




MATH ECOLE



Bordures



A propos du concept d'angle



Voyage au centre de la géométrie

36e
année

177

mai 1997

Math-Ecole, **pour ceux qui enseignent les mathématiques !**

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.

Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil Informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-

anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :

de 5 à 9 Fr. 18.- par abonnement

de 10 à 50 Fr. 17.- par abonnement

(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :

Rédaction de ***Math-Ecole***, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,

par courrier électronique E-mail : **François.Jaquet @ irdp.unine.ch**,

ou par INTERNET : **<http://www.unine.ch/irdp/math-eco/>**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

Adresse

Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration

Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 6970
Fax (032) 889 6971

Fondateur

Samuel Roller

Rédacteur responsable

François Jaquet

Comité de rédaction

Michel Bréchet
Jacques-André Calame
Michel Chastellain
Claude Danalet
Roger Délez
Nicolas Dreyer
Jean-Paul Dumas
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Alain Ramelet
Chantal Richter
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Christine Studer
Françoise Villars
Isabelle Vogt
Janine Worpe

Imprimerie

Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture

spirale de carrés ayant pour côté les
nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page

Mathieu Chastellain

Sommaire

EDITORIAL :

CIRCE III : «Comme un coup de baguette magique»

Michel Chastellain 2

Rallye transalpin : 4, 16, 33, 35, 36, 40

Hamstermatique

Chantal Richter 5

Bordures

Maria-Gabriela Rinaldi 8

A propos du concept d'angle

Graziella Telatin 12

Cabridées : Quelle fonction ?

Michel Chastellain 17

Voyage au centre de la géométrie

G. Sarcone et M. J. Waeber 21

Expo-atelier

François Jaquet 28

Le coin du Net

Luc-Olivier Pochon 33

16e forum de mathématiques

Denis Odiet 34

Notes de lecture

1

CIRCE III 1: «Comme un coup de baguette magique !»

*Une situation-problème exige, de la part du maître, une approche épistémologique et historique.*²

Je ne vais pas me risquer à parler «de l'épistémologie du pays romand» ! Par contre, je me contenterai de rappeler ici quelques hauts faits «de la petite histoire», en guise de préambule à une véritable «situation-problème» intitulée : CIRCE III.

1962 : Dans un enthousiasme général, les enseignants d'ici et d'ailleurs lancent l'idée novatrice d'une école romande.

1967 : L'idée a fait son chemin. Elle débouche sur un mandat de la Conférence intercantonale des chefs des départements de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CDIP SR/Ti) pour l'élaboration d'un plan d'étude romand.

¹ Le sigle CIRCE III désigne indifféremment la «Commission Intercantonale Romande pour la Coordination de l'Enseignement», ou le plan d'étude qu'elle a élaboré.

² J. Weiss et al., *Vers une conception cohérente de l'évaluation pour la scolarité obligatoire en Suisse romande et au Tessin – Une évaluation pour apprendre et pour choisir – Voies et moyens – Rapport n° 2, Ouvertures*, Secrétariat à la coordination romande, n° 96.403, juin 1966, annexe p. 3.

1972 : CIRCE I (classes 1P à 4P) est adopté par les cantons de Berne, Fribourg, Vaud, Valais, Neuchâtel et Genève.

Durant cette même année, c'est la fête, car l'on assiste à la naissance de la première version du moyen d'enseignement *MATHEMATIQUES 1P* qui sera complété, les années suivantes, par les ouvrages 2P, 3P, et enfin 4P.

1974 : Les méthodologies qui ont cours font l'objet d'une première évaluation.

1976 : Sortie de presse de la première version de *MATHEMATIQUE 5e*, puis une année plus tard, de *MATHEMATIQUE 6e*.

1978 : La CDIP SR/Ti arrête le mandat définitif de CIRCE III, pour les degrés 7-8-9 de la scolarité obligatoire.

1979 : Le plan d'étude pour les classes de 5e et 6e de Suisse romande (CIRCE II) est adopté par les mêmes cantons, accompagnés du petit dernier : le Jura. Parallèlement, l'évaluation des moyens d'enseignement de 1P à 4P a porté ses premiers fruits, puisqu'elle conduit à la création d'une deuxième version, encore relativement peu modifiée.

1984 : Après une refonte importante, *MATHEMATIQUE 5e*, puis *MATHEMATIQUE 6e*, «new look» font leur apparition.

1986 : Adoption de CIRCE III, constitué essentiellement, pour les mathématiques, d'objectifs généraux ou de finalités de l'enseignement.

Dans l'introduction de ce nouveau programme-cadre, le président de la Conférence d'alors, Monsieur Pierre Cevey, formulait le vœu suivant : «*Souhaitons que ce qui est proposé ici devienne **rapidement** un instrument efficace de coordination intercantonale ainsi que de concertation pour les enseignants d'une même discipline.*»

Aujourd'hui, c'est-à-dire après plus de dix ans d'attente, cette déclaration pourrait faire sourire, d'autant plus que la disparité des structures cantonales 7-8-9 est toujours d'actualité. Et pourtant, l'espoir renaît sérieusement, ceci pour plusieurs raisons !

- D'abord, il y a eu le Colloque romand *MATHEMATIQUES 93* dont les conclusions et lignes directrices pour l'avenir précisent un certain nombre de priorités, parmi lesquelles :
 - «*Appliquer les textes de CIRCE III, en particulier les objectifs de «Catégorie I» de mathématiques dans chaque canton.*
 - *Formuler des intentions ou des recommandations claires, au niveau politique, pour un engagement dans une coordination réelle en matière de moyens d'enseignement de mathématiques, pour le secondaire I.*
 - *S'engager dans les recherches et l'élaboration de nouveaux moyens d'enseignement.*

Ces priorités ont conduit la Commission des Colloques à proposer aux autorités scolaires de prendre des mesures pour assurer à l'enseignement des mathématiques en Suisse romande un développement corres-

pondant aux besoins des élèves et de la société, à savoir notamment :

- «*De réaffirmer et appliquer le plan-cadre des mathématiques de CIRCE III, en particulier dans ce qui a trait aux objectifs généraux.*
 - *D'affirmer une volonté de coordination des moyens d'enseignement de mathématiques pour les degrés 7 à 9 de la scolarité.*
- Ensuite, en 1994, la CEM (Commission Romande pour l'Enseignement des Mathématiques) a élaboré un rapport intitulé : «*Lignes directrices pour des moyens d'enseignement romands de mathématiques aux degrés 7-8-9*». Ce document propose des lignes directrices pour un ouvrage commun à tous les élèves de la scolarité, partant du principe qu'il n'existe pas des mathématiques pour les «riches» et d'autres pour les «pauvres».
 - Et puis, en septembre 1996, s'est tenu à Wildhaus le Forum suisse des mathématiques sur le thème : «*Apprentissage des mathématiques – Espaces de liberté – Points de convergence et lignes directrices*». Là encore, les conclusions des trois groupes de participants romands se rejoignent dans leur volonté d'une meilleure contribution à une véritable coordination intercantonale, en référence aux objectifs qui figurent dans CIRCE III. Ils demandent la création de moyens d'enseignement communs.
 - Toujours en 1996, COROME (Commission Romande des Moyens d'Enseignement) a créé un groupe de pré-étude pour procéder à la définition des besoins généraux pour les degrés 7-8-9, examiner les opportunités

d'achat, d'adaptation de moyens existants ou de création de nouveaux moyens et, le cas échéant, esquisser les grandes lignes de moyens à réaliser.

- Cette première étude a débouché sur un rapport, mis en consultation dans chaque canton ainsi qu'auprès des différentes associations professionnelles. Sans entrer dans trop de détails, il convient d'énumérer toutefois quelques éléments issus du rapport de consultation qui s'en est suivi :
 - l'idée d'une collaboration romande « forte » pour les degrés 7-8-9 est souhaitée, non seulement au travers de moyens d'enseignement communs, mais également en ce qui concerne la formation des enseignants;
 - le concept d'un seul ouvrage axé sur la pratique d'une pédagogie différenciée rejoint les préoccupations d'une large majorité des instances consultées;
 - le livre du maître doit jouer le rôle de référence méthodologique et didactique, ce doit être un ouvrage évolutif favorisant une certaine souplesse d'emploi, il doit préciser les objectifs à atteindre pour

les différentes catégories d'élèves,

- la référence au socio-constructivisme ne doit pas se faire au détriment de la phase d'assimilation, lors de l'apprentissage de nouvelles notions mathématiques, qui nécessite de fournir des exercices d'entraînement,
 - l'évaluation mérite une place importante dans les nouveaux moyens d'apprentissage.
- A la suite de l'entrée en matière constructive des autorités scolaires, COROME vient de mandater le groupe de réflexion pour approfondir son travail et mener une étude jusqu'en juillet 1998. Au terme de celle-ci, il proposera une conception d'ensemble comportant, entre autres, la définition et la description d'objectifs noyaux, les lignes directrices et les contenus des nouveaux moyens, une thématique sur les trois années concernées, une brève description du matériel à créer (support informatique, conception du livre du maître et des moyens pour les élèves, ...).

Cette évolution réjouissante n'est-elle pas une véritable métamorphose digne des philtres de CIRCE la magicienne ?

Grand succès pour la première épreuve du 5e Rallye mathématique transalpin, dont les sujets ont été présentés dans le numéro 176 de *Math-Ecole*. Vous trouverez ceux de la deuxième épreuve, en version française, passés dans les 140 classes romandes et bressanes à la fin d'avril 1997, tout au long des pages des numéros 177 et 178 de *Math-Ecole*. (Les lecteurs qui le souhaiteraient peuvent obtenir la version en langue italienne, proposée aux classes du Tessin et d'Italie).

Des résultats et analyses paraîtront dans un prochain numéro.

Hamstermatique

Chantal Richter

Et voilà, janvier s'annonçait blanc et calme. Démarrer dans un nouveau projet était au programme. Discussions et propositions diverses de mes élèves, puis votations. Attention ! On ne vote qu'une fois et on compte les mains levées. Quelqu'un se propose pour enregistrer les résultats : 1ère proposition «les cacahuètes» ... quatre élèves. 2ème proposition : «les fruits de l'hiver» ... six élèves. 3ème proposition : «un animal dans la classe par exemple, un hamster» ... treize élèves enthousiastes. Résultat : je pars acheter un de ces rongeurs à quatre heures, trouve une cage et, le lendemain, ce nouveau visiteur prend place parmi nous.



Plaisir, évidemment. Mais il faut préparer la cage, verser beaucoup de copeaux, peu de graines, de l'eau et ... une carotte !

Voilà bien le problème la carotte est trop grande pour un petit hamster baptisé «Long-poil». Il faut la couper. «Qui veut la partager en quatre morceaux ?» Beaucoup de mains se lèvent, évidemment. Je tente l'expérience avec plusieurs élèves et plusieurs carottes. Surprise ! Couper en quatre veut dire, pour eux, appuyer quatre fois sur le couteau et se retrouver donc avec cinq morceaux.



«André, combien as-tu de morceaux devant toi ?» André compte, quelque peu désespéré de se retrouver avec cinq morceaux. Alors, comment réussir ? On recommence avec de la pâte à modeler, la réserve de carotte étant épuisée ! Il faut d'abord former

des petits légumes puis essayer de couper afin d'obtenir quatre morceaux. La difficulté que les enfants rencontrent est la même que celle qu'ils vivent lors des exercices de conservation des grandeurs. Leur incompréhension devant le phénomène est toujours aussi « normale », selon leur maturité. Sur une quinzaine d'élèves, quatre sont parvenus au résultat, comprenant la démarche à suivre et stoppant parfois leur geste à la dernière minute ! Morgan s'exclama tout à coup : « Aïe, j'ai failli en couper un autre, je me suis arrêté juste à temps ! » Et il essaya alors de prévenir les autres : « Arrête-toi, sinon ça va faire cinq ... »



Dans un deuxième temps, lorsque beaucoup de morceaux furent coupés, chacun compta combien il en avait et essaya de faire une étiquette, en inscrivant le nombre obtenu, tout en se référant à un tableau de vérification. Il fallait ensuite savoir, bien sûr, qui en avait le plus, le moins ou l'équivalent. Toutes ces opérations se firent avec plaisir et sans nécessiter beaucoup d'interventions de ma part : la plupart des élèves pouvant vérifier eux-mêmes, ou entre eux. Il est toujours intéressant de remarquer combien leur esprit de collaboration et d'échanges est stimulant, combien de remarques ou raisonnements de certains font progresser le

groupe entier. Ce jour là, « Long-poil » eut beaucoup de morceaux de carottes à grignoter.





Pendant la semaine qui suivit, nous fabriquâmes des hamsters à l'aide d'une chaussette en nylon, bourrée d'ouate. Avant de les emporter, je proposai qu'on les observe une dernière fois tous ensemble, car chacun avait envie de montrer le sien aux copains. Ils admirèrent donc leur progéniture et essayèrent de trouver les mâles, les femelles, toutes les pattes jaunes ou les pattes grises, les «poils» bruns, gris ou noirs ! Tout à coup, Joris remarqua que les groupes de couleur n'avaient pas tous le même nombre de hamsters et que l'on devait essayer de faire des familles avec le même nombre partout. «D'accord, dis-je, par combien veux-tu commencer ? Par 5», répondit-il. Chacun se mit au travail pour mettre son animal dans une famille de 5. Mais voilà, étant vingt-trois dans la classe, ils remarquèrent que ce n'était pas possible. «Il y a quatre familles de cinq hamsters, mais il en reste trois tout seul ! Et si on essayait avec dix, moi je sais que ça va marcher» dit Lou. Ils essayèrent avec plusieurs nombres : quatre, huit, trois, sûrs à chaque nouvelle expérience de trouver la solution, et chaque fois

déçus de ne pas avoir réussi. Par contre, ils remarquèrent très justement que plus les familles étaient petites, plus il y en avait et que au contraire, plus elles étaient grandes moins on en obtenait. Je décidai alors de rajouter un hamster, atteint de varicelle d'ailleurs, due à l'épidémie qui sévissait dans ma classe et tout à coup les choses prirent une autre couleur ! On pouvait faire des groupes de quatre, de trois, de deux, de douze, de six, de huit ... et ça marchait. Miracle ! La découverte des multiples communs semblait éclairer leur visage. Je suppose que de voir que chaque hamster pouvait avoir une famille, et ne restait pas seul, devait les toucher dans leur vécu. Mais chaque fois que les groupes pouvaient se faire, c'était un fête ! A la fin, chacun reprit sa petite bête pour l'emmener dans sa propre famille de quatre, cinq, trois, six, ...

«Long-poil» fut et est encore un fil conducteur mathématique très efficace branchant les enfants sur 220 volts à plusieurs reprises !

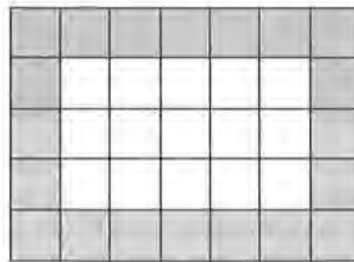
Bordures

Maria-Gabriela Rinaldi

Université de Parme

Mombo Tapie est fabricant de couvertures quadrillées. Il aimerait créer un modèle «égalité» qui a autant de carrés gris touchant le bord que de carrés blancs à l'intérieur.

