MATH ECOLE

Le potager d'Aloïs

36e année

180

Etonnantes égalités mathématiques

Le jeu de la boîte

décembre 1997

MATH-ECOLE

36e année 5 numéros par an

180

décembre 97

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherches
et de Documentation Pédagogiques
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 6970
Fax (032) 889 6971

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Entre réalité et plaisir ... un peu de notre humanité !

J.-A. Calame, Ecole normale (NE)

Le quotidien est rempli de nouvelles souvent si tragiques qu'on en vient presque à se demander si aimer les mathématiques et y consacrer le plus clair de son temps n'est pas une fuite devant une réalité trop dure à supporter !

Car enfin, que peut bien apporter la mathématique, avec son cortège de rallyes et de problèmes ouverts, ses outils de calcul au service d'une situation–problème, dans un monde où règnent violence, intolérance, égoïsme, échecs politiques et économiques ? EEE ... on n'en parle plus, UE ... une abréviation qui passe encore mal chez nous, quant aux bilatérales ...

Et puis voilà! Un beau matin, interpellé par des didacticiens d'Italie et de Suisse ... me voici à Spiez, puis à Brigue où, l'espace de trois jours, l'analyse des problèmes de rallyes, de concours mathématiques sont à l'ordre du jour[1]. Une simple intuition ... ne serait-ce pas dans de telles rencontres que l'Europe concrète et humaine de demain est déjà bien présente?

Jugez vous-mêmes : Brigue, récemment si éprouvée par les trombes d'eau qui ont déferlé sur elle, et dont les habitants encore marqués ont retrouvé leur dignité dans un effort qui mérite d'être salué. Brigue accueille une trentaine d'enseignants très diversifiée : venant de Luxembourg, de Bourg-en-Bresse, de Neuchâtel, de Sion, de Parme, de Milan, de Cagliari, de Pavie ou de Sienne ; ils parlent ou comprennent peu ou prou l'italien, le français, l'allemand. En toute simplicité, les dessins ou les gestes accompagnent la pauvreté des mots, mais la nécessité de se comprendre parfaitement est de mise, car la traduction d'un énoncé de problème de mathématiques doit être rigoureuse pour comparer ensuite d'un pays à une autre les productions d'élèves réunis ainsi par delà les frontières.

Donc première caractéristique : origine et langues diverses, et volonté de comprendre et de se faire comprendre dans l'ouverture, la courtoisie.

A cela, ajoutons de suite l'absence de hiérarchie professionnelle. Aucun des participants ne s'est vanté de son passé, ne s'est prévalu de ses titres. En revanche, au fil des conversations, en cours de travail ou autour d'un verre de fendant, nous avons vite compris la force tranquille d'un tel groupe : maîtresses d'école enfantine, chercheurs et enseignants en didactique des mathématiques, formateurs d'enseignants, institutrices et instituteurs, professeurs, qui en primaire, qui au secondaire ou au lycée, dans des écoles normales, des séminaires ou à l'université... et tout ce monde réuni pour analyser et confectionner des problèmes accessibles à des enfants de 8 à 12 ans; l'enfant qui a besoin de l'adulte, mais pour le guider vers des valeurs faites d'ouverture, de respect d'autrui et de dons à partager avec les autres enfants de sa classe.

Deuxième caractéristique : on a besoin des qualités de tous, c'est la complémentarité des regards d'enseignants aux statuts diversifiés qui fait la force, l'efficacité, du groupe réuni à Brigue.

---

[1] Il s'agit de la première rencontre internationale sur le *Rallye mathématique transalpin*, tenue à Brigue, du 31.10 au 2.11. 1997, sur le thème : *Concours mathématiques : quels profits pour la didactique ?*

Pour terminer, la qualité du travail en petits groupes : passer chaque problème au peigne fin d'une grille d'analyse bien pensée :

1) Quels sont les contenus mathématiques ? Où sont les variables didactiques ?

2) Résoudre le problème comme adulte et imaginer les procédures que les élèves proposeront.

3) Tenter de voir les erreurs possibles, examiner sans concession le sens, la richesse ou la pauvreté du problème.

4) Examiner comment le modifier pour que sa formulation permette à tous l'accès à une démarche, mais sans en dire trop par risque de vider la question de son sens.

Voilà autant de questions motivantes qui ont fait de ces journées de Brigue à la fois une excellente occasion de réaliser, si besoin était, la complexité de rédiger des problèmes, et donc l'utilité, comme la nécessité d'y travailler à plusieurs, avec des sensibilités diverses mises au service de tous.

