

MATH ECOLE

Découpage de carrés

36^e
année

179

Formation initiale en
mathématiques et nouveaux
moyens

Regard sur le calcul mental

octobre 1997

Math-Ecole, **pour ceux qui enseignent les mathématiques !**

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.

Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-

anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :

de 5 à 9 Fr. 18.- par abonnement

de 10 à 50 Fr. 17.- par abonnement

(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :

Rédaction de ***Math-Ecole***, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,

par courrier électronique E-mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,

ou par INTERNET : <http://www.unine.ch/irdp/math-eco/>

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

Adresse

Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration

Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 6970
Fax (032) 889 6971

Fondateur

Samuel Roller

Rédacteur responsable

François Jaquet

Comité de rédaction

Michel Brêchet
Jacques-André Calame
Michel Chastellain
Claude Danalet
Roger Délez
Nicolas Dreyer
Jean-Paul Dumas
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Alain Ramelet
Chantal Richter
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Christine Studer
Françoise Villars
Isabelle Vogt
Janine Worpe

Imprimerie

Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture

spirale de carrés ayant pour côté les
nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page

Mathieu Chastellain

Sommaire

EDITORIAL :

François Jaquet 2

Voyage au centre de la géométrie

G. Sarcone et M. J. Waeb3

Agrandissement et échelle :

quelles difficultés pour les élèves ?

M. Brêchet 10

Cabridées :

Histoire de «parc aux mètres»

M. Chastellain 15

Regard sur le calcul mental

L. O. Pochon 19

Mathématiques 1P : du nouveau pour les enfants, pour les enseignants, pour les parents

J. Worpe 28

Formation initiale en mathématiques et nouveaux moyens d'enseignement

J. A. Calame 31

Découpage de carrés en triangles semblables

F. Jaquet 35

Chaque année, le lecteur d'une revue est placé devant un choix, au moment où il reçoit sa demande de réabonnement. Celui de *Math-Ecole*, opte en général pour la confirmation du contrat qui le lie à sa publication préférée. Mais il y a aussi des résiliations, une vingtaine environ lors de chaque rappel. Les causes peuvent être fort diverses : changement d'orientation professionnelle, abonnement par un autre canal, évolution des intérêts personnels. Et il y a encore des lecteurs qui nous quittent parce que la revue ne répond pas à leurs besoins, comme en témoigne cet extrait de lettre reçue récemment :

«... Votre revue présente la particularité d'être très intéressante et très complète.

Malheureusement je suis tenu à des contraintes très strictes :

- les programmes doivent être terminés à tout prix dans les délais impartis;*
- les échéances (TE communs, examens, autres contrôles) sont nombreux et incontournables.*

En conséquence, comme votre revue ne me permet pas d'atteindre les buts fixés, je ne vois pas l'utilité de prolonger mon abonnement »

Le message est écrit en termes fort courts. Il ne s'agit donc pas d'une manifestation de mauvaise humeur, mais d'un constat de non réponse à une attente.

«Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques ! » C'est le slogan publicitaire de notre revue. Répondre aux attentes des lecteurs est aussi le souhait permanent du comité de rédaction dans son ensemble, qui se «défonce» pour trouver des articles intéressants, pour les rendre accessibles,

pour les présenter de façon plaisante, pour satisfaire les maîtres du primaire comme ceux du secondaire. C'est une gageure, mais aussi un défi stimulant, que nous tentons de relever depuis 36 ans déjà.

Mais, peut-être, les attentes de certains lecteurs sont-elles trop élevées ? Une revue aussi bien conçue soit-elle, peut-elle répondre aux préoccupations pratiques de celui qui est confronté aux multiples contraintes de la gestion de sa classe ?

Nous ne le pensons pas et n'en avons pas l'ambition. Nous savons bien que, dans notre domaine, il n'y a pas de recettes. Aucun texte, aucune méthode, aucun programme ne peut se substituer à celui qui enseigne, qui vit et agit en fonction du contexte de sa classe, qui est le seul à connaître les caractéristiques personnelles de chacun de ses élèves.

Tout au plus nourrissons-nous l'espoir que notre revue puisse informer, faire partager des expériences ou des préoccupations, alimenter la réflexion pédagogique et didactique de ses lecteurs. Dans ce numéro, par exemple, on partagera les préoccupations d'un formateur, on sera surpris de voir que des enfants peuvent initier leurs parents à leurs activités mathématiques, on se cassera la tête sur d'étranges apparitions et disparitions, on découvrira quelques obstacles à la notion d'échelle chez de grands élèves, on jouera avec des triangles, on s'apercevra de la richesse des opérations mises en oeuvre en calcul mental, on verra avec plaisir que le bon vieux cercle inscrit permet encore de résoudre des problèmes d'éleveurs de chevaux.

C'est modeste, nous en convenons. Mais il y a là tout un champ de réflexions à creuser, à développer. C'est ici que commence la tâche du lecteur !

Voyage au centre de la géométrie

Le puzzle, un outil didactique au service des maths

G. Sarcone & M. J. Waerber

«Les formes essentielles, alphabet de la pensée, premières manifestations du sens esthétique et logique de l'homme, sont les carreaux d'une même fenêtre donnant sur le réel».

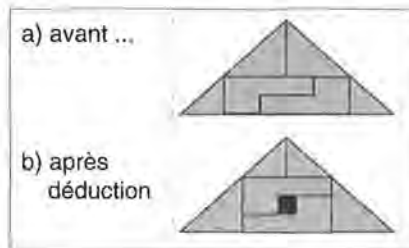
Les puzzles, que l'on nomme mechanical puzzles en anglais, sont un instrument idéal pour la modélisation de concepts, mathématiques ou autres. Nous voudrions dans cette rubrique vous faire découvrir les autres facettes des puzzles Quadrix dont nous vous avons parlé dans les nos. 173 et 177 de Math-Ecole. Rappelez-vous, les puzzles Quadrix ont cette particularité de faire apparaître (ou disparaître) un espace supplémentaire lorsque l'on module judicieusement les pièces du jeu et ceci sans en modifier la surface globale! (en apparence, voir exemple).

Les questions que nous nous poserons ici sont: a) quel est le nombre de pièces minimal pour créer ce genre de puzzle? b) Pouvons-nous faire disparaître une image à la place d'une surface? c) Existe-t-il d'autres sortes de puzzles permettant la disparition d'un élément?

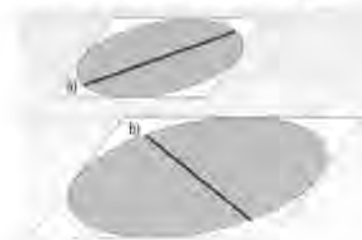
Réassembler un découpage comportant des pièces triangulaires ou ayant des pentes peut amener à des conclusions paradoxales (tout comme les divisions par 0 et la conversion de fractions ordinaires en fractions décimales). Cela s'explique par le manque de précision de nos sens (voir ex. ci-contre) et par le fait que, dans la vie de tous les jours, tout un chacun tend à arrondir au dixième, ce qui est, disons-le, pratique. Mais

voilà, «semez des centièmes, vous récoltez des unités!». Prenons un exemple, 0,72 pourrait être le quotient de $21 : 29$, ou encore, de $34 : 47$. Nous pourrions alors légitimement penser que $21 : 29 = 34 : 47$, cette identité pourrait s'écrire $21 \times 47 = 34 \times 29$. Il en résulte ainsi deux produits différant d'une unité ($987 = 986$)! Pourquoi cela? Parce qu'en réalité $21 : 29 = 0,7241\dots$, et $34 : 47 = 0,7234\dots$. En ignorant 7 millièmes, on crée une différence d'une unité! Les puzzles Quadrix utilisent ce principe.

Tout au long de ces pages, nous privilégierons la «pratique», vous disposerez de canevas qui vous permettront de réaliser et d'expérimenter les puzzles Quadrix en classe (pour votre usage personnel uniquement). Pour ceux qui seraient intéressés, nous organisons et animons des stages ou des ateliers créatifs axés sur les puzzles dans les écoles.



Ajoutez au triangle un petit carré sans modifier son aire ni son périmètre.



Sans le savoir, nos yeux nous trompent. Les diamètres a) et b) ont-ils la même longueur ?

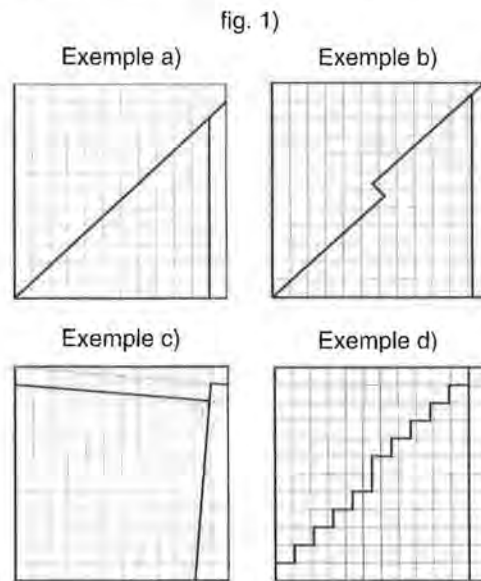
En résumé, les puzzles possèdent trois qualités pédagogiques: 1) ils focalisent l'attention, 2) ils donnent envie de participer, et enfin 3) ils encouragent l'exploration créative.

Quadrax en trois pièces

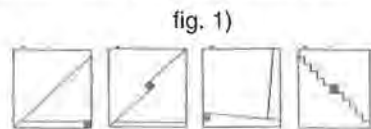
Voici les canevas qui vous permettront de concevoir des puzzles Quadrax ne possédant que 3 pièces! Nous avons utilisé une grille de 12x12 unités comme base. En vous inspirant des exemples 1.a), b), c) et d), essayez de créer d'autres puzzles avec un nombre minimal de pièces. Rien ne vous empêche d'utiliser d'autres bases, par exemple: une grille de 11x11 unités (fig.2). La découpe de la fig.2) permet, en modulant les pièces, d'obtenir un rectangle de 120 unités! Si vous possédez un Tangram, en y adjoignant 3 pièces seulement, selon des-

sin de la fig.3), vous le transformerez en un puzzle de 7x10 unités ayant des propriétés remarquables. En effet, en redistribuant les pièces du jeu différemment, il perd un petit carré tout en gardant la même surface ... Le puzzle en dents de scie de la fig.4) est assez difficile à réaliser car il nécessite beaucoup d'ajustements. En intervertissant deux pièces, un espace triangulaire apparaît.

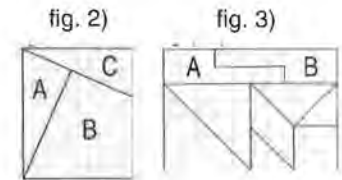
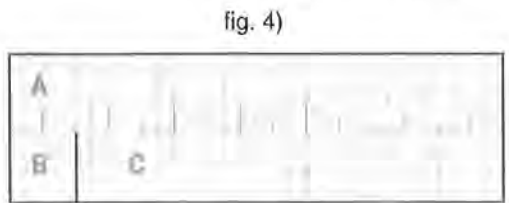
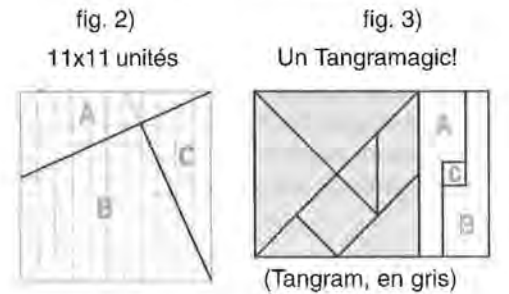
C'est évidemment en «grappillant» çà et là quelques dixièmes de millimètre que l'on arrive à faire apparaître (ou disparaître) un espace. Loin d'être négligeables, ces problèmes de «passez muscade» géométriques apprennent à l'étudiant à «négocier» avec les formes. Il lui suffira d'un peu d'ingéniosité pour «extraire» d'une austère surface quelques juteux centimètres carrés en plus... Naturellement, tout cela n'est qu'illusion (ou mieux, magie)!



Solutions des puzzles étudiés plus haut :



N'hésitez pas à mesurer les puzzles avant et après résolution!



Quadrix en deux pièces

Est-il possible de créer un puzzle Quadrix de forme carrée avec uniquement 2 pièces? Non, par contre cela est faisable avec un puzzle de forme rectangulaire (cf. Math-Ecole 177, page 24) ou alors, en trichant un peu, avec un puzzle ayant une pièce circulaire «spiraloïde» (fig.5) ou crénelée (fig.6).

fig. 5)

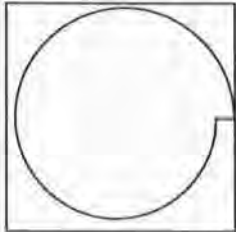
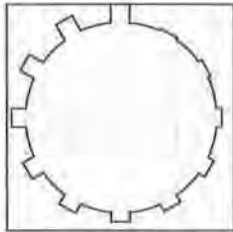


fig. 6)



L'effet est plus important encore en 3D avec un disque crénelé dont les trous servent de réceptacles à des billes de verre (fig.7).

fig. 7)

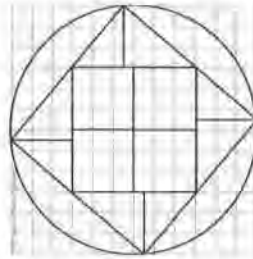


En ôtant les 23 billes, puis en déplaçant d'un cran le disque crénelé, on acquiert un trou supplémentaire où l'on pourra introduire la 24ème bille centrale.

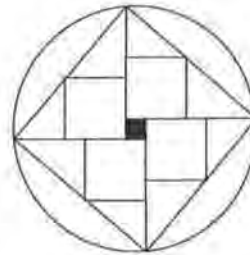
Rosace géométrique

Puisque nous avons parlé plus haut de carrés et de cercles, nous en profitons pour vous présenter un très beau puzzle Quadrix composé de carrés inscrits dans un cercle. C'est un des seuls à être construit avec des carrés parfaits. L'équilibre et la pureté des formes rendent son exécution difficile, mais il vaut la peine d'être réalisé en classe.

avant ...



