MATH ECOLE

36e année

176

Nombres algébriques

Jeux de NIM

Mathématiques pascales

mars 1997

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

MATH-ECOLE

36e année 5 numéros par an

176

mars 97

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 6970
Fax (032) 889 6971

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

François Jaquet, IRDP

Math–Ecole, 35e anniversaire

Le 14 décembre dernier, au château d'Yverdon-les-Bains, une petite fête fort sympathique réunissait les amis et fidèles de *Math-Ecole*, à l'occasion de son 35e anniversaire. On y a parlé, évidemment, de Peztalozzi puisque celui-ci s'était installé dans les lieux environ 180 ans auparavant, de 1805 à 1825 et, qu'une salle du Musée établit dans ces murs est aujourd'hui consacrée à cet illustre pédagogue. On y a parlé aussi de notre revue, de son histoire et de son développement, lors des discours, très brefs, et de la réunion du comité de rédaction, consacrée au bilan de l'année et aux projets d'avenir.

Entre autres conclusions, on s'est dit que, pour une revue sur l'enseignement des mathématiques, indépendante de toute institution officielle ou association professionnelle garantissant une certaine pérennité du fonctionnement, 35 ans est un âge respectable. Et la question qu'on peut se poser est le pourquoi de cette remarquable longévité ou en d'autre termes : qu'est-ce qui fait vivre *Math-Ecole* ?

Des réglettes «Cuisenaire» à la «situation-problème», en passant par les «Maths modernes», *Math-Ecole* a suivi et suit encore de près toutes les réformes, qu'elles soient de forme ou de fond, qui jalonnent ces années d'évolution accélérée de l'éducation mathématique. Il y a là peut-être un premier élément de réponse : la revue est un instrument d'information, qui tient ses lecteurs au courant des tendances et des modes.

Une des préoccupations du comité de rédaction est de répondre aux attentes des abonnés de la revue. Nous n'avons pas l'ambition d'intéresser les maîtres «de la maternelle à l'université» comme le fait, en France, l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), mais nous nous efforçons de proposer des articles et des comptes rendus de pratiques recouvrant largement les degrés de la scolarité obligatoire, avec des incursions fréquentes dans le préscolaire et le second cycle du secondaire, à l'instar de la réflexion sur les nombres algébriques proposée dans ce numéro. C'est un choix régulièrement confirmé que d'offrir aux lecteurs un lieu de rencontre et des ouvertures sur «ce qui se passe avant, après et ailleurs». C'est un deuxième élément de réponse à la demande sur les raisons d'exister de *Math-Ecole*.

Informer, faire connaître, échanger, ouvrir les horizons, c'est un objectif de toute revue professionnelle. Nous en avons d'autres, plus ambitieux, qui s'expriment en termes d'action :

La relation d'une expérimentation peut être considérée comme une suggestion d'activité, en particulier quand elle comprend des travaux d'élèves et qu'elle identifie clairement les contraintes de la classe. C'est le cas, pour ce numéro en particulier, de la rubrique «CABRidées», de «Mathématiques pascales», de «Un point ... c'est tout».

La publication d'énoncés de problèmes, pour les élèves comme pour les maîtres, est une incitation à les résoudre. A voir la participation au Rallye mathématique qui atteint la centaine de classes romandes cette année, il faut croire que cette incitation est suivie d'effets.à

Les articles en relation étroite avec la formation des maîtres, comme le «Pion empoisonné» de ce numéro, peut suggérer au lecteur de revoir ses conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, au moment où la Suisse romande se lance dans une innovation importante en mathématiques.

Tous ceci constitue un troisième argument pour expliquer l'intérêt d'une revue comme la nôtre : elle accompagne et soutient activement l'enseignement, au travers de propositions réelles d'activités et d'apports pour la formation des maîtres intéressés.

Revenons maintenant à Yverdon et aux 35 ans de *Math-Ecole*.

Dans son exposé, intitulé «Pestalozzi, de la main au concept mathématique», Simone Forster nous a décrit un pédagogue et ses conceptions de l'apprentissage, des mathématiques en particulier, en avance sur son temps, au point qu'on aimerait bien aujourd'hui voir appliquer certains de ses préceptes. Qu'on en juge plutôt :

«...Le château d'Yverdon est un véritable centre de recherches pédagogiques où maîtres et stagiaires viennent de loin pour s'initier à la *Méthode*. Les disciplines sont enseignées simultanément dans différentes salles de l'école et les enfants passent de l'une à l'autre en fonction de leurs capacités...

Aucune compétition dans les apprentissages, l'enfant se développe à son rythme, sans comparaison ni jugement de valeur. Pas de punitions ni de récompenses, pas de notes ni de livrets. Dans ces classes à niveaux, la différenciation est effective et l'évaluation résolument formative...

La *Méthode* place l'intuition (*Anschauung*), c'est-à-dire l'expérience personnelle, à la base de toute instruction. Il faut donc partir de tout ce qui fait l'enfant : son vécu, son imaginaire, ses représentations. La matière enseignée doit se construire sur les éléments les plus simples des connaissances et ne pas s'imposer du dehors...

Il faut du temps en éducation. Se hâter, c'est finalement en perdre car les enfants s'épuisent ensuite en rattrapages et répétitions inutiles et perdent tout goût de découvrir et d'apprendre... «

Si au lieu de ses 35 ans, notre revue en avait 200 aujourd'hui, se serait elle trouvée aux côtés de Pestalozzi et de ses propositions ? Au risque de paraître prétentieux, nous pouvons affirmer que plus d'un des participants à la petite fête d'anniversaire aurait répondu oui. Ce ne sont pas Samuel Roller, le fondateur de la revue, Raymond Hutin, son successeur à la rédaction, les anciens membres du comité de rédaction aussi présents, comme Françoise Waridel - que nous remercions pour sa présentation de la salle Pestalozzi dont elle s'occupe avec enthousiasme et compétence - qui nous contrediront.

Et en effet, de tout temps, *Math-Ecole* a su s'engager aux côtés des maîtres et de ceux pour qui, comme pour Pestalozzi, «l'enfant est acteur de sa formation afin que celle-ci acquiert un sens». C'est peut-être une quatrième explication de la longévité de notre revue.

Bien sûr, à leur époque, le pédagogue et sa *Méthode* avaient leurs détracteurs. On leur reprochait la prééminence des mathématiques et l'insuffisance de l'enseignement religieux. On soupçonnait même Pestalozzi de propager des idées révolutionnaires. Mais que cela ne nous effraie pas, les menaces sur *Math-Ecole* ne sont pas aussi précises et ne vont pas l'empêcher de poursuivre son bonhomme de chemin vers de nouveaux anniversaires - tout en évitant la mise en quarantaine et les quarantièmes rugissants - pour voir son intérêt et le nombre de ses lecteurs continuer à augmenter.

Un point ... c'est tout !

Michel Brêchet

Tout... et rien. Toute une gymnastique d'esprit pour s'en construire une image mentale correcte, et rien... du moins idéalement.

«Un point, c'est une petite tache... ouais, j'sais pas... elle est très petite... ça dépend de la mine du crayon. On peut fabriquer des mines toujours plus petites... euh, invisibles à l'oeil nu, faites par des savants... mais aidez-moi vous au lieu de rigoler... Y' aura toujours une surface... même si on la voit pas. Sinon ça n'existerait pas... oh pis j'm'emmêle tout maintenant.»

Caroline, élève de huitième année option scientifique, nous plonge admirablement au coeur d'une des problématiques centrales de l'enseignement de la géométrie. Comment aider les élèves à appréhender un objet qui n'a pas de réalité matérielle, et, de surcroît, impossible à bien définir mathématiquement ? Comment leur faire comprendre qu'un dessin sur une feuille n'est qu'une pâle représentation d'une figure idéale ?

Une majorité de nos élèves, à l'instar de Caroline, vivent toute leur scolarité obligatoire en pensant qu'un point est une petite région du plan, voire de l'espace tridimensionnel. Certes, cette conception du point permet de résoudre efficacement de nombreux problèmes. Toutefois, étant donné qu'elle est sensiblement éloignée du savoir de référence, il serait souhaitable de créer, au cours de l'éducation mathématique, un environnement conduisant les élèves à la remettre en question, puis à la dépasser.

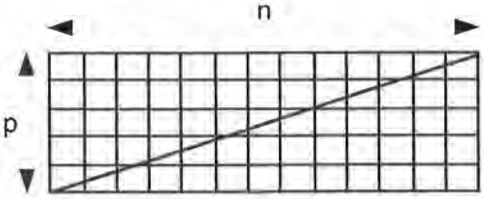
Amener un élève à s'approprier un élément qui n'existe pas dans le monde des choses provoque chez lui un bouleversement intellectuel non négligeable; c'est un peu comme si le sol se dérobait sous ses pieds. Un tel apprentissage favorise la construction de la pensée. En outre, la sensibilisation à la notion de point offre la possibilité d'explorer l'infininiment petit, d'approcher le monde de l'abstraction, mais aussi d'entretenir chez les élèves le plaisir d'apprendre et d'éveiller en eux la curiosité. Tous y ont droit, même, voire surtout, les plus faibles. Il est en effet illégitime de priver ces derniers de l'accès aux savoirs fondamentaux, de les «garder dans le concret», sous prétexte qu'ils n'y comprennent rien.

Vaincre un obstacle qui s'est érigé durant de nombreuses années (un point a toujours été assimilé à une petite zone, et celle-ci a été maintes fois dessinée, donc visualisée) ne va pas sans difficultés. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire d'y consacrer plusieurs périodes d'enseignement et de réaliser des activités fort diverses. Il ne suffit pas de dire aux élèves qu'un point est un élément sans dimension, donc sans largeur, longueur et épaisseur, et par conséquent qu'il est infiniment petit. Une telle phrase résonne dans la tête des enfants comme une formule creuse, sans grande signification. Par contre, en étant confronté à des situations où la question de l'étendue du point se pose avec acuité, de telle sorte qu'il ne soit pas possible de l'éluder, l'élève a l'occasion de faire évoluer ses conceptions et de progresser ainsi dans l'appropriation du savoir en jeu, a fortiori si celui-ci porte sur un objet qui n'existe que par une abstraction d'esprit.

Le point comme lieu sans étendue

La situation suivante a été traitée avec des élèves de huitième année :

«Rédige une méthode qui permette de trouver le nombre de carreaux traversés par la diagonale d'un rectangle quadrillé dont on connaît le nombre de carreaux de la largeur et celui de la longueur.»[1]

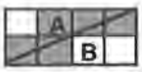


De multiples objectifs peuvent être poursuivis par ce problème ouvert: rupture de certaines règles implicites du fonctionnement de la classe, transfert de la responsabilité du problème aux élèves, émergence du débat entre élèves, développement d'aptitudes à la recherche, approche de la preuve intellectuelle (par opposition à la preuve pragmatique s'appuyant sur l'observation d'un dessin), notions de point et de droite du plan. Analysons le problème et quelques comportements d'élèves à propos de ce dernier objectif, le seul qui nous intéresse ici.

A un moment donné, durant leur recherche, les élèves seront très certainement confrontés à la question suivante: lorsque la diagonale passe exactement à l'intersection de deux lignes du quadrillage, traverse-t-elle les quatre carreaux qui ont un sommet commun à cet endroit-là ? Ou seulement trois ? Ou deux ?

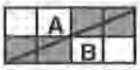
Nombre de carreaux traversés par la diagonale (selon trois propositions d'élèves):

6



5

5



4

[1] cf. Arsac G. et al. «Problème ouvert et situation-problème», IREM de Lyon, 1988.

Voici quelques propos justifiant ces différentes propositions (seule une synthèse des arguments émis par les élèves est présentée ici; il ne s'agit pas des textes originaux).

- *A l'intersection de deux lignes du quadrillage, la diagonale touche quatre carreaux, sinon elle n'existerait pas, ça ne serait rien. Le trait du crayon sera toujours plus large que les lignes du quadrillage de la feuille, donc la diagonale peut passer dans deux carreaux à la fois (A et B).*

- *Si la diagonale passe sur un noeud, il faut choisir entre le carreau A et le carreau B , car la diagonale a une épaisseur, celle de la mine du crayon. Elle passe donc soit en-dessus du noeud, soit en-dessous.*

- *Sur le dessin, la diagonale a forcément une épaisseur, mais en réalité elle n'en a pas. Il faut se l'imaginer.*

- *Une droite est infiniment mince... mais elle a tout de même une épaisseur.*

Rares sont les élèves affirmatifs. La plupart doutent, à des degrés variables, de leur position respective. Le débat qui oppose les partisans du point comme lieu sans étendue à ceux qui prétendent que le point est une petite tache est vif et animé. Citons quelques éléments significatifs apparus lors de la discussion.

- *L'étendue d'un point situé à l'intersection de deux lignes dépend de la largeur des lignes.*
- *Il faudrait faire le dessin à l'ordinateur, puis zoomer sur les endroits qui nous intéressent; de cette manière, on verrait si la diagonale passe exactement sur l'intersection ou pas.*

- *Un point a une petite surface; elle vaut zéro virgule zéro zéro zéro zéro... vraiment beaucoup de zéros, mais il y aura toujours un petit quelque chose.*
- *Si une ligne n'a pas d'épaisseur, elle est imaginaire et n'existe pas. Donc elle ne traverse aucun carreau.*
- *Si une ligne n'existe que dans notre tête, elle ne passe par aucun noeud.* ►

Remarquons que le problème de la diagonale du rectangle permet de faire émerger les conceptions des élèves à propos des objets de la géométrie, notamment du point et de la droite, et que la discussion entre pairs provoque une remise en cause de ces conceptions. Mais la pratique de cette situation n'amène pas à un rejet de certaines d'entre elles.

Afin de faire progresser les diverses représentations intellectuelles en présence, il est souhaitable de proposer de nouvelles activités.

Quelques suggestions pour faire évoluer les conceptions

1) Trouver les coordonnées du (des) point(s) qui se situe(nt) le plus près possible d'un point donné.

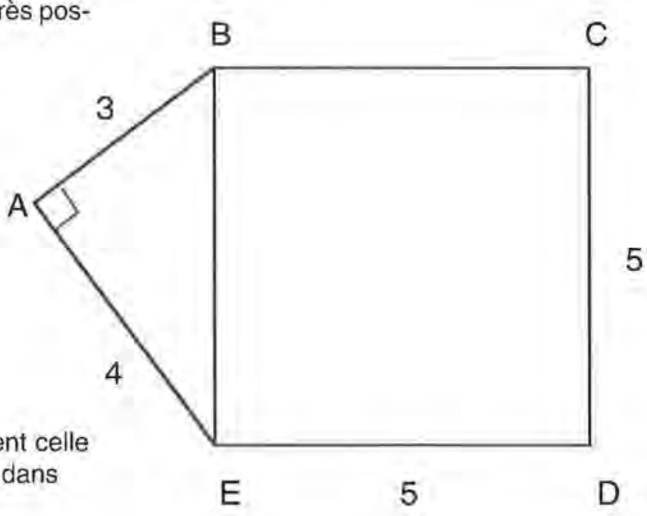
2) Calculer l'aire :

   a) du carré BCDE;

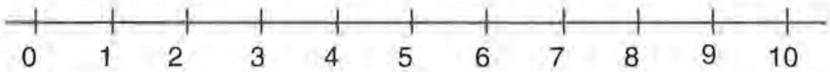
   b) du triangle ABE;

   c) du pentagone ABCDE.

   L'épaisseur des côtés, notamment celle de BE, est-elle prise en compte dans les calculs ?



3) Sur la «droite de la fortune», on peut tirer des nombres compris entre 0 et 10. On ne peut tirer ni le nombre 0, ni le nombre 10.



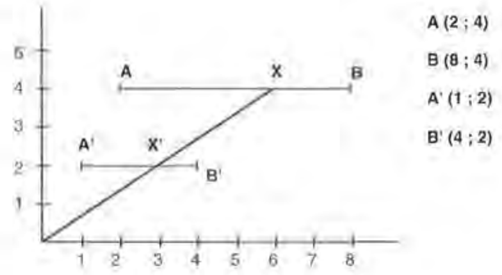
   Catherine dit: «J'ai joué à la droite de la fortune, j'ai tiré un nombre si grand qu'aucun autre joueur ne me battra.» Est-ce possible ? Si oui, quel est le nombre de Catherine ? Si non, expliquer pourquoi.[2]

[2] cf. Chapiron G. et al. «*Mathématiques 6e*», Paris, Hatier, 1996, (collection Triangle).

4) On peut faire prendre conscience aux élèves que le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables : il n'existe en effet aucune unité de mesure pour laquelle le côté et la diagonale ont des mesures entières. Si les sommets du carré étaient effectivement dessinés, rien n'empêcherait de mesurer les segments avec une règle graduée. Cette propriété du carré et de sa diagonale ne concerne donc que des objets idéaux (points et segments).[3]

5) Y a-t-il plus de points sur le segment AB que sur le segment A'B' ?

Pour répondre à cette question, on peut faire correspondre à chaque point X du segment AB un point X' du segment A'B'. Les coordonnées de X' sont alors égales à la moitié des coordonnées de X.