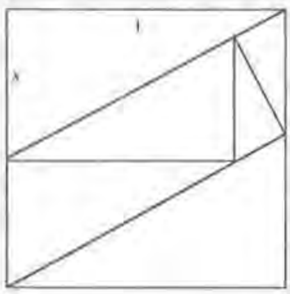
Ainsi, le 6e *Rallye mathématique transalpin* de 1998, qui permettra à des centaines d'élèves de chaque pays de travailler en équipe, par classe, sera-t-il un signe, certes modeste, mais concret, d'ouvrir sa porte, symboliquement à l'étranger, à l'autre, dans ce qu'il a de différent, d'unique et donc d'irremplaçable.

Brigue 1997, et pourquoi pas Sienne 98 ou Luxembourg 99 et qui sait d'ici là, Oberhofen 2000 ... en cette fin d'année, ça fait du bien de rêver un peu de paix et de se rappeler que le monde des matheux est fait de gens aussi heureux qui vous apportent à tous, leurs meilleurs vœux !

Le partage du carré

Dans le numéro 179, nous sommes revenus sur le problème du partage d'un carré en 6 triangles semblables et nous avons présenté 93 solutions, classées en six familles.

Un de nos lecteurs, M. Jean-François Theumann, a découvert une septième famille, dont il n'a trouvé, en dépit de longues recherches, qu'un seul représentant.



Le rapport des longueurs des côtés de l'angle droit de ces triangles est une solution de l'équation :

$3x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et vaut $x \approx 0{,}5523$.

Nous arrivons donc à 94 solutions. Le concours reste ouvert.

Ce lecteur nous dit encore qu'il lui semble pouvoir prouver que, dans toutes les solutions, les triangles sont forcément rectangles, mais qu'il n'est pas encore sûr à 100 % de sa démonstration.

Un nouveau défi est ainsi lancé!

Merci à M. Theumann qui reçoit, comme prix, un livre de ... problèmes.

Sixième Rallye mathématique transalpin

François Jaquet, IRDP

Concours mathématiques : quels profits pour la didactique ?

C'était le thème des premières journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin (RMT), qui se sont tenues à Brigue du 31 octobre au 2 novembre 1997.

Cette rencontre était destinée aux organisateurs régionaux du RMT et d'autres concours interclasses – dont *Espace mathématique*, le concours valaisan présenté récemment dans le numéro 178 de *Math-Ecole* – et à toute personne intéressée par la rédaction et l'analyse de problèmes. Elle a permis à une trentaine de participants, d'Italie, de France, de Luxembourg et de Suisse romande de se retrouver, sous l'égide de l'IRDP et de l'Université de Parme, avec les cinq objectifs suivants :

1. développer les liens entre recherche et pratique en didactique des mathématiques réalisés par les confrontations mathématiques par classe,

2. élargir la réflexion sur les finalités de ces concours et sur leurs apports pour le maître, l'élève et le chercheur,

3. étudier des énoncés de problèmes pour chercher à les améliorer et affiner leur analyse préalable,

4. analyser des productions de groupes d'élèves pour tenter de décrire leurs représentations, de comprendre leurs procédures de résolution et de discerner les obstacles didactiques rencontrés,

5. faire le point sur les cinq premières années du Rallye mathématique, romand puis transalpin, avant de décider de son avenir.

Nous reviendrons largement sur les apports de cette rencontre, liés aux quatre premiers de ces objectifs et dont l'éditorial de ce numéro donne déjà un petit avant-goût.

Nous parlerons aujourd'hui du cinquième objectif, car de nombreux lecteurs et leurs classes attendent avec impatience le feu vert pour une nouvelle aventure.

Il y aura un sixième Rallye mathématique transalpin !

Au vu des apports des cinq premières expériences, la décision de poursuivre l'activité a été unanime et sans ambiguïté. Les organisateurs ont décidé de «remettre ça» et, dans la foulée, d'étendre le concours aux classes de septième et huitième année. Le 6e *Rallye mathématique transalpin* aura donc lieu, de février à mai 1997, pour les classes de 3e à 8e, en collaboration étroite avec *Espace mathématique*, le concours valaisan par classes, pour les deux derniers degrés.

La confrontation sera internationale. Les régions où elle se déroulera vont de la Sardaigne au Luxembourg, en passant par la Toscane, l'Emilie romaine, la Lombardie, le Val d'Aoste, le Tessin, la Suisse romande, la Bresse.

Les énoncés seront les mêmes pour tous, en version française, italienne ou allemande. Les règles de participation sont aussi les mêmes pour tous.

Les différentes régions sont chargées de l'organisation locale : inscriptions, recherche de problèmes et relecture des propositions d'énoncés, transmission des épreuves, détermination des dates de passation dans les délais définis par le plan général, correction selon les critères établis par les créateurs des problèmes, classements, analyses locales des résultats, organisation de la finale régionale, remise des prix, publicité et contacts avec l'institution scolaire.

Au plan international, un groupe de quelques personnes coordonne l'élaboration des énoncés et en assure la rédaction définitive, l'analyse préalable comprenant les critères d'évaluation, la traduction.

C'est le même groupe encore qui établit la synthèse des résultats, conduit les analyses comparatives et coordonne les recherches au plan didactique.