... après réflexion

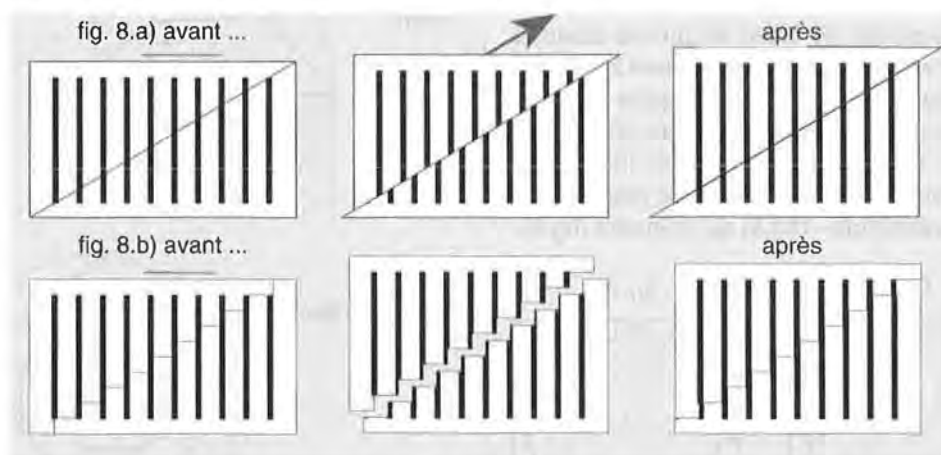


Quadrix visuels en deux et trois pièces

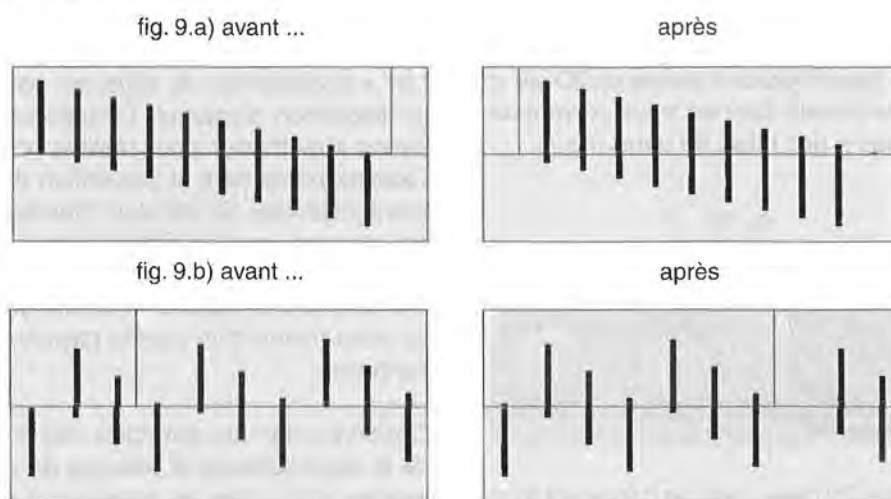
Après la disparition de surfaces, passons à la disparition d'images! Ci-dessous, nous avons 4 méthodes pour réaliser un puzzle Quadrix permettant la disparition d'un élément graphique. En décalant (translation) ou en intervertissant un élément des puzzles, nous passons de 10 à 9 traits verticaux. Le principe de ces puzzles vous sera utile pour la construction d'un puzzle paradoxal personnalisé.

Observez bien les exemples des fig.8 et 9 de la page suivante et essayez de vous en inspirer pour créer en classe vos propres puzzles. Remplacez les traits verticaux par des motifs, des objets ou des personnages. Pour vous faciliter la tâche, nous vous avons préparé sur la page suivante une grille avec des rectangles en pointillé. Il suffit de faire un croquis dans chaque rectangle en faisant en sorte que les traits des dessins coïncident lorsque les deux pièces supérieures de la grille seront interverties (voir exemple de la fig.10). Il est possible d'orienter le jeu verticalement, si vous le souhaitez. Lorsque vous serez satisfaits du résultat obtenu, finalisez vos dessins et collez votre travail sur du carton-fort, découpez-le et jouez!

Puzzles en deux pièces



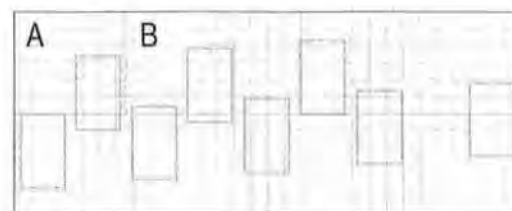
Puzzles en trois pièces



Observez bien la façon dont les traits sont disposés pour comprendre l'astuce, avant de passer à la réalisation de vos puzzles.

Réalisons un puzzle paradoxal visuel !

Dessinez des éléments graphiques dans les rectangles en pointillé de la grille ci-contre de sorte que, lorsque vous intervertissez les pièces A et B du puzzle, les traits des dessins coïncident. Ainsi, l'ensemble garde une cohérence malgré le fait qu'un élément graphique disparaît (voir exemple fig.10 de la page suivante). ►



Grille de base pour la construction du puzzle (en trois pièces)

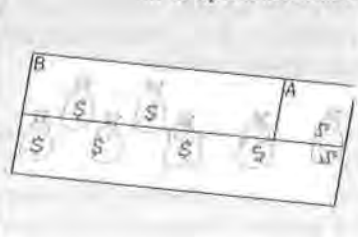
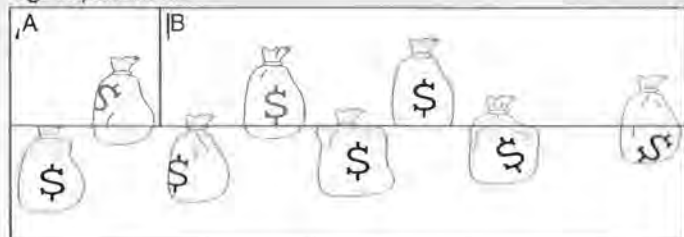
Le sujet que nous avons choisi (sacs de dollars), quoique trivial, est simple à réaliser, graphiquement parlant. Ni vu, ni connu, en intervertissant deux pièces du puzzle, hop! on fait disparaître un sac de billets verts... Ce jeu est le cauchemar des ban-

quiers! Pour vos puzzles, nous vous suggérons de représenter des sujets simples: des arbres, des autos, des lapins, etc.

Pour atteindre un bon résultat visuel, il faut beaucoup d'essais, d'astuce et de patience.

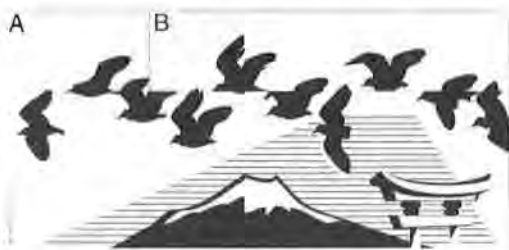
fig. 10) avant ...

... et après inversion



Encore d'autres exemples (l'oiseau évanescant, le wagon dilué) qui vous permettront de constater qu'il existe une multitude de façons pour réaliser ces puzzles paradoxaux, faites-nous parvenir vos meilleures réalisations!

En inversant les éléments A et B du puzzle, le Transsibérien perd un wagon dans les steppes enneigées. Élémentaire? Expliquez!



Dix oiseaux migrateurs et insoucians survolent le blanc Fuji-san, une tempête a inversé les éléments A et B du puzzle en emportant un oiseau. Qu'est-il advenu de ce pauvre volatile? Mystères du Japon!

Des figures ébréchées, encore des disparitions géométriques

Pour parfaire notre étude sur l'«illusionisme» géométrique, nous allons voir ensemble des manières de jouer avec l'espace un peu différentes des Quadrix traditionnels.

Il s'agit là de faire disparaître un fragment d'une figure.



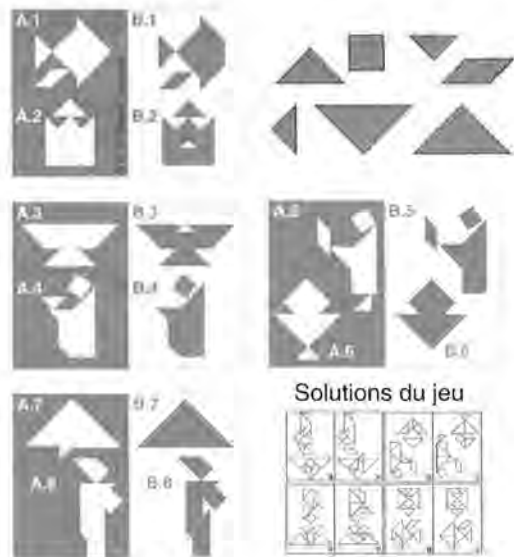
Sauriez-vous composer une figure avec les 7 pièces d'un Tangram (voir puzzle en gris de la fig.3), puis, avec ces mêmes pièces, refaire la figure amputée d'un élément?

Par exemple, composez d'abord la figure représentant le poisson exotique de la table ci-dessous (en A.1). Cela fait, composez maintenant cette même figure en omettant la tête (en B.1). Toutes les pièces du jeu doivent être utilisées!

Sur ce même principe, nous vous proposons d'autres silhouettes de notre cru (A.2 couronne mérovingienne; A.3 coupe du Graal; A.4 bonze mendiant; A.5 homme au journal; A.6 coupe de glace; A.7 triangle épineux; A.8 prêtre taoïste).

Pouvez-vous expliquer l'apparition ou la disparition d'une partie de la silhouette? Ces problèmes d'escamotage sont un excellent entraînement pour la discrimination des formes et la compréhension des modulations géométriques (inversions: hypoténuse <> côtés).

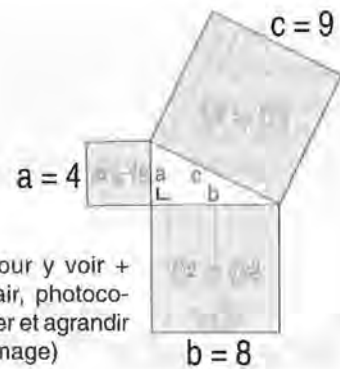
Table des figures à composer avec les 7 pièces du puzzle :



Les vacances forcées de M. Pythagore

Un vieux théorème peut parfois cacher des surprises! Ici, en l'occurrence, nous nous retrouvons avec une case en trop (ce qui est mieux qu'une case en moins!). La somme des carrés des côtés du triangle rectangle ci-dessous devrait valoir 80 et non pas 81. D'où sort donc le petit carré supplémentaire? A vous de trouver...

Selon Pythagore: $a^2 + b^2 = c^2$,
Donc, $4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$;
pourtant ici on a:
 $a^2 + b^2 = 9^2$ ou 81,
soit une unité de plus!



Quadratures impertinentes

Avec un peu d'imagination, tout est possible. Certes, dans le monde de l'«illusionisme» géométrique, tout est faux, mais c'est grâce aux apparences trompeuses que l'on apprend à se méfier des sens et à privilégier l'esprit d'analyse et de synthèse. Cela dit, nous ne voulons pas vous quitter sans vous présenter deux autres puzzles géométriques particuliers impliquant la «quadrature du cercle». Ces puzzles, à l'instar des Quadrix, sont considérés comme impossibles. Nous allons vous prouver le contraire...

L'innocent carré de la fig.11 est composé de 4 figures géométriques identiques. Il suffit d'exécuter quelques translations pour ob-

tenir un cercle bien rond et heureux de l'être. Est-ce possible? Quelles sont ces figures qui permettent une telle «transmutation»? Encore plus fort. Est-il possible de transformer, en un abracadabra, un cube en mousse en une sphère (et l'inverse, voir fig.12)? Attention, il ne doit y avoir aucune substitution d'objet et le cube doit se transformer en un seul geste. Après des siècles de conjectures, aurait-on enfin résolu la «quadrature du cercle»? ▶

Voici un indice: il s'agit en fait d'une transformation topologique d'un objet de genre 0.

Ainsi s'achève ce safari dans la jungle des formes. La curiosité est l'apanage des enfants et de ceux qui le sont restés. Les paradoxes et les curiosités géométriques sont donc un «instrument» d'apprentissage qu'il ne faut point négliger. L'anecdote et la petite histoire, ce n'est un secret pour personne, rendent l'apprentissage des maths plus vivant. A bons entendeurs ...

fig. 11) Transformation carré > cercle

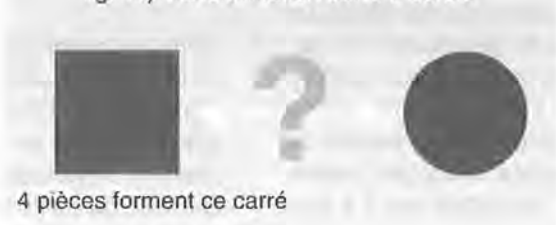
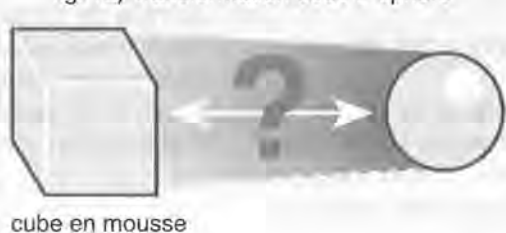


fig. 12) Transformation cube > sphère



Solution des énigmes



Ci-dessus, nous avons mis en évidence les étapes de la métamorphose de la fig.11. Les 4 figures géométriques qui permettent de transformer un carré en un cercle sont donc des demi-disques. Eh oui, ils se superposent, mais il fallait y penser!



Pour la fig.12, la transformation est plus laborieuse. Il s'agit d'évider au préalable un cube en mousse de façon à avoir une sphère «en négatif» dans la masse (en laissant à la base dudit cube un trou circulaire). Cela fait, présentez-le à votre auditoire de façon à occulter le trou. La transformation s'effectue en tenant le cube en mousse dans votre poing et en appuyant dessus avec votre doigt. Ainsi, le cube s'inversera en passant par le trou de la base (selon exemple) et la sphère apparaîtra!

Agrandissement et échelle : quelles difficultés pour les élèves ?

Michel Bréchet

La démarche consiste à soumettre à des élèves de 13 à 15 ans deux problèmes où interviennent les concepts d'agrandissement et d'échelle, et ceci préalablement à leur étude en classe. Puis, à partir de l'observation des comportements des élèves en cours d'activité, de leurs questions et remarques, de l'analyse de leurs travaux et d'entretiens ponctuels, il s'agira d'esquisser un bilan de leurs connaissances et modes de fonctionnement (attitudes, stratégies, mécanismes intellectuels, blocages, etc.) à propos des notions précitées.

Une évaluation au service des élèves

L'évaluation est à considérer ici comme un moment dans l'apprentissage. Elle fait partie intégrante de celui-ci. On évalue pour savoir ce que sait l'élève, pour avoir une image "claire" de ce qui se passe dans sa tête; on pourra donc par la suite plus aisément mesurer les progrès accomplis. L'évaluation contribue ainsi à aider l'élève à apprendre et à se développer, car elle porte principalement sur les processus et non sur le produit fini. Elle a aussi pour but de renseigner l'élève sur ce qu'il doit faire pour se rapprocher des objectifs à atteindre et est, par conséquent, au service de la différenciation pédagogique. En outre, il est impensable de la traduire par une note chiffrée, un classement, des récompenses ou un blâme.

Comme cette évaluation se distancie sensiblement de l'évaluation sommative habituelle, il est nécessaire d'établir un nouveau

contrat entre maître et élèves, car elle demande de la confiance, voire de la coopération. D'une part l'élève ne doit pas cacher ses difficultés, éviter à tout prix de faire semblant "qu'il comprend", et ne pas chercher divers moyens pour se tirer d'embarras. D'autre part, le maître ne doit pas menacer l'élève, lui assurer que les difficultés qu'il rencontre ne se retourneront pas contre lui et veiller à utiliser un langage facilement accessible.

Volontairement non stéréotypées, les situations choisies sont complexes, globales et significatives. On ne demandera donc pas aux élèves de se conformer à un modèle attendu. L'évaluation est réalisée dans un contexte de tâches à accomplir et les objectifs sont multiples: il s'agit notamment de prendre en compte simultanément un grand nombre de facteurs, d'établir des liens entre diverses notions et de donner du sens à l'information. Ce type d'activités incitent ainsi à effectuer des opérations intellectuelles d'anticipation, d'analyse, de synthèse, etc.

Contexte

Les problèmes ont été proposés à partir de la 8^e année, dans des classes à niveaux d'exigences moyen et élevé. Au cours des années précédentes, notamment en 7^e, les élèves ont déjà été confrontés, ponctuellement et à des fins de sensibilisation, aux notions d'agrandissement et d'échelle. Celles-ci n'ont jamais été étudiées en détail.

Ils ont déjà eu l'occasion de constater que derrière les situations d'agrandissement et de réduction figure l'idée de conservation des formes, de respect des proportions, de proportionnalité et qu'elles relèvent par conséquent de procédures multiplicatives, et non additives.