Ces activités révèlent que les ensembles contenant une infinité de points posent de sérieux problèmes conceptuels. La pratique de l'une ou l'autre d'entre elles s'inscrit dans la longue approche des objets de l'espace géométrique et permet aux élèves de faire une partie du cheminement intellectuel nécessaire à la maîtrise des notions de point et de droite.

Peut-on alors prétendre que certains élèves seront momentanément convaincus que points et droites ne sont que des idéalités ? La question est délicate et rien ne me permet d'être affirmatif.

Rendre à César : Dans l'éditorial du n° 175 nous avons oublié de mentionner que le site de Math-Ecole a été mis en place par Bastian Pochon, puis peuplé par des élèves de la classe 2IG de la volée 95-96 de l'Ecole supérieure neuchâteloise d'informatique de gestion.

Le Grec : Dans le n° 163 de Math-Ecole un nouveau jeu, *Le Grec*, imaginé par Dominique Huguenin et Yves Chédel était présenté. Vous pouvez dès à présent jouer au *Grec* sur Internet. Rendez-vous à la rubrique jeu du site Math-Ecole. Attention, l'ordinateur présente une forte tendance à «asphyxier» son adversaire.

Biblimath (http://www.inrp.fr/Acces/Biblimath/Bibmath.html): A l'initiative de la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques, plusieurs partenaires (l'Institut National de Recherche Pédagogique, l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, l'Assemblée des Directeurs des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, la Commission Française sur l' Enseignement des Mathématiques et la Société Mathématique de France) ont créé et alimentent une base d'information sur Internet. Elle contient actuellement près de 2300 références. Son objectif est de diffuser et de partager des savoirs issus de la recherche didactique, pédagogique, psychologique, historique, épistémologique, sociologique, etc., sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

[3] cf. Arsac G. et al. «Initiation au raisonnement déductif au collège», PUF, Lyon, 1992.

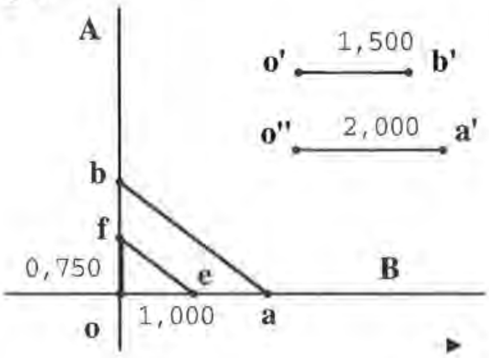
CABRidées : Changer d'aire ...

Michel Chastellain, SPES

Récemment, nous avons vu qu'il était possible de calculer, à l'aide de CABRI-GEOMETRE, le produit de deux nombres et d'afficher le résultat de cette opération en tant que mesure d'un segment. L'article intitulé «*une machine à multiplier*»[1] se terminait par une invitation à élaborer une «construction inverse», c'est-à-dire une machine à diviser.

Dans ce nouveau cas, la figure à réaliser est identique à la précédente, sous réserve des triangles à prendre en considération qui deviennent, respectivement, les triangles **oba** et **ofe**.

fig. 1



La propriété de similitude de ces deux triangles conduit alors à une égalité «du même ordre» (fig. 1):

$$\frac{[\mathbf{ob}]}{[\mathbf{oa}]} = \frac{[\mathbf{of}]}{[\mathbf{oe}]}\text{ , c'est-à-dire : }\frac{[\mathbf{ob}]}{[\mathbf{oa}]}\cdot[\mathbf{oe}] = [\mathbf{of}].$$

Lorsque [**oe**] = 1,000 , la mesure du segment [**of**] correspond au quotient de [**ob**] par [**oa**], ce qui se traduit, dans notre exemple, par l'opération : 1,500 : 2,000 = 0,750.

Tout comme pour la multiplication, il suffit de modifier la longueur de l'un des deux segments (qui représentent ici le dividende et le diviseur), pour obtenir le quotient relatif à une nouvelle division.

A titre informatif, la précision affichée grâce à l'outil «*Préférences ...*» du menu «*Edition*» est de trois chiffres après la virgule. Mais, il est possible de la modifier – encore faudrait-il débattre avec les élèves du bien fondé de cette démarche, ainsi que de la signification des résultats obtenus – si l'on fait appel à la sous-rubrique «*Longueur*», de l'outil «*Calculer*», du menu «*Divers*». En effet, après avoir choisi la précision «*maximale*» et, par exemple, modifié la dimension des segments [**o'b'**] et [**o"a'**], on pourrait obtenir une fenêtre qui donne des résultats avec dix-huit chiffres après la virgule ! (fig. 2) ▼

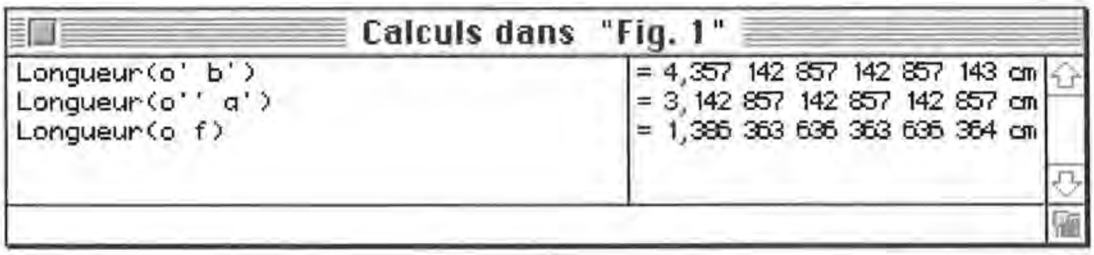


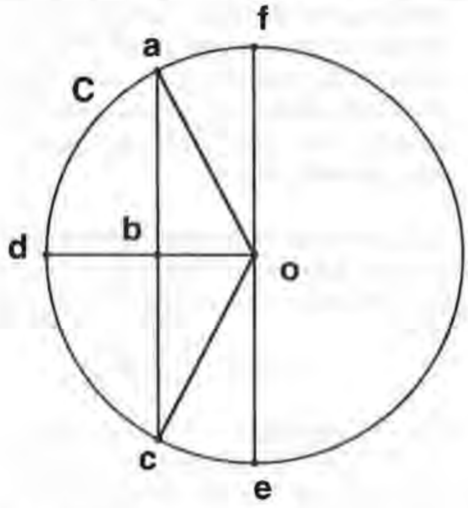
fig. 2

[1] CABRidées, Math-Ecole n° 172, oct. 1996.

«LA» bonne position !

Ces deux «machines» multiplicative et divisive ayant été étudiées puis élaborées sous la conduite du maître, les élèves [2] se sont alors penchés sur la consigne suivante :

- Dans cette figure [3], **C** est un cercle de centre **o** et de rayon 5 cm.
- La corde [**ac**] est parallèle au diamètre [**fe**] et perpendiculaire au rayon [**od**].
- Quelle doit être la position du point **b** appartenant à [**od**], pour que l'aire du triangle **oac** soit maximale ?



Critères d'évaluation :
- Une figure précise.
- Une «marche à suivre» facilitant la compréhension de votre construction.
- La solution chiffrée de l'aire maximale.
- Une analyse de la situation, avec des tentatives de justifications.
- Si possible, une représentation graphique de l'aire du triangle en fonction de la position du point **b**.

[2] Classe scientifique de 8e année.
[3] in REPERES n° 17, IREM, Topiques édition, 1994, p. 2.

La première phase, c'est-à-dire l'élaboration de la figure avec sa marche à suivre, n'a pas posé de problèmes particuliers. Les «bugs» concernaient avant tout des omissions (comme des points non nommés, ou encore des objets intermédiaires non camouflés) et des imprécisions dans la transcription de la marche à suivre.

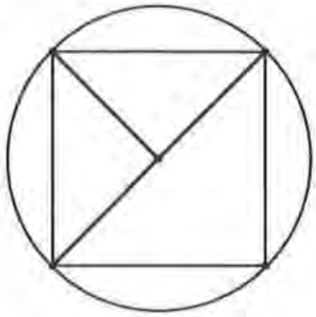
Un seul groupe sur douze (les élèves travaillaient par deux avec un ordinateur) ne choisit pas le point **b** comme point mobile sur le segment [**od**], mais comme l'intersection d'une parallèle à [**fe**] par le point **a**, lui même étant défini comme un *point sur objet* du cercle **C**. Par la suite, une auto-correction eut lieu naturellement, lorsque le groupe tenta de déplacer le point **b**, conformément à la consigne.

La deuxième phase se révéla particulièrement riche, comme le montrent les commentaires et tentatives de justifications qui figurent dans les comptes rendus de la recherche de l'aire maximum. A titre d'exemple, en voici quelques échantillons pêle-mêle :

- *«Le triangle **oac** est isocèle. Il peut même devenir équilatéral, suivant la position de **b**».*
- *«Il y a plusieurs techniques pour trouver l'aire maximum : par tâtonnement ou en faisant calculer par l'ordinateur, systématiquement».*
- *«Nous avons remarqué que plus nous approchons le point **b** de **o**, plus l'angle **oab** devient petit, et que c'est l'inverse si nous approchons **b** de **d**».*
- *«Nous avons d'abord cherché l'aire la plus grande en jouant, puis nous avons cherché les particularités du triangle trouvé. C'est ainsi que nous avons découvert que l'aire du triangle **oac** est maximale, lorsque la base [**ac**] vaut le double de la hauteur [**ob**]».*

- «*Le plus grand rectangle que l'on pourra inscrire dans un cercle aura une forme carrée. Le plus grand triangle que l'on pourra inscrire dans un cercle aura pour base la diagonale du carré et pour hauteur le rayon du cercle. Donc, le plus grand triangle que l'on pourra inscrire dans un demi-cercle aura une base qui vaut le double de la hauteur*». (fig. 3) ►

fig. 3



*Pour calculer son aire, il y a deux possibilités : [**ab**] · [**ob**] ou [**ao**] · **H**.*

*[**ao**] ne change pas de mesure car c'est le rayon du cercle (5 cm). Donc maintenant, nous devons trouver la plus grande mesure pour **H**. Nous pouvons constater que si nous prolongeons **H** et que cette droite passe par **b'**, alors **H** est maximum. Cela se présente quand **H** est égal au rayon du cercle de Thalès du triangle **oab***». (fig. 4)

- «*Nous avons observé que si l'on construisait la médiatrice du segment [**fd**], celle-ci passait exactement sur le segment [**oa**], lorsque l'aire est la plus grande et qu'elle vaut 12,5 cm²*».

- «*Si nous partageons le triangle **oac** en deux, ça nous donne un triangle rectangle. En plaçant le triangle **boc** à la place du triangle **b'ao**, cela donne un rectangle **ob'ab** dont la diagonale est égale à 5 cm. Ce rectangle peut devenir un carré.*

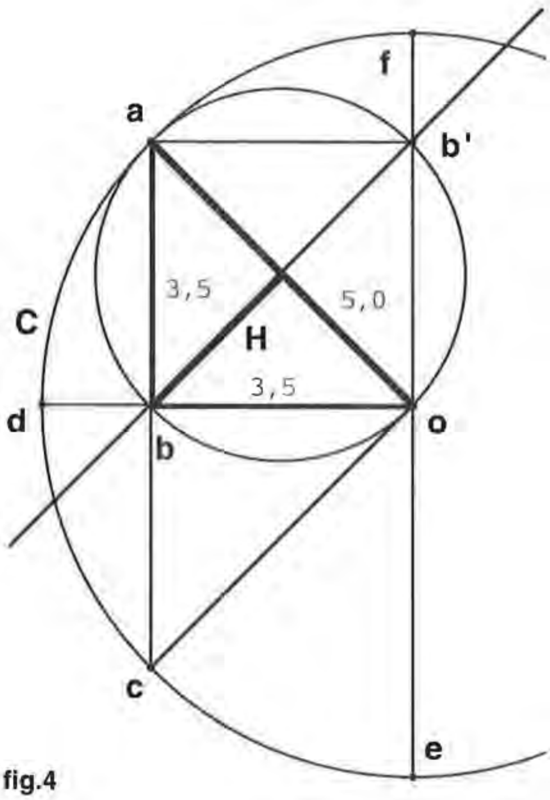


fig.4

- «*La formule pour trouver l'aire du triangle **oac**, à partir de n'importe quelle mesure de [**ob**], ou de **r** (rayon du cercle), c'est :*

$$[\mathbf{ob}]\cdot\sqrt{\mathbf{r}^2-[\mathbf{ob}^2]}$$

Dans le tableau qui suit, les mesures sont en cm. Mais nous ne pouvons pas arriver à une mesure précise avec un seul chiffre après la virgule :»

longueur [ob]	*aire oac (cm²)*
1	~ 4,899
1,5	~7,155
2	~9,165
2,5	~10,825
3	12
3,5	~12,498
4	12
4,5	~9,808

Multiplier, oui mais pour quel usage ?

Si la deuxième phase est réjouissante à plus d'un titre, que dire de la troisième, dans laquelle sept groupes se sont appuyés sur le travail préparatoire, afin de bénéficier d'un outil «calcul d'aire», comme les remarques suivantes le montrent :

- *«Après avoir construit cette figure, l'hypothèse suivante nous est venue à l'esprit : l'aire du triangle sera maximum, lorsqu'il sera équilatéral. Mais, nous nous sommes bien vite rendu compte que cette hypothèse était fausse, car en calculant l'aire du triangle équilatéral, on s'est rendu compte qu'elle était inférieure à un triangle dont les angles mesurent, par exemple, 42°, 42° et 96°.*

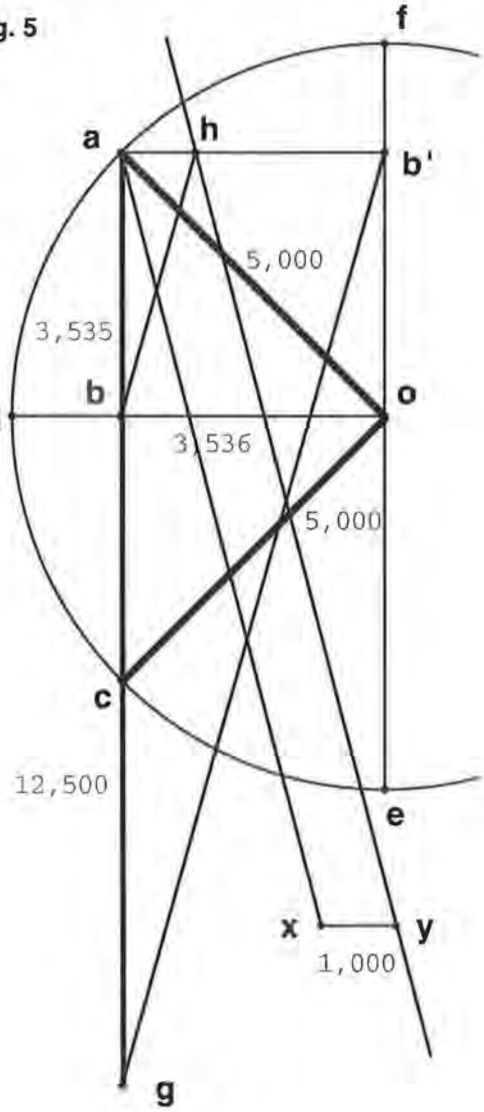
  Nous avons alors réussi à trouver la construction permettant de voir l'aire du triangle s'afficher automatiquement quand on le bouge. L'aire est maximum quand les angles du triangle obtenu sont 45°, 45° et 89,99°. En fait, c'est 90° pour le dernier angle, mais c'est dû à l'imprécision de l'ordinateur»!

