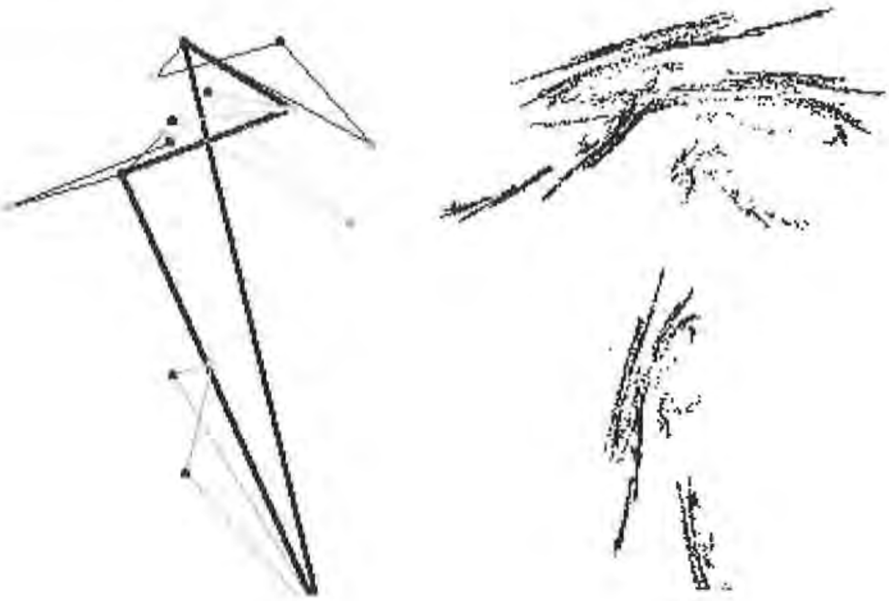
Cette fougère, qui a fait le tour du monde lors de la découverte du procédé, est le résultat de l'itération. Les illustrations ci-contre sont des création originales réalisées par des écoliers dans le cadre de l'exposition.

### *Pour conclure*

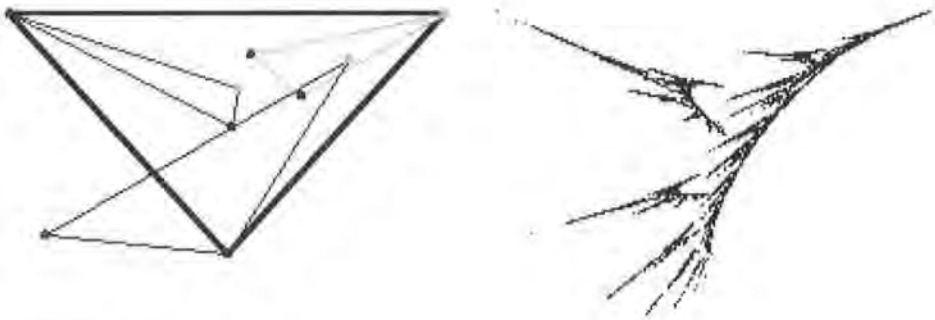
Cette activité permet d'aborder le problème de la classification dans un domaine complexe, tel que peut l'être le domaine de la botanique. Elle privilégie, l'observation, un certain sens des formes, la patience et la précision. Les lecteurs intéressés par les calculs peuvent obtenir un document plus détaillé auprès de Math-Ecole. La théorie complète, qui fait une utilisation intéressante et non triviale du théorème du point fixe dans des ensembles de figures, peut être trouvée dans l'ouvrage de Michael F. Barnsley: *Fractal image compression* (edition AK Peters, 1993). Par ailleurs, un logiciel (pour Windows) permettant de réaliser ces figures peut être obtenu auprès de Math-Ecole.



Bosquet, auteur anonyme



Japonais, auteur Gilles



Oiseau, auteur Mathieu

# Voyage au centre de la géométrie

## Le puzzle, un outil didactique au service des maths

par G. Sarcone et M.J. Waeber

Lors de ces deux derniers siècles, le puzzle fut un passe-temps très prisé. En omettant les artisans de la mosaïque et de la marqueterie, les précurseurs de ce jeu auraient été les anatomistes qui utilisaient pour leurs études, à l'époque, des représentations d'organes sous forme de puzzles en cire. Mais il ne faut pas se méprendre, le puzzle naquit dès que l'homme commença à casser sa vaisselle[1].