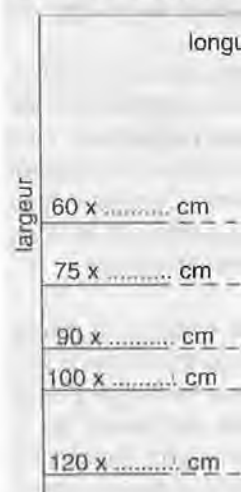
La notion d'échelle a également été présentée comme relevant de la proportionnalité. Les activités les plus répandues ont consisté à mesurer des longueurs sur des cartes et à compléter des tableaux de correspondance entre les dimensions mesurées et les dimensions réelles, l'échelle étant présentée comme le facteur de proportionnalité.

Description et analyse du travail en classe et des productions des élèves¹

Problème 1 : Diapositives

En projetant une diapositive 24 x 36 mm sur un écran, on obtient une image de 60 cm de largeur. Quelle est sa longueur ? Et si la largeur de l'image valait 75 cm ? 90 cm ? 100 cm ? 120 cm ?

Ci-dessous, on a déjà représenté, sur un même axe et à l'échelle 1 : 10, la largeur de ces images, dont toutes ont un sommet commun "en haut à gauche". Termine les constructions et complète les indications concernant les formats de ces images.



¹ Chaque problème est présenté aux élèves sur une feuille A4.

Ce problème fait appel à quelque chose que les élèves ont déjà vu dans leur vie extra-scolaire. Le contexte est significatif. On s'éloigne donc ici du domaine purement mathématique pour aborder une situation d'agrandissement en prise avec l'environnement social des élèves.

Reconnaître une situation de proportionnalité

Plusieurs facteurs font obstacles à l'identification de ce problème à une situation multiplicative: la configuration et l'échelle de la représentation (1 : 10), les mesures des largeurs des images et leurs expressions à l'aide d'une unité différente de celle des dimensions de la diapositive. Un rapide tour d'horizon montre cependant des élèves ayant conscience que "*l'image en elle-même*"² ne sera pas différente de la diapositive, que "*l'allure générale*" sera conservée, et que, sur un écran, on peut reconnaître un personnage ou un paysage car "*leurs aspects et leurs formes ne changent pas*".

Ces propos témoignent d'une construction correcte du phénomène en jeu. Ils ne permettent toutefois pas à tous les élèves de reconnaître cette situation comme relevant du modèle proportionnel. Plusieurs d'entre eux sont dans l'incapacité de mettre en oeuvre une procédure de résolution et affirment que des données manquent pour répondre aux questions. A ce stade, la plupart des élèves n'accordant aucune importance à la cohérence des unités, la recherche a été relancée en demandant quelle serait la longueur d'une image de 48 cm (24 x 2) de largeur. Cette question, fortement révélatrice, a conduit une majorité d'élèves à construire la plus grande image, car "*comme 120 = 24 x 5, il suffit de multiplier 36 par 5*", puis la petite, car "*120 est le double de 60, donc...*".

² Les propos en italique émanent des élèves.

Des naturels aux décimaux, puis aux rationnels

Mais l'appréhension à propos de ces deux constructions subsiste et l'incertitude demeure, car "avec 75, 90 et 100, ça ne marche pas aussi bien". Comme le montre cet exemple, la maîtrise des opérateurs décimaux et rationnels n'est pas encore acquise par certains apprenants; pour eux, il est coûteux de sortir des nombres naturels. Le fait de suggérer alors de présenter chacun des deux résultats obtenus dans un tableau de correspondance, puis d'effectuer de nouveaux tableaux en y intégrant les données restantes (75, 90 et 100), a produit l'effet escompté. Plusieurs élèves ont immédiatement recherché, un peu mécaniquement et sans trop se préoccuper du sens de leur démarche, les coefficients de proportionnalité associés aux fonctions linéaires sous-jacentes (voir ci-dessous). Dans un tel cadre, la présence de coefficients décimaux ne posent plus trop de difficulté.

$\begin{array}{ c c } \hline 24 & 36 \\ \hline 120 & 180 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 24 & 36 \\ \hline 60 & 90 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c } \hline 24 & 36 \\ \hline 75 & 112,5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 24 & 36 \\ \hline 90 & 135 \\ \hline \end{array}$

Toutefois, le recours à cette pratique montre ses limites lorsque le facteur de proportionnalité vaut $100/24$, soit $4,1666\dots$. Agrandir les côtés d'une figure de $4,1666\dots$ fois, qu'est-ce que cela peut bien signifier ? Et voilà l'infini qui montre (à nouveau) le bout de son nez. Toujours là quand il ne faut pas celui-là ! «Et si vous imaginiez un format rendant aisé le calcul de la longueur cherchée ?» Cette question permet de contourner l'obstacle, les élèves cherchant alors les dimensions d'une figure dont la largeur est un diviseur commun de 100 et d'un autre nombre figurant dans l'énoncé (10 et 20 ont été les plus utilisés).

Entre multiplication et addition

Les relances mentionnées ci-dessus n'empêchent pas un petit nombre d'élèves de s'empêtrer dans des procédures faisant intervenir la multiplication et l'addition. Ainsi, "comme $24 \times 2 + 12 = 60$, la longueur de l'image de 60 cm de largeur mesurera 84 cm, car $36 \times 2 + 12 = 84$ ". Un exemple bien choisi (à l'harmonisation des unités près) permet au maître de montrer les contradictions induites par ce type de démarche. On peut par exemple aussi écrire : $60 = 24 \times 3 - 12$, et comme $36 \times 3 - 12 = 96$, la longueur mesurera, selon ce raisonnement, 96 cm !!

Valider ses réponses

Les rectangles représentant les images projetées étant construits, il est intéressant de demander aux élèves s'il existe des indices leur permettant de croire s'ils ont réussi ou non la tâche, ceci afin de les inciter à porter un regard critique sur leurs méthodes. En outre, il n'est pas inutile de rappeler de temps à autre que le contrôle et la qualité des apprentissages incombent en partie aux apprenants, et pas uniquement au maître.

Le rapport³ des dimensions de la diapositive, découlant de la propriété multiplicative des fonctions linéaires, est très peu utilisé. C'est pourtant un outil simple et très performant pour résoudre ce problème. L'obstacle à sa mise en oeuvre est probablement lié à sa valeur, 1,5 soit un nombre non entier.

L'analyse de la situation dans un contexte géométrique amène par contre certains élèves à constater que chaque rectangle a deux sommets situés sur une diagonale de la grande image. Ces points étant alignés, ce problème est alors rattaché à des situations connues: "C'est linéaire !". Il est donc possi-

³ Le pluriel serait plus rigoureux

ble de mettre en relation cette configuration avec le graphe d'une fonction linéaire... le rapport des dimensions de la diapositive devenant alors le facteur de linéarité. Le lien entre ces deux cadres (géométrique et graphique) serait toutefois incontestablement plus transparent si la disposition des images était différente, à savoir si leur sommet commun se trouvait "en bas à gauche".

Problème 2 : Plans

Le plan est à l'échelle 1:500.

- a) Réalise un plan de cette parcelle à l'échelle 1:200.



- b) Quelle est l'échelle du plan ci dessous?

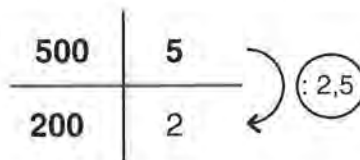


Pour les élèves de l'école secondaire, ce problème implique dans un premier temps de calculer les dimensions réelles de la parcelle. Il paraît peu probable de déduire immédiatement les dimensions du plan à réaliser en utilisant à bon escient le rapport des échelles, et de trouver de même l'échelle demandée à partir du rapport des dimensions des côtés correspondants.

Donner du sens à l'écriture fractionnaire et gérer les unités

"Si on a 1 : 500, que veut dire le 1 ? 1 carré du quadrillage ? 1 cm ? Je pense que c'est plutôt 1 cm. Et le 500 ?" L'échelle est présentée ici sous sa forme fractionnaire, c'est-à-dire sous sa forme la plus difficile à appréhender: outre la fraction, l'absence d'unité est déstabilisante. A ce stade, un

éclairage à propos de la signification d'une telle écriture est nécessaire. Il ne suffit toutefois pas à éviter la mise en place de raisonnements du type: "Comme 200 est plus petit que 500, le plan à réaliser sera plus petit, et comme $500 : 200 = 2,5$, il faut diviser les côtés du plan par 2,5." Si cette procédure de résolution est influencée par les valeurs des échelles, elle est également la conséquence de l'ambiguïté qui règne à propos du sens à accorder aux numérateur et dénominateur, voire d'une utilisation non réfléchie et parfois un peu exagérée des tableaux de correspondance (voir ci-dessous).



Comme on le constatera plus loin, l'harmonisation et la gestion des unités dans les différents calculs constituent également une source importante d'erreurs.

Se représenter le concept d'échelle

Cette situation demande aux élèves de donner une forme concrète à la représentation qu'ils se sont construits de la notion d'échelle. Comme dans la plupart des problèmes où elle intervient, les objets en présence (le plan et le terrain réel) sont de tailles fort différentes, ce qui occulte la mise en relation avec les situations d'agrandissement. Relativement peu d'élèves se représentent le dénominateur de la fraction comme un opérateur multiplicatif, c'est-à-dire un nombre sans dimension. Si on entend des expressions du type "un centimètre sur le plan représente 500 centimètres en réalité", cela ne signifie pas pour autant que le lien soit établi entre les aspects "outil" et "objet" du concept en jeu. Ainsi, lorsqu'il s'agit de déterminer l'échelle du plan, plusieurs élèves ressentent le besoin d'exprimer le numérateur en centimètres et le dénominateur en mètres, "sinon, on s'y perdrait".

En guise de conclusion


Linéarité, mesure, nombre décimal, rapport, multiplication, relation entre micro et macrospace : on le voit, un grand nombre de concepts, dont la complexité n'est par ailleurs pas à négliger, interviennent dans les notions d'agrandissement et d'échelle. Il n'est dès lors pas étonnant que les élèves éprouvent des difficultés à leur appréhension. C'est pourquoi une vue d'ensemble des obs-

tacles inhérents à la construction des savoirs en jeu⁴ constitue une information précieuse pour la préparation des séquences d'apprentissage. Cependant, une fois celles-ci élaborées, le plus dur reste à faire...

Bibliographie :

REPERES-IREM, n° 25 - octobre 1996
Petit x - n° 31, 1992-1993

⁴ Cet article, reflet d'une pratique isolée, ne prétend pas à l'exhaustivité



SCHUBI
à la pointe des ...
... soutiens en
mathématiques

TRIMINO - l'autre façon de jouer au Domino!
Le TRIMINO se joue selon les règles connues du domino. Les 24 cartes de jeu triangulaires de contour, en carton robuste, sont posées de telle façon les unes à côtés des autres que les calculs et les résultats coïncident. Tout en calculant, on joint un triangle à l'autre. On obtiendra à la fin une figure qui permettra un autocontrôle rapide.
Tout en jouant, les enfants apprendront les différentes opérations de base. Trimino peut se jouer seul, mais aussi à deux ou en groupes - pendant les cours ou à la maison. Contenu: chaque boîte contient 2 jeux de différents degrés de difficulté.

Bon de commande

Oui, veuillez m'envoyer avec facture et droit au renvoi dans les 20 jours:

SCHUBI TRIMINO

Nombre	Addition jusqu'à 20 dès la 1ère année scolaire 239 50 2 jeux	Fr. 19.50
<input type="checkbox"/>	Soustraction jusqu'à 20 dès la 1ère année scolaire 239 51 2 jeux	Fr. 19.50
<input type="checkbox"/>	Addition et soustraction jusqu'à 100 dès la 2ème année scolaire 239 60 2 jeux	Fr. 19.50
<input type="checkbox"/>	Multiplication (table de multiplication) dès la 2ème année scolaire 239 61 2 jeux	Fr. 19.50
<input type="checkbox"/>	Division jusqu'à 100 dès la 2ème année scolaire 239 62 2 jeux	Fr. 19.50 (TVA non comprise)
<input type="checkbox"/>	Gratuitement: Veuillez me faire parvenir le catalogue des matériels didactiques SCHUBI 97/98	

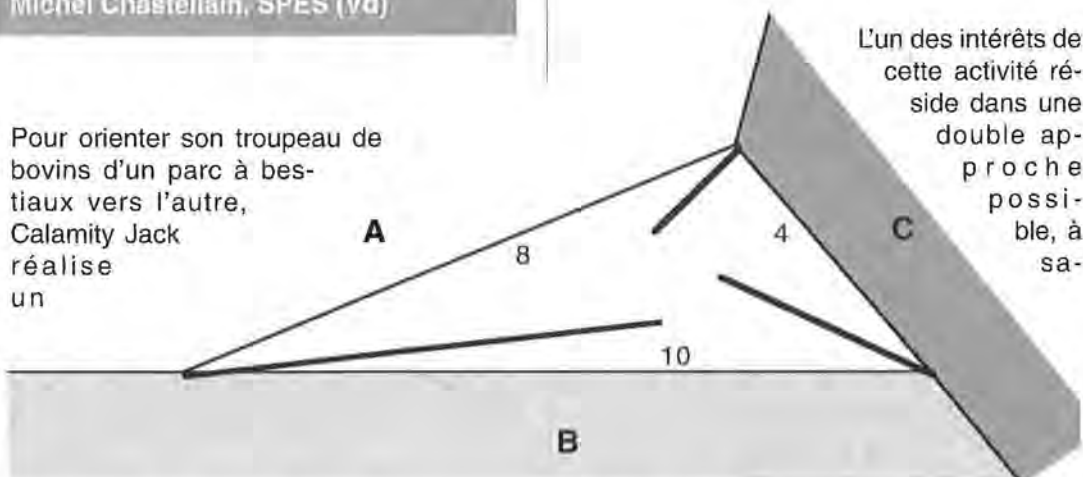
Faire parvenir à: SCHUBI Lernmedien AG, Breitwiesenstr. 9, 8207 Schaffhausen
Tel. 052/644 10 10, Fax 052/644 10 99

Ecole, Institut _____
Nom, prénom _____
Rue _____
NP/Lieu _____

CABRIIdées :
Histoire de «parc aux mètres» !

Michel Chastellain, SPES (Vd)

Pour orienter son troupeau de bovins d'un parc à bestiaux vers l'autre, Calamity Jack réalise un



L'un des intérêts de cette activité réside dans une double approche possible, à sa-

assemblage de portes à battants.

Elles peuvent se rabattre tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, ouvrant et fermant en alternance les sorties – respectivement de 4, 8 et 10 mètres – vers les parcs **A**, **B** et **C**.

Quelles dimensions Jack va-t-il donner à ses portes ?

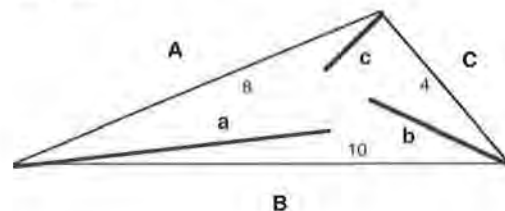
Ce problème possède toutes les caractéristiques d'un «problème ouvert» selon une définition devenue classique depuis quelques années déjà ¹ :

- l'énoncé est court ;
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution ; elle ne se réduit pas à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours ;
- le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité ; ils peuvent prendre «possession» de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.

voir selon une démarche algébrique ou à l'aide d'une construction géométrique.