- *«Nous déplaçons plusieurs fois le point* ***b*** *et nous calculons les différentes aires. Mais cette méthode ne s'avère pas être bonne, car il faut beaucoup trop de temps pour calculer toutes les aires. Nous avons donc abandonné cette idée pour essayer de trouver une construction qui nous donne l'aire, sans la calculer.*

  *Nous avons d'abord tracé une parallèle à [**ob**] par **a**, pour obtenir le segment [**ob'**]. Cela nous facilitera la tâche pour déterminer l'aire du triangle **oac**. Comme **ob'a** = **obc**, il faudra simplement calculer l'aire du rectangle **obab'**. Ensuite, la marche à suivre de la machine à multiplier est la suivante : (fig. 5)*

  - *segment [**xy**] de 1 cm, placer quelconque,*
  - *tracer [**xa**], puis une droite parallèle par **y**,*
  - *son intersection avec [**ab**] donne **h**,*
  - *relier **h** et **b** ([**ah**] = 1 cm),*
  - *construire une parallèle à [**hb**] par **b'**,*
  - *elle coupe la droite **ac** en **g**,*
  - *[**ag**] représente l'aire du triangle **oac**».*

fig. 5



- *«Nous avons fait un graphique :»*

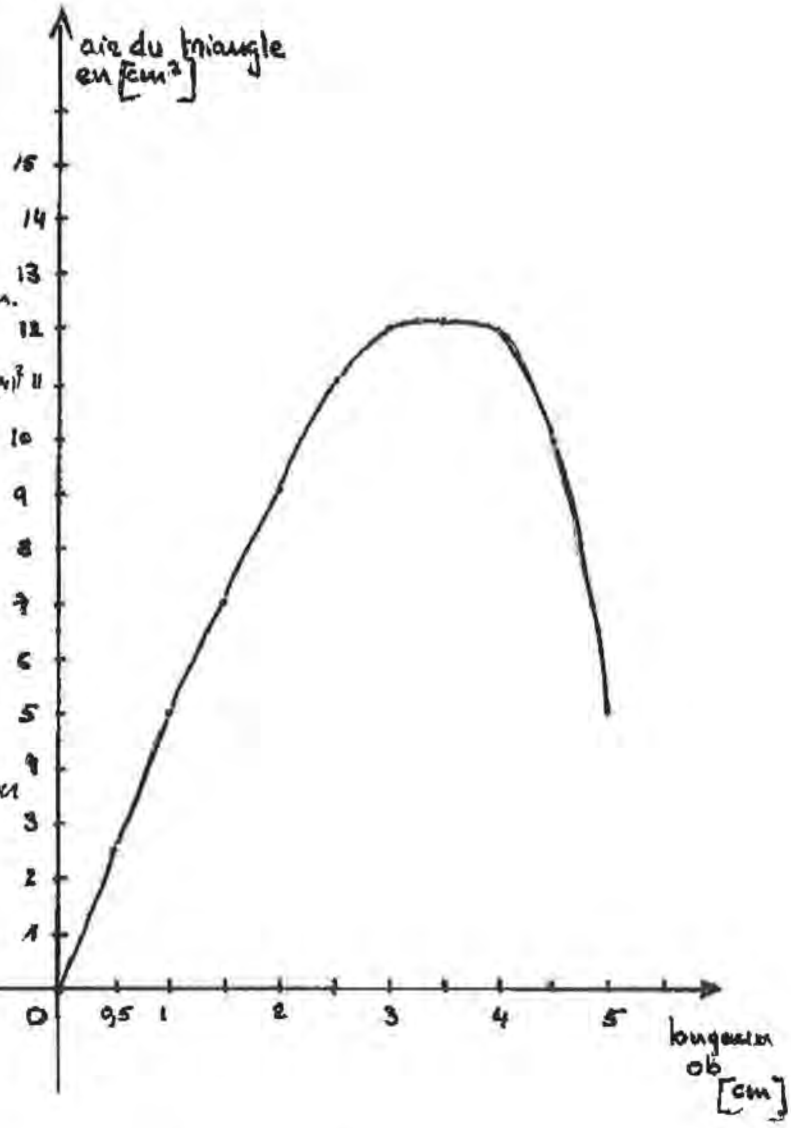
Vu que l'air maximum est le carré, ces cotés sont 3,5 cm.

3,5 · 3,5 = 12,25 cm²

la combe s'arrêtera car le point b ne peut pas sortir du cercle C.

⇓

car 5 est le rayon du cercle.



on ne peut pas aller plus loin que 5 cm. car c'est le rayon du cercle.

Pour la bonne bouche

Un groupe a présenté un travail particulièrement intéressant, même si tout n'est pas parfait. En voici le compte rendu in extenso, seules quelques constructions ont été légèrement retouchées, dans le but de faciliter notre mise en page.

Marche à suivre de la construction (fig. 6)

1. Tracer [fe] = 10 cm
2. Construire la médiatrice de [fe] => o
(arc O (f ; fe ; et arc O(e ; ef))
3. Cercle de centre o et de rayon of => c
4. Intersection du cercle C et de la médiatrice du segment [fe] => d
5. Point sur segment [od] => b
6. Droite parallèle à [fe] passant par b => a et c
7. Tracer segment [ab] et [bc]
8. Tracer [co] et [ao]

La construction de départ est finie

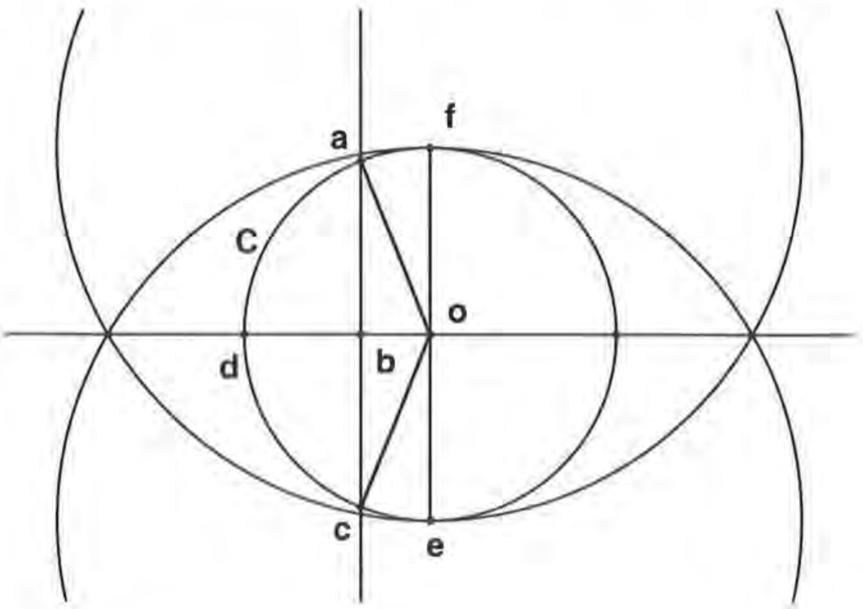


fig. 6

Construction pour déterminer l'aire du triangle aoc. (fig. 7)

Marche à suivre:

construire segment [b''b'] = 1 cm
(b' "appartient" au segment [b''o'],

2. Tracer segment [a'b']
3. Droite parallèle à [a'b'] passant par o'. => x

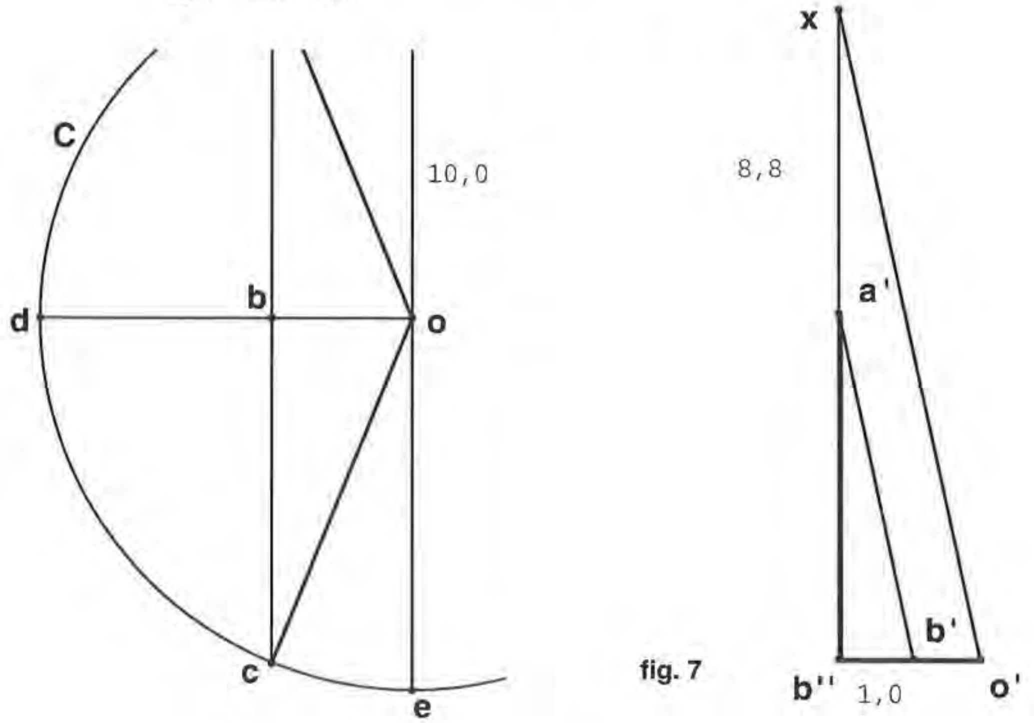


fig. 7

Analyse de la situation:

En bougeant le point b sur le segment $[b^d o]$. Nous remarquons que l'aire du triangle aoc ($\overline{ab} \cdot \overline{bo} = b''x$) est maximale lorsque le triangle abo est isocèle rectangle.

Nous traçons la hauteur "H" issue de [ao]. Quand le triangle [aob] est isocèle rectangle H est maximale, et mesure la moitié de [oa]. (fig. 8)

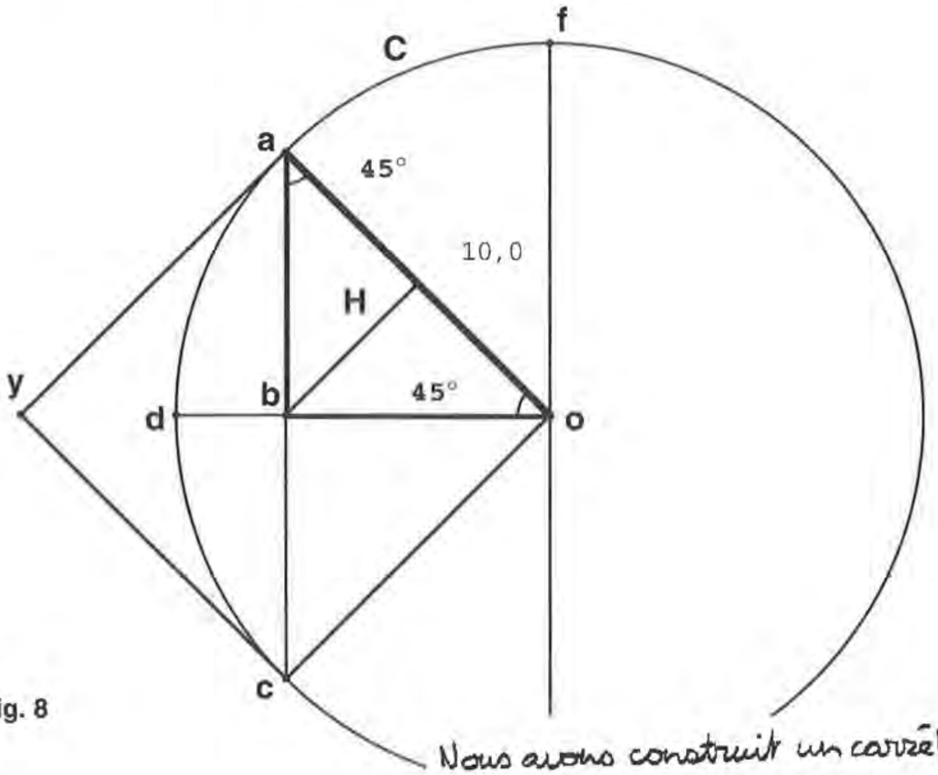


fig. 8

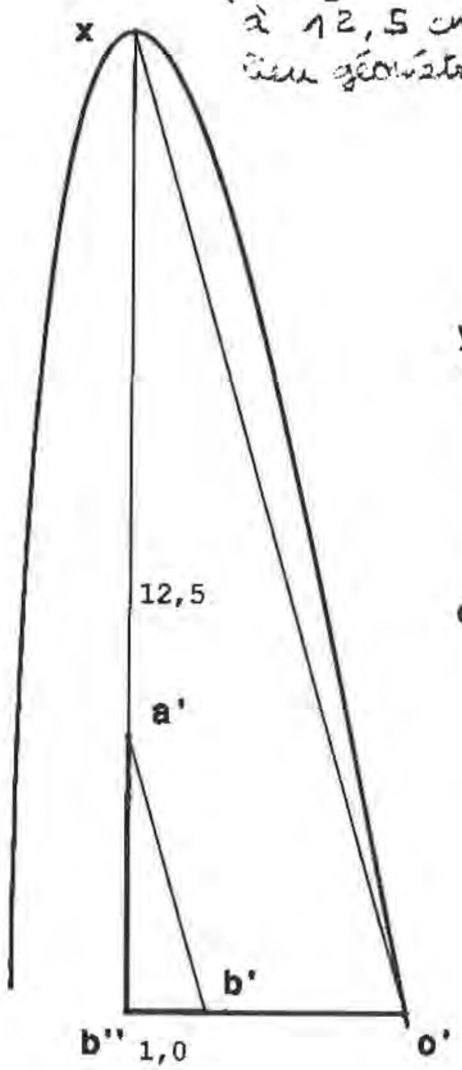
Nous avons construit un carré [aocy] pour essayer de trouver pourquoi H était maximale lorsque [aob] est isocèle rectangle. Mais cette construction ne nous a pas aidés.

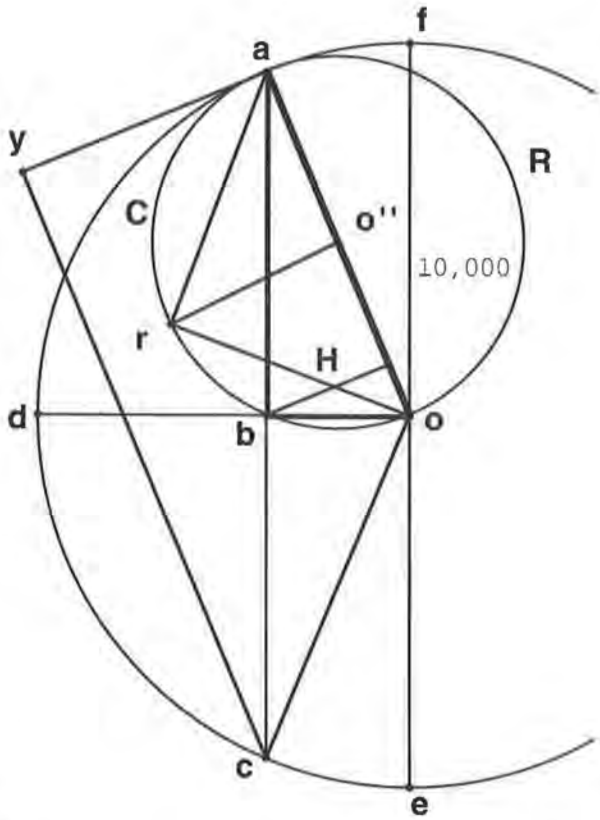
Nous construisons le cercle de Thalès du triangle rectangle [cob] pour démontrer que H est maximale lorsque [ab] = [bo].

Démonstration

Le point le plus éloigné de [a o] est l'extrémité r du rayon du cecle R perpendiculaire à [a o]. Donc, le triangle rectangle qui a la plus grande aire est le triangle a o r. Donc H est maximal lorsqu'il se "confond" avec [o" r]. Ce qui entraîne que [a o c] a l'aire maximale qui est égale à 12,5 cm². Nous avons tracé ensuite le lieu géométrique de x par rapport à b.

fig. 9





Sans en avoir l'aire ...

Toute expérimentation qui se veut sérieuse ne doit pas se limiter à une simple description. Elle doit s'inscire dans un cadre conceptuel qui définisse, par exemple, les objectifs à atteindre, les hypothèses de travail, les variables didactiques retenues, l'étude préalable des connaissances des élèves, l'analyse a posteriori, les résultats de leur comparaison, des suggestions de remédiations, etc., bref, tout un échantillon d'éléments qui lui donne sa véritable valeur scientifique.

Tel n'est pas le but de cet article dont la finalité se révèle beaucoup plus modeste, puisqu'il vise avant tout à présenter une activité pratiquée à l'aide de CABRI-GEOMETRE. Cependant, vu leur intérêt, quelques aspects didactiques et pédagogiques méritent d'être dégagés :

- Trop souvent, les situations de recherche sont considérées à tort comme des activités supplémentaires qui s'ajoutent au programme de mathématique déjà bien «lourd»! Elles sont alors ignorées, par manque de temps, alors qu'elle offrent justement l'occasion de réactualiser, voire d'approfondir de multiples notions mathématiques déjà abordées, mais aussi d'en découvrir de nouvelles. C'est ainsi que dans cette étude les élèves ont été, de près ou de loin, successivement confrontés :
  - à la similitude des triangles;
  - à l'écriture d'égalités mathématiques littérales, lors de l'élaboration des machines multiplicative et additive;
  - aux mesures de longueurs et d'aires, ainsi qu'à la signification de la précision avec laquelle on les utilise;
  - à la construction de figures géométriques et à l'écriture de marches à suivre pour les décrire;
  - à l'observation de figures géométriques dans le but de dégager leurs propriétés;
  - au calcul d'aires de triangles et de carrés;
  - à la «manipulation» d'outils géométriques comme : médiatrice, hauteur, parallèles, perpendiculaires, angles, cercle, distance entre un point et une droite, ...;
  - au cercle de Thalès d'un segment et à ses propriétés;
  - au théorème de Pythagore;
  - à la représentation graphique;
  - à la notion de lieu géométrique;
  - ...
- Les objectifs comportementaux décrits dans CIRCE III, par exemple le développement des aptitudes à la recherche, à l'analyse, ou encore l'acquisition d'un langage précis, sont entraînés tout au long de l'activité. C'est notamment le cas grâce aux multiples interactions entre les élèves, lors de leur «dialogue» avec l'écran et dans l'élaboration de leur compte rendu.
- La pertinence des remarques et commentaires figurant dans les rapports de recherche, mais également le plaisir vécu par les élèves, illustrent parfaitement le rôle fondamental d'une activité significative qui redonne tout son sens à l'apprentissage.
- La tâche à réaliser favorise une démar-

che autonome. En effet, les élèves ont successivement :

- organisé leur travail au sein du groupe;
- confronté leurs représentation de la figure à dessiner à l'aide de l'ordinateur;
- débattu des problèmes inhérents à sa construction;
- vérifié (auto-évaluation), par la modification de la position du point **b**, la cohérence de leur réalisation;
- éventuellement, apporté les corrections qui s'imposaient;
- reconstruit l'outil «machine à multiplier», utilisé cette fois dans un environnement significatif;
- analysé la situation, d'abord d'une façon ludique, puis par observation des conséquences de chaque manipulation;
- formulé un certain nombre d'hypothèses et de remarques, notamment en complétant la figure par quelques éléments (construction d'un carré **ocya**, cercle de Thalès du segment [**oa**]);
- réactualisé des notions mathématiques acquises dans le passé (propriétés de la médiatrice, cercle de Thalès, ...);
- tenté de justifier leur propos;
- traduit le résultat de leur réflexion dans un document écrit, suffisamment explicite pour être lu et compris par leurs camarades.