Son apprenti Amal lui a proposé ce modèle qui, malheureusement, ne convient pas, car il a 15 carrés blancs intérieurs et 20 carrés gris sur la bordure.



Est-il possible de créer des tapis avec autant de carrés gris sur le bord que de carrés blancs à l'intérieur ?

Expliquez votre réponse

Ce problème est tiré de la finale 1996 du Rallye mathématique. Son énoncé est clair et bien formulé. Il présente une question intéressante du point de vue pratique et donne envie au lecteur d'aider Mombo à trouver une solution meilleure que celle de son apprenti Amal.

De notre point de vue, l'intérêt de ce problème tient notamment au fait qu'il n'est absolument pas possible de savoir a priori si, oui ou non, il existe une solution. Le texte de l'énoncé ne le laisse pas entrevoir non plus et l'on se trouve aussitôt en situation caractéristique d'une recherche.

En outre, ce problème est un bel exemple de «verticalité» entre les degrés de l'école primaire, du secondaire, ... voire au-delà !

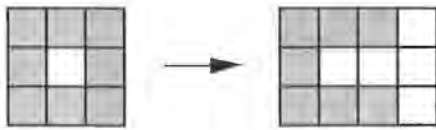
L'obstacle sous-jacent, qui rend la question plus difficile qu'il n'y paraît en première analyse, tient ici à la conjonction des notions de périmètre et d'aire ! Car, en fait, c'est «l'aire du pourtour» ou de la bordure qui est confrontée à «l'aire interne». Et l'intuition n'aide pas; elle va même à l'encontre de conceptions intuitives qui font penser à beaucoup que l'aire qui «entoure» est supérieure à celle de l'intérieur.

Devant ce problème, les enfants procèdent en général par essais à partir du dessin de la donnée, en modifiant la longueur ou la largeur du tapis et s'arrêtent lorsqu'ils trouvent une solution, sans se poser la question de son unicité. Mais, évidemment les techniques utilisées sont de plus en plus raffinées en fonction de l'âge et des instruments mathématiques dont disposent les élèves. Passons-les rapidement en revue.

Pour l'école primaire, il existe une façon parfaitement rigoureuse, et à la fois facilement compréhensible, de montrer l'existence de deux solutions, exactement. Cette démonstration se révèle particulièrement instructive dans la mesure où elle conduit à examiner tous les cas possibles, sur le simple fondement d'un raisonnement combinatoire.

Après avoir fait remarquer que l'on obtient le même tapis en prenant comme côté horizontal la longueur ou la largeur du rectangle (ce qui aide à se défaire de l'image stéréotypée du rectangle dessiné sur une base qui est inmanquablement sa longueur), on peut décider de partir de tapis carrés dont on augmentera progressivement la longueur. On envisagera ainsi tous les cas possibles, sans répétitions inutiles.

A partir du plus petit tapis carré possible, celui qui n'a qu'une seule case interne et huit cases de bordure, on augmente d'un carré l'une des dimensions. On obtient alors un tapis rectangulaire de deux cases intérieures et de dix en bordure.



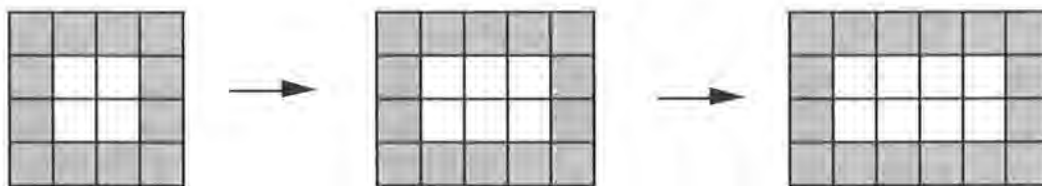
différence 7

différence 8

La différence entre le nombre de carrés internes et le nombre de carrés de la bordure a augmenté et il n'est pas difficile de comprendre que, si l'on continue à augmenter la longueur du rectangle on ne trouvera pas de solution, étant donné que l'augmentation d'un carré correspond à l'adjonction d'une

«bande» de tapis formée d'un carré blanc et de deux carrés gris. C'est-à-dire que, chaque fois qu'on ajoute un carré interne, le nombre de ceux de la bordure augmente de deux.

Considérons maintenant le tapis carré de quatre cases intérieures : dans ce cas, la bordure est constituée de douze cases et la différence est de huit cases. En allongeant une dimension d'un carré, on obtient un rectangle de six cases intérieures et quatorze cases en bordure. La différence est la même qu'auparavant et il apparaît clairement qu'elle reste constante lorsque la longueur augmente : le nombre des cases blanches comme celui des grises augmente de deux à chaque fois que l'on allonge la longueur d'une unité.



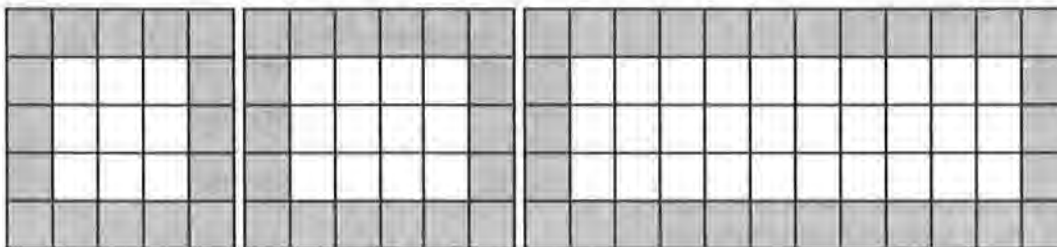
différence 8

différence 8

différence 8

Le tapis carré de neuf cases blanches intérieures en a seize grises en bordure. Il présente une différence de sept case à compenser. Lorsqu'on allonge le rectangle d'une «bande» d'un carré de largeur, les enfants

peuvent constater qu'on ajoute trois cases blanches et deux cases grises. Ainsi, la différence diminue d'une unité et, en sept étapes, le nombre des cases blanches sera égal à celui des cases grises.



différence 7

différence 6

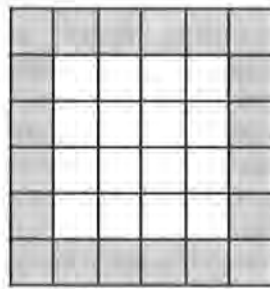
différence 0

Ainsi, on a trouvé une solution. Mais est-ce la seule ? La recherche n'est pas terminée ! Si l'on allonge encore le rectangle d'une «bande», le nombre des carrés blancs (33)

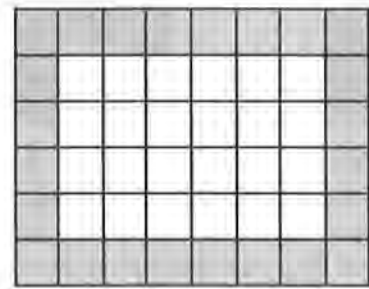
sera supérieur à celui des carrés gris (32). De cette série de rectangles, il ne faut donc plus attendre de solutions.

Le tapis carré de seize cases intérieures en a vingt en bordure. Allonger le rectangle d'une bande d'un carré de largeur équivalent à augmenter le nombre de cases blanches de quatre et le nombre de cases grises de

deux. La différence diminue de deux à chaque étape et il suffira donc d'allonger le rectangle de deux carrés pour obtenir une nouvelle solution au problème de Mombo.



différence 4



différence 0

Nous avons ainsi trouvé deux solutions. Y en a-t-il d'autres ? Pour cette série de rectangles, la réponse est non, évidemment.

Le tapis carré de vingt-cinq cases intérieures n'en a que vingt-quatre en bordure. En l'allongeant d'une «bande» on augmente le nombre de cases blanches de cinq et celui des cases grises de deux, comme toujours. Le nombre des cases intérieures blanches sera donc toujours supérieur à celui des cases grises de la bordure et on ne trouvera pas de nouvelle solution dans cette série de tapis ni dans toutes les suivantes où, pour le tapis carré, le nombre des cases intérieures est déjà supérieur à celui des cases de bordure.

On peut donc être sûr que les deux solutions trouvées sont les seules.

Les élèves de l'école secondaire, et surtout ceux des degrés 8 et 9, chercheront à résoudre le problème par une équation :

Appelons **a** et **b** respectivement les mesures de la longueur et de la largeur du rectangle intérieur, exprimées en côtés de carrés.

La relation entre les cas intérieures et celles de la bordure s'exprime par l'équation :

$$ab = 2(a + b) + 4$$

On constate que cette équation est symétrique par rapport à **a** et à **b** (ce qui correspond au fait qu'on obtient le même tapis en prenant **a** comme largeur et **b** comme longueur) et n'est pas linéaire. Il faut se rappeler encore que nous nous intéressons seulement aux solutions entières et positives, c'est à dire aux couples $(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

On peut procéder par essais successifs pour résoudre cette équation avec des élèves qui ne possèdent pas encore les instruments nécessaires. Mais si on la résout, par rapport à **b** par exemple, on obtient :

$$ab - 2b = 2a + 4$$

$$b(a - 2) = 2(a + 2)$$

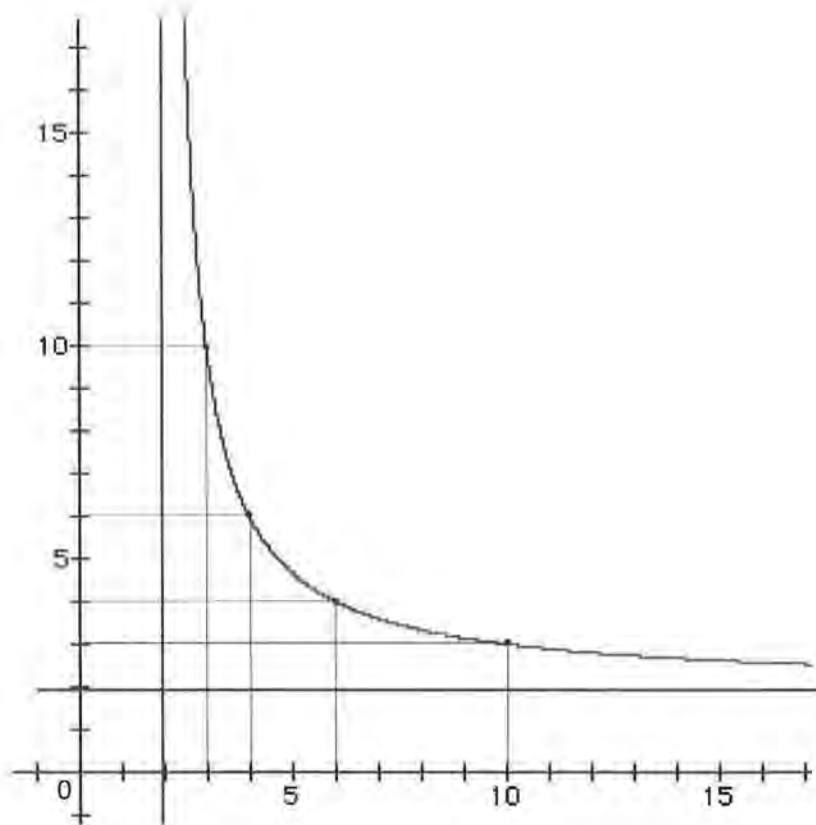
$$b = \frac{2(a + b)}{a - 2}$$

et les quatre couples $(a;b)$ qui satisfont l'équation, (3;10), (10, 3), (4;6) et (6;4), pris deux à deux, représentent les deux solutions du problème des tapis.

Dans le secondaire supérieur, le problème de Mombo peut se visualiser dans un repère cartésien $(0;x;y)$ par la représentation graphique de l'hyperbole d'équation : ►

$$y = \frac{2(x+2)}{x-2}$$

dont il suffit de rechercher les points de coordonnées entières et positives.



Il peut aussi être intéressant, dans le cas où les élèves sont en possession des instruments mathématiques nécessaires, d'opérer un simple changement de système de coordonnées cartésiennes pour obtenir l'équation de l'hyperbole par rapport à ses propres axes. Par la transformation de coordonnées :

$$X = x - 2$$

$$Y = y - 2$$

on obtient l'hyperbole d'équation : $Y = \frac{8}{X}$.

De là, on voit facilement que les solutions entières positives sont les points qui ont comme première coordonnée un diviseur positif de 8. C'est à dire $X = 1, 2, 4$ ou 8 . On obtient alors les couples $(1;8), (2;4), (4;2)$ et $(8;1)$, qui, pris deux à deux, après substitution, donnent les deux solutions $(3;10)$ et $(4;6)$ du problème de Mombo Tapie.

On peut donc faire des mathématiques à plusieurs niveaux sur un simple problème de rallye destiné à des élèves du degré primaire.

A propos du concept d'angle

Graziella Telatin

Pont-St-Martin (Val d'Aoste)

La séquence décrite dans cet article a été expérimentée dans deux classes, l'une de troisième, l'autre de quatrième, de l'Ecole Elémentaire de Donnas (Val d'Aoste), pendant l'année scolaire 1994-95. L'année suivante, on l'a expérimentée dans deux classes de troisième de l'école de Saint-Vincent, de laquelle proviennent les photographies. Elle fait partie d'un parcours didactique plus général, qui prévoit d'étudier le passage de l'espace à trois dimensions à celui à deux dimensions dès la classe de première année.

Ce travail véhicule un concept d'angle qui n'est certainement pas le concept mathématique d'*angle de rotation*. La question est de savoir s'il faut éviter d'aborder certains concepts avec des élèves parce qu'on ne peut pas les travailler dans leur complexité. Ce qui revient à dire que, par exemple, les jeunes enfants ne devraient pas penser que la grandeur d'un nombre dépend du nombre de ses chiffres parce que ce principe, valable pour les naturels, ne l'est plus pour les décimaux! C'est justement la prise en compte de la différence entre ce qu'on pensait avant et ce qu'il faut construire pour résoudre une nouvelle situation qui permet de progresser.

Il en va de même pour les angles. Nous pensons que, lorsque les enfants seront confrontés à la somme des angles, ils se rendront compte que les représentations qu'ils avaient jusque là ne leur suffiront plus et, au travers d'un conflit cognitif, ils en construiront une nouvelle.

Pour nos classes, nous avons choisi d'abor-

der le concept d'angle en tant que *secteur angulaire*. Et, à ce stade déjà, nous avons tenu compte de quatre obstacles que rencontrent les enfants :

1. Dans les manuels, et les activités qu'ils suggèrent, l'angle n'apparaît souvent que comme un dessin de deux segments ayant une extrémité commune, complété par un petit arc de cercle, ou comme un «triangle» dont un «côté» est une ligne courbe.

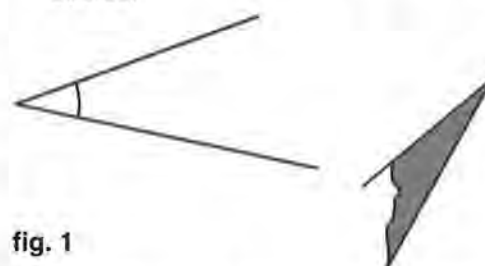


fig. 1

Les enfants ont de la peine à le considérer comme une partie du plan limitée par deux demi-droites qui ont une origine commune, parce que leur attention est focalisée par les segments dessinés. Il nous paraît fondamental, à l'Ecole primaire, de créer des modèles corrects pour véhiculer les concepts.