Démarche algébrique

Dans ce cas, le problème peut être modélisé ainsi :



Pour déterminer la dimension des portes, respectivement de longueur **a**, **b** et **c**, les élèves peuvent recourir à un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ b + c = 4 \\ a + c = 8 \end{cases}$$

¹ G. Arsac et al, *Problème ouvert et situation-problème*, IREM Lyon, 1988.

Sa résolution les conduit à transformer le système en une succession de systèmes équivalents :

$$1 \begin{cases} a = 10 - b \\ b = 4 - c \\ 10 - b + c = 8 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} a = 10 - b \\ b = 4 - c \\ b = 2 + c \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} a = 10 - b \\ 2 + c = 4 - c \\ b = 2 + c \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} a = 7 \\ c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

pour obtenir, finalement l'ensemble de solution : $S = \{(7 ; 3 ; 1)\}$.

Avec un peu de chance, certains élèves vérifieront l'adéquation de ce résultat à la réalité, c'est-à-dire que chaque somme des mesures de deux portes égale la longueur de chaque «sortie» correspondante :

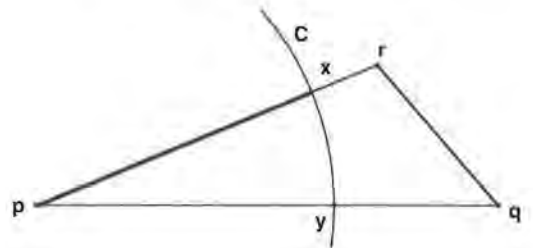
$$7 + 3 = 10 \text{ m} , 3 + 1 = 4 \text{ m} \text{ et } 1 + 7 = 8 \text{ m}.$$

Une «relance» possible consisterait alors à demander une généralisation de la situation afin de trouver une solution indépendante des dimensions du triangle. Mais sa résolution algébrique se révèle particulièrement délicate, contrairement à une recherche menée à l'aide de «Cabri-Géomètre» !

Construction géométrique

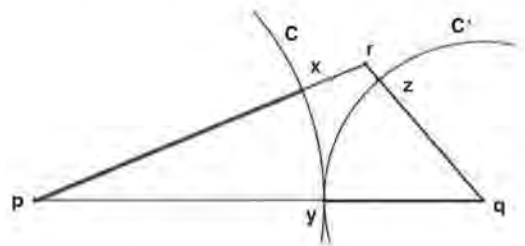
Pour débiter, il s'agit de tracer un triangle pqr , et de placer un point x , quelconque, appartenant au côté $[pr]$.

Ensuite, on cherche l'intersection y du cercle $C(p ; [px])$ avec le deuxième côté $[pq]$ du triangle pqr .

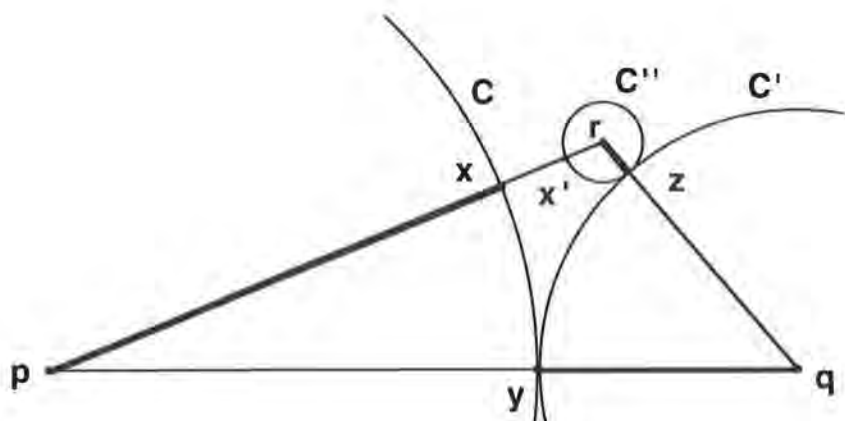


On construit alors un deuxième cercle $C'(q ; [qy])$ et l'on détermine son intersection z avec le troisième côté $[qr]$ du triangle pqr .

Ainsi, on dispose d'une première «sortie» à deux battants représentée par les segments $[px] = [py]$ et $[qy]$, qui «plaquent» parfaitement le long du côté $[pq]$, puisque $[qy] = [pq] - [py]$.



La figure est achevée par la construction d'un troisième cercle $C''(r ; [rz])$ dont l'intersection avec le dernier côté $[rp]$ du triangle pqr détermine le point x' .

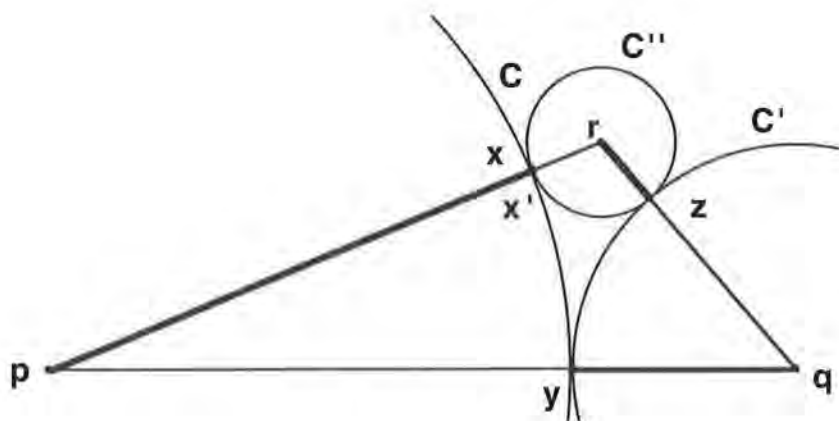


De même que précédemment, on bénéficie alors d'une deuxième «sortie» composée des deux battants $[qy] = [qz]$ et $[rz]$, puisque $[rz] = [qr] - [qz]$.

L'ennui, c'est que la troisième «sortie» laisse apparaître un trou béant, représenté par le segment $[xx']$, par lequel les bovins de Calamity Jack prendraient un malin plaisir à s'échapper ! Et c'est là que «Cabri-Géomètre» se révèle une fois encore génial. Cha-

cun aura, bien évidemment déjà compris, qu'il suffit de modifier la position du point x pour agir instantanément sur les trois battants $[px]$, $[qy]$ et $[rz]$ afin de trouver une solution satisfaisante .

L'astuce consiste donc à superposer les point x et x' en augmentant progressivement la taille de $[px]$. Les trois cercles C , C' et C'' deviennent alors tangents en les points x , y et z .



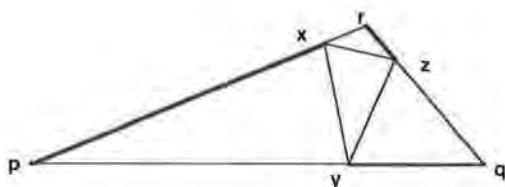
Dans l'état de la recherche, les élèves éprouvent la satisfaction d'avoir déterminé les dimensions adéquates des trois portes à battants.

Si leur solution se fonde sur une construction parfaitement correcte, les positions exactes des points x , y et z n'ont été trouvées que de façon empirique : «par bricolage» !

Dès lors, une nouvelle piste se présente : «les points x , y et z sont-ils trois points quelconques» ?

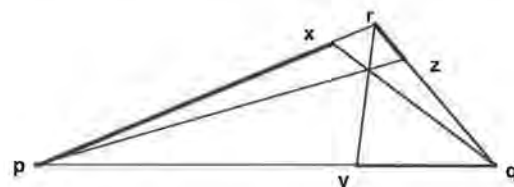
Cette simple question donne comme un second souffle à la recherche. Les élèves se plongent alors dans une succession de tentatives, d'essais et de conjectures qui les amènent à :

- tracer le triangle xyz pour se demander s'il existe des triangles isométriques ou semblables sur lesquels ils pourraient s'appuyer pour élaborer un raisonnement : las ;

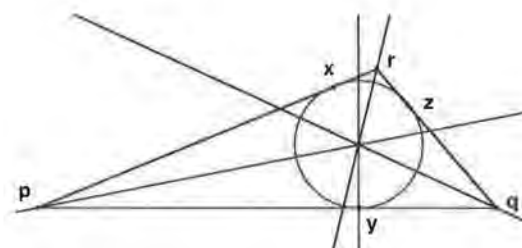


- tracer les segments $[pz]$, $[qx]$ et $[ry]$ et chercher à déterminer s'ils sont segments moyens, médianes, médiatrices, bissectrices, voire hauteurs.

Fascination : ils sont concourants, sans avoir l'une ou l'autre des caractéristiques précédentes !



Et soudain, une nouvelle idée germe : «et si c'était les points de tangence du cercle inscrit dans le triangle pqr ?» Sitôt dit, sitôt vérifié par la construction de ce cercle qui vient effectivement toucher les trois côtés du triangle respectivement en x , y et z !



Quant à la justification finale, elle intervient après un débat vif et nourri. Les élèves «re-découvrent» que les segments tangents à un cercle sont isométriques : $[px] = [py]$; $[qy] = [qz]$; $[rz] = [rx]$.

Autrement dit, quel que soit le triangle pqr initial, il suffit de tracer son cercle inscrit pour déterminer les trois portes à battants recherchées.

Moralité : étant ami de longue date avec Calamity Jack, je doute qu'il ait résolu ce problème à l'aide de «Cabri-Géomètre».

Dès lors, et pour autant qu'il se reconnaisse, pourrait-il faire parvenir sa solution à Math-Ecole ?

Regard sur le calcul mental

Luc-Olivier Pochon, IRDP.

«*Can you do Addition ?*» the White Queen asked. «*What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one and one ?*».

«*I don't know*», said Alice. «*I lost the count.*»
«*She can't do Addition,*» the Red Queen interrupted.

Lewis Carrol, *Through the looking-glass.*

Présentation

Le calcul mental n'a pas la réputation d'être le sujet favori des élèves ni des maîtres! Il n'a pourtant jamais cessé de figurer dans les programmes de l'école élémentaire. Mais la façon de l'aborder a évolué et des propositions didactiques sous l'appellation de «calcul réfléchi» ou «pensé» ont vu le jour. On trouve dans la littérature pédagogique de nombreuses propositions pour son acquisition, propositions alliant des recettes de calcul à certaines théories plus générales. La question se pose alors de savoir comment relier et utiliser les propositions éparses.

Dès que l'on veut étudier les procédures possibles pour effectuer un calcul, il est assez difficile de savoir quels sont les paramètres à prendre en compte. Pour aborder ce problème, nous avons imaginé avec Jean-François Perret¹ de construire un «automate» qui, à partir d'un énoncé, produise les étapes nécessaires à la réalisa-

¹ Pochon, L.-O. & Perret, J.-F. (à paraître) Etude de quelques procédures de calcul mental en vue de leur modélisation : perspective didactique.

tion du calcul et donne une indication sur le coût du procédé. Le problème est par exemple de produire automatiquement un protocole du type :

$54 + 27$

considérer 50;

calcul à effectuer : $50 + 27 + 4$

déjà additionner 50 et 27,

calcul à effectuer : $50 + 27$

additionner 50 et 27, résultat : 77

encore additionner 4, calcul à effectuer : $77 + 4$

emprunter à 4, calcul à effectuer : $80 + 1$

additionner 80 et 1, résultat : 81

MPT: 5/6/7 coût global: 19.23²

Cet article, après un tour d'horizon de la littérature traitant du calcul mental, prend comme prétexte la réalisation de l'automate de calcul pour organiser des données utiles à une certaine compréhension du phénomène du calcul mental. On verra que l'entreprise est forcément limitée. Le calcul mental n'est pas une mince affaire.

Le calcul mental

Jamais vraiment remis en cause, la position du calcul mental n'a toutefois pas toujours été la même au gré des réformes. Classiquement, le calcul mental était lié à l'apprentissage des tables et la didactique en était fort réduite. Tout au plus trouvait-on des exercices progressifs qui passaient en revue divers procédés qui devaient permettre

² Les trois coefficients M, P et T donnent une idée sur les opérations liées à la mémoire, celles liées au processus de calcul et la longueur de la procédure. Le coût global est une moyenne pondérée de ces trois coefficients; il permet d'apprécier globalement le niveau de difficulté du calcul.

à l'élève d'aborder des calcul de plus en plus complexes à partir d'un travail par l'exemple. On trouve également la pratique du calcul rapide qui peut remplir plusieurs fonctions. Elle peut être considérée comme une activité exerçant une certaine agilité de l'esprit. Elle implique aussi de trouver des procédures efficaces, mais les élèves ne semblaient pas être amenés à prendre conscience de ces procédures ou, comme les appelle R. Brissiaud³, les «gestes mentaux». Dans la réforme des années septante, les propriétés des opérations sont introduites qui peuvent permettre en partie à exprimer ces gestes mentaux.

Toutefois, la pratique du calcul mental est plus subtile que l'application des règles données par les axiomes régissant les ensembles de nombres. Les chercheurs en didactique ont affiné les analyses qui permettent de nommer ces gestes mentaux et ainsi de permettre au calculateur de les répertorier et d'en avoir une meilleure conscience en suivant l'un des préceptes énoncé par ERMEL : *Pour devenir transférables, les connaissances doivent être reconnues, nommées, decontextualisées*⁴. Cette façon d'aborder le calcul mental est connu sous l'appellation de calcul raisonné. François Conne⁵ propose de traiter ces procédures au même titre que les algorithmes classiques, c'est-à-dire que le calcul réfléchi est étudié en tant que traitement symbolique qui substitue à une opération de calcul une autre ou une séquence d'opérations plus élémentaires mais équivalentes.

³ Brissiaud, R. (1996) *J'apprends les maths, CE2, livre du maître*. Paris: Retz

⁴ ERMEL (1991) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CP*. Paris: Hatier.

⁵ Conne, F. (1987) Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire. *Math-Ecole* 128, 2-11.

Dans cette perspective les opérations de «bas niveau» (utilisation de la continue ou du compteur qui permet d'ajouter 1 un nombre de fois nécessaire) ne sont pas prises en compte, contrairement à ce que font des neuro-psychologues⁶.

Dans des moyens d'enseignement, on trouve des informations plus précises quant aux stratégies didactiques à mettre en œuvre.

Ainsi dans ERMEL⁷ des listes de calculs sont données qui sont à réaliser en utilisant des répertoires de résultats. Par exemple:

Sachant que $3+6 = 9$, $7-5 = 2$, $10-7 = 3$, $7+8 = 15$, $13-5 = 8$, $10-4 = 6$ on peut de façon consciente chercher les résultats de $23+6$, $67+8$, $127-5$, etc. (CE1)

De même le répertoire $16+16 = 32$, $37+10 = 47$, $46-10 = 36$ permet d'obtenir les résultats $16+17$, $37+9$, $46-9$ (CE2).

Des auteurs donnent des procédés de façon plus générique. Ainsi R. Brissiaud⁸ mentionne l'usage des *doubles* ($6+7 \rightarrow 6+6+1$) ; le *retour au 5* ($8+6 \rightarrow 5+5+3+1$) ; le *passage à la dizaine* ($9+4 \rightarrow 10+3$) ; le *retour à la dizaine* ($12+6 \rightarrow 10+6+2$).

⁶ Voir par exemple l'ouvrage: Dehaene, A. (1997) *La bosse des maths*. Paris: Editions Odile Jacob.

⁷ ERMEL (1993) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CE1*. Paris: Hatier.

ERMEL (1995) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages numériques CE2*. Paris: Hatier.