En guise de conclusion, il s'agit de préciser que l'activité proposée n'est pas une situation-problème, au sens strict du terme, dans la mesure où elle n'a pas pour objectif premier d'acquérir une connaissance nouvelle.

Elle en possède cependant plusieurs caractéristiques, entre autres :

- la conception socio-constructiviste, car il s'agit de la résolution d'un problème fondée sur des interactions sociales (travail en groupes, échanges, ...);
- l'appropriation du problème par les élèves, qui ont investit leurs connaissances anciennes;
- la validation de la démarche, par la recherche d'une justification des résultats obtenus,
- la formulation par un un compte rendu des procédures suivies et des résultats obtenus.

Pour caractériser cette recherche, on parlera plutôt de «problème ouvert» qui permet aux élèves d'élaborer des stratégies de réponse en fonction des connaissances dont ils disposent.

Autrement dit, celui ou celle qui renonce à proposer une situation-problème à ses élèves – par crainte d'accumuler du retard dans LE PROGRAMME – détient encore la possibilité d'engager sa classe dans un «problème ouvert» du même genre, favorisant ainsi une véritable démarche scientifique.

N'est-ce pas là l'occasion rêvée de «changer d'aire» ?

Mon territoire[1]

Hans-Jürgen Sprengel

Ce que je propose ici est une expérience : j'aimerais donner quelque chose à potasser et étudier à de jeunes élèves sachant déjà lire, connaissant les nombres de 1 à 100 et ayant du plaisir à manipuler les chiffres ou des objets analogues. Cependant je me demande qui va lire le texte : les jeunes élèves, seuls, ou avec des plus grands ?

Commençons donc simplement par un jeu, pour lequel il faut deux partenaires.

«**Mon territoire**» - **un jeu de calcul** (pour deux joueurs, avec deux dés)

On fixe un plan de jeu, comme celui de la figure 1. Dans les 25 cases, on inscrit des nombres entre 2 et 12, n'importe comment.

8	9	4	10	5
3	8	12	7	6
11	12	5	8	4
11	12	10	6	2
7	6	5	3	4

fig. 1

1 Cet article est tiré de la revue Alpha (Allemagne), n° 7/1996. Nous la remercions de nous avoir autorisé à le traduire et le publier. (Traduction : Elisabeth Egger).

Les élèves peuvent fabriquer eux-mêmes leur aire de jeu qui, bien sûr, peut être plus grande ou comporter d'autres nombres, disposés autrement ou figurant avec une fréquence différente. Ce qui va donner du sens à cette activité, tient principalement aux règles du jeu, aux prolongements et développements possibles.

Règles du jeu

1) Les deux joueurs jouent à tour de rôle.

2) Chaque joueur lance les deux dés en même temps, additionne les points et choisit librement «d'occuper» une case où figure la somme obtenue, en marquant son **territoire** d'une couleur. Il se «réserve» en même temps les cases adjacentes (à gauche, à droite, audessus et en-dessous), si elles sont libres, en les entourant de la même couleur.

3) Un joueur ne peut «occuper» ou «réserver» que des cases libres, non encore occupées ou réservées par son adversaire. (Il n'est donc pas toujours possible de réserver les deux, trois ou quatre cases adjacentes.)

4) Si, après avoir lancé ses dés, le joueur ne trouve pas de case libre correspondant à la somme obtenue, il passe son tour.

5) Le jeu est terminé après cinq tours.

6) Chaque joueur obtient 2 points par case «occupée» et 1 point par case «réservée». Le gagnant est celui qui a obtenu le plus grand nombre de points. En cas de score égal, le match est nul.

La figure 2 présente la situation après le deuxième tour des deux joueurs (les cases «occupées» sont en foncé, les cases «réservées» en clair).

8	9	4	10	5
3	8	12	7	6
11	12	5	8	4
11	12	10	8	2
7	6	5	3	4

fig. 2

Est-ce tout ? A première vue, il n'y a pas beaucoup de mathématiques dans cette activité : un peu d'entraînement de l'addition et l'occasion de faire des prévisions.

On peut pourtant se poser d'autres questions : pourquoi le joueur qui a occupé la case 8 n'a-t-il pas choisi l'une des deux autres ? Son choix a-t-il des conséquences sur la suite du jeu ?

Bien plus que le jeu lui-même, c'est probablement le dénouement d'une partie qui est intéressant - pourquoi, par exemple, la figure 2 peut-elle représenter la situation après deux tours ?

Problème [2] :

Peut-on déterminer quels nombres les deux joueurs ont obtenus lors de leurs deux lancers respectifs pour arriver à la situation de la figure 2 ?

[2] Solution en page 45

Pour rendre le jeu moins monotone, il est possible de **modifier les règles**. Ainsi, seuls ou en groupe, les élèves peuvent réfléchir à de nouvelles règles et inventer leur propre jeu.

Il est possible, par exemple, de modifier la taille du plan de jeu ; le réduire est bien sûr moins intéressant que de l'agrandir. Des questions intéressantes surgissent alors :

- le plan doit-il être carré ?
- quels nombres est-il judicieux de proposer avec une plus grande fréquence ?
- combien de tours doit durer une partie ?
- pourquoi les règles précisent-elles cinq tours ?

Avec trois dés, le nombre de possibilités augmente ! Cependant, l'addition de trois nombres n'est pas plus passionnante. Mais d'autres modifications sont envisageables : dans une règle 2', on peut laisser le joueur choisir librement l'opération à effectuer (addition ou soustraction, peut-être même multiplication ou division).

Si maintenant le temps de réflexion est limité pour chaque joueur (au moyen d'un chronomètre), il devient nécessaire de se décider rapidement !

On pourrait aussi laisser chaque joueur déterminer s'il veut jouer son tour avec un, deux ou trois dés. On pourrait aussi...

Quelles modifications des règles ayant des conséquences importantes proposez-vous ? Ecrivez-nous. Vous pouvez aussi nous dire s'il vaut la peine de poursuivre cette expérience.

Vigilance

François Jaquet, IRDP

Math-Bulletin-CH, dans son numéro 1/1996, présente (sous la plume de A. Scheibler) l'ouvrage «*L'algèbre mode d'emploi*», de G. Charrière et cite en particulier un «Intermède curieux!» (p. 218) :

«En 1993, on ne savait toujours pas si les deux nombres suivants sont égaux ou pas :

$$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

Une chose est certaine : les 10'000 premières décimales de a et b sont les mêmes.»

Deux lecteurs de Math-Bulletin-CH, réagissent. M. Walter Burgherr de Rothenburg apporte une preuve de l'égalité de ces deux nombres (voir encadré p.29). M. André Calame se dit «stupéfait» de cet énoncé qui «risque de donner aux élèves une conception erronée des nombres algébriques». Il propose, en complément à la solution de M. Burgherr, un texte qui fait le point sur ce type de nombres (voir p. 30).

Intrigué et, disons-le, un peu vexé de ne pas avoir découvert par moi-même l'égalité de ces deux expressions, je me renseigne. Lors d'une séance d'information en juillet 1995, peu après la parution de l'ouvrage, un maître a signalé l'erreur à l'auteur, qui l'avait également déjà relevée, et qui publie donc un «Errata» le 14 juillet 1995.

G. Charrière avait rédigé son «Intermède curieux» sur la base d'un texte d'Alain Bouvier (La mystification mathématique. Hermann, 1981, p. 59) sur le pourquoi de la preuve !

«Considérez maintenant les deux nombres :

$$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} \quad \text{et}$$

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

Sont-ils ou non égaux ? Ma calculatrice de poche (qui affiche 9 chiffres) m'affirme que l'un et l'autre seraient égaux à 7,381175940. Un ordinateur fournissant 26 chiffres significatifs trouve que tous deux valent :

7,38117 59408 95657 97098 72669

Que conclure ? P.S. Davis qui cite cet exemple affirme qu'à sa connaissance en 1981 cette question n'a pas encore trouvé de réponse.»

Malheureusement la bibliographie de Bouvier est tout à fait incomplète. J'ai cherché, dans les oeuvres de Philip J. Davis, en particulier dans l'Univers mathématique et dans l'Empire mathématique (Gauthier-Villars, 1985 et 1988) où il traite de la nécessité de la preuve, mais je n'ai rien trouvé. Peut-être A. Bouvier fait-il référence aux versions originales des ouvrages de Davis, en anglais, «Descartes' Dream et The Mathematical experience», dont le traducteur aurait découvert l'erreur en question ?»

L'enquête pourrait se poursuivre, mais il n'y a aucun intérêt à connaître l'auteur du «crime». C'est plutôt le problème de l'oubli de connaissances mathématiques qu'il me paraît utile de rappeler ici : Une égalité évidente pour tout maître de mathématiques, à l'époque où - sans calculatrice - on ne rechignait pas à aligner une vingtaine d'expressions contenant des racines de racines, peut être remise en question aujourd'hui. Il y a là, à mon avis, un bon sujet de réflexion, sur la vigilance à exercer en permanence et sur l'importance de la preuve dans le débat scientifique. Merci aux lecteurs attentifs de nous l'avoir rappelé.

Voici la démonstration de l'égalité de α et β, fournie par W. Burgherr :

Zu den Zahlen $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$ und $\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$

werden algebraische Gleichungen mit ganzen Koeffizienten wie folgt gewonnen:
(on tire les équations algébriques suivantes :)

$$(x - \alpha)(x - \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}) = 0$$
$$x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 - 22 - 2\sqrt{5} = 0$$
$$x^2 - 17 = 2\sqrt{5}(x + 1) \qquad | \,(\,)^2$$
$$x^4 - 34x^2 + 289 = 20(x^2 + 2x + 1)$$
$$x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$$

$$(x - \beta)(x - \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}) = 0$$
$$x^2 - 2x\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + 11 + 2\sqrt{29} - 16 + 2\sqrt{29} - 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} = 0$$
$$x^2 + 4\sqrt{29} - 5 = 2x\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + 2\sqrt{5}\sqrt{11 - 2\sqrt{29}} \qquad | \,(\,)^2$$
$$x^4 + 8x^2\sqrt{29} - 10x^2 + 464 + 25 - 40\sqrt{29} = 44x^2 + 8x^2\sqrt{29} + 220 - 40\sqrt{29} + 8x\sqrt{5}\sqrt{5}$$

$$x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$$

Da α und β beide die obige Gleichung erfüllen und sich von den übrigen Lösungen deutlich unterscheiden, sind sie gleich.
(Comme α et β satisfont les deux l'équation ci-dessus et se différencient nettement des autres solutions, elles sont égales.)

Zudem gilt : $\alpha = \beta = \sqrt{11 - 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 + 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 + 10\sqrt{29}}} \approx 7.38$

die übrigen Lösungen der biquadratischen Gleichung sind:
(les autres solutions de cette équation biquadratique sont :)

$$x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} = -\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} - 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \approx -2.91$$
$$x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{22 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \approx 1.95$$
$$x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{22 - 2\sqrt{5}} = -\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{29} - 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} \approx -6.42$$

(es gibt noch weitere «β-artige» Darstellungen)
(il existe encore d'autres représentations du type β).

Nombres algébriques

André Calame

1) Un nombre algébrique est un nombre qui est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers.

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ est un nombre algébrique. Pour trouver une équation polynomiale dont ce nombre est solution, on élimine les racines carrées par élévation au carré :

$$(1) \qquad x-\sqrt{5}-\sqrt{3}=0$$
$$x-\sqrt{5}=\sqrt{3}$$
$$(x-\sqrt{5})^2=3$$
$$(2) \qquad (x-\sqrt{5})^2-3=0$$

L'équation (2) n'est pas équivalente à l'équation (1), car elle admet une solution nouvelle. (2) peut s'écrire :

$$(x-\sqrt{5}-\sqrt{3})\ (x-\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 0$$

$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ est l'autre solution.

Développons (2) :

$$x^2-2\sqrt{5}x+5-3=0$$
$$x^2+2=2\sqrt{5}x$$
$$(3) \qquad (x^2+2)^2=20x^2$$

A nouveau, l'équation (3) n'est pas équivalente à (2), car elle est le produit de deux équations :

$$(x^2+2+2\sqrt{5}x)\ (x^2+2-2\sqrt{5}x)=0$$

nouvelles solutions : $-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}$

Le développement de (3) donne :

$$x^4+4x^2+4-20x^2=0$$
$$x^4-16x^2+4=0$$

2) Un nombre algébrique peut s'exprimer de différentes manières :

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{3}\sqrt{5}+3=8+2\sqrt{15}$$
$$\text{d'où} \quad \sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Problème inverse : peut-on écrire $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ sous la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$?

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4+\sqrt{7}}$$
$$a+b+2\sqrt{ab}=4+\sqrt{7}$$
$$a+b-4=-\sqrt{4ab}+\sqrt{7}$$

Le membre de gauche est rationnel, tandis que le membre de droite est irrationnel. L'égalité ne peut avoir lieu que si les deux membres sont nuls :

$$a+b=4$$
$$ab=\frac{7}{4}$$

On peut considérer a et b comme les solutions d'une équation du 2e degré dont on connaît la somme et le produit. Par les relations de Viète, cette équation est :

$$u^2-4u+\frac{7}{4}=0$$

dont les solutions sont $\frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2}$ donc :

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ce procédé marche bien pour $\sqrt{r \pm \sqrt{s}}$ $r, s \in \mathbb{N}$, si $r^2 - s$ est le carré d'un nombre naturel. Dans l'exemple :

$$r^2 - s = 16 - 7 = 3^2$$

3) Le théorème fondamental de l'algèbre, dû à Gauss, dit que toute équation polynomiale de degré n à coefficients entiers admet exactement n solutions réelles ou complexes. Exemple, l'équation :

$$x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$$

admet 4 solutions réelles (pas plus !). Reprenons en détail les calculs de W. Burgherr, analogues à ceux du point 1) ci-dessus :

(1) $$x - \sqrt{5} - \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} = 0$$

(2) $$(x - \sqrt{5})^2 = 22 + 2\sqrt{5}$$

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 22 + 2\sqrt{5}$$

2 solutions : $$x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$x^2 - 17 = 2\sqrt{5}(x + 1)$$

$$(x^2 - 17)^2 = 20(x + 1)^2$$

Cette nouvelle équation comprend l'équation (2) et l'équation :

$$x^2 - 17 = -2\sqrt{5}(x + 1) \quad \text{ou}$$

$$x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 22 - 2\sqrt{5}$$

qui a comme solutions :

$$x_3 = -\sqrt{5} + \sqrt{22 - 2\sqrt{5}}$$

$$x_4 = -\sqrt{5} - \sqrt{22 - 2\sqrt{5}}$$

Comme il n'y a pas d'autre solution, il en résulte que β, qui satisfait la même équation, est égal à l'une de ces 4 solutions. Comme c'est la plus grande des quatre, on a : $\beta = \alpha$.

4) On peut aussi prouver que $\alpha = \beta$ comme suit :

1°) On commence par l'expression du second terme de β :

$$16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} =$$

$$5 + (11 - 2\sqrt{29}) + 2\sqrt{5}\sqrt{11 - 2\sqrt{29}} =$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}})^2 \quad \text{d'où}$$

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}} + \sqrt{5}$$

2°) Exprimons $\sqrt{11 + 2\sqrt{29}}$ sous la forme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (voir point 2)

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 11 + 2\sqrt{29}$$

$$a + b = 11$$

$$ab = 29$$

$$u^2 - 11u + 29 = 0$$

$$u = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 116}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{11 - \sqrt{5}}{2}}$$

de même : $$\sqrt{11 - 2\sqrt{29}} =$$

$$\sqrt{\frac{11 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{11 - \sqrt{5}}{2}}$$

d'où : $$\beta = 2\sqrt{\frac{11 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{5} =$$

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{\frac{4(11 + \sqrt{5})}{2}} =$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} = \alpha .$$

Jeux de NIM

François Jaquet IRDP

L'ADCS (Association pour le Développement de la Culture Scientifique) vient d'éditer, sous la plume de Jacques Bouteloup, un ouvrage fort attendu de tous les amateurs de jeux mathématiques, Les jeux de Nim.[1]

En 1961, le film d'Alain Resnais «L'année dernière à Marienbad», montrait deux adversaires jouant (mal!) à un jeu d'allumettes. C'est peut-être ce qui a suscité les recherches et l'intérêt des mathématiciens. On connaissait certes ce type de jeu qui, selon certains auteurs, serait apparu en Chine il y a bien longtemps. Mais ce n'est en effet qu'au cours de ces quarante dernières années qu'on en a élaboré une théorie générale, sur la base de quelques définitions simples, ne nécessitant qu'un modeste bagage mathématique.