2. Les enfants sont souvent convaincus que la grandeur de l'angle dépend de la longueur de ses côtés.
3. Les enfants ne considèrent normalement que les angles «saillants», c'est-à-dire la partie convexe du plan déterminée par les deux côtés. Ils ne s'intéressent pas à l'angle «rentrant», l'autre partie du plan, non convexe.
4. Dans les problèmes de mesure des angles, on n'accorde pas assez d'importance à la présentation ou à la recherche d'un angle-unité.

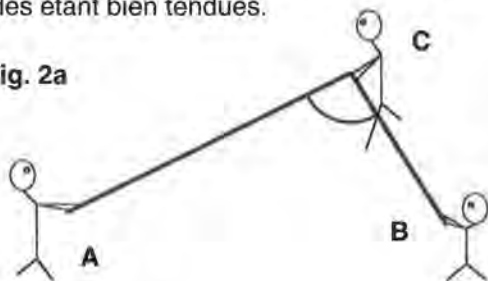
Les activités de géométrie, dans les classes précédentes prévoyaient une longue manipulation de boîtes, leur développement, la comparaison de leur forme, la comparaison de leurs capacités au moyen de différents remplissages par des noix, noisettes, haricots blancs, etc. Les enfants de la classe de troisième avaient suivi ce parcours et étaient arrivés à reconnaître, parmi les différents éléments qui déterminent la différence entre une boîte et l'autre, les angles ou les «pointes». On était parti de là pour les faire réfléchir sur leur conception ou représentation de l'angle. On leur avait demandé : «C'est quoi un angle ? Où trouvez-vous des angles ? Pouvez-vous vous mettre dans un angle ?»

Ces questions avaient engendré une discussion qui avait abouti aux conclusions suivantes :

1. l'angle est délimité par deux parois;
2. on est dans un angle même si on n'est pas collé comme une pellicule aux murs;
3. l'angle est un espace.

Après cette première réflexion, on a proposé aux enfants les activités suivantes, à faire dans la salle de gymnastique. On a réparti les enfants par groupes de trois; à chaque groupe on a donné deux cordes à sauter et on leur a demandé de former un angle. Les enfants n'ont eu aucune difficulté à s'organiser : deux élèves (A et B) avaient en main un bout d'une corde différente, le troisième (C) tenait les deux autres extrémités, les cordes étant bien tendues.

fig. 2a



Nous avons alors demandé aux élèves de montrer l'angle qu'ils avaient formé. Ils ont tous désigné la partie convexe, située «entre les deux cordes», «à l'intérieur» (fig. 2a).

Lorsqu'on a demandé aux enfants de désigner leur angle plus précisément, ils l'ont décrit comme la distance entre ceux d'entre eux qui ne tenaient qu'un seul bout de corde : A et B.

On a ensuite invité l'élève B à tourner autour de C en maintenant la corde tendue (fig. 2b). Au «stop» de l'institutrice, il devait s'arrêter et, avec ses camarades, contrôler si le nouvel angle s'accordait avec la description précédente.

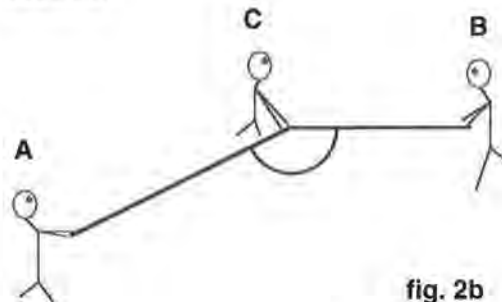


fig. 2b

Les enfants ont vu que les nouveaux angles pouvaient aussi s'exprimer de la même manière (par la distance de A et B), même s'ils étaient supérieurs à l'angle plat. Ils se sont alors amusés à construire, par rotations, «tous» les angles possibles. Ils se sont aperçu alors que, lorsqu'ils avaient fait un angle, il y en avait un autre, opposé, et que si l'un augmentait l'autre diminuait.

Si les élèves ont travaillé en conservant la définition de la «distance» entre ceux d'entre eux qui ne tenaient qu'une extrémité de corde, il faut préciser que cette distance n'est pas acceptable du point de vue mathématique, car elle dépend de la longueur des cordes et qu'elle traduit une représentation de l'angle au sommet d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont fixes (cordes à sauter).



Après avoir laissé les enfants travailler longtemps avec les cordes, on leur a demandé de se fixer sur un angle; cet angle serait celui du groupe, celui qu'on considérerait digne d'être ramené en classe. Mais comment pouvait-on être sûr que l'angle qu'on aurait ramené en classe fût le même que celui qu'on avait fait en salle de gymnastique ? Les enfants étaient embarrassés; ils comprenaient que, au moment où ils bougeaient, même un petit peu, l'angle n'était plus le même et on n'était pas sûr de le refaire comme avant.

Pour franchir l'impasse, l'institutrice a proposé de dessiner par terre l'angle choisi, après avoir recouvert une très grande surface de plancher par des feuilles de journaux scotchées les unes aux autres. Les enfants ont effectué volontiers ce travail et ils sont remontés en classe avec leurs angles qu'ils ont pendus au mur. Ils étaient tellement grands qu'ils recouvraient presque une paroi entière.

A partir de ce moment, les enfants ont eu sous les yeux un modèle d'angle qui était vraiment «une partie du plan». Quand ils racontaient leur expérience, l'angle de chaque groupe était une surface, extensible à volonté du côté de son «ouverture», mais sans modifier les demi-droites que sont ses côtés.

Quelques jours après, l'institutrice a fait observer que les angles étaient vraiment trop encombrants : ils occupaient presque tout l'espace de la paroi et ils cachaient tous les panneaux qui étaient déjà accrochés. En outre, on ne pouvait pas les coller dans les cahiers des enfants. On a alors posé cette question : «Comment peut-on conserver un souvenir du travail fait, mais qui soit de dimensions acceptables ?»

Les enfants ont discuté longtemps, en proposant différentes solutions et en évaluant dans chaque cas le pour et le contre. A la fin, ils ont conclu qu'on pouvait conserver la «pointe» de l'angle et enlever le reste parce

que «il suffit d'avoir la pointe pour s'imaginer comment l'angle continue à l'infini» : l'important c'était d'avoir des côtés qui «continuaient bien droit» (avec gestes à l'appui).



Ce passage, qui entraîne chez les enfants la compréhension que la grandeur de l'angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, a stimulé leur connaissance imaginative.

On a donc coupé les pointes des angles et on les a collées sur un panneau; le papier qui avait été coupé a été plié et rangé dans une armoire : les enfants ont refusé de le jeter, démontrant encore une fois la valeur affective qu'acquiert, à leurs yeux, tout travail accompli.

La dernière phase du travail touchait à la mesure des angles. On s'est demandé si l'on pouvait comparer les angles qu'on avait fait en salle de gymnastique et les ordonner. Les enfants ont suggéré de les mettre les uns

sur les autres. On les a passés sur papier calque et ordonnés.

L'institutrice a demandé : «Nous pouvons maintenant dire quel est l'angle le plus grand, mais est-ce que on peut dire de combien ? Avec quoi pouvons-nous le mesurer ?». Les enfants se sont lancés à la recherche d'une unité de mesure, en proposant celles qu'ils connaissaient déjà, mais en s'apercevant tout de suite qu'elles n'étaient pas adéquates.

Certains, ayant entendu parler de degrés, ont pensé qu'il s'agissait des unités de température, mais ils ont vite convenu que le thermomètre ne leur serait d'aucun secours. La majorité d'entre eux ont pensé aux mesures de longueur. Mais ils ne savaient pas où se placer pour mesurer la «distance» entre un côté et l'autre!

L'institutrice a alors souligné que lorsqu'on avait voulu mesurer la longueur, on avait choisi une longueur, pour mesurer le volume on avait choisi des objets volumineux, de même pour mesurer un angle les hommes avaient choisi un angle, d'une grandeur bien définie, qu'on a appelé *angle-degré*. L'institutrice avait préparé des angles-degré en carton : les côtés suffisamment longs permettaient de les visualiser et de les manipuler. En utilisant ces angles on a essayé de remplir un angle quelconque. Le nombre d'angles-degré nécessaires était la mesure de cet angle.

On a construit aussi des multiples de l'angle-degré : un angle de 5° , un de 10° , un de 45° . Les enfants mesuraient les angles en utilisant ces modèles en carton, mis l'un à côté de l'autre et puis ils en disaient la grandeur.

Cette démarche était longue et pénible; c'est alors qu'on a présenté le rapporteur comme un instrument qui pouvait faciliter la tâche parce qu'il porte, déjà dessinée, une petite

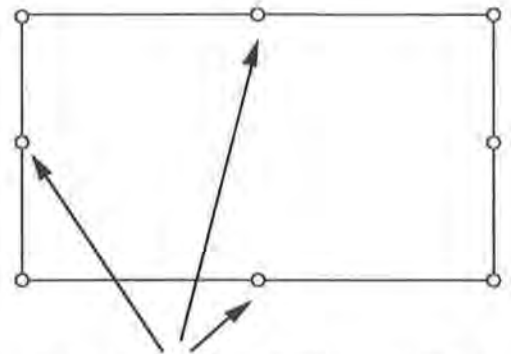
partie des côtés des angles-degré qui le remplissent. La construction d'un grand rapporteur sur une feuille de papier (100 x 70) a renforcé l'idée que l'ampleur d'un angle ne dépend pas de la longueur des côtés qui le délimitent.

La première phase d'exploration conceptuelle s'est conclue ainsi. Les enfants des classes dans lesquelles on a expérimenté ce parcours ont démontré une bonne capacité de mesurer les angles. En outre, les observations qu'ils ont faites ont démontré qu'ils avaient bien intériorisé le concept d'angle. Par exemple :

- si on est au milieu de la salle de classe, on est dans l'espace angulaire de 4 angles;
- l'espace de la classe est l'espace commun à 2 angles qui sont l'un vis-à-vis de l'autre;

— pour jouer au jeu des «4 cantoni»¹ (voir fig. 3), on peut décider d'ajouter des positions sur les côtés du rectangle, que l'on considère comme des sommets d'angles plats, afin que chaque joueur puisse avoir son angle.

fig. 3



sommets d'angles plats permettant à trois joueurs supplémentaires de participer au jeu.

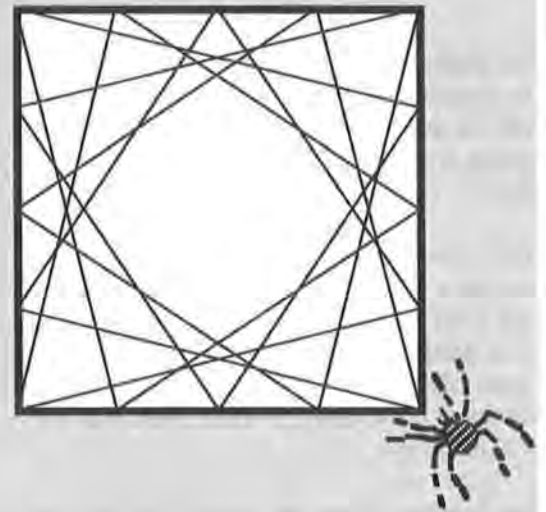
1. Toile

L'araignée Topsy vient de réaliser un chef d'oeuvre.

Elle est partie de l'angle du cadre, en bas à droite, elle n'a utilisé qu'un seul fil et elle est revenue à son point de départ.

Dessinez la toile de Topsy, de la même forme, bien régulière mais plus grande, sur une feuille de papier quadrillé.

Expliquez par où Topsy a pu passer pour construire sa toile.



¹ Ce jeu se joue à l'origine sur un terrain rectangulaire. Les quatre joueurs occupant les quatre sommets doivent échanger leurs positions deux à deux et un cinquième joueur, au centre, doit profiter de ces déplacements pour tenter d'occuper un sommet.

CABRidées :
Quelle fonction ?

Michel Chastellain, SPES (Vd)

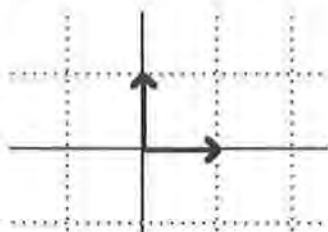
Et revoilà «la machine à multiplier»¹. Cette fois, elle va nous permettre de découvrir de nouvelles perspectives, du côté du monde algébrique, puisqu'il s'agit de la rendre opérationnelle dans le cadre de l'étude des fonctions. L'objectif initial vise à représenter graphiquement la fonction linéaire :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

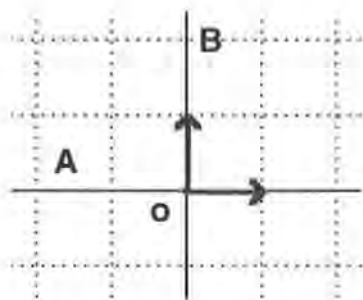
$$x \mapsto 2x.$$

Pour y parvenir, on peut procéder de la manière suivante :

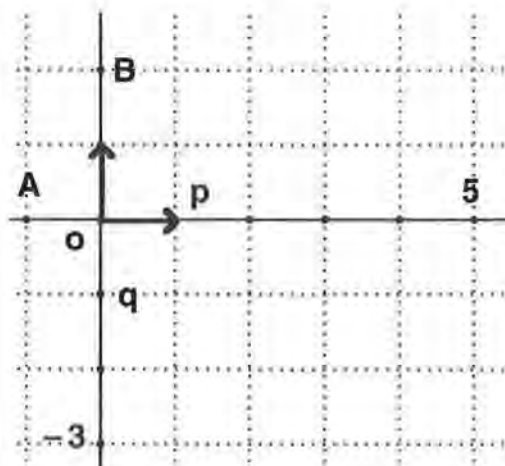
- Recourir successivement aux outils «*Quadrillage*» du menu «*Divers*» et «*Préférence, Afficher le repère avec le quadrillage*» du menu «*Edition*». Le système d'axes qui apparaît alors ne représente malheureusement qu'une trame de référence, sur laquelle il n'est pas possible de déposer un objet, comme un point par exemple.



- Pour contourner cet inconvénient, placer une droite de base **A** superposée à l'axe horizontal, poser sur cette droite un point **o** (placé à l'aide de l'outil «*Point sur objet*» du menu «*Construction*») confondu avec l'origine des axes, et enfin construire une droite **B**, perpendiculaire à la droite **A**, passant par le point **o**.

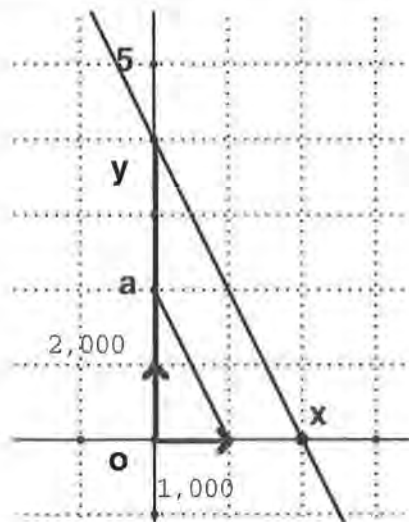


- Grader les deux axes en plaçant deux points **p** et **q** de telle manière que les segments **[op]** et **[oq]** mesurent respectivement 1,000 cm (menu «*Edition*», rubrique «*Préférences*», bouton «*Précision des mesures x 100*») et construire l'image de chaque point, comme des marques de graduation, par une utilisation renouvelée de l'outil «*Symétrique d'un point*» du menu «*Construction*».