Réunir ce qui est dispersé, jouer avec des éléments disparates pour leur donner un sens global, tel est le principe de base des puzzles. Disséquer le monde et le réassembler pour mieux le saisir dans son entier: combien de mythes se réfèrent à ce principe de «division-union» ? Le mythe d'Osiris ou encore celui de Bacchus retrace comment, par jalousie ou punition divine, ces héros furent dépecés, puis enfin ramenés à la vie lorsque leurs membres dispersés furent réunis par leurs proches.

Comme certains oiseaux le font avec des coquillages, des objets brillants ou colorés, l'homme se laisse parfois aller à cette satisfaction gratuite qui est d'assembler, ranger des pièces, des jetons ou des objets divers. Ainsi, assembler un puzzle n'est pas uniquement une activité intellectuelle ou ludique, mais également une «pulsion», la manifestation d'un sens de la géométrie, inné et irrépressible chez l'être humain.

Le puzzle est plus qu'un jeu de construction, il est un jeu de reconstitution et nécessite dans son approche un bon esprit de déduction et de synthèse. En outre, il développe la continuité dans l'effort et la capacité de recadrer un problème. Le plus intéressant est que ce jeu ne comporte pas la notion d'adversaire; l'adversaire, ce sont votre matière grise et les aiguilles de la montre.

Le but, ici, n'est pas de faire l'éloge du puzzle, mais d'attirer l'attention sur un jeu populaire qui peut aussi se révéler efficace pour les étudiants plus sensibles à l'apprentissage par la manipulation (kinesthésiques). Toute classe devrait posséder au moins un Tangram ou un puzzle dit classique. Des kyrielles d'axiomes et de théorèmes peuvent être «imagés» par ces petits jeux anodins. A l'heure du «virtuel», rendre la géométrie «tangible» peut sembler anachronique. Mais la plus belle des théories sur écran ne remplacera jamais l'expérience manuelle. Forts de cela, nous avons créé une ligne de puzzles sortant du commun, dont le but n'est pas d'assembler des pièces pour faire apparaître un paysage de rhododendrons, mais de jouer avec les paradoxes de la géométrie. Ci-dessous, vous trouverez un échantillon de puzzle Quadrix et sur les pages suivantes, nous vous expliquons comment en fabriquer un (pour votre usage personnel uniquement) et quelle en est l'astuce. Si les puzzles éducatifs ou paradoxaux vous intéressent, contactez-nous.

Introduire dans le puzzle le petit carré annexe sans modifier la surface du jeu et en gardant toutes les pièces. Illogique ? Pourtant c'est possible (voir ex.), grâce à la «magie» des formes.

■ carré annexe

Ajoutez le petit carré annexe dans le grand, les dimensions du puzzle resteront les mêmes ! Prenez une réglette et vérifiez vous-même...

[1] Reconstituer des vases réduits en tessons était un passe-temps prisé des Japonais. Furuta Oribe, célèbre Maître de Thé, brisait les bols jugés trop parfaits et les reconstituait en laissant les fêlures apparentes, le must pour l'époque.

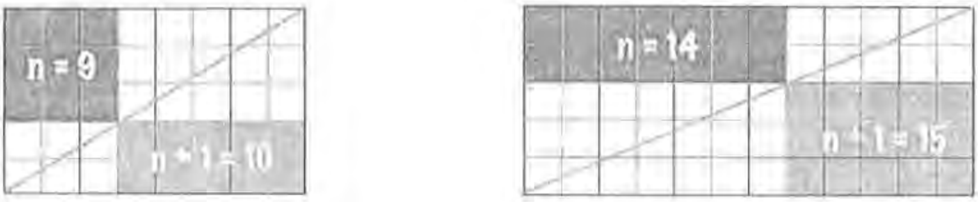
## Comment construire un puzzle magique Quadrix ?