⁸ Brissiaud, R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer : au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*. Paris: Retz

Dans un autre ouvrage déjà cité du même auteur on trouve les processus de soustraction *en avançant* (pour effectuer 104-6) et *en reculant* (pour effectuer 104-98). De même, deux gestes mentaux sont donnés pour la division: le *partage* (1311:3) ou la *division groupement* (168:25).

F. Boule⁹ propose comme procédure générale la *méthode du pivot* (considérer 9 comme 10-1), celle du *décalage* (31-18 -> 30-17) et celle du *jalonement* (qui correspond à la procédure *en avançant* de Brissiaud). Les nouveaux moyens d'enseignement romands¹⁰ présentent également de telles familles de procédures. Dans ces ouvrages, les procédures sont décrites moins systématiquement et se basent davantage sur des observations de pratiques de calcul chez les élèves. La méthode générale s'appuie sur les propriétés formelles des opérations arithmétiques et les auteurs précisent que le calcul réfléchi repose sur ces propriétés mises en œuvre de façon consciente.

Si on veut essayer de modéliser ces procédés de calcul, on s'aperçoit qu'il est nécessaire de préciser un peu plus le contexte dans lequel l'opération est effectuée de même que les différentes étapes du calcul.

Tout d'abord, il s'agit de préciser la façon dont l'énoncé est présenté: calcul présenté en ligne, en colonne ou oralement. Une présentation en colonne va plutôt inciter le calculateur à reproduire l'algorithme des opérations en colonne et à travailler sur les chiffres.

⁹ Boule, F. (1996) 31-18 ? Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, p 39-52.

¹⁰ Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1997) *Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel: COROME.

Un énoncé oral, va augmenter la difficulté liée à la mémorisation à court terme. Le calcul écrit en ligne incite à travailler sur les nombres et le fait que l'énoncé reste à disposition va évidemment influencer les procédures mises en jeu. Ici, c'est toujours de ce type d'énoncé dont il sera question. Il y a aussi le type de traces que le calculateur va utiliser. Ainsi J. Régnault¹¹ distingue chez les «grands» calculateurs, les calculateurs au tableau et les calculateurs purement mentaux, sachant que chez ces derniers, il peut y avoir des procédés mnémotechniques qui peuvent faire intervenir une certaine gestuelle.

On a vu que du point de vue didactique, la volonté est souvent de garder la structure du calcul qui se transforme. Or les grands calculateurs considèrent explicitement un *registre* «à part» qui permet de cumuler au fur et à mesure les résultats obtenus ce qui évite de considérer une multitude de résultats partiels. Il est intéressant de noter que la conscience de ce registre est très forte chez les calculateurs prodiges. Ainsi J. Régnault considérant le produit 624 par 7 explicite :

On voit 6 fois 7 = 42
7 fois 2 = 14, on voit 43 4
7 fois 4 = 28, on voit 43 6 8

A noter encore que pour augmenter la capacité de ce registre, les nombres sont souvent transformés en syllabes formant des mots qu'il semble plus facile de retenir.

On voit aussi sur l'exemple précédent que les grands calculateurs procèdent de gauche à droite (aussi bien pour l'utilisation des

¹¹ Régnault, J. (1952) *Les calculateurs prodiges: l'art de jongler avec les nombres (illusionnisme et calcul mental)*. Paris : Payot.

¹² Bacquias, M. (1990) Calcul-lecture. *Bulletin de l'APMEP*, 375, 453-459. Cette procédure est aussi évoquée par Brissiaud (1989, op. cit.).

termes ou des facteurs que des chiffres). Cette loi apparaît explicitement aussi dans certaines propositions didactiques¹². Il est certain que la possibilité de calcul est liée au registre de nombres, ou espace numérique, à disposition du calculateur. Il faut que les nombres en présence et le résultat fassent partie de son registre numérique. Cela expliquerait, par exemple, le fait que de jeunes élèves procèdent en utilisant des procédés reprenant l'algorithme de calcul en colonne qui est coûteux du point de vue calcul mental, alors que des élèves plus âgés peuvent plus facilement retrouver des résultats par d'autres procédures¹³. En effet, le travail avec l'algorithme «en colonne» permet de traiter de grands nombres même si l'on est incapable d'interpréter ou de donner un sens au résultat¹⁴. Les possibilités de travail par approximation est certainement aussi lié à la richesse de ce répertoire.

Ce répertoire est constitué de nombres dont on connaît des particularités intéressantes : $111 = 3 \times 37$; $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Mais il peut également faire appel à des aspects visuels (nombres triangulaires), voir auditifs, tactiles et même semble-t-il olfactifs. Les répertoires des calculateurs prodiges sont impressionnants voire hypertrophiés. Ils semblent toujours liés à des histoires de vie particulières (consultation névrotique du calendrier), à un attrait particulier pour les nombres qui mène à jouer avec tous ceux que l'on rencontre (plaques de voitures, numéros des cantiques affichés à l'église!).

¹³ Boule, op. cit.

¹⁴ L'algorithme en colonne apparaît ainsi comme un outil permettant d'acquérir un répertoire mais aussi comme une invite au psittacisme.

¹⁵ Guggisberg, V. (1993) *Une calculatrice de poche dans l'enseignement spécialisé: pour compter et pour raconter*. Neuchâtel: Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques. Recherche 93.102.

Véronique Guggisberg¹⁵ proposait de rendre les enfants conscients de leur répertoire par des périodes de discussion et de mise en commun. Dans l'expérience qu'elle relate, une calculatrice servait à la fois de prétexte à cette pratique et de mémoire.

Différents niveaux de procédures

Les procédures liées aux structures cognitives de base

Les recherches en neuro-psychologie¹⁶ montrent qu'à la base du nombre et du calcul, le cerveau possède des circuits cérébraux spécialisés pour le traitement des petits nombres (jusqu'à trois) qui constituent l'accumulateur. Des calculs portant sur des petits nombres vont donc s'effectuer à l'aide de ces circuits selon un processus neuronal inconscient connu sous la dénomination de «subitisation».

Plus ou moins lié à ce processus, on montre aussi que l'addition de petits nombres va demander une évocation de la procédure +1. Le temps de calcul va donc être proportionnel à la somme des nombres chez de petits enfants puis au minimum des deux termes vers 7 ans. Chaque addition de l'unité va ainsi demander environ 4 dixièmes de seconde¹⁷. Cette loi du minimum souffre des exceptions pour les doubles (4+4) et ne s'applique plus chez des enfants plus âgés.

Guggisberg, V. & Balmelli, A. (1992) Usage d'une calculatrice de poche dans l'enseignement spécialisé. *Math-Ecole* 151, 23-28.

¹⁶ Selon Dehaene, op. cit.

¹⁷ Ce résultat «historique» de Groen & Parkman est rapporté par Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution de problèmes*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

A ce niveau intervient également le recours à la mémoire à long terme (MLT) dont le temps d'accès est variable (en moyenne 1,3 secondes pour $8+7$).

Les variations sont liées à divers facteurs. Ce temps d'accès serait principalement lié à la longueur du calcul, mais il semble que l'on pourrait également évoquer des procédures mixtes. Ainsi pour additionner $15+17$, un recours à la MLT aurait lieu pour $15+15$; les passages de 17 à 15 et de 30 à 32 seraient de type subitisation. On retiendra le mot de «glissement» pour nommer ce phénomène. Bab (6 ans) qui répond 8 à la question «combien font $5+3$ » et ajoute «parce que c'est $4+4$ » semble en fournir un témoignage.

Les procédures naturelles

Ces procédures sont celles considérées par le calcul réfléchi. Il semble utile d'en distinguer deux grandes catégories, celles qui mettent en œuvre le registre et celles qui procèdent par transformation du calcul. Selon notre cadre, les premières sont globalement moins coûteuses dans la mesure où l'information à disposition reste toujours visible.

Les procédures avec transformation demande un plus grand effort de mémorisation ($31-18 \rightarrow 30-17$). Toutefois, il semble que pour certains élèves, le fait d'utiliser un procédé «bien» connu prime sur son efficacité.

Les principes généraux qui permettent d'orchestrer ces opérations de base sont d'une part que les termes et les digits sont pris dans l'ordre de lecture, c'est-à-dire de gauche à droite.

Toutefois, dans certains cas, le terme le plus grand ou le plus «attirant» est considéré en premier. Mais cela ne va pas sans problème: on trouve par exemple que l'addition $54+27$

prend environ 5 secondes alors que $27+54$ va prendre 1,5 secondes supplémentaires pour certains sujets. La différence pourrait être attribuée à une valse-hésitation entre deux procédures.

De même, dans le calcul $15+17+5$ le regroupement du 15 et du 5 est intelligent, mais selon le calculateur, ce n'est pas la procédure la plus efficace.

Les procédures élaborées

Les procédures naturelles vont permettre de calculer 15×112 soit en faisant $10 \times 112 + 5 \times 112$ ou en considérant $30 \times (60-4)$. L'utilisation de $10 \times (112 + 56)$ dépasse ce stade et va faire partie des procédures élaborées que l'on peut découvrir par soi-même mais qui suppose en général un certain enseignement.

C'est le domaine des calculateurs «instruits» qui vont par exemple considérer des règles du type : $37 \times 39 = 38 \times 38 - 1$ puis $38 \times 38 = 36 \times 40 + 4$. On a regroupé un certain nombre de ces procédures en encadré (voir pages 34 et 35). Si elle ne sont pas vraiment utiles de nos jours (à moins de vouloir réaliser des «tours» de calcul), elles peuvent constituer de bonnes situations problèmes ayant trait aux nombres et aux propriétés des opérations. Certaines d'entre-elles figurent d'ailleurs à ce titre dans des moyens d'enseignement de nos écoles.

En définitive, le calcul mental suppose donc la connaissance d'un répertoire de résultats, des règles de fonctionnement du système de numération (orales et écrites) et l'utilisation de certaines règles de transformations licites sur les opérations concernées. C'est son aspect formel. Mais il met également en œuvre de façon essentielle des circuits cérébraux divers, mémoire de travail, répertoire dans la mémoire à long terme, aspects visuels, verbaux ainsi qu'un accumulateur.

Que peut-on modéliser ?

Registre et contrôle du registre

Au niveau de la mémoire de travail, il est naturellement possible de créer une «case» servant de registre pour les résultats partiels. Il faut également contrôler ce registre afin de ne pas y enregistrer de résultats intempestifs.

Par exemple dans le calcul $31-18$ après avoir cumuler 20, le calcul de $1-8$, se transforme en 7, qu'il ne faut pas cumuler mais reprendre afin d'effectuer la soustraction.

Répertoire – nombres-noyaux et nombres-amis

L'espace numérique ne pourra se référer qu'à des relations entre des nombres (les aspects visuels et tactiles ne peuvent être envisagés pour des raisons évidentes de complexité et de nature!).

On considérera les nombres-noyaux (en mode additif ou multiplicatif) dont toutes les décompositions sont connues de façon quasi instinctive. A côté de cela, on considère les nombres-amis qui sont des groupes de nombre dont le résultat est aussi connu ($45+55$).

A noter qu'il faut considérer des progressions; ainsi on connaît tout d'abord des couples amis concernant 100 ($50+50$, $45+55$, etc.).

Par glissement, ce répertoire s'élargit au fur et à mesure de l'exercice et un dispositif peut se mettre en place qui permet de trouver rapidement le complémentaire d'un nombre à 100. Ce procédé peut devenir ensuite complètement «instinctif».

Les procédures de base

On retiendra l'itération de la procédure +1 de même que des procédures liées au fonctionnement verbal du code: $100+12 = 112$. Il faut aussi considérer les reconstructions telles que $10+20$ à partir de $1+2$. Le calcul étant donné en ligne, il faut aussi penser que certains calculateurs travailleront sur les chiffres (de gauche à droite). C'est assez aisé pour $112+23$, le procédé peut également se généraliser par des approximations successives lorsqu'il y a peu de retenues ($112+91$). Par contre, ce procédé n'entre plus en ligne de compte dans des cas plus complexes ($112+89$).

Les procédés naturels

Parmi les opérateurs, on considérera tout d'abord la famille des opérateurs de cumul: $54+27$ (on commence par cumuler 54 ou 50 ou même directement 70), $108 - 94$ (on commence par cumuler 8), $102-6$ (on commence par cumuler 4). Mis à part le dernier exemple, ils ménagent relativement le travail de la mémoire dans la mesure où les données restent à disposition.

Une autre famille est celle des compensations avec emprunt ($57+24 \rightarrow 60+21$), le grignotage ($31-18 \rightarrow 30-17$), l'ajout ($28-19 \rightarrow 29-20$) et l'évaporation ($29-15 \rightarrow 19-5$). Ici la mémoire de travail est mise à plus forte contribution. Lorsque la multiplication intervient, il faut encore considérer les compensations multiplicatives ($15 \times 12 \rightarrow 30 \times 6$) et les décompositions ($12 \times 15 \rightarrow 150 + 2 \times 15$).

Les savoirs mis en œuvre correspondent à chacun de ces procédés. En tout premier lieu on trouve évidemment la connaissance du système positionnel sans lequel la manipulation des «grands» nombres devient pratiquement impossible (mais cette connaissance peut être remplacée par un riche répertoire de nombres-amis, par exemple liés à 5).

Il y a ensuite les propriétés classiques des opérations: commutativité et associativité qu'il est difficile de dissocier, et la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. Il faut également inclure une certaine perception des nombres relatifs (savoir que l'on peut considérer en cours de calcul le nombre -10 !).

Finalement, bien que découlant des propriétés générales des opérations, on peut aussi prendre en compte des propriétés plus primitives telles que la compensation additive ($12+8 = 10+10$) et multiplicative ($4 \times 25 = 2 \times 50$). On a ajouté également une capacité de réversibilité, qui indique une connaissance des tables telle qu'il est possible de les utiliser «à l'envers».

Des principes généraux

Le problème est de savoir comment choisir une procédure plutôt qu'une autre. Cela va dépendre naturellement des concepts qui sont maîtrisés. Les nombres en présence peuvent aussi influencer ce choix, en particulier la numérosité (le nombre de chiffres), l'angulosité (le nombre de chiffres sans les zéros de droite), la capacité de reconnaître la divisibilité d'un nombre par un autre et la proximité de nombres connus. Ainsi en présence de $990 + 445$ on peut considérer 1000 sans analyser l'autre nombre en présence.

Conclusion

En définitive, le regard porté sur le calcul mental a évolué au cours des années. Actuellement, ce n'est plus un outil utile en lui-même, au delà de quelques procédures naturelles. Il garde toutefois un intérêt pédagogique certain.

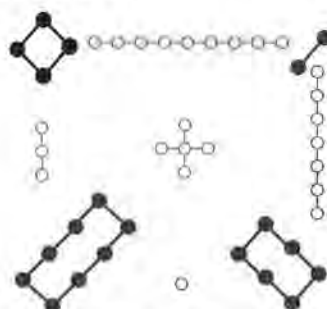
Tout d'abord, il implique non seulement la mise en œuvre d'un algorithme mais aussi d'une stratégie. Ensuite, il constitue un domaine où il est relativement facile de procé-

der à une certaine introspection: essayer de formuler la manière dont on calcule.