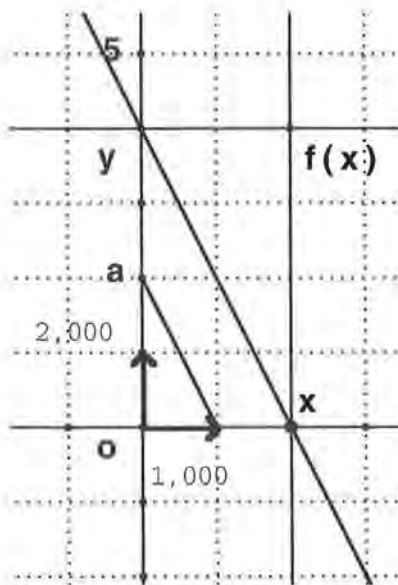


- Après avoir camouflé les lettres **A**, **B**, **p** et **q**, construire «la machine à multiplier par 2» qui crée un segment **[oy]**, produit des segments **[ao]** par **[ox]**, c'est-à-dire dans notre cas, un nouveau segment égal à $2[ox]$, puisque $[oa] = 2,000$ cm.

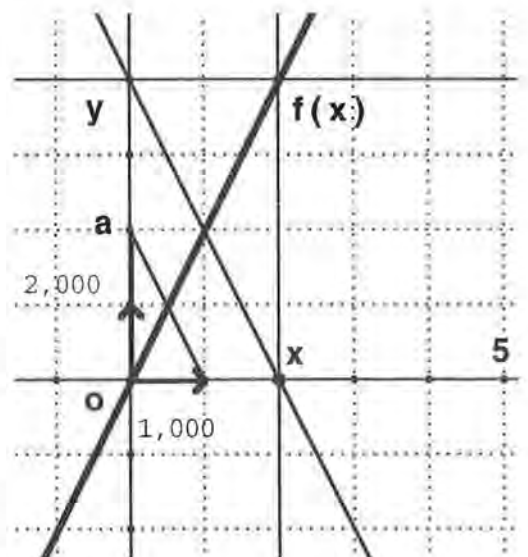
¹ Math-Ecole n° 174 et 176



- Compléter la figure par le point $f(x)$, intersection de deux droites parallèles aux axes, passant respectivement par les points x et y .



Chaque lecteur aura certainement déjà compris qu'il suffit alors de demander à Cabri-Géomètre de tracer le lieu géométrique «automatique» du point $f(x)$, lorsque le point x se promène sur l'axe des abscisses, pour faire apparaître la représentation graphique de la fonction recherchée. ▲►



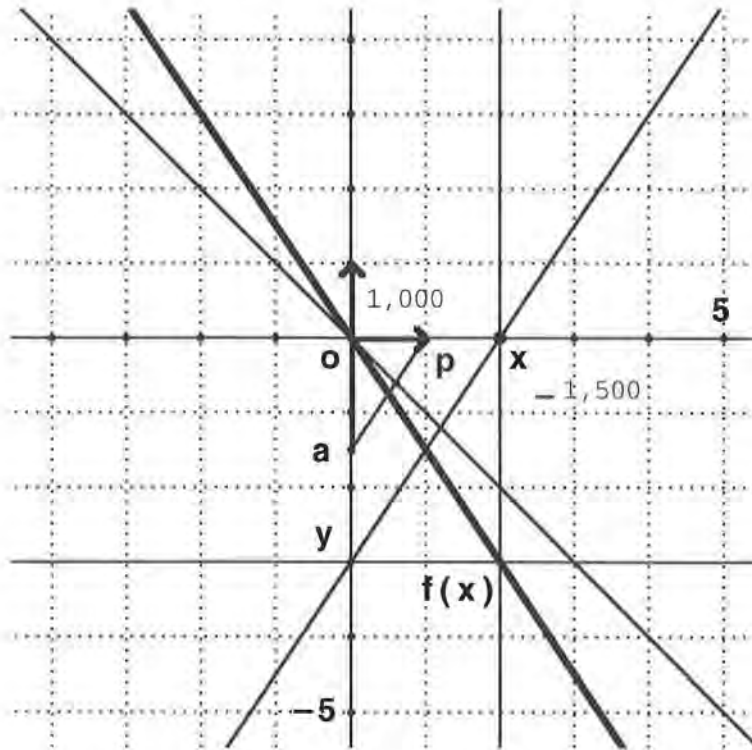
L'intérêt pédagogique réside, une fois encore, dans la composante dynamique de Cabri-Géomètre, puisqu'il suffit de modifier la dimension du segment $[oa]$ pour représenter instantanément une nouvelle fonction dont le graphique est illustré par le nouveau lieu géométrique tracé. Ainsi, les élèves disposent d'un outil d'investigation particulièrement puissant pour prévoir, puis vérifier, l'influence du facteur a , dans la formule générale des fonctions linéaires : $x \mapsto ax$.

Cette construction permet également de s'intéresser à la pente de la droite illustrant chaque fonction étudiée, qui n'est autre que la mesure du segment $[oa]$. Cependant, il existe un ennui lorsque le point a est positionné en dessous de l'origine, car le nombre affiché ne représente que la valeur absolue du segment $[oa]$. Pour remédier à ce petit problème, il faut procéder ainsi :

- Tracer la bissectrice de l'angle défini par les trois points $5, 0$ et -5 . Celle-ci pourra être camouflée par la suite, d'ailleurs.
- Construire l'intersection du segment $[ap]$ avec cette bissectrice et la nommer à l'aide d'un signe négatif (-).

- Modifier la position de ce signe (-), à l'aide de l'outil «main», afin de le placer devant la valeur absolue du segment [oa].
- Comme l'intersection définie n'existe que lorsque le point a se situe en dessous de l'axe des abscisses, tout déplacement de ce point sur cette demi-droite a pour effet de faire apparaître le signe adéquat devant la valeur du segment [oa] !

A titre d'exemple, voici ce que donne la représentation graphique de la droite de pente (-1,500), image de la fonction $x \mapsto -1,5x$:



Dans le même ordre d'idée, il est bien évidemment possible de construire la représentation graphique d'une fonction de la forme

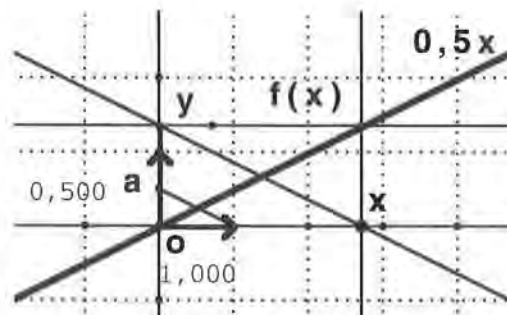
$$x \mapsto ax + b$$

comme par exemple : $x \mapsto 0,5x - 2$.

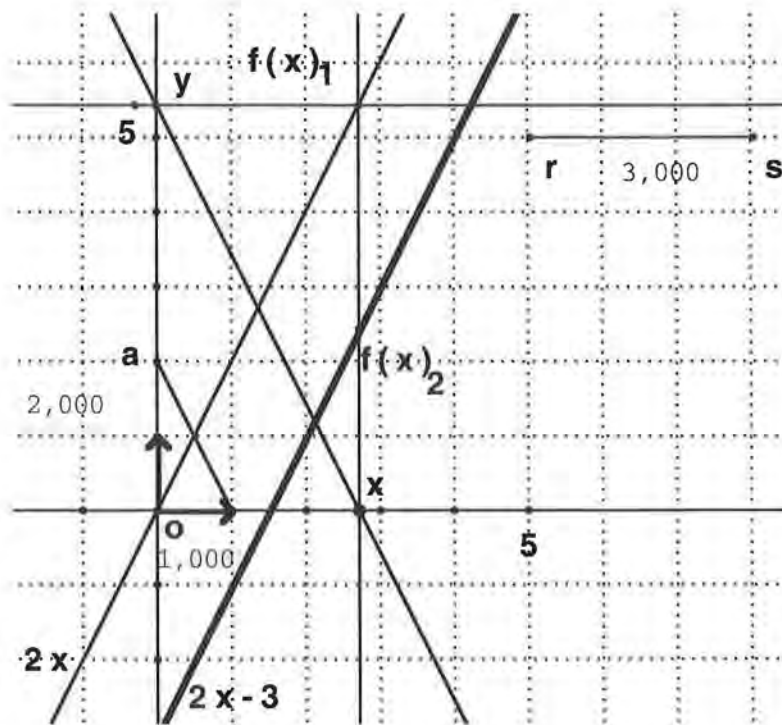
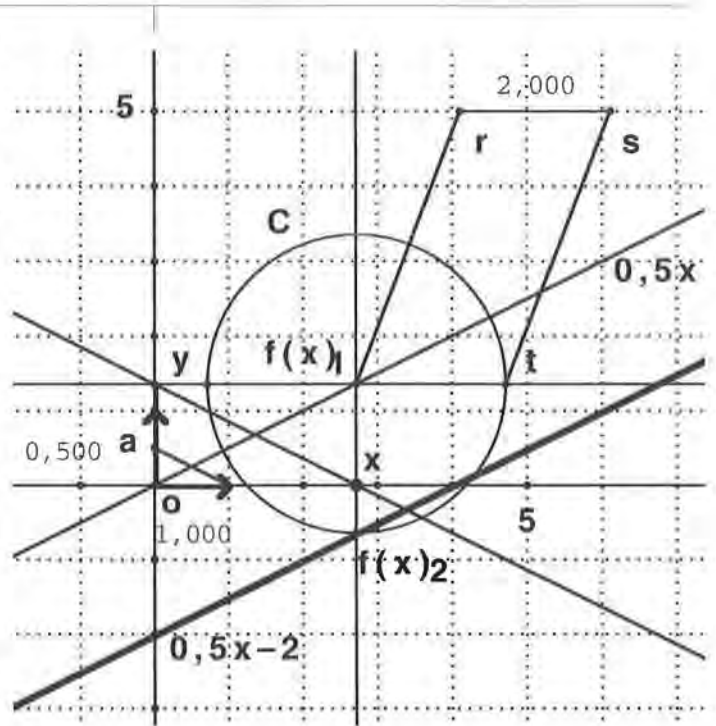
- La première phase est identique à la précédente : il s'agit de tracer le lieu géométrique de la fonction linéaire

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0,5x$$



- En seconde phase, il s'agit de soustraire la constante **b** de l'image $f(x)_1$, pour obtenir une nouvelle image $f(x)_2$ dont on cherchera, grâce à l'outil «Lieu géométrique», toutes les positions relatives à chaque x de l'axe des abscisses. Pour y parvenir, l'astuce consiste à tracer un segment «fixe» $[rs] = 2,000$ cm, puis à reporter ce segment à l'aide de la macro-construction «Report de segment»². A titre de rappel, il suffit de construire un parallélogramme $rstf(x)_1$, puis un cercle $C(f(x)_1; [rs])$. Ce cercle coupe la parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par le point x et le point cherché $f(x)_2$.



Là encore en agissant soit sur la mesure du segment $[rs]$, soit sur celle du segment $[oa]$, les élèves ont la possibilité d'étudier immédiatement l'influence des facteurs **a** et **b** dans le cadre de la formule générale des fonctions affines : $x \mapsto ax + b$

Ainsi par exemple pour $a = 2,000$ et $b = 3,000$, on obtient cette dernière figure :

Lors d'un prochain article, nous nous intéresserons aux fonctions de degrés supérieurs et, pourquoi pas, à quelques résolutions d'équations !

² Math-Ecole n° 174

Voyage au centre de la géométrie

Le puzzle, un outil didactique
au service des math¹

G. Sarcone et M. J. Waeber

«L'espace ? du vide ; la matière ? un savant pliage. La réalité n'est ni dehors, ni dans les choses, mais dans la mince pellicule qui sépare ces deux mondes. Un fabricant de boîtes, un féru de puzzles ou un expert en origami entraperçoit déjà l'ombre de la réalité».

Il y a de cela quelques mois, nous vous avons présenté les puzzles paradoxaux Quadrix. Nous rappelons pour ceux qui auraient manqué cette parution : le but des puzzles Quadrix est de faire apparaître, en modulant les pièces du jeu, un espace supplémentaire et cela sans changer les dimensions du puzzle (voir démonstration ci-dessous).

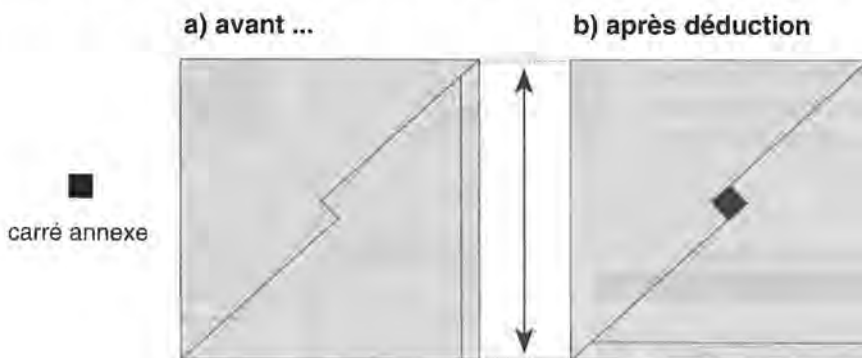
Nous nous étions quittés sur plusieurs interrogations : a) Combien de formes de base peuvent revêtir ces puzzles? b) Quel rapport existe-t-il entre ces formes et le «Nombre d'Or»? Nous verrons ensemble, dans les pages qui suivent, que ces jeux peuvent se

présenter sous différents aspects et dimensions. Qu'il n'existe virtuellement aucune limite de représentation. Nous verrons également comment ces puzzles sont liés à certaines suites récurrentes «plastiques» : les arithmodules.

Mis à part le fait de faire apparaître ou disparaître des surfaces, à quoi peuvent bien servir les Quadrix ? Il est vrai qu'il ne faut pas se focaliser sur le côté spectaculaire de ces jeux, mais plutôt sur les autres propriétés remarquables qui nécessitent, certes, une observation et une étude plus poussées, mais ô combien enrichissantes.

Savez-vous que vous pouvez démontrer le théorème de Pythagore ? étudier et comprendre le «fonctionnement» de la moyenne proportionnelle ? ou encore saisir la singularité des fractions décimales ? Mais le plus important est que l'étudiant appréhendra, avec ces puzzles, l'espace de façon ludique. Il cherchera à comprendre ce qui «maille» la réalité. Le «choc» visuel suffit à lui donner envie de déchiffrer ce qui ne joue pas dans ce qu'il perçoit et de trouver, par l'observation et l'expérimentation, un chemin logique pour démanteler le paradoxe.

Introduire dans le puzzle le petit carré annexe sans modifier la surface du jeu et en gardant toutes les pièces. Illogique ? Pourtant c'est possible, grâce à la «magie» des formes.



¹ Suite de l'article du même nom paru dans notre numéro 173 d'août 1996.