S'il est aisé de construire un puzzle stéréophanique[1] sur papier, il en va autrement lorsqu'il s'agit de passer à sa réalisation proprement dite. Des ajustements supplémentaires sont nécessaires qui, pour des raisons de secret de fabrication, ne peuvent être divulgués ici.

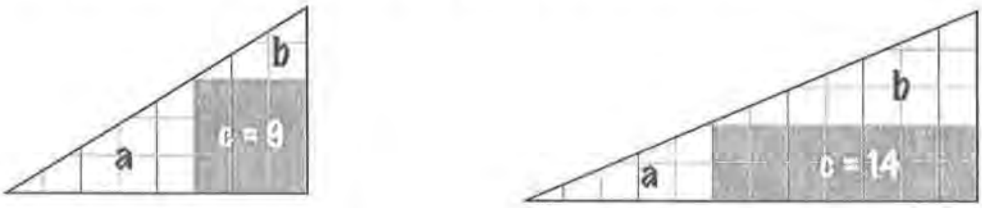
**Exemple A** **Exemple B**

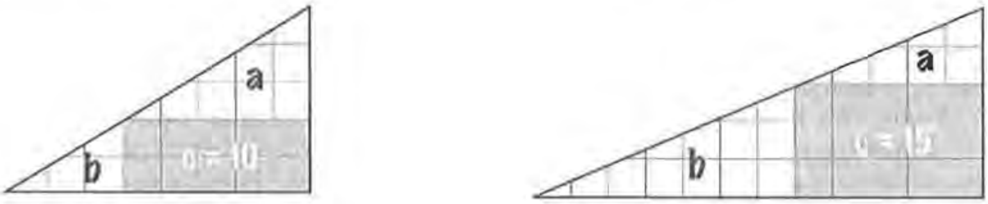
a) Adjoindre à un quadrilatère quelconque à n carrés ou unités, par un des sommets, un autre quadrilatère comportant un carré supplémentaire (n+1).


b) Inscrire ces deux quadrilatères dans un rectangle et tracer une diagonale selon les exemples. Cette dernière déterminera deux grands triangles rectangles, dont un seul suffira pour construire le puzzle.




c) Nous avons ainsi un triangle rectangle composé de 2 petits triangles a et b délimitant un espace c. En intervertissant les triangles a et b de notre puzzle, l'espace c gagne ou perd un carré ou une unité (pouvez-vous expliquer cela ?). Vous pouvez reporter ces mesures sur du carton fort, vous découperez ensuite votre puzzle au moyen d'un cutter.



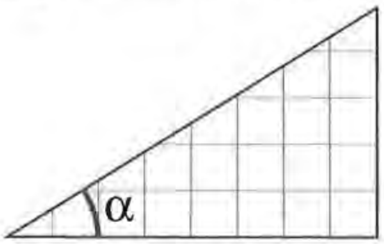




[1] de stéréophanie: néologisme que nous avons inventé pour résumer «apparition d'espace».

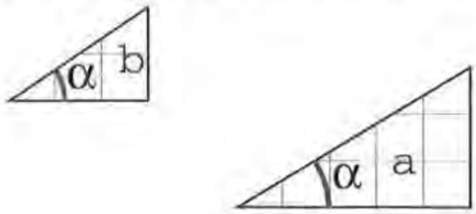
## Explication du prétendu miracle d'apparition d'espace

Prenons le triangle de l'exemple A de la page précédente. Ce triangle rectangle est composé de deux petits triangles a et b; comparons ces 3 triangles entre eux. Nous constatons tout de suite qu'ils diffèrent par leur angle $\alpha$. Il suffit pour s'en rendre compte de diviser la hauteur des triangles par leur côté. L'astuce consiste donc à nous faire croire que l'hypothénuse du grand triangle recoupe exactement l'hypothénuse des triangles a et b, et que l'hypothénuse de b est le prolongement de celle de a.