Il permet également une certaine réflexion par rapport à une stratégie pédagogique basée sur une progression fixée a priori. En effet, il y a un saut entre les propriétés des opérations et les règles mises en œuvre dans les procédés naturels. Il montre qu'un va et vient, favorisé par la médiation de l'enseignant, s'avère nécessaire entre les règles enseignées et les pratiques effectives

La perspective de l'automate implique de considérer des éléments hors du champ purement mathématique (la théorie des machines à états finis pourraient toutefois fournir un modèle envisageable). On a vu qu'entraîne en considération l'utilisation d'un registre et que la façon dont l'énoncé était présenté avait une influence sur la méthode utilisée. Par contre, il resterait à mieux comprendre la manière dont les choix des méthodes sont effectués en constatant que celles-ci peuvent évoluer en cours de calcul. Ainsi, il pourrait être intéressant de mieux caractériser le «superviseur» qui semble être mis en œuvre pour suspendre un calcul afin de permettre au calculateur de repartir sur une nouvelle voie.

Le calcul mental est encore loin d'avoir livré tous ses secrets !



La forme des nombres: diagramme figurant dans le «Lo chou» ou «Livre de la rivière Lo». Selon la légende, ce diagramme a été relevé sur le dos d'une tortue. Le «Lo chou» serait dû au premier roi du 9^e Ki, Se-Hoang (repris de Régnauld, J. (1952) *Les calculateurs prodiges*. Paris: Payot).

Quelques procédures élaborées

On sait généralement obtenir le carré des nombres se terminant par 5.

$$65 \times 65$$

On multiplie le chiffre des dizaines par lui-même augmenté de 1: 6×7 ; à retenir 42

On juxtapose 25: 4225

Cette procédure se généralise de la façon suivante:

Multiplication de deux nombres à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est le même et les unités sont complémentaires par rapport à 10

$$74 \times 76$$

On multiplie le chiffre des dizaines par lui-même augmenté de 1: 7×8 ; à retenir 56

On multiplie les chiffres de unités: $4 \times 6 = 24$

On juxtapose: 5624

Même situation, mais les chiffres des dizaines diffèrent d'une unité

$$43 \times 57$$

On multiplie le chiffre des dizaines du petit par celui du grand augmenté de 1: 4×6 ; à retenir 24

On multiplie les chiffres des unités: $3 \times 7 = 21$

On juxtapose: 2421

On additionne 10 fois le nombre des unités du petit nombre: $2421 + 3 \times 10 = 2451$

Multiplication de deux nombres à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est le même (les unités sont quelconques)

$$63 \times 64$$

On multiplie un nombre augmenté des unités de l'autre par le chiffre des dizaines: 6×67 ; à retenir 402; on multiplie les chiffres de unités: $3 \times 4 = 12$

On «juxtapose» avec décalage: 4032

Multiplication de nombres voisins de 100 (selon Sol Stone¹⁶)

$$97 \times 86 ;$$

On additionne les nombres $97 + 86 = 183$; on supprime la centaine ; à retenir 83

Complément de 97 à 100: 3

Complément de 86 à 100: 14

Produit des compléments: $14 \times 3 = 42$

On juxtapose: 8342

Question: quelles sont les limites de validité de ce procédé?

¹⁶ Stone S. (sans date) *Méthode Sol. Stone : l'art de vite calculer*. Cirque Barnum.

Racine cubique d'un nombre (selon Mantis¹⁹)

Le problème est de retrouver la racine cubique d'un cube parfait.

Un calculateur connaît les cubes des nombres de 1 à 9

nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cube	1	8	27	64	125	216	343	512	729

On notera également que le chiffre des unités des cube est soit égal au nombre de départ (pour 1, 4, 5, 6, 9) soit son complément à 10 (pour 2, 3, 7, 8). C'est aussi un fait que tout calculateur qui se respecte se rappelle (à l'aide d'un procédé mnémotechnique).

Cas des cubes de nombres de deux chiffres:

En voyant 274 625 on sait tout de suite que la dizaine doit être 6 et que le chiffre des unités est 5: résultat 65

En voyant 238 238 on sait tout de suite que la dizaine doit être 6 et que le chiffre des unités est 2: résultat 62

Cas des cubes de nombres de trois chiffres, exemple : 143 055 667

Le procédé précédent nous montre que le résultat est de la forme $x = 5?3$

Pour déterminer le chiffre des dizaines, Mantis va effectuer une réduction modulo 11 dont il connaît la table.

$x_3 \bmod 11$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x \bmod 11$	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

Pour calculer le reste de la division par 11, il suffit de faire la somme alternée des chiffres du nombre (les chiffres de position impaire étant pris positivement) :

$$143\ 055\ 667 \bmod 11 = 22 - 15 = 7$$

$x \bmod 11$ doit valoir 6 selon la table des reste modulo 11

$$5 + 3 - ? = 6 \text{ conduit à } x = 523$$

Question: ce procédé est-il applicable aux racines carrées, cinquièmes, etc.

¹⁹ Mantis (1908) *Curieuses expériences de calcul sur les quatre règles et la racine cubique*. L'illusionniste.

Mathématiques 1P ... Du nouveau pour les enfants, pour les enseignants & pour les parents

Janine Worpe

Bienne, lundi 22 septembre.

Dès 15h30, les parents arrivent à l'école, accueillis par leurs enfants.

Les élèves 1P de ma classe à deux degrés vont, pendant plus d'une heure, montrer les maths qu'ils font depuis six semaines et moi, je me réjouis des questions et des échanges que cela risque de susciter. ►

NOUS INFORMONS NOS PARENTS :

APPRENDRE A RAISONNER 1
 J'apprends à lire une consigne et à la comprendre.
 J'étudie des relations entre des affirmations.
 Je m'exerce à raisonner.

CARNAVAL

LE DRAGON ET LA LICORNE

TOUCHE PAS A LA COULEUR

Pendant le goûter, je rappelle le but de cette rencontre :

- Les enfants présentent les jeux, expliquent les règles et jouent avec les parents

Aujourd'hui, le tableau noir sert à deux choses :

1. à s'organiser (qui joue ? à quel jeu ? avec qui ?) Chacun mettra son nom à côté des titres des jeux.
2. à informer¹ (Qu'apprenons-nous en jouant ?)

CONNAÎTRE LES NOMBRES 2
 Je fais connaissance avec les nombres.
 J'apprends à les écrire.

LES COUSINS

LA BOÎTE CHANTANTE tous

COMPTINES 1, 2, 3... BEAUCOUP

SE SITUER DANS L'ESPACE 4
 J'apprends à me repérer dans l'espace à imaginer et choisir un itinéraire.

LES PINGOUINS S'ÉCHAPPENT

LA TRAVERSÉE INFERNALE

LE BALADIN

Parmi les objectifs des apprentissages (page 29 du livre du maître), énoncés dans le langage des enfants, j'ai choisi ceux qui correspondent aux activités de ces premières semaines dans les modules 1, 2, 4.

¹ Le 9 septembre, lors d'une soirée réunissant tous les parents de ma classe 1P/2P, j'ai présenté la vidéo «Compter avec les élèves» et j'ai distribué le dépliant de même nom, pour information.

Je trouve important de montrer l'amorce de la démarche, y compris celle de l'évaluation. *Peu à peu, chaque enfant construira «sa référence» en dessinant, en écrivant, en choisissant les exercices qui illustrent le mieux ce qu'il aura appris. Ce document donnera une information aux parents sur le travail effectué dans chaque module.*

Les enfants lisent les titres des jeux qu'ils ont soigneusement décorés aux mêmes couleurs que les informations liées aux trois modules.

Je montre ensuite sur le plan annuel où se situent ces mêmes activités. Cela répond en partie à la question d'une maman : «C'est une méthode complètement nouvelle ? On ne fait plus du tout ce qu'on faisait avant ? Plus de livrets ? Plus de calculs ?».

Je montre la place réservée aux apprentissages numériques (modules 2 et 3) et je relis les buts des six modules, ce qui la rassure.

Nous commençons par une partie de *Boîte chantante* dans un climat de grande concentration. Puis les groupes se répartissent dans la salle et les jeux commencent.

Comme un reporter, je passe près des enfants avec mon enregistreur. Ils expliquent les règles de chaque jeu avec beaucoup de sérieux et de précision. S'écouter expliquer devient un jeu supplémentaire ! Je fais quelques photos pour le livre de vie de la classe.

Un peu comme sur un nuage, j'observe tous ces échanges verbaux et non-verbaux. J'y vois le plaisir, la curiosité, l'envie de chercher, des rires, des étonnements, les rappels de la règle par les enfants, les questions subtiles des parents qui permettent aux enfants de préciser leur démarche et de clarifier leur pensée. Et parfois, la poésie : «Papa, tu verras, dans ce jeu, le dragon gagne toujours sur la licorne. Il crache du feu et il vole; il est vraiment le plus fort».



Je perçois avec émotion l'engagement réel des joueurs, cette vitalité soudaine faite de confiance, d'audace, d'envie de trouver, de fierté, avec, en plus, du côté des parents, la tendresse patiente et attentive qui accompagne sans enfermer. Pour la mise en commun, nous sommes tous assis au coin lecture. Les remarques fusent :

«J'aimerais encore expliquer le jeu des *Pinguins* dans la cassette».

«Et moi, je n'ai pas pu jouer à *Carnaval*, ni au magasin». C'est ainsi qu'ils nomment l'activité *Les cousins*.

Nous écoutons l'enregistrement d'un enfant qui explique comment il fait pour aller chercher à l'autre bout de la salle «juste ce qu'il faut de carrés pour recouvrir toutes les cases blanches du bonhomme».

La discussion est animée : « Moi aussi je compte avant de partir avec mon panier, mais il faut mettre le nombre dans sa mémoire et encore compter les carrés quand on les prend au magasin ». (C'est la première fois que la démarche est verbalisée aussi complètement).

En parlant du *Baladin*, une maman dit que le hasard du dé l'a fait tourner longtemps dans le même quartier. Deux idées de variantes sont proposées :

- prendre 2 dés : on pourrait alors choisir les points d'un dé ou le total des 2 dés
- chaque joueur a 2 pions de même couleur au départ pour se déplacer dans la ville.

Une règle du jeu peut s'inventer, se discuter, se modifier (avant la partie à jouer, bien sûr !) Elle sera expérimentée avec intérêt et le jeu s'enrichira.

«On essaie maintenant ? Oh oui !...»

On n'a pas vu le temps passer. C'est l'heure de se quitter.

«Mais nous reviendrons» disent les parents aux enfants infatigables.

Quand je ferme la porte de ma classe, il y a comme un «bonheur d'apprendre» qui flotte encore dans la salle.



Formation initiale en mathématiques et nouveaux moyens d'enseignement ou le privilège d'être assis entre deux chaises ... ou plus!
Jacques-André Colombe

Cadre de notre réflexion

Le Plan d'études à l'École normale de Neuchâtel prévoit, dans les différentes disciplines d'enseignement, une alternance entre cours/séminaires et stages pratiques, tout au long du cursus des trois ans de formation initiale des futurs instituteurs et institutrices.

Plus particulièrement, en mathématiques, les intentions que nous avons retenues sont les suivantes:

* Inscrire les cours, les séminaires, les travaux personnels et de groupes dans une perspective de recherche et de formation permanente.

* Faire découvrir aux étudiants que les divers champs de la mathématique sont en liaison étroite les uns avec les autres, et permettent le plus souvent d'établir des ponts avec d'autres disciplines d'enseignement.

* Favoriser chez les étudiants un climat de confiance et d'ouverture qui permette de concilier les exigences d'une approche scientifiquement correcte des mathématiques avec celles du respect de la pluralité d'expressions pour bien vivre l'enseignement.

Quant aux contenus des rencontres (cours/séminaires), ils visent au moins trois buts pour chaque étudiant:

1) être à l'aise sur le plan technique en mathématiques (niveau primaire et secondaire inférieur);

2) élargir sa culture personnelle dans différents domaines liés de près ou de loin aux mathématiques;

3) aborder différents thèmes de didactique en lien direct avec la conduite d'une classe, si possible à trois niveaux (petite enfance, enfance, adolescence) .

Vaste programme! Ajoutons ici le changement de moyens d'enseignement lié à l'évolution didactique en mathématiques en phase de transition pour les cinq années à venir...nous voilà comblés!

Les enjeux

Les enjeux sont de taille: il s'agit de repenser aux modèles d'apprentissages préconisés en classe, et donc parallèlement, à ceux qui seront proposés tant en formation initiale chez les étudiants qu'en formation permanente chez les enseignants concernés.

Comment donc viser juste, si possible, en étant forcément assis entre deux chaises au moins: la première chaise, liée aux moyens d'enseignement encore en vigueur pour trois ans au plus (en 4^e année), n'est pas encore complètement usée, et la seconde chaise, toute neuve, n'a pas encore été éprouvée comme plus solide par chacun.

Les partenaires de la formation initiale

A nos yeux, il y a deux types de partenaires

Les partenaires «visibles»:

Les maîtres de didactique ou de méthodologie, les maîtres de stages et leurs élèves, les étudiants, et selon les cas les conseillers pédagogiques ou inspecteurs, forment les principaux partenaires du premier groupe. Ils sont présents in situ, hic et nunc !

Les partenaires «invisibles»:

Nous pensons que, parallèlement, d'autres partenaires peuvent exister, parfois dans l'ombre: les enseignants, les parents, les éducateurs qui ont marqué la scolarité et les études antérieures des étudiants. Les «héros» auxquels ils se sont identifiés dans leur enfance, les «personnages idéaux» qu'ils prennent pour modèles dans l'adolescence. Loin de se limiter au seul domaine scolaire, ces modèles peuvent se recruter parmi les artistes, les sportifs, les éducateurs sociaux, les aventuriers...le plus souvent des personnes au profil marqué. Parmi les «héros» peuvent se cacher les «anti-héros», dont ils souhaitent prendre le contre-pied.. Dans l'enseignement ou l'éducation, on pourrait le percevoir dans des propos tels que «jamais je ne pourrai enseigner comme elle, comme lui...» ou «moi, si un jour j'ai des enfants, j'essaierai vraiment de faire autrement...».

Formation initiale et conflits de loyauté

Nous avons pris l'habitude de tenir compte des paramètres humains précités dans la manière de faire connaissance avec les nouveaux étudiants de chaque volée. Les premières journées, dites d'accueil, à l'Ecole normale doivent favoriser un décentrement de soi, afin de faire connaissance d'un nouveau milieu, celui des études dans une école à caractère professionnel.

En mathématiques, nous utilisons plusieurs jeux d'animation pour faire connaissance, nous tentons de faire émerger nos diverses représentations des mathématiques et de mettre au service des uns et des autres nos qualités plutôt que nos défauts. Ceci permet aussi de s'inscrire dans une perspective où tout devient nouveau tout en étant conscients que le passé fait partie de notre histoire, mais une histoire à revisiter, à réinterroger.

C'est alors l'occasion de fixer un certain

nombre de règles de vie et de fonctionnement en groupe: par exemple en fonction des attentes respectives des partenaires en mathématiques. Le contrat est explicité, mais les consignes et règles peuvent être revues si nécessaire après une période de cours ou de stages par exemple.

Le but est évidemment de clarifier au mieux les balises du parcours de chaque partenaire... mais on ne le dira jamais assez: cela n'empêchera pas les conflits de loyauté de se manifester régulièrement. Nous entendons par là que si un étudiant est dans une classe où l'enseignement est plutôt de type frontal, et que le modèle privilégié par le maître de didactique est de type socio-constructiviste, cet étudiant ne pourra pas répondre en fait aux attentes des deux partenaires! Un peu comme l'enfant pris entre deux modèles éducatifs au moins: celui de la maison et celui de l'Ecole. Toute communication connaît ses limites, même avec une bonne volonté évidente de chaque partenaire en présence. Et c'est, nous le croyons personnellement, à cet endroit qui touche d'abord à l'être profond et à ses interprétations du message reçu liées à ses représentations, que vont s'articuler une bonne part des conflits nécessaires qu'il incombera aux divers partenaires de gérer.