Le triangle rectangle, «réservoir de toutes les moyennes proportionnelles» selon les anciens Grecs, est également le «réservoir» de tous les paradoxes. Les puzzles Quadrix utilisent les triangles rectangles comme «amortisseurs»...

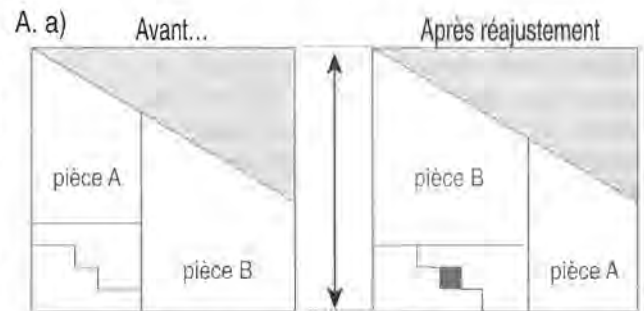
Observez un des puzzles ci-après : vous constaterez qu'un triangle rectangle (en gris foncé) soutient deux pièces obliques de différentes largeurs. Lorsque l'on intervertit ces pièces, un espace d'une unité apparaît. Les hypoténuses des triangles contenus dans les jeux A. a), b) et c) ont amorti ou, plutôt, phagocité l'espace manquant!

Disséquons le puzzle a) afin de mieux saisir le fonctionnement du jeu. Une fois dans son plus simple appareil, ce puzzle révèle un découpage (fig. C.1 et 2) calqué sur les suites de Lucas et de Fibonacci. En effet, le puzzle a) est partagé en quatre régions déterminées par la série de quatre nombres 3, 4, 5 et 7 que nous retrouvons dans la table des suites mixtes ci-dessous (B. traitillés en gras).

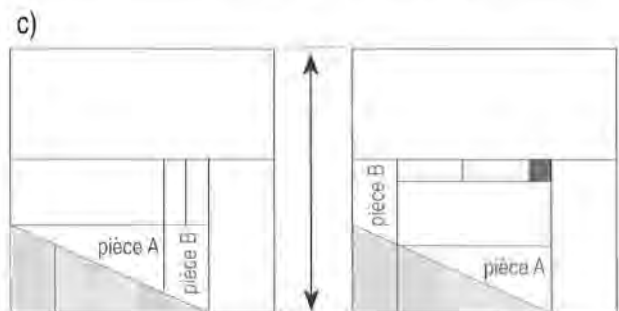
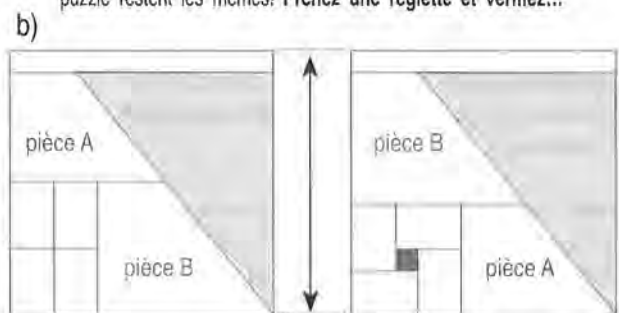
Il est intéressant de noter que le rapport de termes successifs d'une suite de Lucas ou de Fibonacci tend vers le Nombre d'Or (ex. $377/233 = 1,618...$). La «charpente» des puzzles Quadrix possède donc une relation avec ce nombre «plastique». Il est évident que les puzzles Quadrix peuvent se construire par d'autres procédés, mais nous voulons ici relever l'importance de ces suites dans la construction géométrique.

Les formes de base des puzzles Quadrix

Le triangle I



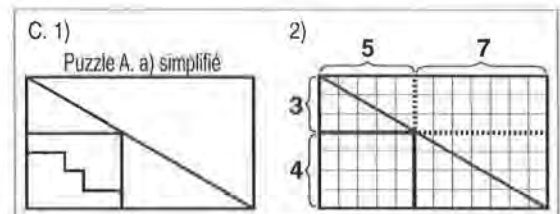
Un espace supplémentaire apparaît et pourtant les dimensions du puzzle restent les mêmes! Prenez une règle et vérifiez...



B. Table des suites «mixtes» (incomplète)

	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Chiffres blancs: suite de Lucas; chiffres noirs: suite de Fibonacci.



Bien. Nous avons vu qu'il était possible d'introduire une pièce dans un puzzle Quadrix sans que ce dernier ne change visiblement de surface, mais existe-t-il des jeux dans lesquels nous pouvons introduire 2, 3, voire davantage de pièces sans que leur surface ne soit en rien modifiée ?

Le triangle II

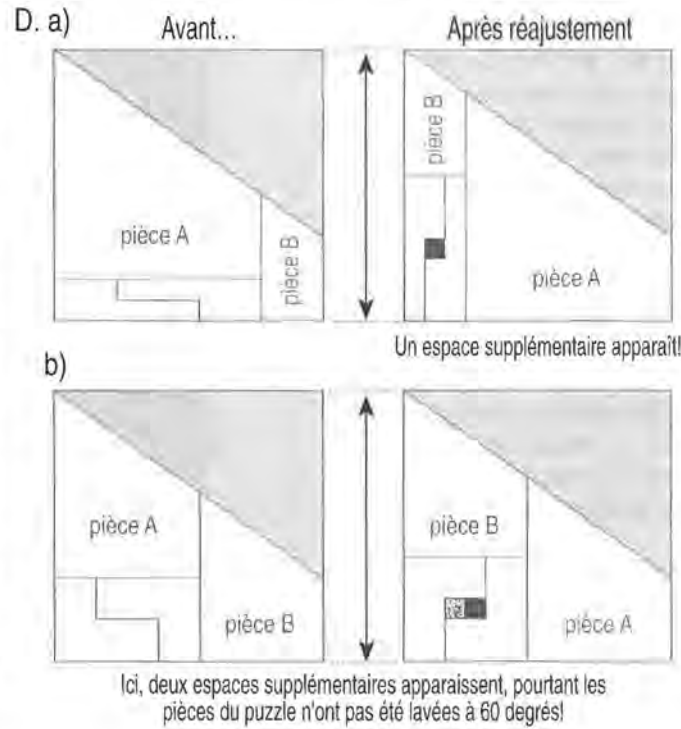
Certes! pour démontrer cela, mobilisons à nouveau nos chers triangles rectangles. Cependant, cette fois-ci, les triangles auront comme «charpente» les suites 1 et 2 des nombres «quadrixiens».

La «clé» des puzzles ci-contre est, comme auparavant, un triangle rectangle (en gris foncé); lorsque l'on intervertit les pièces sous-jacentes, un espace d'une unité apparaît dans le premier (D.a); tandis que dans le second (D.b), ce ne sont pas moins de deux espaces qui surgissent du néant... pourtant les triangles de ces puzzles sont identiques !

Simplifions et démontons le puzzle b) afin de saisir la mécanique du jeu.

Voilà! Nous voyons que les quatre régions qui le déterminent sont basées sur la série de quatre nombres 4, 5, 6 et 7 que nous retrouvons dans la table des suites «quadrixiennes» mixtes ci-contre (E. traitillés en gras).

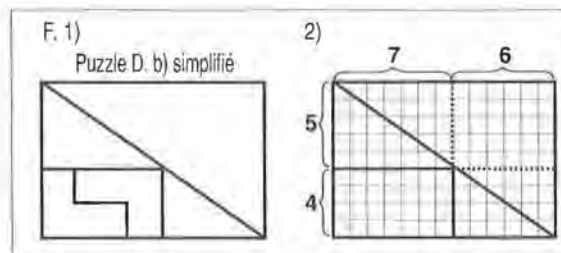
Notons au passage que le rapport de termes successifs d'une suite «quadrixienne» tend vers le nombre «plastique» 1,465... (ex. $189/129 = 1,465...$). Les applications de ces suites sont si nombreuses que nous laissons le soin au lecteur de les découvrir par lui-même. N'hésitez pas à partager vos découvertes avec nous!



E. Table des suites «mixtes» (incomplète)

2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189
2	3	5	7	10	15	22	32	47	69	101	148	217

Chiffres blancs: suite «quadrixienne 1»; chiffres noirs: suite «quadrixienne 2».

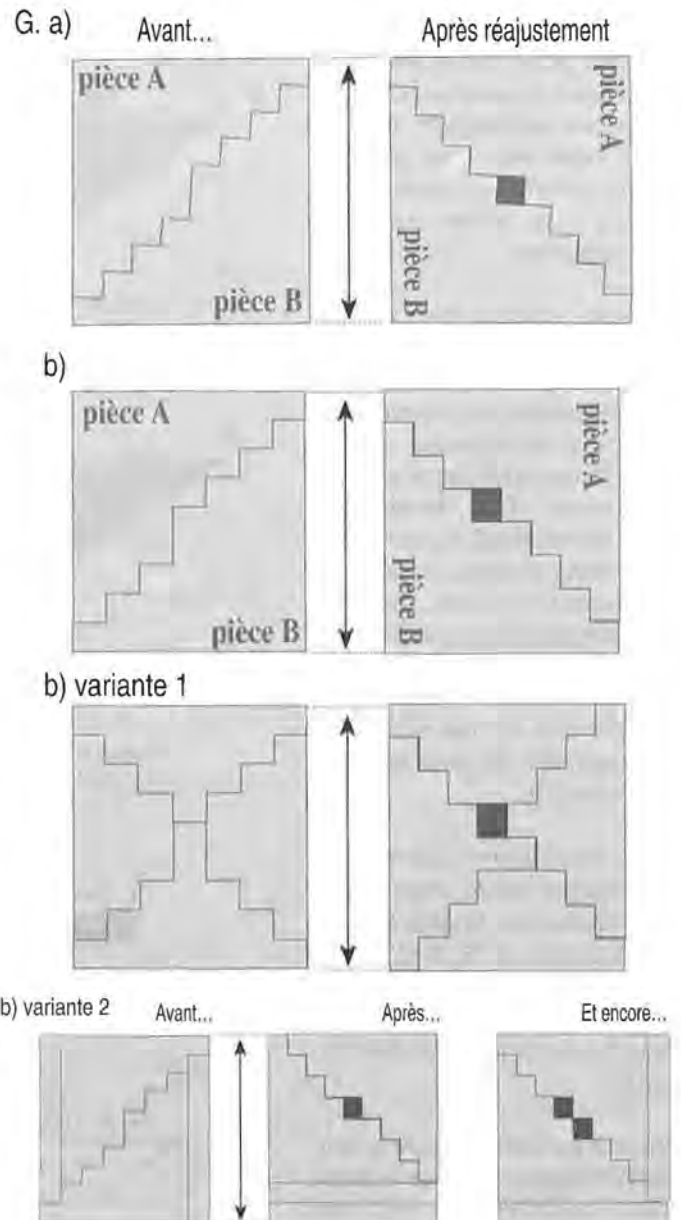


L'escalier, symbole universel de la progression «graduelle» ou de la quête. Des temples mayas aux pyramides d'Égypte, en passant par les ziggourats sumériens, le thème de l'escalier est omniprésent. Dans le monde antique, il est rare de rencontrer des escaliers «sacrés» avec un nombre de marches pair. En effet, seules les marches en nombre impair permettaient que, en partant du pied droit, on arrive en haut des marches sur le même pied (le pied gauche étant considéré comme néfaste). L'escalier à 7 ou 9 marches est l'iconographie classique pour représenter la liaison du ciel avec la terre (métaphores du spirituel et du temporel).

Revenons à nos puzzles...

Voici donc les formes en escalier que l'on retrouve dans les Quadrix et qui permettent l'apparition d'un, voire deux, espaces supplémentaires. Ces puzzles sont basés sur la suite des nombres naturels; agrandissez les exemples ci-contre à la photocopieuse (pour votre usage personnel uniquement) et amusez-vous à trouver la «clé» de ces jeux à l'aide d'un papier millimétrique.

L'escalier

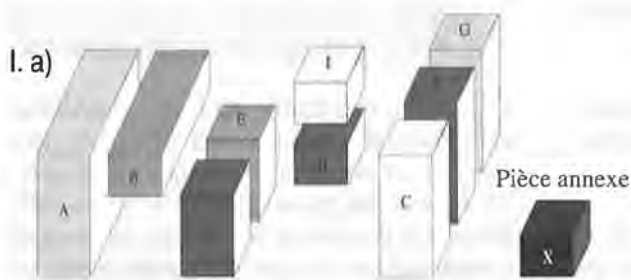
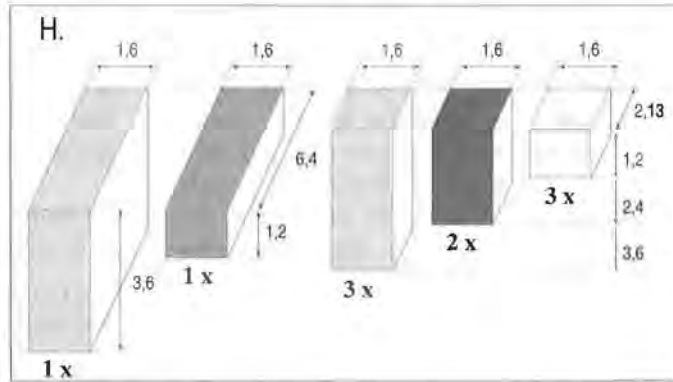


Nous vous proposons un peu de travail manuel pour mieux comprendre ce paradoxe. Découpez dans une planche de bois (latté), dans du sagex ou de la mousse Eva, de 1,6 cm d'épaisseur, les 10 pièces du puzzle Quadrix «Hadès» en respectant au plus près les dimensions (en cm, fig. H) ci-après.

Puis, composez avec 9 pièces, assemblées selon le dessin I. a) et b), un parallélépipède. Peignez en noir la dixième pièce et mettez-la de côté. Fabriquez ensuite un cadre en collant ensemble 4 planchettes de 1,2 cm d'épaisseur (+ clouer le tout, fig. I. c).

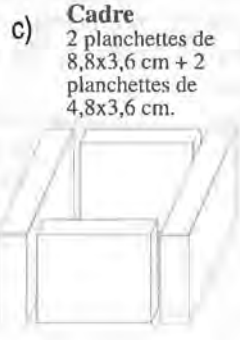
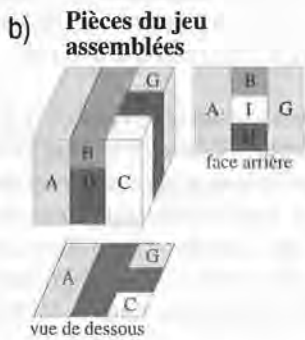
Enfin, introduisez dans le cadre ainsi composé le puzzle «Haddès». Ceci fait, essayez maintenant d'y ajouter la pièce an-

Le parallélépipède

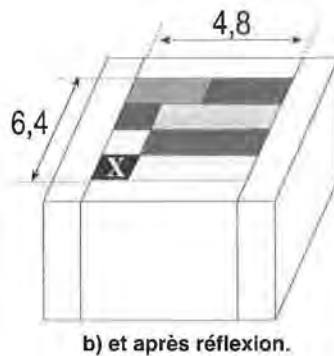
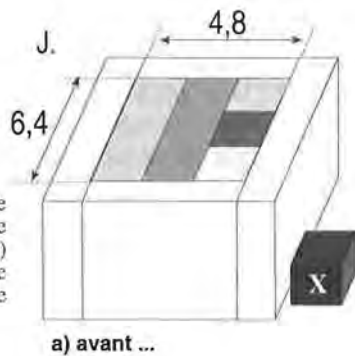


nexe noire (avec un X blanc sur le dessin)! Toutes les pièces du puzzle doivent s'ajuster parfaitement et sans forcer (voir fig. J.)...