Le mérite de J. Bouteloup est de définir les jeux de Nim, d'en dresser un inventaire, de réunir les éléments bibliographiques à leur sujet et, surtout, de permettre à ses lecteurs d'en comprendre les structures afin de déterminer les stratégies gagnantes.

Certains jeux de Nim sont proposés dans des moyens d'enseignement de l'école primaire déjà, d'autres au niveau secondaire.

Mais y ont-ils vraiment leur place ?

Contiennent-ils les ingrédients d'une véritable activité mathématique pour les élèves ? De la réponse à ces questions dépend l'avenir des jeux de Nim dans le contexte scolaire.

Pour l'instant, il semble, d'après les observations conduites en 5e et 6e[2], qu'une majorité de maîtres ne saisissent pas l'intérêt de ce type d'activité dans le cadre de leur enseignement des mathématiques ou qu'ils ne voient pas comment l'exploiter.

Ceux qui les proposent et les pratiquent sont unanimes à dire l'intérêt de leurs élèves à pratiquer ces jeux de Nim. Dans leur classe, ils trouvent toujours quelques passionnés de défis et concours de ce genre, mais ils ont toutefois de la peine à justifier l'activité autrement que par des objectifs de type affectif.

La question est donc ouverte et il paraît important de s'y pencher.

Dans les lignes qui suivent, nous nous proposons d'examiner l'exemple du «Pion empoisonné»[3] de deux points de vue : celui du joueur novice, qui pourrait être l'élève ou l'adulte non passionné de jeux de stratégie et celui du spécialiste ou du mathématicien qui a cherché à construire des outils d'analyse et de résolution des jeux de Nim.

1 En vente par l'intermédiaire de Math-Ecole (voir p. 3 de couverture).

2 J.-A. Calame. 1995. *Math 5-6 ... pas si mal.* Neuchâtel, IRDP, Coll. Recherches 95.102. Cet ouvrage présente l'évaluation des moyens romands d'enseignement des mathématiques de 5e et 6e année

3 Ce jeu figure sous cette forme dans le dépliant d'information sur l'introduction des nouveaux moyens romands d'enseignement de mathématiques, distribué à tous les parents d'élèves et aux enseignants. Il est connu également sous d'autres appellations ou formes voisines comme «La course à vingt», «Qui prend le dernier», etc.

Le «Pion empoisonné»

Douze jetons sont alignés entre deux joueurs (A et B). A tour de rôle, chacun des joueurs retire un, deux ou trois jetons, à l'extrémité de la ligne où il est placé. Celui qui est contraint de prendre le dernier jeton perd la partie.

Y a-t-il une stratégie gagnante à ce jeu ?

L'énoncé est court, les règles simples, le matériel facilement disponible (une douzaine de pièces de monnaie font l'affaire), la durée des parties semble raisonnable et on imagine tout de suite qu'il y a un défi à relever. Ce jeu ne ressemble-t-il pas d'ailleurs à une des épreuves de l'émission télévisée «Fort Boyard»? Les conditions pour une bonne appropriation sont donc réunies et tout est en place pour que les joueurs, qu'ils soient élèves ou adultes, se lancent dans une recherche intéressante.

De son côté, le mathématicien reconnaît immédiatement dans ce «Pion empoisonné» un jeu de Nim : «caractérisé par un ensemble fini (E) de positions en présence desquelles se trouvent placés alternativement deux joueurs, avec une règle unique du jeu définissant pour toute position (x) donnée à l'un des joueurs, celles qu'il peut offrir à son adversaire (Γ(x)) et déterminant le gain (ou la perte) de la partie pour celui qui ne peut plus jouer (ou qui se trouve dans une position bloquée)».

Au joueur novice, il faut bien quelques parties pour prendre conscience de l'ensemble fini des «positions» de la définition précédente. Il doit, par exemple, découvrir que la règle du jeu demandant de retirer des jetons à l'extrémité de la ligne «où il est placé» n'a pas d'incidence sur le déroulement de la partie et qu'il peut, en fait, se servir à l'une ou à l'autre des extrémités. Il verra aussi que la disposition en file des jetons n'a aussi aucune importance dans cette variante du jeu.

Le travail d'analyse ainsi entrepris aboutit à la reconnaissance, même implicite, des dispositions des jetons, correspondant aux douze collections possibles de 1 à 12. Dans la suite de l'article, ces «positions» seront désignées par les nombres de **1** à **12**.

Le spécialiste analyse ensuite le jeu sous ses aspects dynamiques. Il en définit le graphe, c'est-à-dire «l'ensemble des couples déterminés par les règles du jeu, constitués d'une position de départ (reçue avant le coup à jouer) et d'une position d'arrivée (obtenue après le coup joué)».

Dans notre cas, le graphe est constitué de 30 couples :

(12;11) en début de partie **(12)**, on retire 1 pion pour obtenir la position **11**,

(12:10) en début de partie **(12)**, on retire 2 pions pour obtenir la position **10**,

(12;9) en début de partie **(12)**, on retire 3 pions pour obtenir la position **9**,

(11;10) après que l'adversaire a retiré le premier pion **(11)**, en retirer encore 1 pour obtenir **10**,

etc.

L'inventaire de ces couples est fastidieux. On le remplace volontiers par une représentation graphique comme celle de la fig. 1, par exemple :

Les 12 positions sont figurées ici par les 12 traits horizontaux.

Les flèches représentent, sous une forme dynamique, les coups possibles. Ce sont les éléments du graphe du mathématicien, c'est-à-dire les couples constitués d'une position avant le coup et de son image après le coup.

Dans notre cas, la position initiale est 12 et celui qui commence peut offrir à son adversaire l'une des trois positions 11, 10 ou 9 qui sont les «images» de 12.

De 12 à 4, chaque position a trois images, selon qu'on retire 1, 2 ou 3 pions.

La position 3 n'a que deux images : 2 et 1, car on ne retire pas le pion empoisonné, à moins d'avoir des tendances suicidaires.

C'est d'ailleurs la raison pour laquelle il n'est pas nécessaire de représenter la position 0 ni les coups qui y conduisent.

La position 2 n'a qu'une seule image : 1

En position 1, on est contraint de prendre le dernier pion, qui est empoisonné ! Celui qui reçoit cette position a perdu.

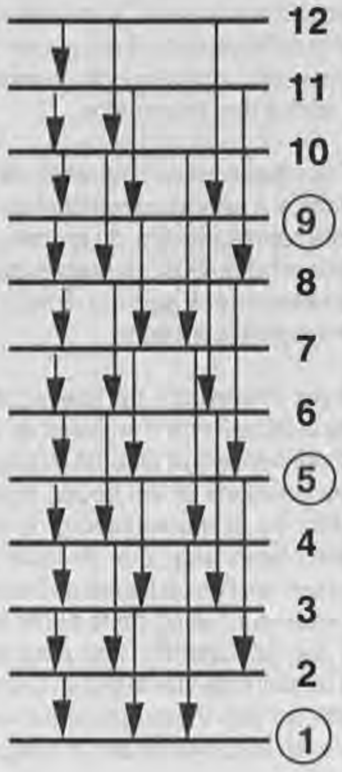


fig. 1. Graphe du jeu du «Pion empoisonné»

Selon la théorie, on se trouve dans un cas de jeu de Nim, où celui qui reçoit une position qui n'a pas d'image (la position 1) est perdant.

Le sens de la recherche

Mais le graphe du spécialiste des jeux de Nim ne se crée pas par génération spontanée dans la tête du joueur novice. C'est déjà un objet mathématique très élaboré et très abstrait pour celui qui le découvre, comme le lecteur de cet article par exemple. Ce dernier est même en droit de se demander à quoi peut bien servir ce graphe ou ses représentations! Car, pour le joueur, le but de l'activité est de gagner ou, comme le suggère l'énoncé, de trouver une stratégie gagnante au cas où elle existe.

Abordons donc la phase de recherche et d'essais, faite d'observations, d'hypothèses, de vérifications, mais aussi de progrès et de reculs, de moments de découragement et de lueurs d'espoir.

Il y a tout d'abord les croyances à dépasser du genre : «de toute façon, moi je suis nul dans ce type de jeux» ou «il y a un piège et le jeu n'est pas équitable». Puis les premières pratiques font apparaître rapidement l'intérêt de la position **5**, qui conduit obligatoirement à **2**, **3** ou **4** qui, à leur tour permettront d'arriver en **1**. On se rend vite compte que cette position **5** est perdante, comme **1**, pour celui qui la reçoit. Il vaut donc mieux l'offrir à son adversaire.

Pour établir cette séquence de deux déductions, il n'est pas nécessaire de se construire une représentation du graphe. D'ailleurs, la plupart des joueurs placés devant 5 pions abandonnent spontanément, sans jouer leurs derniers coups.

Il est intéressant de relever, à ce moment de la découverte d'un début de stratégie, que le raisonnement élaboré ici ne porte que sur les positions et les coups possibles, détachés de la manipulation, de la disposition des pièces ainsi que de toute jugement de valeur sur l'un ou l'autre des joueurs. La conviction sur l'issue de la partie est le résultat d'une anticipation, rigoureusement établie d'un point de vue logique. On vient de franchir un pas important entre les actions de jeu en situation réelle et l'activité intellectuelle en train de créer une esquisse d'objet mathématique, même si celui-ci n'a pas encore de support sémiotique.

Beaucoup d'élèves et d'adultes pensent alors avoir alors la clé pour gagner : «J'ai trouvé le truc, il suffit de laisser 5 pions à l'adversaire!». Fiers de cette découverte ils s'engagent dans quelques nouvelles parties pour constater qu'ils ne gagnent pas à chaque coup et que, parfois, c'est leur adversaire qui les met devant cette position perdante. Pour certains, tout est à recommencer. Pour d'autres, c'est le hasard qui détermine le jeu jusqu'à la position **5**. Pour d'autres encore, dont les «accros», il n'y a qu'un déplacement de l'enjeu, de la position **1** à la position **5**, et il suffit de reprendre l'analyse à ce dernier point.

Pour comprendre pourquoi le joueur non averti n'arrive pas encore à se convaincre de la similitude des deux positions **1** et **5**, il suffit d'observer le graphe qui met bien en évidence la difficulté : il n'y a plus rien au delà de la position **1**, alors qu'une douzaine de flèches traversent la ligne **5** ou aboutissent au-dessous.

La relance

Dans toute recherche, le moment où l'on découvre que le problème est plus complexe qu'il n'y paraissait au début et que la première piste n'aboutit pas à la solution complète est délicat. C'est même un des moments clés de la démarche scientifique.

Baisser les bras, dévaluer son action précédente, imaginer que l'obstacle ne peut être franchi, sont des attitudes à combattre. Le contexte social dans lequel se déroule le jeu peut aider ou freiner ce travail sur soi-même. En situation scolaire, le maître a une responsabilité certaine dans cette phase délicate de relance.

Mais revenons aux positions et au graphe définis précédemment et voyons ce que les mathématiciens en font. Parmi les positions identifiées, ils en mettent certaines en évidence, qu'ils appellent le noyau du jeu, et qu'ils définissent ainsi, dans leur langage et avec leurs symboles :

«Un graphe sur E possède un noyau K s'il existe une partie K de E vérifiant :

1) $x \in K \Rightarrow \Gamma(x) \cap K = \emptyset$

2) $x \notin K \Rightarrow \Gamma(x) \cap K \neq \emptyset$

(où x est une position, E est l'ensemble des positions, $\Gamma(x)$ représente l'ensemble des images de x)».

En français, cette définition se traduit comme ceci :

«Le noyau d'un jeu de Nim est une partie (K) de l'ensemble des positions (E) dont les éléments n'ont pas d'image ou n'ont des images que hors du noyau, alors que chaque élément qui n'appartient pas au noyau (complémentaire de K) a au moins une image dans le noyau.»

Mais, pour le non initié, cette définition n'est pas plus claire dans une version que dans l'autre. Essayons de la transposer sur notre cas particulier du «Pion empoisonné» :

- la position **1** n'a pas d'image, elle fait partie du noyau, par définition;
- les positions **2**, **3** et **4** ont chacune une de leurs images dans le noyau, elles n'en font donc pas partie;
- les images de **5** sont **2**, **3** et **4**, qui sont hors du noyau. **5** fait donc partie du noyau;
- les positions **6**, **7**, et **8** ont chacune une de leurs images dans le noyau, elles n'en font donc pas partie;
- les images de **9** sont **6**, **7**, et **8**, qui sont hors du noyau. **9** fait donc partie du noyau;
- ainsi de suite, on trouve que **10**, **11**, et **12**, sont hors du noyau.

Le noyau de notre jeu est donc constitué des positions **1**, **5** et **9**. (entourées d'un cercle sur la fig. 1).

Cet outil permet au mathématicien de réduire le jeu des manipulations ou des analyses liées au matériel à une suite algorithmique de passages entre le noyau et son complémentaire. Pour le joueur, cette suite se traduit ainsi en termes d'action : «Si je reçois une position hors du noyau, je suis certain de pouvoir placer mon adversaire dans une position du noyau. Par conséquent, comme la position initiale 12 est hors du noyau, je choisis de jouer en premier et de retirer 3 pions pour placer mon adversaire en 9, etc.»

Sans utiliser explicitement l'outil «noyau», le joueur non spécialiste mais déjà bien engagé dans la recherche va reprendre le raisonnement élaboré sur les premières positions à partir de la position 5 :

- Puisque les positions **6**, **7** et **8** permettent d'offrir la position perdante 5 à l'adversaire, il faut chercher à les obtenir pour soi-même.
- La position **9** conduit obligatoirement à **6**, **7** ou **8**. Elle est donc perdante et il faut s'arranger pour l'offrir à l'adversaire.
- Puisque les positions **10**, **11** et **12** permettent d'offrir la position perdante **9** à l'adversaire, il faut chercher à les obtenir pour soi-même. C'est-à-dire qu'il faut choisir de commencer puisqu'on est alors en position **12**.

A ce moment le problème est résolu. Il ne reste qu'à justifier, confirmer, noter la stratégie, pour la retenir ou la communiquer. Le mathématicien se contente de noter le noyau du jeu. Le joueur novice décrit, sous forme de cheminement, la partie du graphe dont il ne doit pas sortir afin de retrouver chacune des positions clés successives. (voir fig. 2 c)

Variantes et extensions

Le nombre de pions est évidemment une variable du problème, sur laquelle le maître pourra agir s'il veut exploiter la situation dans le domaine numérique ou simplement évaluer la maîtrise du jeu par ses élèves. En effet, certains de ceux-ci peuvent n'avoir retenu que la règle «pour gagner, il faut commencer par enlever 3 pions, puis en prendre 1 si l'adversaire en retire 3, 2 s'il en retire 2 et 3 s'il en retire 1", par coeur, sans l'avoir vraiment construite eux-mêmes. Pour s'en assurer, il suffit de savoir comment ils réagissent en présence d'un alignement de 13, 20 ou 50 pions au départ.

Pour le mathématicien, le passage à un plus grand nombre de pions au départ revient à déterminer le graphe et le noyau du jeu, au delà de 12. En l'absence de ces outils, il faut reprendre le raisonnement déjà conduit à propos des positions **1**, **5** et **9**, jusqu'au moment où l'on est capable de trouver une règle d'extension, par récurrence. (voir version II)

On peut ensuite aller plus loin en proposant une configuration, par exemple de 1997 pions au départ, ou la généralisation au cas de n pions. On est alors bien loin du matériel et des manipulations. C'est la suite des nombres 1, 5, 9, 13, ... – c'est-à-dire le noyau – qui est au coeur du problème.

Le mathématicien y reconnaît la «classe de reste 1» de la division euclidienne par 4. Mais un élève de quatrième ou cinquième primaire aura un long chemin à faire avant d'aboutir à cette opération. Il lui faudra passer sans doute par l'inventaire des multiples de 4 ou par des procédures intermédiaires.

Une autre variable intéressante du problème est le nombre de pions autorisés dans les retraits successifs. Là encore, si l'on propose par exemple de ne retirer qu'un ou deux pions ou si l'on autorise les retraits de 1 à 4 pions - comme dans la version II qui suit - les stratégies doivent être adaptées en conséquence.

Le «Pion empoisonné», version II (après modifications des variables «nombre de pions» et «nombre maximum de prises possibles»)

A

B

Vingt jetons sont alignés entre deux joueurs (A et B).
A tour de rôle, chacun des joueurs retire un, deux, trois ou quatre jetons, à l'extrémité de la ligne où il est placé.
Celui qui est contraint de prendre le dernier jeton perd la partie.