Quelques exemples

Imaginons tout d'abord qu'un étudiant ait bien vécu ses études secondaires en mathématiques, et que le modèle privilégié de ses maîtres était de type structuraliste ou behavioriste. Qu'en outre, le travail individuel ait été lui aussi prépondérant et les modes d'évaluation axés essentiellement sur la mémorisation-restitution (en clair «j'apprends par coeur, je réécris ce que j'ai appris par coeur, c'est ainsi que j'obtiens la meilleure note»).

Il nous paraît dès lors possible que pour cet étudiant, un modèle de type socio-constructiviste

tiviste, au coeur des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques en Suisse romande (1P-4P), pour lui «déboussolant» : il remettra en question ses représentations de l'apprentissage, ses idées sur l'apport du travail en petit groupe où la confrontation d'idées personnelles et parfois contradictoires, nécessitant un temps d'écoute et d'argumentation, est fondamentale. Par la même occasion, les rôles du maître et de l'élève/étudiant sont eux aussi redéfinis.. Ajoutons-y pour faire bon poids une autre vision de l'erreur que celle traditionnelle de «faute = sanction = mauvaise note»... et vogue la galère !

Imaginons ensuite qu'un autre étudiant, dans les mêmes conditions, ait fort mal vécu ses études dans ce climat (avec ou sans difficultés particulières en mathématiques). Il est possible que le passage aux nouveaux moyens d'enseignement soit alors accueilli à bras ouverts même si la personne perçoit par ailleurs les enjeux d'un nouveau rôle du maître avec la même interrogation au départ.

Nous pourrions ainsi continuer avec ceux qui, moins nombreux il est vrai, ont déjà vécu dans un environnement socio-constructiviste, souvent davantage d'ailleurs à l'Ecole primaire que secondaire. Ils seront souvent moteurs au sein de groupes d'étudiants, mais aussi critiques éclairés car ils percevront mieux les difficultés liées aux qualités relationnelles requises pour vivre des mathématiques tant à partir du savoir-être que du savoir-savant, autrement dit autant à partir de l'être enseignant que des connaissances scientifiques pour elles-mêmes.

Être assis entre plusieurs chaises...c'est peut-être plus vrai

Pour le meilleur plutôt que pour le pire, voilà donc les étudiants formant non un groupe bien homogène, mais révélant douze personnalités, parfois bien marquées, dans

chaque sous-groupe avec lesquels nous travaillons. Et tant mieux! Rien de pire que l'indifférence ou la normalisation par l'uniformité. C'est ici que la réforme amorcée en mathématiques arrive fort à propos. En prenant le risque d'une pédagogie renforçant l'autonomie de l'élève et la différenciation dans le rythme, dans les procédures d'apprentissage, et le choix d'activités pertinentes adaptées aux diverses catégories d'élèves, les auteurs des nouveaux cours de mathématiques comme les autorités compétentes qui ont accompagné et diffusé ces ouvrages, vont permettre, nous le croyons, de vivre un moment de vérité:

Tous les maîtres concernés, et pas seulement les étudiants en formation initiale, ont déjà pu constater que le contenu mathématique n'est pas fondamentalement modifié, mais que le changement de statut de l'enseignant et de l'enseigné va mettre en lumière la capacité ou la difficulté de dépasser les seules connaissances à transmettre pour vivre avec la classe au quotidien.

La réforme liée aux nouveaux moyens d'enseignement devra s'inscrire, selon nous, dans la durée, car elle touche à l'être d'abord, en passant par la redéfinition du sens des activités proposées aux élèves.

Elle est plus pédagogique que mathématique et ne peut pas s'écrire entièrement dans un livre du maître! La formation qui s'annonce, proposée «à la carte» et dans des domaines bien spécifiques est précisément là pour allier pédagogie et mathématiques: évaluation formative, pratique du problème ouvert, vers une pratique autonome des mathématiques (en groupe, en classe), analyse d'énoncés de problèmes, autant de pistes bleues, rouges ou noires laissées au libre choix de chaque enseignant pour approfondir ses connaissances et rencontrer sa pratique professionnelle.

A nos yeux, s'il y a réforme, c'est une ré-

forme de sens (réflexion sur le choix des activités mathématiques et la gestion de classe qui lui est liée), et ce pourrait être une chance pour tous les partenaires à bien des égards :

1) les étudiants en formation et les maîtres chevronnés vont se retrouver pratiquement avec les mêmes questions et dans les mêmes catégories, sans que les uns aient de «leçon à donner aux autres»;

2) la formation initiale étant conçue comme premier élément de la formation permanente pour les uns, le recyclage ayant disparu au profit d'une formation permanente à la carte pour les autres, chacun est renvoyé à sa responsabilité et sa conscience professionnelle qui mèneront à une plus grande liberté et à des réseaux de maîtres de toutes les générations et de tous les cantons concernés ;

3) dans la pratique d'activités mathématiques, les fiches de calcul traditionnel vont disparaître au profit des procédures variées poursuivant cependant les mêmes buts: apprendre à calculer. Le silence parfois trompeur d'une classe dans laquelle la bonne réponse donnée par le bon élève au bon moment, permettait à l'enseignant de valider lui-même le travail et d'avancer à la fiche suivante, va céder le pas à la confrontation de procédures multiples... avec des échanges nécessaires et utiles à l'apprentissage dans des petits groupes d'élèves, suivie d'une mise en commun qui en apprendra plus au maître et aux élèves qu'une simple réponse donnée à tous les élèves (style juste ou faux, style «c'était si facile!», «il n'y avait qu'à faire ainsi»).

Cette réforme n'est pas une révolution, mais elle suit logiquement l'évolution des recherches en didactique.

Tout en respectant et en approuvant pleinement les grandes lignes de cette réforme en cours, nous tenons à affirmer que personne

ne doit être exclu de la course: partir de là où en sont nos collègues, partir du respect d'autres modèles et clés de lecture choisis au plus près de leur conscience en un autre temps et en d'autres circonstances relève d'une déontologie élémentaire qu'il n'est pas inutile de rappeler. En conséquence, remettre en question une pratique professionnelle ne peut s'inscrire que dans une perspective d'écoute active et de dialogue permanents entre tous les partenaires impliqués dans la course! Une chance à saisir pour inscrire les mathématiques à la proue et non à la poupe du navire scolaire de l'an 2000.

Dans une société de «zapping» et de «surfing» qui révèle rapidement ses limites autant que ses atouts, nous nous permettons de nous inscrire d'abord autour de quelques valeurs (définies comme telles pour nous):

* l'essentiel se jouera dans la relation entre les partenaires. Et à partir du vécu de chacun. Ecoute-respect-non jugement-confiance en soi pourraient résumer l'entrée en dialogue dans tout acte de formation initiale ou permanente.

* le sens des activités en mathématiques, le goût de l'aventure des partenaires à l'école et dans les instituts de formation seront fortement liés à la cohérence entre le dire et le faire, entre la théorie et la pratique.

C'est donc vers une analyse des pratiques que notre choix personnel se porterait volontiers aujourd'hui.

* la persévérance et la modestie, comme l'audace de dire ses difficultés d'enseignant autant que ses réussites pourraient être une première piste à suivre pour que la joie et l'enthousiasme prévalent toujours sur la morosité l'éventuel repli sur soi...dans une profession aussi enthousiasmante que difficile !

Découpage de carrés en triangles semblables

François Jaquet, IRDP.

Dans *Math-Ecole* no 175 (p. 29), nous avons posé le problème suivant, repris de la revue *Jouer, Jeux Mathématiques*, qui, depuis, a fusionné avec *Tangente*.

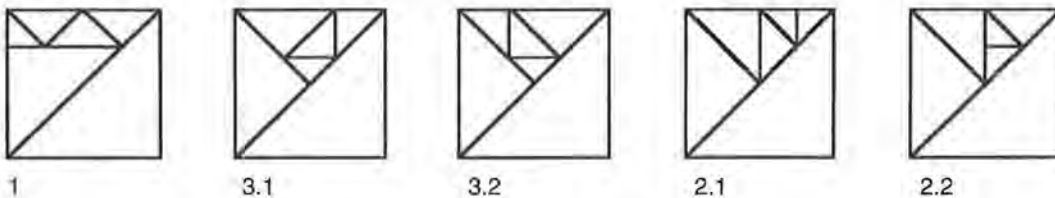
Combien existe-t-il de découpages différents (non superposables) d'un carré en six triangles semblables ?

Nous disions alors tout l'intérêt de ce problème pour la classe de mathématiques au vu des connaissances mises en oeuvre, allant des opérations sur les fractions à la résolution de l'équation du troisième degré, en passant par la similitude, les opérations sur les fractions rationnelles, les relations dans le triangle rectangle, la combinatoire, etc.

La présentation de ce problème conduisait à une question au lecteur : Y a-t-il vraiment 97 découpages différents comme le dit Nob Yoshigahara dans la revue japonaise *Puzzletopia* ?

Nous n'avons pas reçu beaucoup de réponses, pas plus que Michel Criton qui l'avait proposé dans *Jouer, Jeux Mathématiques* et qui a lancé un second appel dans *Tangente*.

figure 1



¹ Nous remercions F. Georges qui a eu la patience de réaliser les dessins des 93 découpages trouvés.

Il est vrai que l'inventaire complet est délicat et que nous n'en sommes toujours qu'à 93 solutions. Mais le problème se décompose aisément en parties indépendantes les unes des autres et, peut-être qu'ainsi, il permettra à des lecteurs et à leurs classes de se lancer dans des recherches favorisant la construction ou l'application stimulantes de connaissances fondamentales.

L'inventaire actuel de nos 93 solutions¹ ouvre ainsi un nouveau concours, pour chaque famille de triangles semblables : y a-t-il d'autres découpages possibles ? y a-t-il des doublons dans les solutions présentées ici, y a-t-il éventuellement d'autres familles encore ?

Famille 1 Les triangles semblables isocèles (27 solutions trouvées)

Le rapport entre les mesures des deux côtés de l'angle droit est 1 et caractérise cette famille (fig. 1 et 2).

C'est la première piste qui vient à l'esprit car les découpages du carré en 2 ou en 3 triangles semblables ne peuvent se réaliser qu'avec des triangles isocèles rectangles. L'inventaire qui suit fait apparaître 10 décompositions de l'unité en somme de 6 fractions. On remarque qu'il n'y a pas que des puissances de 2 aux dénominateurs de ces fractions. Ce sont les plus difficiles à trouver.

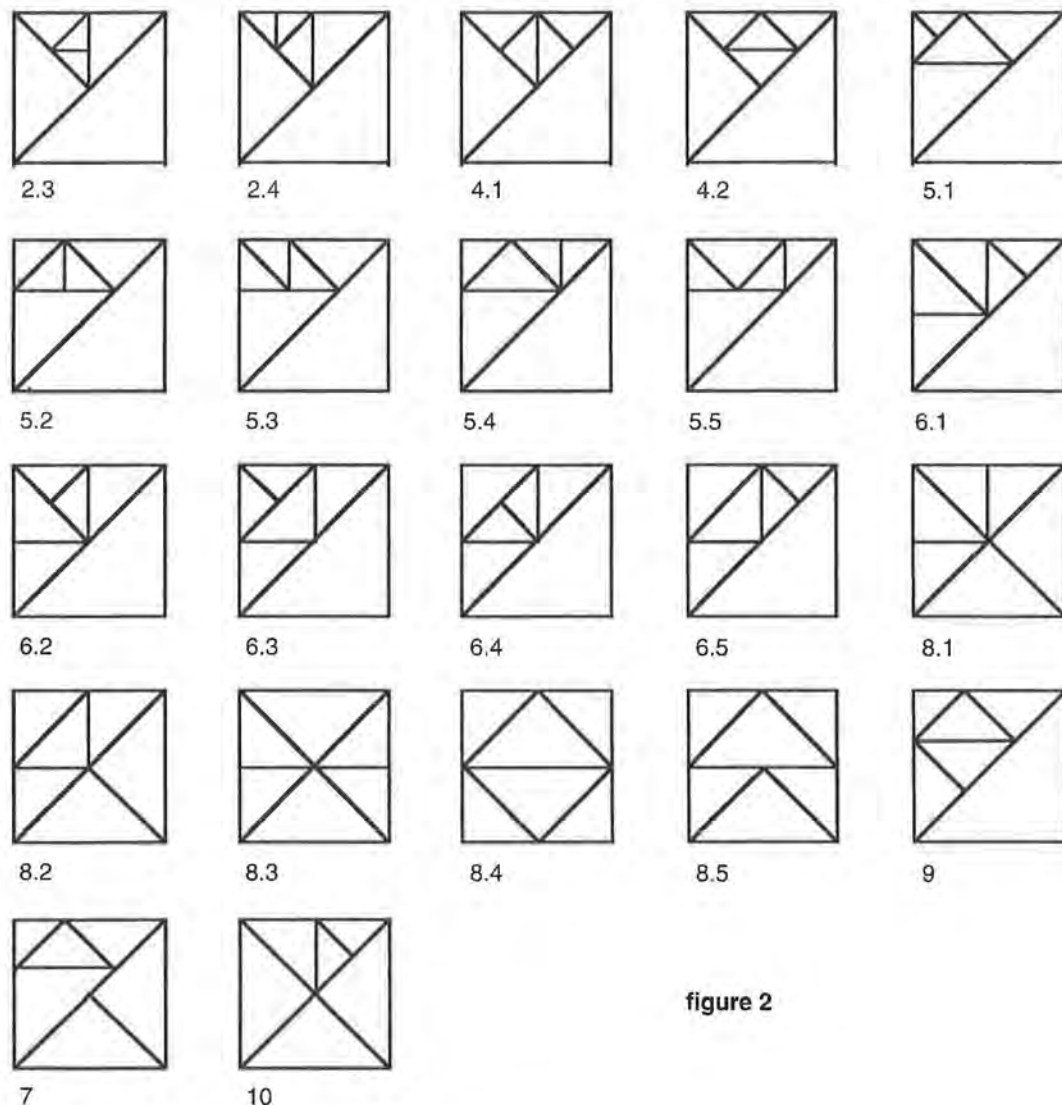
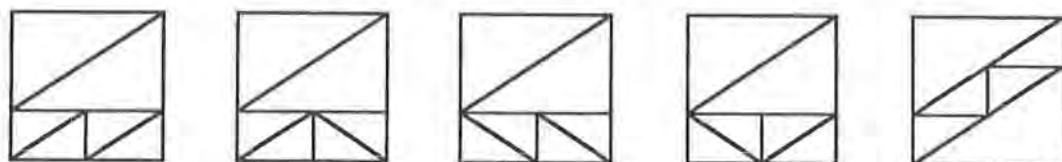


figure 2

Famille 2/3 (5 solutions trouvées)

Cette décomposition repose sur le découpage du carré en trois rectangles semblables : un «grand», dont la mesure de l'aire est $\frac{2}{3}$, et deux «petits», réduits de moitié et dont la mesure de l'aire est $\frac{1}{6}$.