Ce puzzle en 3D est basé sur des suites particulières, dont le rapport de termes successifs tend vers le «Nombre d'Argent» 1,324... Vous aurez plus de renseignements à ce sujet à la page suivante. Il existe un schéma «simple» pour construire ces puzzles en 3D, faites-nous parvenir vos propositions!



Nous arrêtons là notre incursion dans les formes de base des puzzles Quadrix. Il existe encore d'autres formes mineures: la spirale et le cylindre, nous laissons le soin au lecteur de prospecter ces domaines...



Introduire dans le puzzle 3D la petite pièce noire (X) sans modifier le volume du cadre

a) avant ...

b) et après réflexion.

A la source des «arithmodules» : les nombres «plastiques» 1,618 , 1,465 et 1,324.

Le «Nombre d'Or» est, de nos jours, servi à toutes les sauces. Le nombre 1,618 serait la panacée universelle pour retrouver l'harmonie perdue. Nous oublions, toutefois, qu'il existe autant de «Nombres d'Or» qu'il existe de dimensions. Pour notre part, nous dénombrons trois nombres «plastiques» qui ont une importance non négligeable en architecture, dans les phénomènes physiques et naturels (croissance, etc.). Ces nombres sont issus de suites récurrentes connues (suite de Fibonacci) ou méconnues mais qui, cependant, mériteraient toute notre attention.

Nous ne nous attarderons pas sur le Nombre d'Or : 1,618034..., que l'on peut calculer par la formule $1/(x-1) = 1/x$.

Passons au nombre «plastique»: 1,46557..., solution réelle de l'équation $x(x-1) = 1/x$, qui permet de construire des puzzles paradoxaux admettant l'introduction dans le jeu d'un nombre «infini» de pièces supplémentaires, et ceci sans en changer les dimensions. Ce nombre peut aussi se calculer avec deux termes successifs des suites «quadrixiennes».

Nous avons aussi un «Nombre d'Argent»: 1,324718, calculé par $(x+1)(x-1) = 1/x$, ce nombre a été étudié par de nombreux architectes, il permet la construction de puzzles paradoxaux en 3 dimensions.

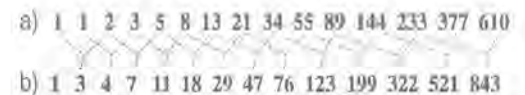
Pour saisir les nombres «plastiques», la démarche inductive est bien plus propice que le seul raisonnement déductif. Pour cette raison, il n'est pas besoin d'être un féru de maths pour plonger dans ce monde merveilleux des arithmodules, la curiosité est un précieux atout ! Ces suites récurrentes particulières sont également un terrain de recherche original pour votre classe.

Suites de Fibonacci (a) et de Lucas (b).

Chaque terme est la somme des deux termes qui le précède (2, 3, 2+3 soit 5, 5+3 soit 8, etc.). La suite de Fibonacci est intimement reliée (traitillés) à la suite de Lucas (en gris).

Le rapport des termes successifs tend vers le Nombre d'Or :

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618034... \approx 610/377 \approx 377/283, \text{ solution de l'équation } \phi - 1 = 1/\phi.$$



La somme des carrés de termes consécutifs de la suite de Fibonacci a toujours pour résultat un autre terme éloigné. Exemple : $25 + 64 = 89$; ou encore $64 + 169 = 233$. Alors que la somme des carrés des termes consécutifs de la suite de Lucas donne un multiple de 5 (et d'un ou plusieurs nombres premiers) : $16 + 49 = 65$ (soit 5×13); ou encore : $49 + 121 = 170$ (soit $5 \times 2 \times 17$).

Lorsque nous prenons deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et que l'on multiplie par deux le terme le plus grand en l'ajoutant au plus petit, nous obtenons un terme successif de la suite, en sautant un rang. Ex. : $2 + 2 \times 3 = 8$; $5 + 2 \times 8 = 21$, etc. Par contre, si l'on multiplie par deux le terme plus petit, nous obtenons un terme de la suite de Lucas. Exemple : $2 \times 3 + 5 = 11$ ou $2 \times 5 + 8 = 18$, etc.

Une autre curiosité consiste à prendre 4 termes consécutifs de la suite de Fibonacci, par ex. 2, 3, 5 et 8. Puis, former, avec le produit des termes extérieurs ($2 \times 8 = 16$) et le produit des termes intérieurs fois deux, soit ($3 \times 5 \times 2 = 30$), les deux cathètes d'un triangle rectangle. Nous aurons ainsi un triangle rectangle parfait avec des côtés de 16, 30 et 34 unités !

Suites «quadrixiennes» 1 (a) et 2 (b).

Chaque terme est la somme du premier et du troisième terme précédents (2, 3, 4, 4+2 soit 6, 6+3 soit 9, etc.). Les suites «quadrixiennes» 1 et 2 sont étroitement reliées entre elles (traitillées). Le rapport des termes successifs tend vers le nombre de Quadrix :

$$\varphi = 1,465571... \cong 406/277 \cong 318/217, \text{ solution de l'équation } \varphi(\varphi - 1) = 1/\varphi.$$

a) 2 3 4 6 9 13 19 28 41 60 88 129 189 277 406

b) 2 3 5 7 10 15 22 32 47 69 101 148 217 318

Suites «plastiques» 1 (a) et 2 (b).

Chaque terme est la somme de deux termes, en sautant un rang, qui le précèdent (3, 4, 5, 3+4 soit 7, 4+5 soit 9, etc.). Les deux suites sont également reliées entre elles (traitillées). Ici, le rapport des termes successifs tend vers le Nombre d'Argent :

$$\psi = 1,324718... \cong 151/114 \cong 237/137, \text{ solution de l'équation } (\psi + 1)(\psi - 1) = 1/\psi,$$

a) 3 4 5 7 9 12 16 21 28 37 49 65 86 114 151

b) 5 6 8 11 14 19 25 33 44 58 77 102 135 179 237

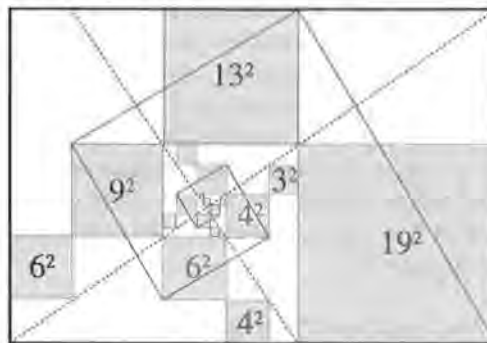
Relations intéressantes avec ϕ	Autres relations singulières avec les nombres «plastiques»
$1/\phi = \phi / (\phi + 1) = \phi - 1$	$\phi \cdot 10/9 = \text{approx. } \phi$
$\phi^2 = \phi / (\phi - 1) = \phi + 1$	$\psi \cdot 10/9 = \text{approx. } \psi$
$(5 \cdot \pi/6) - 1 = \text{approx. } \phi$	$\varphi^2 = \text{approx. } \pi$
$6 \cdot \phi^2/5 = \text{bonne approx. } \pi$	$(\varphi^2 + 1)/(\varphi^3 - 1) = \varphi$
	$\psi^2 - \psi = 1$

Pour terminer, voici une représentation graphique des suites récurrentes que nous avons étudiées. Il existe évidemment d'autres façons de représenter ces suites en 2 ou 3D. Nous avons choisi la voie de la simplicité. Mais n'hésitez pas à éclairer notre lanterne, si vous avez des idées «géniales» pour exprimer ces nombres particuliers (sculpture, musique, etc.).

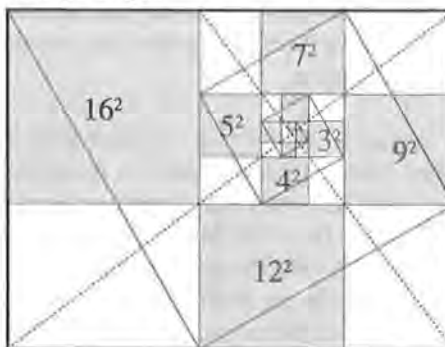
Les arithmodules ont leur place dans les arts plastiques et cinétiques (mobiles, toupies) et le terrain à explorer est encore (presque) vierge ...



Rectangle «quadrixien»



Rectangle «d'Argent»



NDRL : les puzzle Quadrix sont disponibles à l'Atelier Archimedia, CP 2148, 1002 Lausanne, (021) 6172804.

Expo-atelier

François Jaquet, IRDP, Neuchâtel

«Autonomie, sens, différenciation, de la manipulation à la construction des concepts... Des propositions d'activités mathématiques qui s'inscrivent dans les programmes en vigueur, notamment CIRCE III, et dans les conceptions actuelles des apprentissages.

L'expo-atelier est un ensemble de ressources pour mettre l'élève en situation de réfléchir, de se poser des problèmes, de chercher à les résoudre, seul ou en groupes. Tout est mis à disposition: les panneaux de consignes et leurs supports, le matériel de manipulation, le fascicule pour l'enseignant. Il ne reste plus qu'à installer l'exposition, dans une classe, dans un hall d'exposition, dans un centre de documentation, dans un couloir et à inviter les élèves et les collègues à la fréquenter.»

C'est ainsi que COROME (Commission romande des moyens d'enseignement) ouvre son dossier de présentation de la future «exposition-atelier» de mathématiques destinée aux classes de l'enseignement secondaire du premier degré.

Il y a cinq ans, Math-Ecole mettait à disposition des classes intéressées un ensemble de manipulations de mathématiques issues de problèmes de la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques). Il s'agissait d'une douzaine de panneaux présentant chacun un énoncé de problème, accompagnés du matériel nécessaire à la résolution. En complément, une série de jeux du commerce exploitables en classe de mathématiques permettaient aux élèves de varier

leurs occupation au cours de leur fréquentation de cette «exposition-atelier».

Le succès a été total, une centaine d'écoles ont organisé cette activité, plus d'un millier de classes l'ont pratiquée, avec intérêt. Mais le matériel s'est usé, les panneaux se sont défraîchis et la douzaine de problèmes proposés a passé dans le domaine des classiques archi-connus.

Quelques collègues genevois ont souhaité reprendre l'idée et la développer pour constituer un nouvel ensemble de manipulations de mathématiques. Le groupe GERME de l'IRDP (Groupe pour la recherche et l'étude des moyens d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques) s'est associé au projet et, actuellement, on en arrive à la phase de réalisation définitive, et à celle de la «commercialisation» ou plutôt de la diffusion de la nouvelle «expo-atelier».

Contenu de l'expo-atelier

- Les problèmes et les consignes figurent sur 30 panneaux de format A3, en couleur, laminés

Le dossier de présentation contient l'un de ces panneaux en format original et une dizaine d'autres, réduits en format A4: «La carte du magicien», «Damier morcelé», «Hexaminos», «Hôtel Blanche-Neige», «La grenouille sauteuse», «La tour infernale», «Le puzzle carré», «Périaire», Six pyramides pour un paralélépipède», «Taquins de pions».

- 30 fiches d'accompagnement présentent les activités, problèmes et consignes, à l'intention des enseignant-e-s. Chacune de ces fiches contient, en haut à droite, un fac-similé du panneau avec l'énoncé.

Une dizaine de ces fiches figurent en exemple, dans le dossier de présentation, dont l'une, «Le puzzle carré» est reproduite en page 32.

- Pour la plupart de ces activités, il existe des compléments didactiques sous forme d'articles, compte rendus et extraits de livre du maître qui peuvent être obtenus à l'IRDP. Pour les autres, ces compléments sont en préparation.

Le complément de l'activité «Le puzzle carré» figure ci-après.

- 20 supports en plexiglas, permettent d'exposer simultanément une vingtaine de panneaux d'activités choisies selon l'intérêt du moment.
- Le matériel de manipulation nécessaire est rangé dans des boîtes ad hoc:
 - une douzaine de plateaux de jeu d'exécution solide,
 - des formes en bois,
 - des multicubes,
 - des polydrons,
 - des jetons, pièces et matériels divers.

Pour «Le puzzle carré» le matériel est constitué des quatre pièces mentionnées, dans la fiche, en plastique, permettant de reconstituer des carrés de cm et cm de côté.

Le tout occupe un volume de deux à trois valises, aisément transportable.

Il est bien évident qu'il ne s'agit pas d'un matériel personnel d'un maître ou réservé à une seule classe. Cette «expo-atelier» est conçue pour une grande école ou plusieurs petits collègues voisins.

Lorsqu'un maître décide de la proposer à

sa classe :

- il compose son menu en choisissant quelques activités en fonction de ses élèves et des besoins de sa classe,
- il s'assure qu'il peut disposer du matériel, en accord avec ses collègues,
- il organise la présentation de l'exposition et la participation de ses élèves sur une ou plusieurs périodes,
- il conçoit le programme d'exploitation des activités expérimentées dans le cadre de son enseignement.

D'une à trois fois dans l'année, il peut être profitable pour la classe de varier l'enseignement des mathématiques par des activités de ce genre qui, à partir de manipulations, permettent la construction de connaissances avec, à la clé, des grandes potentialités de différenciation, d'autonomie et de motivation.

L'expo-atelier sera disponible à la fin de l'année 1997. L'ensemble : les 30 panneaux, les fiches, le matériel de manipulation, les supports en plexiglas, est estimé à environ 4000 Fr.

Commentaires didactiques à propos de l'activité : «Le puzzle carré» (page 32)

Le puzzle de quatre pièces résiste un peu plus longtemps.

Le carré formé de cinq pièces est plus difficile à imaginer, mais le hasard peut faire qu'on le découvre rapidement.

Jusqu'à ce moment, il se pourrait que la reconstitution des carrés ne nécessite aucune opération logique ni mathématique et que toute l'activité se déroule à l'intérieur de l'espace sensible de l'élève. Ce sont les demandes de justification qui permettront de passer à l'étape de la mathématisation de la si-

tuation. Est-on certain qu'il n'y a qu'une solution pour chacun des carrés ? Quelles sont les relations entre les périmètres et les aires de ces carrés ou de leurs pièces.

Pour l'élève, les reconstitutions matérielles sont suffisantes. C'est au maître de relancer le problème pour dépasser la manipulation.

Voici un exemple d'explication ou de justification de la démarche de résolution, au plan mathématique :

Carré A, B, C

Aire des pièces : A : 2 B : 2,5 C : 3,5

Aire totale : $2 + 2,5 + 3,5 = 8$

Par conséquent, la mesure du côté du carré est $\sqrt{8}$.

Mesures des côtés des pièces :

A : 2 ; 2 ; $\sqrt{8}$ (par Pythagore)

B : 1 ; 1 ; 2 ; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

C : 1 ; 3 ; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

On constate au passage l'égalité $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ qui découle de la propriété des racines carrées : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; dans notre cas :

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. L'intérêt et la nécessité de cette constatation apparaissent dans la phase suivante :

Le pourtour du carré sera obligatoirement constitué de côtés des pièces A, B et C. Le périmètre du carré, soit $4\sqrt{8}$, n'est pas un nombre rationnel. Les côtés non rationnels des pièces à disposition sont : $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ et $\sqrt{8}$. Leur somme est $3\sqrt{8} + 2\sqrt{2}$.