Y a-t-il une stratégie gagnante à ce jeu ?

Et si, par exemple, on ne modifiait qu'une seule des règles d'origine, en interdisant de ne retirer qu'un seul pion et en maintenant les prises possibles de 2 ou de 3 pions, y aurait-il toujours une stratégie gagnante à cette variante du «Pion empoisonné» ? C'est là que va apparaître plus clairement encore l'efficacité de la démarche et des outils du mathématicien. Nous en reparlerons dans un prochain article, qui traitera d'autres variantes encore.

Reflets d'une pratique

Voici quelques «notes de séances» prises au cours d'un module de formation[4] destiné à des enseignant(e)s de l'école prmaire :

[4] «Concept de formation» pour l'introduction des nouveaux moyens d'enseignements romands de matématiques, 1996-2000.

Le contrat conclu pour cette brève séquence en précise les objectifs :

- *Vivre, même brièvement, quelques premières phases d'une activité mathématique.*

- *S'initier à son analyse du point de vue mathématique.*

- *S'interroger sur l'opportunité de la proposer à ses élèves et sur les connaissances et aptitudes qu'on peut développer à son propos.*

- *Se donner envie de l'expérimenter en classe* et proposer à la vingtaine de participants le déroulement suivant : *par groupes de deux, pratique du «Pion empoisonné» (10 mn) et prise de quelques notes d'explication de la stratégie découverte, en vue de la mise en commun.*

- *Début de mise en commun (10 mn).*

- *Court débat sur les conditions nécessaires à l'intégration de cette activité dans la «classe de mathématiques» (10 mn).*

Comme prévu, la recherche démarre sur les chapeaux de roues, l'activité est intense. Mais les dix minutes passent vite, trop vite même, puisque personne ne découvre la stratégie complète.

Début de la mise en commun, un des participants :

– *En laissant 5 pions à son adversaire, on gagne la partie.*

La plupart des autres groupes disent aussi être arrivés à ce constat mais quelques participants de mandent des explications. La justification fournie consiste en un inventaire des possibilités à partir de la position 5 (voir fig. 2 a) :

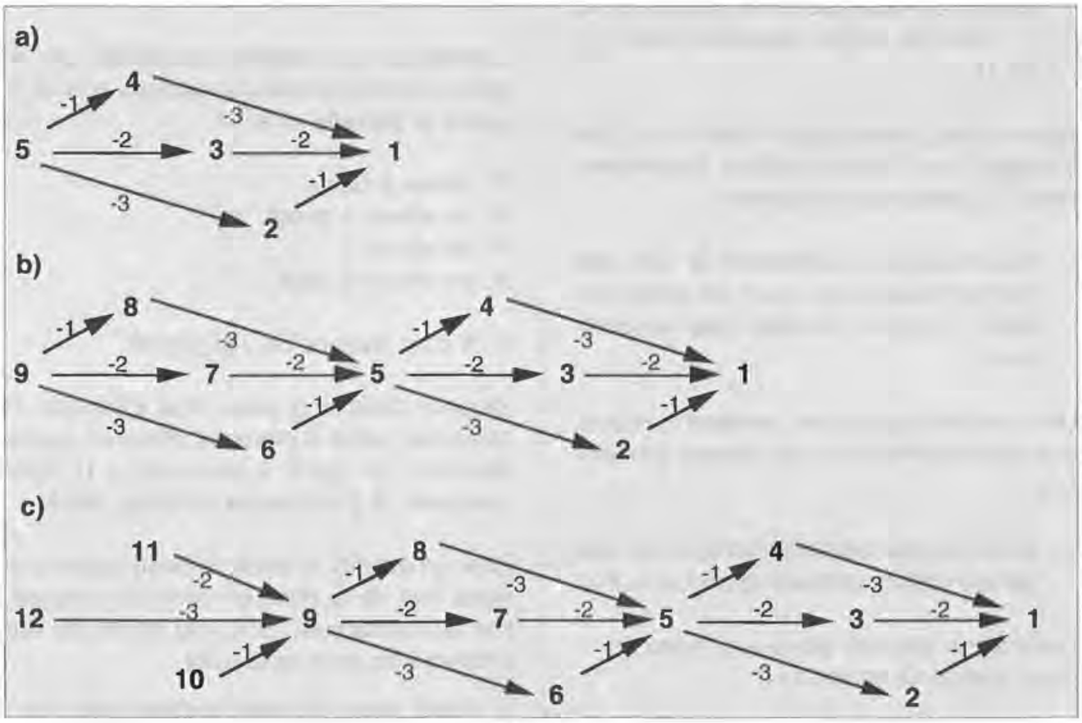


fig. 2

Puis, un autre participant :

– *Nous avions trouvé aussi 9 comme situation intéressante, on peut refaire le même schéma à partir de 9.*

Apparaît alors, au tableau noir, la représentation graphique des stratégies gagnantes à partir de **9** (Fig. 2 b).

Un autre participant, sur un ton affirmatif :

– *Alors, si on commence, il faut enlever 3 pions.*

Après une petite discussion, un graphique complet est établi en commun (Fig. 2 c) et la stratégie est formulée ainsi par plusieurs participants :

– *A ce jeu, il faut commencer et retirer 3 pions pour en laisser 9 à l'adversaire, puis 5 et finalement 1. A chaque fois, il suffit de compléter à 4 le nombre de pions à retirer. (Si l'adversaire en prend 1, 2 ou 3, il faut en retirer respectivement 3, 2 ou 1).*

Après s'être assuré que chacun est bien d'accord avec cette stratégie, l'animateur pose la question de confiance :

– *Avez-vous eu le sentiment de faire des mathématiques au cours de cette première pratique et cette mise en commun ?*

Une majorité approuve, certains hésitent, une participante n'est pas du tout convaincue :

– *Je ne vois pas de mathématiques ici. Mes élèves vont simplement appliquer le truc.*

L'animateur propose alors au groupe de jouer une partie contre lui :

– *J'ai bien étudié ce jeu et je propose à quelqu'un d'entre vous de jouer une partie contre moi, en le laissant commencer. Qui s'annonce ?*

Silence dans le groupe, personne n'ose se lancer. Finalement, une participante :

– *Je veux bien jouer contre quelqu'un du groupe, mais pas contre vous.*

L'animateur :

– *Mais, vous étiez convaincue, tout à l'heure, que nous avions trouvé la stratégie gagnante !*

Reprise, tous ensemble, de l'explication précédente, depuis le départ, avec le support du graphique.

La participante (P) qui hésitait encore quelques minutes auparavant :

– *Cette fois-ci, je suis convaincue, j'accepte le défi.*

L'animateur (A) dessine en vitesse une lignée de petits cercles au tableau noir et la partie se déroule ainsi :

P : efface 3 pions,
A : en efface 3 aussi,
P : en efface 1,
A : en efface 3, puis :

– *Il n'en reste qu'un, j'ai gagné!*

Stupeur dans le groupe. Tout s'écroule. P avait bien retiré 3 pions au début et, sur la réponse «-3» de A, il avait joué «-1» pour compléter à 4 le nombre de pions retirés.

Chacun est prêt à renier le beau graphique établi lors de la mise en commun lorsque, fort heureusement, une voix timide se fait entendre du fond de la salle :

– *Mais, vous n'en avez dessiné que 11 au départ. Vous avez triché !*

Eh oui, il ne suffit pas de connaître ou d'appliquer la stratégie gagnante! Il faut encore vérifier que les règles du jeu sont respectées ! Il n'y aura plus alors aucune surprise dans le déroulement de la partie car toutes les éventualités sont envisagées.

La participante qui, quelques minutes plus tôt, niait l'existence de mathématiques dans ce jeu changea alors d'opinion car elle avait pris conscience que cette l'analyse élaborée en commun lui permettait maintenant de prévoir son déroulement, avec une certitude absolue, pour autant qu'elle contrôle le respect des règles.

Conclusion

Ce petit voyage dans les méandres du «Pion empoisonné» permet-il de donner une réponse aux deux questions à l'origine de cet article : Les jeux de Nim ont-ils leur place dans les moyens d'enseignement de l'école primaire déjà, ou au niveau secondaire ? Contiennent-ils les ingrédients d'une véritable activité mathématique pour les élèves ?

Le fait que les mathématiciens aient créé des outils permettant de les décrire et de les analyser incite à penser que la réponse à la deuxième des questions sera positive. Mais si, effectivement, le contenu mathématique est intéressant pour un spécialiste, rien ne permet de dire qu'il le soit pour l'élève. Et ce serait même fâcheux d'en faire un savoir scolaire.

En mettant dans les plans d'études des objectifs du genre : «Pratique et analyse des jeux de Nim, détermination de l'ensemble de leurs positions, de leurs graphes et de leurs noyaux», on tomberait exactement dans les mêmes travers que ceux des programmes des années septante qui comprenaient des «exercices de topologie», des «mises en évidence de propriétés d'une relation», des «passages d'un mode à un autre de représentation d'ensembles», etc.[5] On verrait de même apparaître dans les moyens d'enseignement un chapitre sur les «statégies à adopter dans les jeux de Nim» au même titre que, auparavant, le travail sur les «propriétés des réseaux», sur la «composition de machines non numériques», sur l'étude des «diagrammes eulériens», etc.[6]

Le danger de la dérive ou du glissement des savoirs du mathématicien vers les savoirs scolaires étant relevé, il faut trouver les voies qui évitent ce piège et permettent à l'élève de faire des mathématiques, à son niveau, à propos d'un jeu de Nim. A cet effet, revenons sur les observations et commentaires des pages précédentes :

Lorsqu'il s'est rendu compte que, devant 5 pions reçus il est inutile de poursuivre la partie, le joueur débutant a déjà mis en oeuvre un raisonnement.

Lorsqu'il le justifie par un schéma, par une liste ou par une simple énumération orale de toutes les possibilités qui se présentent, il commence alors à faire des mathématiques : modélisation, inventaire systématique, utilisation de mots clés des raisonnements logiques du type : «si .. alors», «donc».

Lorsque le joueur passe au stade supérieur d'anticipation, qui remonte au-delà de la position des 5 pions, il franchit l'obstacle essentiel du jeu, celui qui consiste à penser que c'est le hasard qui détermine les positions antérieures. Au plan mathématique, il travaille alors par récurrence. La nécessité d'une trace écrite lui apparaît de plus en plus évidente, pour fixer la stratégie au-delà du 5, pour la justifier, pour la défendre devant d'autres personnes. Et au passage,

5 Voir CIRCE I (1972)

6 Mathématiques 1P – 4P (1972 – 1974, 1979 – 1983)

il apprend qu'une démarche scientifique demande du temps, de la patience, de l'obstination et, bien souvent, quelques gouttes de sueur.

Et finalement, lorsque la stratégie complète est définie, décrite, explicitée, justifiée au sein du groupe, il faut encore, parfois, se convaincre qu'on pourra l'appliquer soi-même, avec succès, contre toute défense, contre toute intimidation. Là encore, on apprend quelque chose sur l'efficacité d'un outil mathématique bien élaboré.

Si l'on se contente de jouer quelques parties, pour le plaisir, on passera sans doute de bons moments au jeu du «Pion empoisonné» à l'image du téléspectateur passionné de «Fort Boyard». On développera des comportements et attitudes importants d'un point de vue social, mais de là à dire qu'on aura fait des mathématiques au travers de ce jeu de Nim...il y a un pas que nous ne franchirons pas !

N.B.
Ces conclusion ne sont que provisoires. Nous avons l'intention de revenir sur ce jeu du «Pion empoisonné» lorsqu'il aura été pratiqué dans de nombreuses classes et que nous aurons reçu des observations sur ces expérimentations. Nous invitons tous les collègues intéressés à nous faire part de leurs remarques et expériences à ce propos, ainsi que celles de leurs élèves. Merci de nous les envoyer, à l'adresse de la Rédaction de Math-Ecole, IRDP, C.P. 54, 2007 Neuchâtel 7.

Au comité de rédaction

Notre ami et collègue, Yvan Michlig, s'est occupé de la mise en page de notre revue pendant dix ans. Il a, en particulier, géré le passage du changement de format et de volume, dès le numéro 150. Travail remarquable et essentiel pour le développement de la revue, mais astreignant. Il a décidé de passer la main. Merci Yvan. Bienvenue à Mathieu Chastellain, étudiant à l'EPFL, qui a accepté de relever le défi et de s'initier à Page Maker. En attendant la quadrichromie, les lecteurs verront ainsi apparaître des innovations typographiques au fil de ces numéros et admettront que notre nouveau compositeur a déjà acquis un niveau de professionnel en la matière.

Les lecteurs très attentifs auront peut-être déjà remarqué que les tarifs d'abonnement sont aussi en évolution. Ils le constateront assurément lorsqu'ils recevront la facture pour l'abonnement 1997. Il a fallu s'y résoudre, on ne pouvait pas augmenter le nombre de pages et le format, absorber la TVA et les hausses des tarifs postaux, s'équiper en matériel informatique, gérer un fichier qui a plus que doublé en cinq ans, sans demander une thune de plus aux abonnés. Même à 25 francs, Math-Ecole reste dans des prix les plus avantageux de toutes les revues analogues, grâce au quasi bénévolat de tous ceux qui y travaillent.

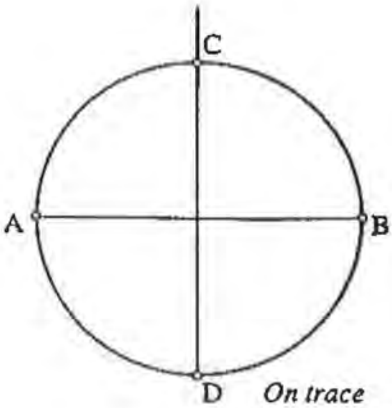
Le volume augmente, les tâches de la revue se développent. Il est naturel que le comité de rédaction se renforce. Bienvenue à ses nouveaux membres, représentant tous nos cantons romands et nos différents degrés d'enseignement : Claude Danalet, Jean-Paul Dumas, Rachel Habegger, Denis Odiet, Hervé Schild, Martine Simonet, Mireille Snoeckx, Christine Studer, Françoise Villars, Isabelle Vogt.

Mathématiques pascales !

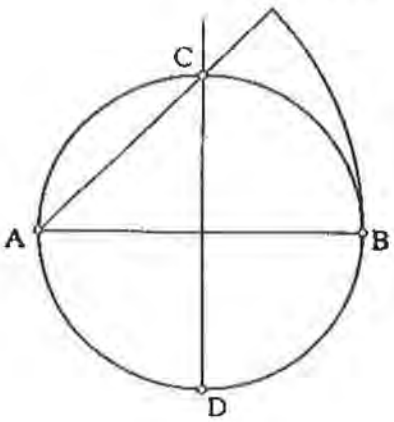
Denis Odiet

Le numéro 25 de "Maths & Malices" proposait un article consacré à la géométrie des oeufs, dans lequel figurait notamment la construction d'un oeuf géométrique.
La voici :

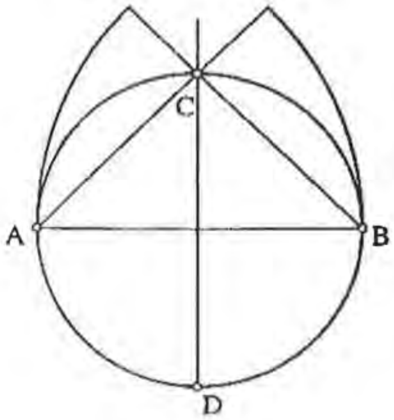
On trace un cercle et deux diamètres perpendiculaires [AB] *et* [CD], *dont l'un est prolongé.*



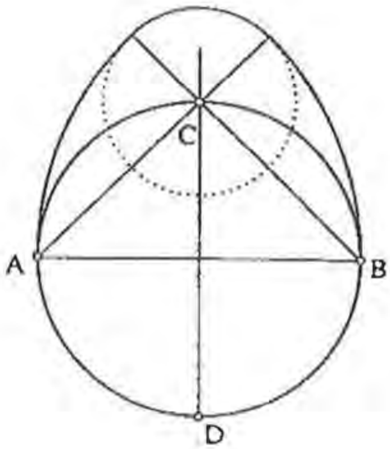
On trace un arc de cercle de centre A, *passant par* B *dans le secteur défini par l'angle aigu* $\widehat{BAC}$.



On procède de façon symétrique avec un arc de cercle de centre B *passant par* A.



On trace le cercle de centre C, *prolongeant les deux arcs précédents dans le secteur opposé à celui défini par l'angle* $\widehat{ACB}$.



En tout début d'année scolaire, je proposai à mes élèves de 9e année (niveau B, compétences mathématiques moyennes), munis des quatre croquis ci-dessus, le problème suivant, à réaliser durant trois périodes de 45 minutes :

Construire un oeuf géométrique avec mes [AB] = 10 cm, calculer la hauteur, le périmètre et l'aire de la figure.