1) Angle $\alpha$ = arctan 5/8 = 32 degrés

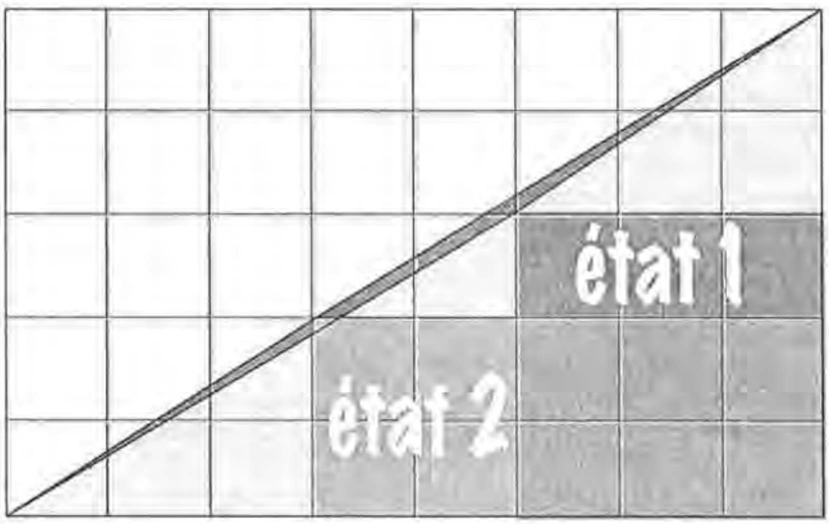



3) Angle $\alpha$ = arctan 2/3 = 33,69 degrés




2) Angle $\alpha$ = arctan 3/5 = 30,96 degrés

Reprenons notre triangle, nous distinguons un «état 1» lorsque l'espace c a 9 carrés et un «état 2», lorsqu'il en a 10. Agrandissons les détails et marquons la différence entre ces deux états. Nous pouvons constater, alors, que cette fameuse unité-fantôme se retrouve «ventilée» dans le parallélogramme effilé en gris foncé sur la figure 1 (la diagonale de ce dernier n'est autre que l'hypothénuse du grand triangle).




Il existe naturellement d'autres formes de base, à part le triangle, qui font gagner ou perdre un carré ou une unité, pouvez-vous dire lesquelles ? Pouvez-vous dire également quel rapport ont les formes que nous avons étudiées avec le nombre d'or ? C'est ce que nous allons voir prochainement, faites-nous cependant parvenir vos suggestions. Nous disposons de 15 formes différentes de puzzles magiques Quadrix, si vous êtes intéressés par l'acquisition de tels puzzles : tél. 021-617 28 04, ou écrivez-nous à l'adresse CP 2148 1002 Lausanne.

# Annonce

Un nouveau cours intitulé:

***Introduction à la didactique des mathématiques***

sera donné par F. Conne à la Faculté des sciences sociales et politiques, Institut de psychologie, durant l'année académique 1996-1997.

**Annonce**
Les espoirs suscités dans les années 60-70 par la réforme des maths modernes ont été déçus. Ni les avancées du savoir mathématique, ni celles du domaine de la psychologie cognitive n'auront en effet suffi à régler les problèmes rencontrés dans l'enseignement de cette branche. Certes, des travers et des archaïsmes ont pu être corrigés, mais sans que l'on puisse éviter que d'autres s'installent à leur place. Ce constat a orienté la recherche vers une meilleure appréhension des conditions de l'enseignement des mathématiques à l'école. Sous l'impulsion de G. Brousseau, de G. Vergnaud et de Y. Chevallard, diverses équipes francophones de recherche ont élaboré un cadre théorique et conceptuel pour l'appréhension générale de ces questions: la didactique des mathématiques. Ce cours présentera quelques problèmes de l'enseignement des mathématiques tels que les traite cette nouvelle discipline de recherche.

**Durée du cours proposé**
2 heures /semaine sur deux semestres (54 heures), le mercredi de 15h à 17h au BFSH II à Dorigny, salle 3068.