La transformation des expressions en multiples de $\sqrt{2}$ permet de constater que $3\sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ et que $4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$.

On peut en déduire que, si le carré est constructible avec les pièces A, B et C, tous leurs côtés irrationnels devront se situer sur le pourtour.

La solution apparaît alors immédiatement (v. fig. 1) : on dessine un carré de côté $2\sqrt{2}$, on place A, puis B et C.

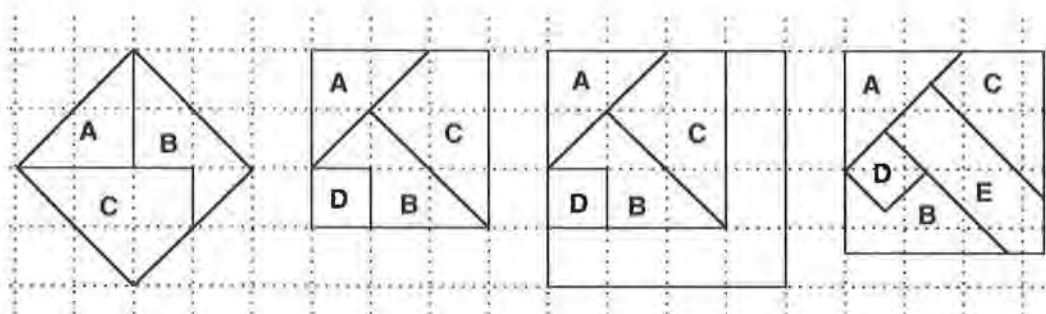


fig. 1

fig. 2

fig. 3

fig. 4

Carré A, B, C, D

En ajoutant D aux trois pièces précédentes, on augmente de 1 l'aire du carré, qui devient 9. Le côté du nouveau carré mesure 3, et seuls les côtés entiers des pièces se situeront sur son pourtour. Il suffit alors de dessiner ce carré, d'y placer la pièce C sur l'un de ses côtés, puis de compléter avec A, B et D (voir fig. 2).

Carré A, B, C, D, E

Le problème est plus ouvert cette fois-ci en raison de la marge de liberté due à la pièce E. On sait que le côté du nouveau carré aura une mesure supérieure à 3.

Si on émet l'hypothèse que ce sera un nombre entier, on peut imaginer une pièce permettant par exemple de réaliser un carré de 4×4 (voir fig. 3), mais la nouvelle pièce n'est pas convexe et a six côtés, ce qui est en contradiction avec la consigne. D'autres considérations sur l'aire de cette cinquième pièce et ses côtés entiers font rapidement renoncer à l'hypothèse.

Si l'on pense que les diagonales du carré auront des mesures entières (c'est-à-dire que celles des côtés seront des multiples de $\sqrt{2}$), la première solution possible serait le carré de côté $3\sqrt{2}$ et d'aire 18. On se trouve alors devant les mêmes impossibilités que dans le cas précédent.

Il ne reste plus qu'à envisager un carré dont la mesure du côté est une combinaison d'un nombre entier et d'un multiple de $\sqrt{2}$, supérieur à 3. Le premier cas est $2 + \sqrt{2}$.

Il y a alors de nombreuses combinaisons des côtés des pièces A, B, C et D qui donnent cette mesure.

A partir d'un carré de côté $2 + \sqrt{2}$, on arrive rapidement à la solution (v. fig. 4). Dans ce dernier cas, l'analyse mathématique se révèle plus puissante que la manipulation des objets physiques et justifie ainsi tout le travail précédent de mathématisation.

La pièce E

Si les pièces A, B, C et D n'ont plus de mystères, on sait en revanche peu de choses sur la pièce E. Il peut être intéressant d'en définir l'aire, le périmètre, les mesures des côtés, les propriétés de symétrie. Cette recherche conduira inévitablement à l'utilisation de nombres peu connus des élèves (et des maîtres) : les nombres algébriques.

Par exemple, pour déterminer l'aire de E (notée e), on doit résoudre l'équation :

$$9 + e = (2 + \sqrt{2})^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$$
$$e = 4\sqrt{2} - 3$$

On peut profiter de l'occasion pour faire une petite incursion dans le domaine des équations du deuxième degré à coefficients entiers, dont les nombres algébriques rencontrés ici sont solutions, par exemple :

$2 + \sqrt{2}$ est solution de l'équation du premier degré $x - 2 - \sqrt{2} = 0$ et aussi de l'équation du deuxième degré $(x - 2 - \sqrt{2})(x - \alpha) = 0$. Si on choisit pour α le «conjugué» de $2 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire $2 - \sqrt{2}$, on a alors :

$$(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2}) = x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Cette pièce E permet ainsi des développements intéressants qui peuvent donner du sens aux activités souvent formelles du domaine des équations du deuxième degré.

Prolongements

Le tangram et le puzzle de Sam Loyd (voir Math-Ecole 157, pp. 30-31).

Exposition-atelier romande de mathématiques

Fiche d'accompagnement

Notions spécifiques :

Surfaces, nombres rationnels et irrationnels.

Référence :

Math-Ecole n° 160 (1993).

Matériel :

4 morceaux de puzzle.

Commentaires :

Pourquoi avoir choisi cette activité ?

Pour le plaisir de la manipulation et de la mathématisation de la situation.

Cette activité est une variante intéressante du tangram.

Les trois questions sont de difficulté très progressive et permettent de déboucher sur les nombres irrationnels.

Difficultés constatées

Passer au calcul d'aire lorsque la manipulation n'aboutit pas.

S'assurer que les figures trouvées sont bien des carrés.

Comprendre le terme "polygone convexe".

Découvrir une méthode pour trouver la pièce E.

Propositions de relance

Recenser les angles droits, en choisir un comme sommet du carré et essayer les différentes permutations des autres pièces.

Calculer l'aire de chaque pièce et l'aire totale, en déduire la longueur du côté du carré à construire.

Mesurer ou calculer les côtés de chaque pièce (rationnels ou irrationnels).

Prolongement de l'activité

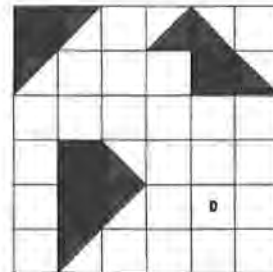
Le tangram.

Le puzzle de Sam Loyd (Math-Ecole n° 157).

Le puzzle carré 18

Les trois pièces A, B et C de ce puzzle permettent de former un carré.
Avec les quatre pièces A, B, C, et D on peut aussi réaliser un autre carré.
Une cinquième pièce E, qui est un polygone convexe de six côtés,
permet de compléter, avec les quatre pièces précédentes,
un troisième carré.

Quelle est cette pièce ?



Il suffit d'une brève consultation au site yahoo (France) pour dénicher quelques bonnes adresses, souvent de particuliers, présentant des énigmes, des logiciels pour l'enseignement des mathématiques, etc.

CREEM - Centre de Recherche et d'Expérimentation sur l'Enseignement des Mathématiques.

Présentation de logiciels de constructions mathématiques et d'imagiciels. (<http://www2.cnam.fr/creem/>)

Cyberblatte - Aide aux élèves par e-mail

(il paraît que le service est saturé!). Echanges entre professeurs de mathématiques, formulaires, calcul formel et histoire des maths. (<http://www.mygale.org/02/serge/serge.html>)

Leçons - math et logique

Une douzaine de leçons visant à élargir vos connaissances dans ces disciplines. (<http://www.cam.org/~aselby/francais/lecon.html>)

Mathématiques en Couleurs

Logiciels éducatifs à télécharger présentant des concepts mathématiques d'avant-garde (théorème des quatre couleurs, par exemple) aux élèves du primaire et secondaire sous forme de jeux. (<http://www.math.ucalgary.ca/~laf/couleur.html>)

Les Mathématiques - géométrie

(utilisation du logiciel Geometer's SketchPad un équivalent américain de Cabri-Géomètre), problèmes d'algèbre, énigmes et jeux, enseignement pour adultes. (<http://www.synapse.net/~euler/maths/mathsggj.htm>)

Maths sur le Web

Énigmes pour le collège, le coin des enseignants et plus. (<http://mtn.ac-nice.fr/second/discip/maths/index.htm>)

Sur ce dernier site on trouvera une longue famille d'exercices ayant pour héros Bébert, jeune béliet un peu trop vagabond. Il est attaché à une corde qui limite ses déplacements.

Les exercices demandent de dessiner la surface d'herbe que Bébert peut brouter dans diverses situations.

Par exemple :

«Une maison carrée de 10 mètres de côté est au milieu d'un grand pré.

Bébert est attaché à une corde de 22 mètres à l'un des angles de cette maison.

Quelle figure forme la partie que Bébert peut brouter ?»

2. A chacun ses médailles !

Quatre enfants ont gagné 21 médailles dans un concours.

C'est Alex qui en a le plus.

Robert en a le double de Pierre.

Anne en a 3 de plus que Robert.

Combien chaque enfant peut-il avoir gagné de médailles ?

Expliquez votre raisonnement.

A propos du 16^e forum de mathématiques, Wildhaus

Denia Odiet

Le 16^e forum mathématique suisse a eu lieu du 25 au 27 novembre 1996, à Wildhaus, dans le canton de St-Gall.

En 1982, la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique recommandait aux cantons, pour l'actualisation des plans d'études et la création de nouveaux moyens d'enseignement, de se conformer au document «points de convergence et lignes directrices» mis sur pied par le groupe mathématique de la CDIP/CH.

14 ans plus tard, une refonte de ce texte s'avérait nécessaire. Celle-ci est due non seulement à une grande activité concernant la recherche en didactique des mathématiques, mais aussi, notamment, aux différents changements intervenus dans notre société depuis plus d'une décennie, qu'ils soient d'ordre économique, social ou technologique. A nouveau texte, nouveau titre : «Espaces de liberté, points de convergence et lignes directrices (Freiraum, Treffpunkte und Richtlinien)».

Le changement le plus important apporté au document de 1982 est donc l'émergence, aux côtés de «points de convergence» et de «lignes directrices», d'un nouveau concept baptisé «espaces de liberté». Si l'ancien document se contentait d'une liste descriptive des savoirs à l'école, le nouveau met

prioritairement l'élève au cœur des processus d'apprentissage, prenant en compte les démarches qu'il doit vivre pour «apprendre» des mathématiques. Comprenons-nous : il s'agit de «mathématiques qui ont du sens pour l'enfant, qu'il peut vivre», il convient «d'exploiter les erreurs», favoriser les essais, la créativité, le plaisir de faire des mathématiques».

Une version provisoire du document F+T+R a été rédigée en début d'année 1996, en français et en allemand.

Le but du forum de Wildhaus était de quitter la charmante station du Toggenburg avec un solide consensus autour de ce nouveau document permettant aux responsables d'en écrire une version définitive, qui serait alors soumise à l'approbation de la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique.

Force est de constater qu'après trois jours de travaux (7 groupes ont disséqué, analysé, complété et cherché à améliorer le document au cours d'enrichissants débats) suivis de réunions plénières, l'objectif semble avoir été atteint.

Un important travail attend pourtant les concepteurs de la version définitive : la rédiger en prenant en compte les nombreuses remarques, très souvent concordantes, émanant de la majorité des groupes. En voici quelques-unes parmi les plus significatives :

- Définir clairement le statut et les finalités du document F+T+R;
- Veiller à ce que le document soit plus qu'une longue liste de belles déclarations d'intentions : son aspect «pratique» ne doit en aucun cas être négligé;

¹ Un ouvrage récent et très intéressant à ce propos : *L'erreur, un outil pour enseigner*, J.-P. Astolfi, ESF éditeur.

- Trouver un nouveau libellé remplaçant celui d' «espaces de liberté». Trop vague, celui-ci devrait prendre une nouvelle appellation parmi les termes suivants : construction des savoirs en mathématiques ou conceptions de l'apprentissage des mathématiques;
- Dans le triangle didactique maître-élève-savoir, positionner plus explicitement les concepts développés dans «espaces de liberté»;
- Insister sur la nécessité de penser à la formation des maîtres déjà en place ou en voie de terminer leurs études;
- S'interroger sur la diffusion de ce document, que cela soit dans sa forme ou dans son fond. Il convient prioritairement de le faire vivre, de le rendre opérationnel, d'en parler lors de colloques cantonaux, de le diffuser dans les centres de documentation, dans les bibliothèques, dans les écoles obligatoires, professionnelles et du secondaire II, de créer des situations à titre d'exemple, dans la formation des maîtres, dans des groupes restreints de praticiens, bref de tisser un réseau national voire international autour de ce document.

Le large consensus trouvé à Wildhaus concernant le futur document F/+/T/+/R, la qualité des échanges, leur variété et leur extrême richesse, l'amitié confédérale éclosant autour des mathématiques sont suffisamment de raisons pour souligner l'urgente nécessité de maintenir de telles réunions, sous cette forme ou sous une autre. Comment alors ne pas amèrement regretter la plus probable disparition des forums mathématiques ?

En guise de conclusion, il est difficile de passer sous silence les deux citations relevées lors de la conférence de Monsieur Nicolas Rouche :

«Les mathématiques doivent être purgées de tout élément qu'on ne peut justifier que par référence à des études ultérieures. Il n'y a rien qui détruit davantage l'éducation que de passer de longues heures à acquérir des idées et des méthodes qui ne conduisent nulle part.»

Whitehead

«L'esprit n'est pas un vase à remplir mais un feu à activer.»

Plutarque

Bonne méditation !

Ballets mathématiques à l'école

3. Le ruban des nombres

Marianne s'est construit un bien joli ruban des nombres de 1 à 9 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

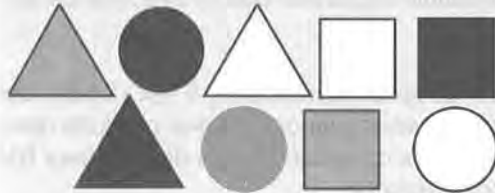
Mais Luc lui a pris deux nombres, qu'il a découpés dans son ruban. Marianne est très mécontente car ce qui reste de son ruban est maintenant en deux parties.

Mais elle se console en se disant : si j'additionne les nombres de chaque partie, les deux sommes sont égales. Quels nombres Luc a-t-il pris dans le ruban de Marianne ?

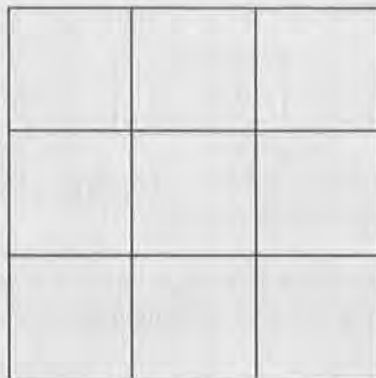
Justifiez votre réponse.