L'occasion était rêvée de tirer profit de ce support pour faire émerger plusieurs notions abordées au cours de l'année précédente, voire plus tôt encore. Elles sont nombreuses dans ce problème : constructions géométriques, longueur du cercle, aire du disque, relation de Pythagore, aire du triangle, linéarité (longueur d'un arc de cercle, aire d'un secteur circulaire), éventuellement écritures littérales et cercle de Thalès. De plus, cette activité me fournissait une réponse intéressante à la question quelque peu agaçante souvent posée en début de leçon : " Monsieur, aujourd'hui, on fait de la géométrie ou bien des maths ?"

Dans un enseignement dit "en spirale", chaque notion étudiée une première fois à un niveau élémentaire et dans un contexte relativement restreint est reprise puis approfondie jusqu'à assimilation.

Sous-jacente à cette forme de construction progressive des savoirs, une question se profilait donc, m'apparaissant comme primordiale : les élèves allaient-ils, en situation totalement décontextualisée, sortir de leurs bagages les outils censés s'y trouver et les utiliser correctement pour résoudre ce problème ?

Le nombre relativement restreint d'élèves (14) ne permet en aucun cas de tirer des conclusions hâtives de leurs productions.

Quelques remarques peuvent pourtant être énoncées :

- Si les outils concernant le cercle et le disque réapparaissent chez tous les élèves, l'"ustensile" adéquat n'est pas forcément utilisé au moment voulu : quelques élèves ont calculé la longueur du cercle à l'aide de πr^2. La difficulté qu'engendre pour certains élèves une représentation mentale de ces deux grandeurs, que sont le périmètre (une longueur) et l'aire (la mesure d'une étendue) et la relative obscure liaison entre le degré d'une expression littérale et la grandeur qui lui est associée peuvent être des éléments d'explication de cette confusion.

- Pour tous les élèves, l'angle inscrit de sommet C est un angle droit. C'est une évidence pour eux, ils n'entrevoient pas la nécessité de le prouver (les extrémités de deux diamètres perpendiculaires sont les sommets d'un carré). Par conséquent, ils considèrent, avec raison d'ailleurs, que la partie supérieure de l'oeuf est un quart de cercle. La simple constatation sur leur construction leur semble suffisante. Aucun ne cite le cercle de Thalès, signe que toute notion liée à l'angle inscrit - par extension à un lieu géométrique - est difficilement restituable.

- Lorsque le bon outil est mis en évidence, certains élèves l'empoignent malheureusement par le mauvais bout : j'ai découvert plus d'une fois "Pythagore à l'envers". La promptitude caractérisée et non réfléchie de vouloir attribuer au carré de chacun des côtés d'un triangle rectangle la somme des carrés des deux autres peut, ici, être mise en exergue comme explication.

- La difficulté majeure du problème réside dans le calcul de la mesure du rayon du quart de cercle de centre C. Plusieurs élèves étant bloqués après la construction de l'oeuf, je les invitai à un aveu de non-aboutissement par le calcul. Ils utilisèrent alors leur règle graduée pour aller de l'avant. Chez ces élèves, si la mesure du segment [AB] - 10 cm - est une évidence, le fait que le segment d'extrémité B passant par C et que [AB] sont les rayons d'un même cercle est très loin de sauter aux yeux.

Calculer

① La largeur de l'oeuf nous est donnée dans la donné (mes [AB = 10cm])

Réponse: mes [AB] = 10 cm

② Pythagore: mes [CB]

$5^2 + 5^2 = x^2$

$25 + 25 = x^2$

$50 = x^2$

$\sqrt{50} = x$

$x = 7,071$ cm

10 cm - 7,071 = 2,928

2,928 + 10 cm = 12,928

Réponse: la hauteur est 12,928 cm

③ $\pi \cdot 10 = 15,707$ cm

$\frac{\pi \cdot 20}{8} = 7,85$ cm

$7,85 \cdot 2 = 15,707$

$2,928 \cdot 2 = 5,856$

$5,856 \cdot \pi = 18,397$

$\frac{18,397}{4} = 4,599$

$\frac{360°}{45°} = 8°$

15,707 + 15,707 + 4,599 = 36,014 cm

Réponse: P = 36,014 cm

④ **Calculer l'aire de l'oeuf**

$5^2 \cdot \pi = 78,53... \text{ cm}^2$

$\frac{78,53}{2} = 39,269... \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\smile} = \underline{39,269 \text{ cm}^2}$

$10^2 \cdot \pi = 314,15... \text{ cm}^2$

$\frac{314,15}{8} = 39,269... \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\triangle} = \underline{39,269 \text{ cm}^2}$

$2,928^2 \cdot \pi = 26,93... \text{ cm}^2$

$\frac{26,93}{4} = 6,733... \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\triangledown} = \underline{6,733 \text{ cm}^2}$

$\frac{7,071 \cdot 7,071}{2} = 24,999... \text{ cm}^2$

ou (2^e manière de faire !)

$\frac{10 \cdot 5}{2} = 25$ $\qquad A_{\Delta} = \underline{25 \text{ cm}^2}$ $(24,999... \text{ cm}^2)$

Calcul de l'aire

$$
\begin{array}{r}
39,269 \text{ cm}^2 \\
+\ 39,269 \text{ cm}^2 \\
+\ 39,269 \text{ cm}^2 \\
+\ 6,733 \text{ cm}^2 \\
-\ 24,999 \text{ cm}^2 \ (25) \\
\hline
99,543 \text{ cm}^2
\end{array}
$$

Réponse: L'aire de l'oeuf est $\underline{99,54 \text{ cm}^2}$

En conclusion, les travaux des élèves m'ont confirmé que toute connaissance mathématique ne peut être acquise du premier coup.

De plus, et cet aspect me semble important, l'activité proposée a été l'occasion pour bon nombre d'entre eux de réactiver et de reconstruire, sous la conduite du maître, plusieurs notions dans un contexte non dépourvu de sens.

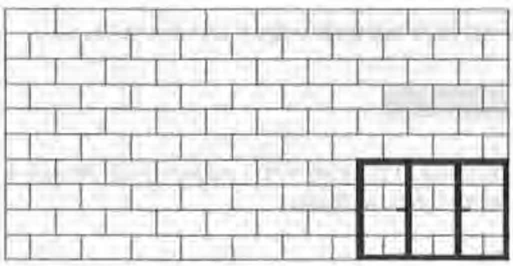
Par ailleurs, je crois ne pas me tromper en affirmant que les élèves ont eu du plaisir à travailler. Etonnant, non ?

Rallye mathématique transalpin : première épreuve

Voici, dans leur version française, les problèmes de la première épreuve du 5e Rallye mathématique transalpin. Entre le 26 février et le 5 mars 1997, ce ne sont pas moins de 240 classes inscrites, (une centaine en Suisse romande, 110 en Italie, une trentaine en Bresse) qui se sont affrontées à ces sujets, répartis par degrés : 3e : problèmes 1 à 6, 4e : 3 à 9, 5e : 5 à 11, 6e : 6 à 13.

Des résultats et analyses paraîtront dans un des prochains numéros.

1. La fenêtre



Le menuisier vient d'apporter une fenêtre, qu'il a appuyée contre la paroi.

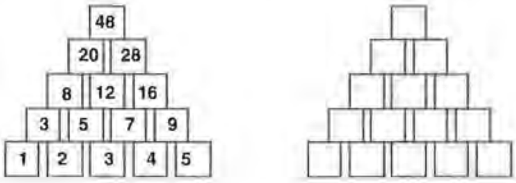
Le maçon devra la placer exactement au centre de cette paroi.

Combien devra-t-il retirer de briques entières et de demi-briques ?

Coloriez les briques et demi-briques que le maçon devra enlever pour placer la fenêtre au milieu de la paroi.

2. Pyramides

Dans les boîtes du bas de sa pyramide, Michel a placé 1, 2, 3, 4 et 5 billes. Puis, chaque boîte des autres étages contient autant de billes que les deux boîtes sur lesquelles elle est posée.

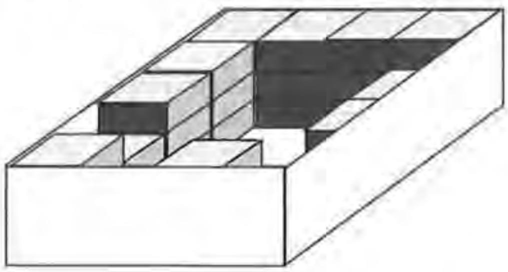


Michel a ainsi 48 billes dans la boîte du sommet de sa pyramide. Son amie Géraldine a aussi mis 1, 2, 3, 4 et 5 billes dans les boîtes de la base de sa pyramide, mais dans un autre ordre. Au sommet de sa pyramide il y a plus de 48 billes.

Combien peut-il y avoir de billes, au maximum, dans la boîte qui est au sommet de la pyramide de Géraldine ?

Complétez la pyramide de Géraldine.

3. La boîte de sucre



Combien y a-t-il de morceaux dans cette boîte de sucre lorsqu'elle est pleine ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

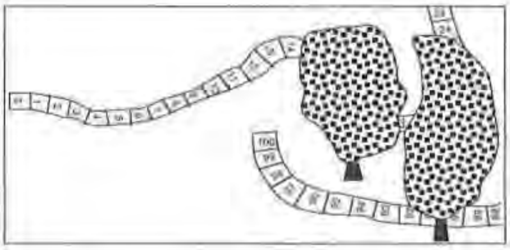
4. Les pas de géant

Alain et Fabrice tracent dans le parc un parcours de cases numérotées de 1 à 100.

Ils partent chacun de la case 0. Alain saute de 5 en 5, Fabrice saute de 3 en 3.

Sur quelles cases peuvent-ils se retrouver ?

Expliquez votre raisonnement.



5. Le compte est bon

A partir des nombres : **3**, **6**, **10**, **2**, **5**, vous devez arriver à 32, de différentes façons, au moyen d'additions (+), de soustractions (-) ou de multiplications (x).

Pour chaque solution, les règles sont les suivantes :

- vous n'êtes pas obligés d'utiliser tous les nombres de départ,
- vous ne pouvez utiliser un nombre de départ qu'une seule fois ,
- vous pouvez utiliser plusieurs fois la même opération.

Par exemple, avec 2, 6 et 5 on peut obtenir :

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{6} \times \mathbf{5}}_{30} + \mathbf{2}}_{\mathbf{32}}$$

Trouvez le plus de façons possibles d'obtenir 32.

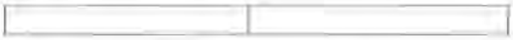
Notez toutes le solutions que vous avez trouvées.

6. La bande

Découper une longue bande de papier en forme de rectangle :

Pliez cette bande une fois, en deux parties égales :

Dépliez la bande, vous voyez deux rectangles et 1 pli :



Repliez la bande, deux fois de suite :

Dépliez la bande, vous voyez maintenant 4 rectangles et 3 plis :

Repliez la bande trois fois de suite :

Et ainsi de suite ....

Si l'on pouvait plier la bande huit fois de suite, combien de rectangles et de plis verrait-on ?

Expliquez votre réponse.

7. Bons voisins

Pour marquer le numéro de sa villa, M. Delarue a acheté trois chiffres en fer forgé: un 1, un 5 et un 9. M Duchemin, le propriétaire de la maison voisine, a acheté un 1, un 2 et un 5.

(Dans cette rue, les maisons sont numérotées à la suite : les numéros pairs d'un côté de la rue, les numéros impairs de l'autre côté.)

A quels numéros de la rue habitent-ils. Inscrivez-les sur les maisons ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

8. Téléphone

Mon numéro de téléphone se compose de 5 chiffres. Ces cinq chiffres sont aussi des nombres, si je les additionne, je trouve 27.

Le premier chiffre est égal au cinquième, le quatrième est le triple du premier et le troisième vaut quatre fois le premier.

Quel est mon numéro de téléphone ?

Y a-t-il plusieurs solutions ?

Expliquez votre raisonnement.

9. Chameaux et dromadaires

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes.

Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une.

Puis elle a encore ajouté un homme sur le dos de chaque chameau.

Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Expliquez votre réponse.

10. Cercles et droites

Dessinez deux cercles et trois droites, dont deux sont parallèles, de façon à obtenir le plus grand nombre possible de points d'intersection.

Combien obtenez-vous de points d'intersection au maximum ?

Marquez ces points d'intersection sur votre dessin.

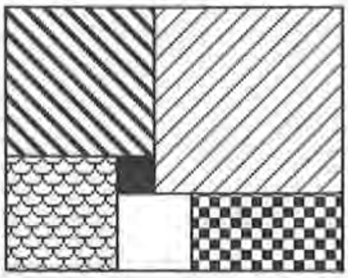
11. Patchwork

Pour faire une grande couverture, Joséphine a trouvé six pièces de tissu et les a cousues ensemble.

Cinq de ces pièces sont des carrés et la sixième est un rectangle. Le petit carré noir mesure 20 cm de côté. Le carré blanc qui est au-dessous mesure 40 cm de côté.

Quelle est la longueur du rectangle ?

Expliquez votre réponse.



12. A bas les prof.

Quatre élèves sont resté dans la classe pendant la récréation, l'un d'eux a écrit «A bas les prof.» au tableau noir.
Lorsque le professeur rentre en classe, il demande : Qui a écrit ça ?

Paul qui porte des lunettes dit : c'est une fille.

Jacques, qui n'a pas de lunettes : c'est quelqu'un qui porte des lunettes.

Marie, qui ne porte pas de lunettes : ce n'est pas moi.

Françoise, qui porte des lunettes : c'est quelqu'un qui ne porte pas de lunettes.

Un seul des élèves a menti. Les trois autres ont dit la vérité.

Qui a menti et qui a écrit au tableau noir ?

Expliquez votre raisonnement.

13. Le cube

Sur son bureau, Valérie construit un grand cube en empilant 64 petits cubes identiques. Elle colle ensuite une gommette sur chacune des faces visibles des petits cubes. (Celles qui sont situées sur les côtés et le dessus du grand cube.)

Sa petite soeur arrive et renverse sa construction. Valérie ramasse patiemment les 64 petits cubes et les observe attentivement.

Combien y en a-t-il qui n'ont pas de gommettes ?

Combien n'ont qu'une seule gommette ?

Combien ont deux gommettes ? trois gommettes ?

Combien ont plus de trois gommettes ?

Expliquez vos réponses.

Comme à l'accoutumée, une équipe vaudoise de maîtresses et de maîtres de tous les degrés de la scolarité a préparé ce traditionnel rendez-vous. Cette année le thème en sera :

L'ARGUMENTATION

Entre deux moments de plénière, les participants pourront suivre les ateliers préparés sur le sujet et vécus dans des classes, de l'école enfantine au gymnase.

Ces rendez-vous sont ouverts à tout enseignant(e) de Suisse Romande pour une somme extrêmement modique. Ce sont de rares instants pendant lesquels il est possible d'avoir un échange vertical, à travers tous les degrés, entre toutes les personnes concernées par l'enseignement des mathématiques.

Celles et ceux qui sont intéressé(e)s voudront bien s'inscrire auprès de Christine Marchetti, Centre de perfectionnement – Avenue de Cour 33 – 1000 Lausanne – tél. (021) 323 05 48.

Lieu de rencontre à Lausanne : CESSRIVE (centre d'enseignement secondaire supérieur de Bellerive, ch. de Bellerive 16) un après-midi de 14h00 à 18h00, à choisir entre :

le mercredi 16 avril ou le mercredi 23 avril 1997

GRAND N

Adresse de la rédaction : IREM, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, B.P. 41 - F - 38402 St. Martin-d'Hères cedex. (tél : 0033 76 51 44 06)

Destinataires : Revue de mathématiques, sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement élémentaire et pré-élémentaire, formateurs, étudiants

Forme et fréquence de parution : 2 numéros par an de 120 pages environ, format A4

Abonnements : 150 FF/1 an, 260 FF/ 2 ans (+ 40 FF/an pour l'étranger). Payement par mandat ou chèque.

C'est toujours avec plaisir et intérêt qu'on ouvre la revue Grand N car on est assuré d'y trouver des idées à exploiter et des sources de réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école maternelle et primaire. Mais il faut du temps, car il y a beaucoup à lire dans la bonne centaine de pages proposées. Les deux dernières parutions ne font pas exception à la règle ! En voici un sommaire abrégé, des articles concernant les mathématiques :

▶

No 57

Polydrons, une présentations d'activités qui conduisent des enfants de grande section de maternelle à se détacher peu à peu de la manipulation pour raisonner sur des représentations des objets, c'est-à-dire pour «faire de la géométrie», par J. Heleyel et A. Bertotto.

Une petite histoire de la division : de ses origines jusqu'à la méthode «Galley», puis, dans le numéro 58, *de la méthode Galley à la méthode actuelle*, témoignage éclairant sur un fragment d'un héritage sur lequel repose une partie des algorithmes de l'arithmétique élémentaire que nous enseignons aujourd'hui, par J. Guiet,

Qu'est-ce qu'un carré ? les réponses, classées et analysées, d'élèves de 8 à 11 ans à cette question, par R. Guinet. *A propos de patrons de solides*, éléments d'analyse, éclairages et propositions d'activités didactiques autour de ce thème, par l'équipe du LADIST de Bordeaux.

No 58

Des enfants, des mains, des doigts ... , et des livres à compter, ou comment pourrait-on faire pour compter tous les doigts de tous les élèves de 1e année de notre école ? récit et compte rendu d'expérience par D. Valentin.