**Pour l'inscription** s'adresser à:
François Conne, SCES
37, chemin de Maillefer
1052 Le Mont-sur-Lausanne
tél: 021 / 646 70 02

Ce cours est ouvert aux enseignants intéressés par le domaine. Ils y sont cordialement invités. Un des but de la didactique des mathématiques est de fournir des instruments de compréhension de l'entreprise d'enseignement et de permettre l'articulation des connaissances que l'on peut en avoir en une vue d'ensemble. En conséquence, ce cours introductif ne nécessitera pas de formation mathématique allant au-delà d'un diplôme de maturité fédérale ou d'une formation à l'école normale. Le cours sera conçu pour permettre et favoriser au maximum les échanges entre les participants qui pourront être aussi bien des étudiants, en sciences humaines ou en sciences, concernées par l'enseignement, que des enseignants du primaire et du secondaire.

**Plan du cours**

1. Définition et buts de la didactique des mathématiques, bref historique, position dans le champ des questions scolaires.
2. Un contenu d'enseignement spécifique (les mathématiques comme matière scolaire) comme entrée dans l'étude du système d'enseignement. Deux approches de recherche : étudier le système en prenant en charge l'intention d'enseigner ce contenu, observer le fonctionnement ordinaire de ce système et rapporter ces observations au contenu enseigné. Dans les deux cas, ces études nécessitent une prise de distance par rapport au projet scolaire officiel.
3. La notion de problème : pour les mathématiciens, pour les psychologues de la connaissance, pour les enseignants et les élèves.
4. Présentation de quelques concepts clés de la didactique des mathématiques.

Transposition didactique. Savoir et connaissance. Situation et milieu. Contrat didactique (Pour autant qu'il n'y ait pas double emploi avec l'enseignement de la Pr. M. Grossen.)

5. Mise en perspective entre psychologie cognitive, épistémologie génétique et didactique des mathématiques. Comparaison des projets, examen de quelques questions de méthode.

6. Illustrations à l'école primaire.
Examen des recherches de G. Brousseau et de son équipe à propos de l'enseignement de la logique puis de la géométrie. Incursion dans le domaine du numérique.

7. L'étude de l'enseignement élémentaire (point 6 ci-dessus) amène à poser une hypothèse générale portant sur la différence entre enseignement primaire et secondaire de l'école obligatoire. Peut-on alors parler de retard scolaire lorsque l'on centre son analyse sur les contenus ?

8. Conclusion : apports de la didactique des mathématiques à des problèmes limites (du point de vue du savoir à enseigner) : enseignement élémentaire (les 4 premières années primaires), enseignement secondaire obligatoire, enseignement spécialisé, formation des maîtres primaires et secondaires.

---

# Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

**Veuillez me faire parvenir :**

| | | |
|---|---|---|
| ***Le Trésor de tonton Lulu*** (vol.1, 28 probl. de niveau "10") | ..... | (ex. à Fr. 25.-)* |
| ***Le Trésor de tonton Lulu*** (vol.2, 25 probl. de niveau "11") | ..... | (ex. à Fr. 27.-)* |
| ***Le nombre*** $\pi$, ADCS | ..... | (ex. à Fr. 42.-)* |
| ***Les jeux de NIM***, par Jacques Bouteloup, ADCS | ..... | (ex. à Fr. 48.-)* |
| ***Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye***, APMEP | ..... | (ex. à Fr. 28.-)* |
| ***Fichier Evariste*** APMEP | ..... | (ex. à Fr. 20.-)* |

**Les anciens numéros de *Math-Ecole***

(prix en page 2 de couverture) : ........................................................................................

**Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques** (Fr. 13.- l'ex.)* :

• Niveau CM (degrés 4 et 5) : ***Récrémaths*** .... ex.

• Niveau collégiens :

***Les Pentagones patagons*** (n° 8) .... ex. ***Le Serpent numérique*** (n° 10) .... ex.

***Le Trésor du vieux Pirate*** (n°12) .... ex. ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) .... ex.

• Niveau lycéens et adultes :

***La Biroulette russe*** (n° 9) .... ex. ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex.

***Le Roi des Nuls*** (n°13) .... ex. ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex.

• Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 4, 5, 6 et 7) : ..............................................

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐Mme ☐M. ........................................................................................

Adresse (rue et numéro) : ........................................................................................

Localité (avec code postal) : ........................................................................................

Date : ........................................ Signature : ........................................................................

Madame N 506 **1**
JAQUET Liliane
Recorne 21
**2300 la Chaux-de-Fonds**

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7