4. Logix

Placez les neuf pièces dans les neuf cases de la grille selon les indications suivantes :



1. Dans la première ligne il y a le carré noir, le triangle blanc et le cercle blanc.
2. Dans la deuxième ligne, il y a deux cercles et un triangle.
3. Le carré blanc est dans la troisième ligne, entre deux pièces grises.
4. Dans la colonne de gauche, les trois formes sont différentes et les trois couleurs sont aussi différentes.
5. Il n'y a pas de triangle dans la colonne du milieu.
6. Dans la colonne de droite, il y a un cercle entre deux triangles.
7. Une pièce grise est au centre de la grille.



5. Les gants

Dans le noir, Toto ouvre son tiroir pour prendre une paire de gants et une paire de chaussettes.

A l'intérieur de ce tiroir, il sait qu'il y a 20 chaussettes : 10 bleues et 10 rouges.

Il sait qu'il y a aussi 12 gants qui forment exactement 6 paires, tous de la même couleur.

Combien doit-il prendre de chaussettes pour être sûr d'en avoir deux de la même couleur ?

Combien doit-il prendre de gants pour être sûr d'en avoir un pour chaque

6. L'arrosoir

Pierrette a rempli une cuve de 33 litres d'eau avec un vieil arrosoir, en trois voyages.

Au premier voyage, son arrosoir pesait 16 kg, au deuxième il pesait 18 kg car il était plein à ras bord, au troisième voyage, il ne pesait plus que 11 kg.

Combien pèse l'arrosoir vide ?

Combien contient-il de litres d'eau ?

(Pour résoudre ce problème, vous devez savoir qu'un litre d'eau pèse exactement 1 kg.)

Expliquez votre raisonnement.

APPRIVOISER LA GEOMETRIE AVEC CABRI-GEOMETRE

Monographie du CIP, CP 3144, 1211 Genève 3, 1996.

Cet ouvrage n'est pas un cours, ni un manuel d'introduction au logiciel. Il s'agit d'une monographie qui répertorie et décrit des expériences et des développements réalisés à l'aide de Cabri-Géomètre. Cet outil, au service de l'enseignement de la géométrie, vise plusieurs objectifs :

- faciliter l'accès au didacticiel pour le débutant,
- élargir le champ des usages possibles de Cabri-Géomètre,
- suggérer des méthodes et des démarches nouvelles,
- privilégier l'action de l'apprenant,
- encourager l'échange d'expériences.

La monographie est subdivisée en plusieurs parties, parmi lesquelles il faut souligner :

- une présentation des multiples intérêts didactiques et pédagogiques d'une utilisation de Cabri-Géomètre en classe,
- des constructions classiques avec «contraintes», c'est-à-dire pour lesquelles les élèves ne disposent que de quelques outils judicieusement choisis afin de les ramener à une véritable géométrie du compas,
- une succession de notions et méthodes qui touchent, entre autres, aux lieux géométriques, aux transformations du plan, à la géométrie de l'espace, à l'analyse, ...

- quelques aspects «croustillants» relatifs aux macro-constructions,
- des débouchés vers la physique, par exemple,
- une bibliographie imposante qui présente le résumé de différents ouvrages traitant de Cabri-Géomètre et qui répertorie des articles et des revues relatives à ce même sujet.

Destinataires : maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire I et II, chercheurs et formateurs.

Mots clés : géométrie, constructions, problèmes, boîtes noires, propriétés des figures, manipulations dynamiques.

M. C.

LE SENS DE LA MESURE, des grandeurs aux nombres rationnels

Nicolas ROUCHE, Bruxelles : Didier Hatier, 1992.

«Emboîter des poupées japonaises, mettre deux baguettes bout à bout, couper une pomme en deux, c'est manier des grandeurs. Dans l'esprit de chaque enfant, les nombres (autres que naturels), se construisent par étapes à partir de ces opérations familières. Nicolas Rouche explique cette genèse et donne les clés d'interprétation à tous ceux qui, de l'école maternelle à la fin du secondaire, enseignent les grandeurs, les rapports, les fractions et les nombres rationnels, les mesures et les unités, les décimaux, les proportions, les fonctions linéaires. ... Il traite aussi des relations parfois délicates entre les mathématiques naissantes et la

langue quotidienne. Grâce à de nombreuses notices historiques, il éclaire par le passé les difficultés des enfants d'aujourd'hui.»

Ces lignes, extraites de la jaquette de l'ouvrage, reflètent fidèlement son contenu. Il y a là des informations essentielles pour les maîtres, du primaire au secondaire, confrontés avec la délicate articulation entre la pratique quotidienne et le point de vue mathématique qui en est issu. Car l'éducation mathématique ne consiste pas seulement à faire découvrir aux enfants de nombreux phénomènes réels, mais aussi, à partir de ces sources intuitives, à élaborer les constructions et les structures qui constituent les mathématiques.

L'auteur a choisi un fil conducteur qui part de grandeurs qu'on peut comparer et additionner. Vient ensuite l'étude de leur multiplication par un nombre naturel (addition répétée) et de leur division en n parts égales (où n est aussi un naturel). On arrive ainsi, sans avoir encore fait intervenir des nombres autres que les naturels, à décrire des «fractionnements», résultant de l'opération conjointe d'un naturel qui divise une grandeur et d'un autre qui la multiplie. Ce n'est qu'à ce moment qu'émergent les fractions, comme entités mathématiques indépendantes, utilisés comme opérateurs sur des grandeurs.

Le choix de cette présentation est justifié par le besoin de «mettre de l'ordre», dans un domaine où la réalité des apprentissages est touffue, désordonnée et complexe. Or, cette complexité n'est pas toujours évidente actuellement, au vu de l'évolution historique et technique de la mesure.

On est tenté d'oublier que derrière la simple lecture d'un nombre sur un dispositif d'affichage électronique, il y a une opération qui conduit aux savantes constructions que sont les nombres rationnels, décimaux et réels.

N'a-t-il pas fallu à l'humanité de deux à trois mille ans, après avoir conçu les fractions, pour se doter de nombres décimaux à virgule (apparus au XVI^e siècle ... seulement!).

Par son itinéraire dans la comparaison, l'addition, le fractionnement de grandeurs, l'auteur nous fait rencontrer les obstacles bien connus de tous les enseignants de mathématiques : partages d'objets plus grands que l'unité, comparaisons de grandeurs fractionnées (le tiers de cinq tartes ou cinq tiers d'une tarte), recherche de communes mesures, passage de la mesure des longueurs des côtés d'un rectangle à celle de son aire, conversions d'unités, etc.

L'ouvrage se termine par une présentation axiomatique, en une quarantaine de page, des aspects proprement mathématiques, traités de manière informelle en langage ordinaire dans les chapitres précédents.

Comme Rudolf Bkouche, auteur de la préface, nous pensons que le problème premier de l'éducation mathématique est de relier les connaissances intuitives aux savoirs scientifiques et que l'enseignement élémentaire joue un rôle essentiel dans la mise en oeuvre de cette liaison.

Il est souhaitable que le plus grand nombre d'enseignants puissent profiter de cette remarquable contribution de Nicolas Rouche à la didactique de la mesure des grandeurs, qui reste un aspect essentiel de la pensée mathématique.

Destinataires: maîtres de mathématiques, formateurs, auteurs de manuels.

Mots-clés: apprentissage et enseignement des mathématiques, didactique, formation des maîtres, école primaire et secondaire, grandeurs et mesures, nombres

F. J.

LES MATHÉMATIQUES, DE LA MATERNELLE JUSQU'À 18 ANS. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques

CREM a.s.b.l.¹ 1996.

Cette étude, de Belgique francophone, est due à Bernard Honclaire, Nicolas Rouche, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye et Marisa Krynska, avec l'aide d'un comité d'accompagnement. Elle a été soutenue par le ministère de l'éducation et par d'autres instances nationales de formation, pour tenter de définir un «cadre global pour l'enseignement des mathématiques, de la maternelle jusqu'à 18 ans».

Il s'agit donc d'un projet officiel et collectif, qui a abouti, après plusieurs années de réflexion et d'intenses échanges, à la parution d'un ouvrage de grand format (A4) de plus de 300 pages.

L'espoir des auteurs est que ce document «permette

- à chaque enseignant de se situer et de reconnaître son rôle entre ceux qui enseignent avant lui et ceux qui enseignent après;
- aux enseignants et élèves des écoles normales des divers milieux et universitaires de situer de même les matières qu'ils étudient;
- aux enseignants des autres disciplines de clarifier la relation de leur enseignement avec celui des mathématiques et leur apport à la formation des élèves considérée dans son ensemble ;
- aux parents de voir d'où vient et où va leur enfant;

¹ CREM : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Emile Vanderelde. B - 1400 Nivelles. On peut se procurer cet ouvrage à l'adresse précédente (300 FB, sans port) ou auprès de la rédaction de Math-Ecole (25 FS port compris).

- aux élèves d'un certain âge de comprendre le sens de leur effort et de le mettre en perspective;
- aux commissions de programmes et aux auteurs de manuels d'enchaîner leurs propositions à celles qui les précèdent et les suivent, de manière à éviter les transitions mal préparées;
- aux responsables administratifs et politiques d'apprécier plus facilement la portée et les implications globales de leurs décisions.

Enfin, *last but not least*, ce cadre global devrait aussi aider à reconnaître comment s'acquièrent et s'expriment, à travers la matière mathématique, les compétences de base qui font aujourd'hui l'objet de beaucoup d'attention dans l'enseignement.»

Il faut apprécier ici la largeur de vue de nos collègues belges, dans la définition de leurs objectifs comme dans celle des destinataires de leur étude. Le contenu et le plan du cadre global sont aussi bien explicités :

- un premier chapitre analyse la notion de compétence en relation avec celle de savoir;
- un deuxième chapitre précise la philosophie générale de l'enseignement des mathématiques : enseigner aujourd'hui, le sens et l'autonomie de la pensée, différentes manières d'enseigner, la construction du savoir, ...;
- un troisième chapitre montre «pourquoi il faut combattre l'analphabétisme mathématique» et définit les grandes lignes d'une culture mathématique du citoyen;
- les six chapitres suivants (4 à 9) traitent des différentes matières d'enseignement, à savoir : les grandeurs, les nombres, la géométrie, l'algèbre, les statistiques et probabilités, l'analyse. Chacun d'eux présente une vue d'ensemble de la matière, puis ses caractéristiques

pour l'enseignement fondamental (école maternelle et primaire), secondaire du premier degré et secondaire du deuxième degré. Toutes les parties concernant l'un ou l'autre des degrés sont abondamment illustrées de problèmes ou situations d'enseignement, permettant de se faire une idée précise des notions ou matières envisagées, en fonction de l'âge des élèves.

Ecrit dans un style simple, l'ouvrage est lisible par des personnes sans formation mathématique particulière. Il se prête à un parcours transversal, en fonction des intérêts du lecteur.

Au vu de la somme de travail effectué par nos collègues de Belgique, il serait souhaitable qu'on puisse conduire une même réflexion dans d'autres pays francophone, à partir de cette étude remarquable par sa globalité et par ses ouvertures.

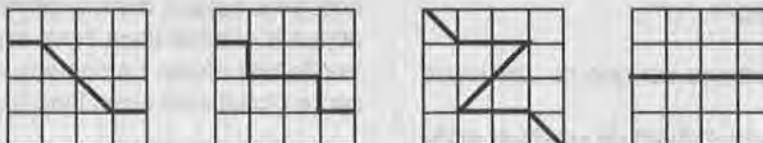
Destinataires : tous les enseignants, parents, responsables scolaires.

Mots clés : mathématiques, didactique, programme-cadre, école maternelle, primaire et secondaire.

F. J.

Problème mathématique transalpin :

7. Partages

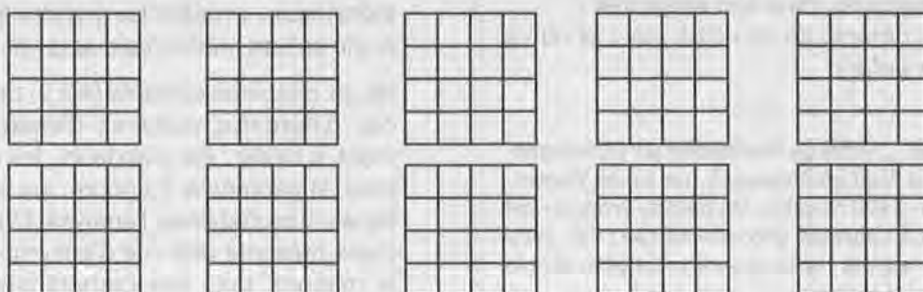


Ces quatre grilles sont partagées en deux parties égales (de même forme et de même grandeur) par un trait qui suit les côtés ou les diagonales des carrés.

Combien trouverez-vous d'autres façons de partager une grille de 16 carrés en deux parties égales, selon les mêmes règles ?

Chaque partage doit donner des pièces différentes de celles des autres partages.

Notez vos solutions sur ces grilles :



Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : **Math-Ecole - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

Veuillez m'abonner à **Math-Ecole** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Le Trésor de tonton Lulu (vol.1, 28 probl. de niveau "10")	(ex. à Fr. 25.-)*
Le Trésor de tonton Lulu (vol.2, 25 probl. de niveau "11")	(ex. à Fr. 27.-)*
Le nombre π , ADCS	(ex. à Fr. 40.-)*
Les jeux de NIM , par Jacques Bouteloup, ADCS	(ex. à Fr. 52.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye , APMEP	(ex. à Fr. 28.-)*
Fichier Evariste APMEP	(ex. à Fr. 20.-)*
Enseigner la géométrie dans l'espace , APMEP	(ex. à Fr. 32.-)*
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	(ens. à Fr. 30.-)*
Encyclopédie kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Mathématiques du kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Les pavages du kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Les maths & la plume , ACL	(ex. à Fr. 14.-)*
Jeux et découvertes mathématiques , ACL	(ex. à Fr. 14.-)*
Panoramaths 96 , APMEP	(ex. à Fr. 20.-)*

Les anciens numéros de Math-Ecole

(prix en page 2 de couverture) :

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques (Fr. 13.- l'ex.)* :

• Niveau CM (degrés 4 et 5) : **Récrémaths** ex.

• Niveau collégiens :

Les Pentagones patagons (n° 8) ex. **Le Serpent numérique** (n° 10) ex.

Le Trésor du vieux Pirate (n°12) ex. **Le Singe et la Calculatrice** (n° 14) ex.

• Niveau lycéens et adultes :

La Biroulette russe (n° 9) ex. **Le Pin's Tourneur** (n° 11) ex.

Le Roi des Nuls (n°13) ex. **Le Sabre d'Aladin** (n° 15) ex.

• Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 5, 6 et 7) :

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : Mme M.

Adresse (rue et numéro) :

Localité (avec code postal) :

Date : Signature :

SOMMAIRE

EDITORIAL :	
CIRCE III : Comme un coup de baguette magique	
Michel Chastellain	2
Rallye mathématique transalpin	4, 16, 33, 35, 36, 40
Hamstermatique	
Chantal Richter	5
Bordures	
Maria-Gabriela Rinaldi	8
A propos du concept d'angle	
Graziella Telatin	12
Cabridées : Quelle fonction ?	
Michel Chastellain	17
Voyage au centre de la géométrie	
G. Sarcone et M. J. Waeber	21
Expo-atelier	
François Jaquet	28
Le coin du Net	
Luc-Olivier Pochon	33
16e forum de mathématiques	
Denis Odiet	37