Pétales et fleurs, par M. Guillerault et R. Neyret, une analyse fouillée des différentes procédures mises en oeuvre par des élèves de CE2 dans une situation de partage et de groupement, avec pistes pour une différenciation.

Regards sur le calcul mental, une typologie exhaustive des démarches et des erreurs des élèves de 8 à 11 ans devant l'opération 31 - 18 effectuée mentalement, suivie d'une esquisse d'un programme de calcul mental.

HYPERCUBE et son supplément magazine ***Maths & Malices***

Adresse de la rédaction : Les Éditions Archimède, 5, rue Jean Grandel, F - 95100 Argenteuil
Destinataires : Collégiens (élèves du secondaire I), tous les maîtres et amateurs de mathématiques
Dimensions : Format A4, magazine 32 pages quadrichromie
Fréquence de parution : 6 numéros / an
Abonnements : 120 FF/1 an, 220 FF/2 ans (+50 FF/an pour l'étranger), Payement par mandat ou chèque au CCP 2270 19R PARIS

Après 26 numéros de Maths & Malices, et 13 numéros d'HYPERCUBE, les deux revues françaises destinées aux collégiens ont décidé de se fondre en une nouvelle revue, bimestrielle de 32 pages, produite par les Éditions Archimède, qui publient également Tangente. Nous connaissions bien Maths & Malices et apprécions beaucoup son ouverture culturelle, son originalité et son dynamisme. Ses auteurs nous affirment que tout cet esprit sera conservé dans les 8 pages magazine de la nouvelle revue. HYPERCUBE n'a pas encore les lettres de noblesse de son nouvel associé mais a vu la qualité de ses productions s'améliorer régulièrement. Les numéros 14 et 15 sont de bien belle facture et laissent présumer du succès de cette fusion. Nous nous en réjouissons, pour tous les maîtres et élèves du premier cycle de l'école secondaire.

Voici un sommaire abrégé, du numéro 15, paru en janvier 97 :

- Les divisions de l'Europe : quatre algorithmes de cette opération délicate tirés de L'Arithmétique du Sieur Barrême (1789).
- Une préparation pour le Kangourou 97, avec quelques conseils et exemples à l'appui
- - Un Jeu des identités, pour progresser en calcul mental et assimiler peu à peu les différentes priorités des écritures algébriques.
- Des Hyper-découpages et pliages.
- Cercles à Carréville, ou la recherche des carrefours «équidistants» d'un carrefour donné dans une ville construite sur un réseau à mailles carrées, conduisant à des surprises de taille du genre : p = 4 ! Il y a des «cercles» bien carrés !
- D'autres activités sur les classements de quadrilatères, les fractions et la calculatrice, les distances, les pourcentages et un problème intéressant de déplacements à bicyclette.
- Le magazine Maths & Malices, sur le «théorème du papillon», sur la façon - grecque - de mesurer la surface d'un disque et d'une sphère et sur un extrait du Petit chose d'Alphonse Daudet qui allie histoire et comptabilité.

La rédaction de Maths & Malices poursuit son activité dans le cadre de ACL-Editions. Elle organise toujours le célèbre Kangourou qui est devenu, pour les collèges, le plus grand concours du monde en 1995 et dont a participation atteint maintenant le million, en France et dans une bonne dizaine de pays européens. Elle continue à publier des recueils thématiques d'articles[1] sous forme de brochures, dont certaines sont déjà hautement appréciées des lecteurs de Math-Ecole :

- **Mathématiques du Kangourou** : annales corrigées des concours «Kangourou-

[1] En vente par l'intermédiaire de *Math-Ecole*. Voir p. 3 de couverture.

collèges» de 1991 à 1994 jeux et autres articles variés, 1994, 192 pages. Ouvrage toujours très apprécié des maîtres du secondaire qui y trouvent de nombreuses idées d'activité pour renouveler leur enseignement.

- **Histoire de Maths, Le monde des symétries, Py, Pytha, Pythagore; La magie du calcul**. 4 brochures de 32 pages chacune, en couleur. Des sujets clés en mathématiques, traités avec maîtrise, largement illustrés, avec des fragments de bandes dessinées d'excellente qualité. Pour tout public.

- **Les pavages du Kangourou**, de R. Raba et A. Deledicq, 1995, 64 pages, accompagné de la **Fresque du Kangourou** (affiche de 80x100 cm). Un inventaire des 17 familles de pavages avec une analyse de leur structure en termes d'isométries (translation, symétries axiale, centrale et glissée, rotation) et , surtout, leur méthode de construction. Intéresse les collégiens, les maîtres de mathématiques, et tous les amateurs d'arts graphiques.

- **Les maths et la plume**, cartonné. Ce que les grands auteurs classiques - et d'autres, plus inattendus - ont écrit sur les mathématiques (Voltaire, Stendhal, Pagnol, Dostoïewsky, Boileau, Saint-Exupéry ..., R. Devos, Conan Doyle, R. Queneau, Ionesco, ...). L'ouvrage est organisé en quatre domaines : les nombres et les opérations, la géométrie, la logique et le raisonnement, l'infini. Pour tout public.

- **Jeux & découvertes mathématiques**, d'A. Deledicq, J-C. Deledicq et F. Casiro, 1996, 64 pages en couleur,cartonné. Pour faire comprendre les mathématiques en «jouant le jeu», cet ouvrage propose des situations ludiques, des problèmes ouverts, des énigmes, sur des thèmes variés, de façon fort plaisante. Chaque thème est développé sur deux à trois pages. Les réponses aux innombrables questions figurent en fin d'ouvrage. Pour collégiens et maîtres de mathématiques.

- **Encyclopédie du Kangourou des mathématiques au collège**, de A. Deledicq et C. Missenard, 1996, 192 pages, couleur. Un outil de travail et ouvrage de référence pour les élèves de la fin du premier cycle de l'école secondaire et du début du second cycle (14 - 17 ans).

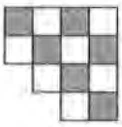
  En 16 thèmes sur les nombres, l'algèbre et la géométrie, on y trouve les définitions, les propriétés, les savoir-faire utiles, des exemples types et des situations de présentation qui articulent ces savoirs avec la pratique quotidienne. Dans les marges, de multiples exercices et des liens avec la culture générale et la vie de tous les jours. Le tout est complété par des pages magazines, des tests, des compléments, un index. L'ensemble, saupoudré d'un brin de malice est un outil de travail, certes, mais aussi de plaisir et de réflexion. Pour les collégiens, les lycéens et les maîtres de mathématiques.

D'après la règle n°3, c'est le même joueur qui a obtenu 6 et 8. L'autre joueur a lancé 12 et 2; la case 2 était cependant déjà réservée par son adversaire. En obtenant n'importe quel autre nombre, il aurait en effet pu marquer la case correspondante. Ainsi on peut déterminer quels nombres ont obtenu chacun des deux joueurs. Par contre on ne peut déterminer leur ordre de manière univoque, car il y a plusieurs solutions. Pouvez vous les trouver toutes ?

Notes de lecture

Reconstruire la même quantité ailleurs : comment procèdent les jeunes enfants ?
par Edith Ackermann
in : Le cheminement des découvertes chez l'enfant, ouvrage collectif sous la direction de B. Inhelder et G. Cellérier. Neuchâtel - Paris : Delachaux et Niestlé, 1992.

Dans Math-Ecole no 168 (août 1995), Colomba Boggini Jan et François Jaquet nous ont présenté un article «Nombres et sens», dans lequel ils s'interrogent sur les connaissances que possèdent les enfants au début 1P. En effet, comment ces derniers utilisent-ils le nombre «pour déterminer et mémoriser une quantité de pions à aller chercher». Au point 1.4, page 7, «Les explications des enfants», Mme Boggini Jan et M. Jaquet observent deux fillettes qui «se sont rappelées des cases». Et l'une d'elles de préciser l'organisation spatiale de ces cases: «2+3+2x4». Cette démarche n'a pu être considérée comme du comptage, et n'en paraît pas moins élaborée aux auteurs de cet article.



Cette observation m'a renvoyée à la lecture d'un article de Mme Edith Ackermann «Reconstruire la même quantité ailleurs: comment procèdent les jeunes enfants?» (chapitre 6 d'un ouvrage collectif sous la direction de B. Inhelder et G. Cellérier, Le cheminement des découvertes chez l'enfant). Mme Ackermann et son équipe ont noté comment des enfants entre quatre et sept ans utilisent leurs connaissances pour mettre en mémoire une quantité numérique, entre 9 et 24, et la reconstruire dans un autre lieu.

la consigne est de reproduire ailleurs «la même chose beaucoup», «la même chose pareil» une disposition de plots telle une plaque de chocolat ou des jetons placés au hasard, ceci sans regarder le modèle. L'enfant peut prendre des notes, dessiner pour s'aider; ainsi que défaire, réarranger les plots/jetons à sa guise.

L'hypothèse est que les enfants construisent un moyen terme, un intermédiaire pour reconstituer une collection numérique équivalente à la précédente, alors que celles-ci sont distantes spatialement.

Il a en effet été observé que les enfants utilisent rarement le nombre total comme clé de reconstruction, car leurs connaissances à ce sujet ne sont pas suffisamment élaborées. Ils ont ainsi procédé autrement, c'est-à-dire que là où leurs compétences sont incomplètes, ils ont utilisé ce qu'ils ont déjà expérimenté et intégré, une quantification inférieure. Mme Ackermann a aussi observé que les enfants décomposent une quantité totale non maîtrisée en sous-groupes connus.

Plusieurs procédures sont ainsi observables :

a) les enfants défont la collection intiale pour la reconstruire en une configuration qui leur est propre;

b) les enfants regroupent les éléments dans la collection initiale;

c) les enfants utilisent un système de notation.

Ils ne recourent donc pas exclusivement au comptage, peuvent reconstruire numériquement une collection sans jamais connaître la somme totale des éléments. Ils font alors intervenir des procédés d'ordre spatial et/ou temporel pour reproduire correctement cette collection initiale.

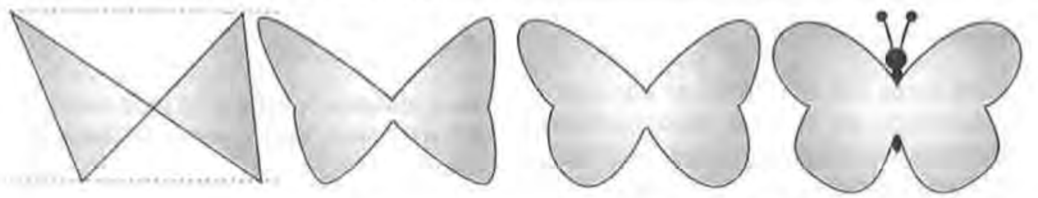
Et surtout, le plus important, les observations de Mme Ackermann nous démontrent à quel point les enfants ont des moyens pour gérer des difficultés au-delà de leurs connaissances; ce faisant, résoudre des difficultés les amènent à développer des stratégies personnelles et augmenter ainsi leurs acquis.

Destinataires : maîtres de l'école enfantine, de l'école primaire, de l'enseignement spécialisé, chercheurs en didactique des mathématiques, conseillers pédagogiques.

Mots-clés : mathématiques, construction du nombre, comptage, école primaire, préscolaire.

Tiré de *Hypercube* et son supplément *Maths & Malices* no 15. (Voir la rubrique Revue des revues, p. 44)

En joignant par deux segments deux couples de points pris sur des droites parallèles, on obtient deux belles ailes de papillon :



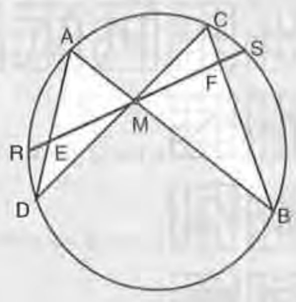
Le truc étonnant c'est que les deux ailes ont la même aire. Et ce qui est plus étonnant encore, c'est l'élégance et la simplicité de la démonstration de cette égalité.
L'histoire en est déjà racontée, il y a 2400 ans, dans les *Eléments* d'Euclide, où elle commence à la proposition XXXVII du premier livre.

Solution dans le prochain numéro

Un peu plus difficile à démontrer, toujours à propos de papillons mais dans un cercle cette fois-ci, le théorème suivant, dû à Horner :

Par le milieu M d'une corde [RS] d'un cercle on fait passer deux autres cordes [AB] et [CD]. Les cordes [AD] et [BC] coupent respectivement [RS] en E et F.

Alors M est le milieu du segment [EF].



Solution dans le prochain numéro

Réponses aux problèmes du no 175

Francis Perret (NAJAROS) nous apporte les réponses aux questions qui accompagnaient son «carré magique 1996» : Ses termes sont en progression arithmétique de raison 46 (de 154 à 844). La constante (1996) s'y retrouve non seulement comme somme des lignes, colonnes et diagonales, mais encore dans les «diagonales «brisées, dans les cinq carrés de 2x2 des angles et du centre, dans les cases centrales de deux arêtes opposées et dans les quatre cases des sommets.

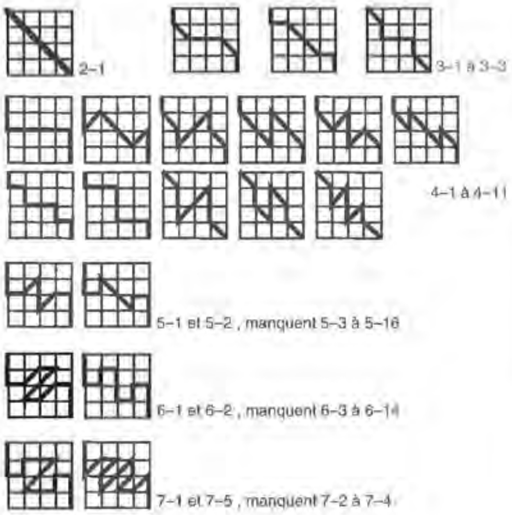
Il y a 880 carrés magiques différents de 4x4 dits «de base» (construits avec les nombres de 1 à 16), de constante 34, dont le célèbre «Mélancolie» de Dürer.

Voici la solution du «carré magique de dominos» de 7x7 dont on élimine la dernière colonne, composée exclusivement de «0» et dont on donne l'emplacement du dernier «0». Il existe d'autres carrés magiques formés à l'aide des 28 dominos d'un jeu complet, dont on élimine une colonne.

4 - 5	4 - 1	6 - 3	1 - 0
1 - 1	4 - 6	2 - 5	5 - 0
3 - 1	6 - 6	2 - 3	3 - 0
6 - 2	2 - 4	4 - 4	2 - 0
3 - 5	6 - 1	2 - 1	6 - 0
6 - 5	0 - 4	3 - 3	3 0
1 - 5	2 - 2	5 - 5	4 0

Partages

Voici une partie des 50 façons de partager un quadrillage de 4x4 en deux parties isométriques, en ne suivant que les côtés ou les diagonales des carrés, selon la classification de N. Bitterlich (Alpha 9.1995). Il n'est pas trop difficile de retrouver les autres avec ce système de classement.



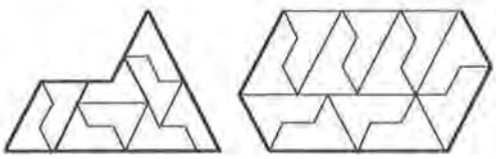
Le sphinx

Les questions posées sont plus complexes qu'il n'y paraît. Voici quelques éléments de réponse :

Nous avons trouvé 2 façons de paver le sphinx S3 avec 9 sphinx S1. L'une figure ci-dessous.

Nous avons réussi à paver un triangle équilatéral avec 24 sphinx.

Un lecteur du bulletin de l'APMEP, André Viricel, a trouvé qu'il fallait au minimum 36 sphinx pour paver un hexagone régulier, 12 sphinx pour le plus petit hexagone convexe (voir figure) et 2 sphinx pour le plus petit hexagone, non convexe.



Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Le Trésor de tonton Lulu (vol.1, 28 probl. de niveau "10")	.....	(ex. à Fr. 25.-)*
Le Trésor de tonton Lulu (vol.2, 25 probl. de niveau "11")	.....	(ex. à Fr. 27.-)*
Le nombre π , ADCS	.....	(ex. à Fr. 40.-)*
Les jeux de NIM, par Jacques Bouteloup, ADCS	.....	(ex. à Fr. 52.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*
Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	.....	(ex. à Fr. 32.-)*
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)*
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Les pavages du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Panoramaths 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*

Les anciens numéros de *Math-Ecole*

(prix en page 2 de couverture) : ....

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques (Fr. 13.- l'ex.)* :

- Niveau CM (degrés 4 et 5) : ***Récrémaths*** .... ex.
- Niveau collégiens :
  - ***Les Pentagones patagons*** (n° 8) .... ex. ***Le Serpent numérique*** (n° 10) .... ex.
  - ***Le Trésor du vieux Pirate*** (n°12) .... ex. ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) .... ex.
- Niveau lycéens et adultes :
  - ***La Biroulette russe*** (n° 9) .... ex. ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex.
  - ***Le Roi des Nuls*** (n°13) .... ex. ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex.
- Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 5, 6 et 7) : ....

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐Mme ☐M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

SOMMAIRE