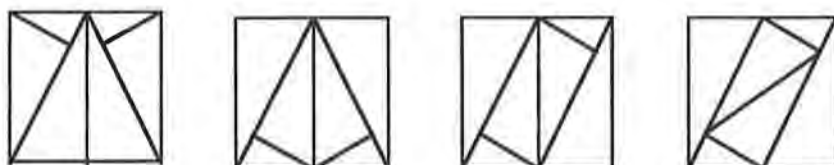
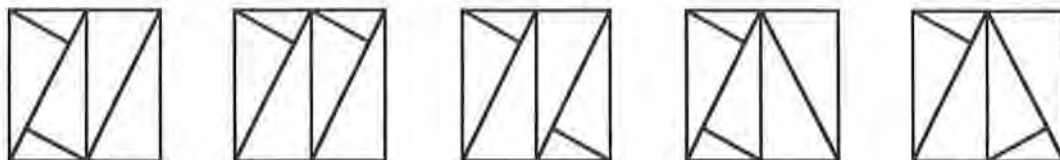


Famille 1/2 (17 solutions trouvées)

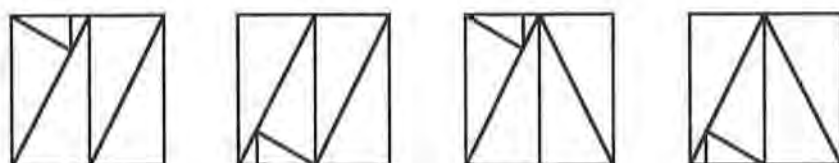
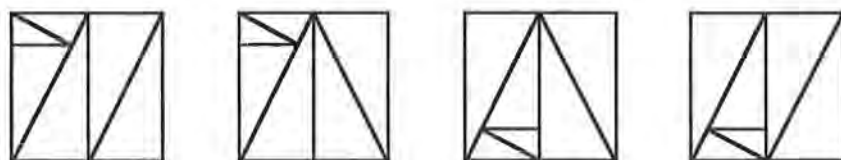
On commence par partager le carré en deux rectangles isométriques. On découpe ensuite chacun des deux rectangles pour obtenir quatre triangles isométriques.

On dispose encore de deux «degrés de liberté» pour arriver à un découpage en six triangles: le partage de deux des quatre triangles (type I, 9 solutions) ou le partage d'un seul en trois parties (type II, 8 solutions) :

type I

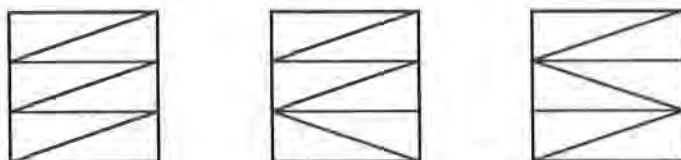


type II



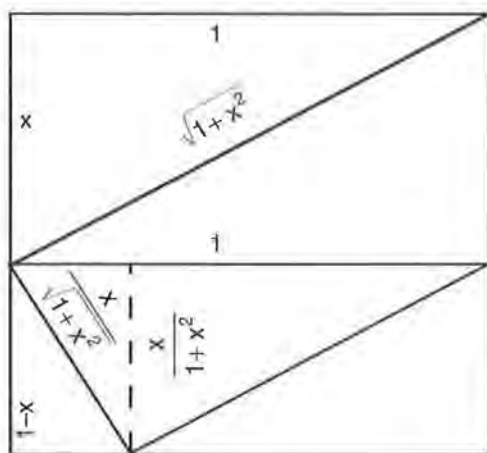
Famille 1/3 (3 solutions trouvées)

Cette famille est construite à partir du découpage du carré en trois rectangles isométriques.



Famille 0,569.... (32 solutions trouvées)

Il n'y a pas que des rapports rationnels entre les mesures des deux côtés des triangles rectangles. On peut imaginer en effet un partage du carré en trois rectangles semblables, mais non homothétiques. (L'un d'eux subissant une rotation d'un quart de tour par rapport aux deux autres.) ▶



Pour déterminer la mesure du petit côté de l'angle droit, on utilise de façon intensive les facteurs de similitude entre les différents triangles et la théorème de Pythagore :

De l'égalité : $1 - x = \frac{x}{1 + x^2}$

on aboutit à l'équation : $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

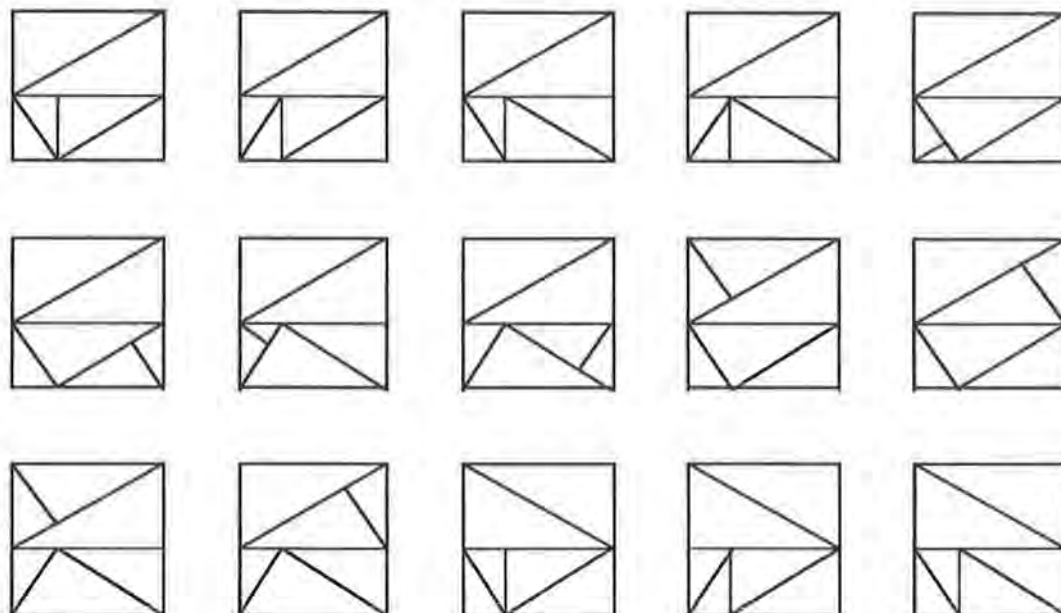
et à la solution réelle :

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{11 + \sqrt{621}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{11 - \sqrt{621}}{54}} = 0,569\dots$$

(Il n'est pas nécessaire de connaître la formule de l'équation du troisième degré pour trouver une bonne approximation de ce nombre, une calculatrice avec un programme de résolution d'équations s'en charge aisément.)

L'inventaire de ces découpages est long et réserve bien des surprises dans la disposi-

figure 3



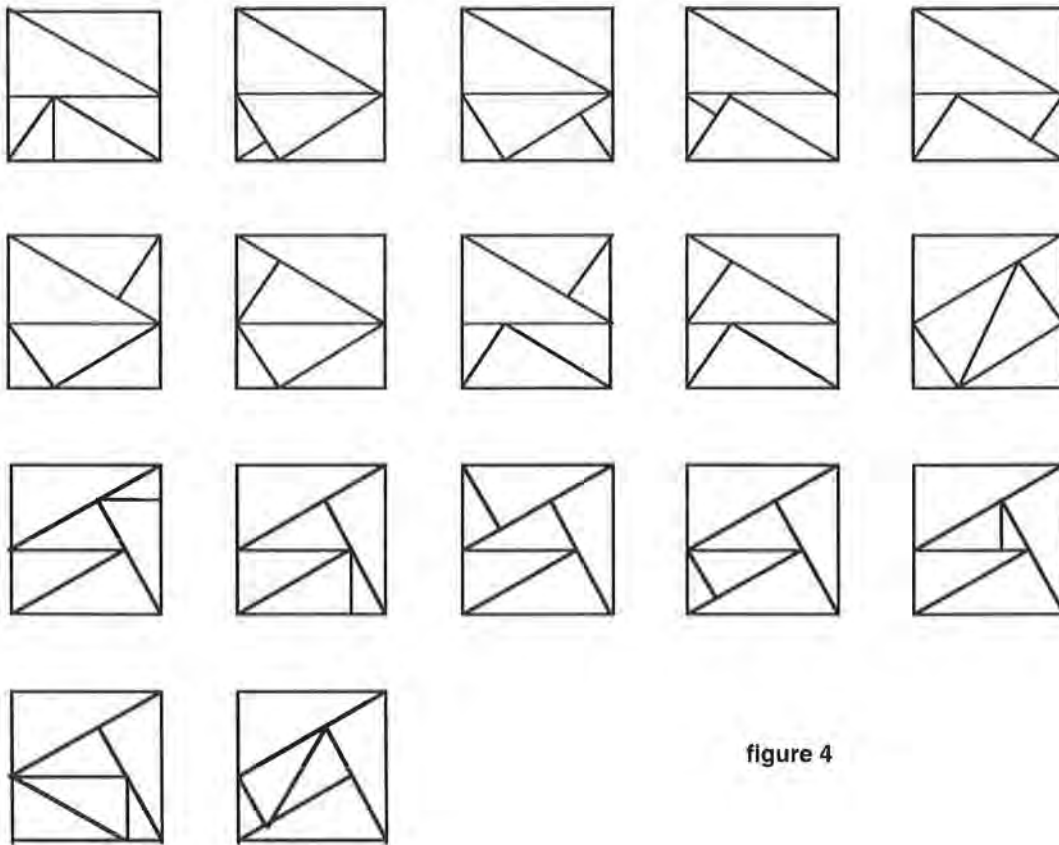


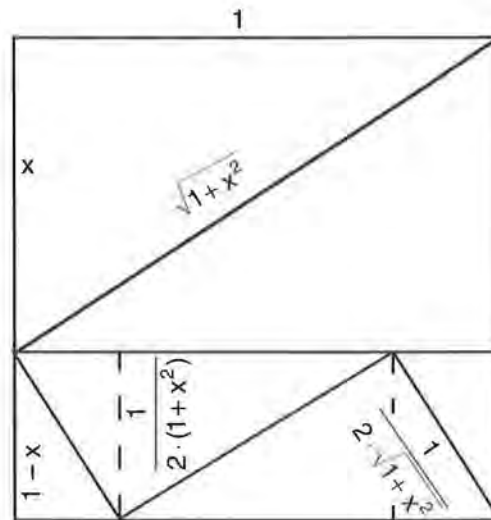
figure 4

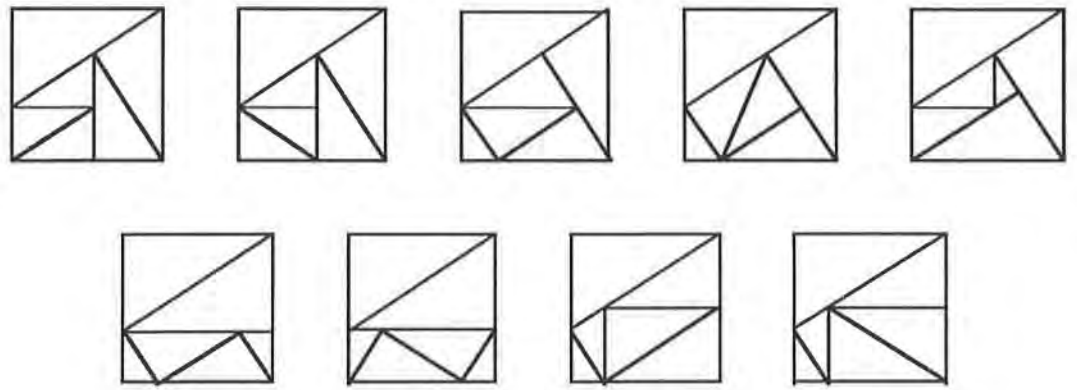
Famille 0,647.... (9 solutions trouvées)


Finalement, une dernière famille apparaît, inspirée du découpage du carré en quatre rectangles semblables.

Le calcul du rapport entre les mesures des côtés de l'angle droit aboutit à l'équation $2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$, dont la solution réelle est $x = 0,647...$

L'inventaire conduit à un véritable puzzle constitué de nombreux triangles, toujours semblables :





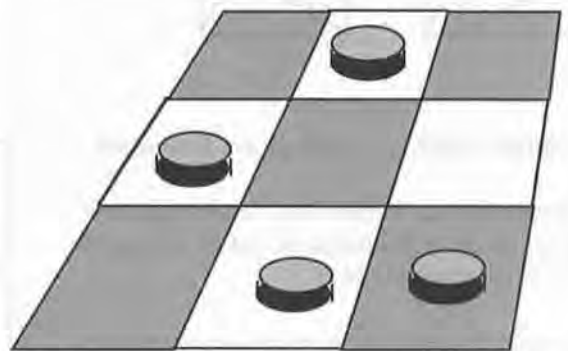


LE JOUEUR

JEUX
 Société et Stratégie
 Billard - Casino
 Bridge - Echecs
 Librairie

MAX HACHUEL

BOULEVARD HELVÉTIQUE 24
 CH - 1207 GENÈVE
 TÉL./FAX 736 48 56



Conditions spéciales pour les enseignants

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : **Math-Ecole - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

Veillez m'abonner à *Math-Ecole* . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veillez me faire parvenir :

Le Trésor de tonton Lulu (vol.1, 28 probl. de niveau "10")	(ex. à Fr. 25.-)*
Le Trésor de tonton Lulu (vol.2, 25 probl. de niveau "11")	(ex. à Fr. 27.-)*
Le nombre π , ADCS	(ex. à Fr. 40.-)*
Les jeux de NIM , par Jacques Bouteloup, ADCS	(ex. à Fr. 52.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye , APMEP	(ex. à Fr. 28.-)*
Fichier Evariste APMEP	(ex. à Fr. 20.-)*
Enseigner la géométrie dans l'espace , APMEP	(ex. à Fr. 32.-)*
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	(ens. à Fr. 30.-)*
Encyclopédie kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Mathématiques du kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Les pavages du kangourou , ACL	(ex. à Fr. 28.-)*
Les maths & la plume , ACL	(ex. à Fr. 14.-)*
Jeux et découvertes mathématiques , ACL	(ex. à Fr. 14.-)*
Panoramaths 96 , APMEP	(ex. à Fr. 20.-)*

Les anciens numéros de *Math-Ecole*

(prix en page 2 de couverture) :

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques (Fr. 13.- l'ex.)* :

- Niveau CM (degrés 4 et 5) : **Récrémaths** ex.
- Niveau collégiens :
 - Les Pentagones patagons** (n° 8) ex. **Le Serpent numérique** (n° 10) ex.
 - Le Trésor du vieux Pirate** (n°12) ex. **Le Singe et la Calculatrice** (n° 14) ex.
- Niveau lycéens et adultes :
 - La Biroulette russe** (n° 9) ex. **Le Pin's Tourneur** (n° 11) ex.
 - Le Roi des Nuls** (n°13) ex. **Le Sabre d'Aladin** (n° 15) ex.
- Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 5, 6 et 7) :

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : Mme M.

Adresse (rue et numéro) :

Localité (avec code postal) :

Date : Signature :

EDITORIAL :	
François Jaquet	2
Voyage au centre de la géométrie	
G. Sarcone et M. J. Waeber	3
Agrandissement et échelle : quelles difficultés pour les élèves ?	
M. Brêchet	10
Cabridées :	
Histoire de «parc aux mètres»	
M. Chastellain	15
Regard sur le calcul mental	
L. O. Pochon	19
Mathématiques 1P : du nouveau pour les enfants, pour les enseignants, pour les parents	
J. Worpe	28
Formation initiale en mathématiques et nouveaux moyens d'enseignement	
J. A. Calame	31
Découpage de carrés en triangles semblables	
F. Jaquet	35