Le contrat

Sans règles du jeu, il ne peut y avoir de comparaisons productives. Le rallye établit donc un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes, dont voici les termes essentiels :

- Lors de chaque épreuve la classe reçoit, selon sa catégorie, une série d'une dizaine de problèmes à résoudre.
- Ces problèmes sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul individu, aussi rapide soit-il.
- La classe dispose d'un temps limité, de 45 à 60 minutes, selon les régions ou les degrés, pour s'organiser, rechercher les solutions, en débattre et les rédiger.
- Les élèves doivent produire une solution unique pour chacun des problèmes; c'est la classe qui est responsable des réponses apportées, sans aucune intervention du maître.
- La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.
- Les épreuves qui suivent les essais se font hors de la présence du maître titulaire de la classe. Celui-ci est remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange. Il quitte donc son rôle d'enseignant pour celui d'observateur, s'abstenant de toute intervention, de quelque nature que ce soit, dans la classe dont il a le contrôle pendant la durée de l'épreuve. Son rôle se limite à la distribution des sujets, au contrôle de la durée et à l'envoi des copies à l'équipe qui sera chargée de les évaluer.
- Il n'y a pas que la «réponse juste» qui compte, les solutions sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies.
- L'évaluation des copies est faite par l'équipe régionale responsable, selon les critères fournis par le groupe central de conception des problèmes. Pour chaque catégorie, un classement est établi, par région, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation aux finales régionales. Les critères d'évaluation et le résultat de chaque problème, ainsi que les classements, sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.
- Après chaque épreuve le maître est libre de photocopier les solutions produite

par la classe, d'exploiter les problèmes, de les discuter, de les reprendre et d'analyser les résultats avec l'ensemble des élèves.

En résumé, le rallye propose aux élèves :

- de faire des mathématiques en résolvant des problèmes;
- d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées;
- de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve;
- de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, associés à toutes les étapes dans la mesure de leurs disponibilités, le rallye permet :

- d'observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes) en activité de résolution de problème;
- d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe;
- d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement, par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants;
- de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Organisation pratique

Pour la Suisse romande et le Tessin, le *6e Rallye mathématique transalpin* s'organisera selon quatre étapes :

- une **épreuve d'essai**, en décembre 1997 ou janvier 1998, pour déterminer l'intérêt de la classe et décider de son inscription[1]. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement; la date limite pour l'inscription est le 31 janvier 1998;
- une **première épreuve**, entre le 19 et le 25 février 1998, selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants;
- une **deuxième épreuve** entre le 15 et le 23 avril 1998;
- une **finale**, le mercredi après midi 27 mai 1998, regroupant les classes romandes ayant obtenu les meilleurs scores dans les deux épreuves, à Yverdon-les-Bains. (Si les inscriptions sont suffisantes, il y aura peut être une finale tessinoise.)

[1] Pour constituer une épreuve d'essai, on peut reprendre des problèmes du *5e Rallye mathématique transalpin* publiés cette année dans *Math-Ecole* : no 176, pp 39 à 42 (première épreuve), no 177, pp 16, 33, 35 et 36 (deuxième épreuve), no 178 pp. 37 à 42 (finale). On trouve encore de nombreux problèmes dans les numéros plus anciens de *Math-Ecole*. Les maîtres qui ont épuisé toutes ces sources ou qui ne disposent pas des anciens numéros de *Math-Ecole* peuvent demander une épreuve d'essai au moyen du bulletin d'inscription de la page suivante.

Les épreuves sont envoyées deux ou trois jours avant la période de passation. Les maîtres s'organisent pour la photocopie des problèmes, ils prennent contact avec leurs collègues pour les «échanges de surveillances», ils envoient les solutions de leur classe pour l'évaluation, après les avoir – éventuellement – photocopiées pour les exploitations didactiques des problèmes.

L'équipe d'animateurs se réunit les mercredis 28 janvier, 4 mars, 29 avril et 27 mai (finale) pour les travaux d'élaboration des problèmes, pour l'évaluation des copies reçues et pour l'analyse des résultats.

L'appui scientifique au *Rallye mathématique transalpin* est assuré par différentes institutions de recherche en didactique des mathématiques, dont l'IRDP, qui participe aussi aux tâches administratives pour la Suisse romande.

Math-Ecole diffuse l'information sur le *Rallye mathématique transalpin*, en Suisse romande et au Tessin, et le soutient financièrement. Toutefois les classes inscrites participent aux frais pour un montant de 25 Fr, à l'exception de celles dont les maîtres sont engagés dans les travaux d'élaboration et d'analyse.

Bénévolat et engagement

L'équipe actuelle des animateurs est compoée de six à huit personnes, dont la plupart participent au concours avec leur classe. Elle a pu gérer l'organisation des premiers rallyes. L'an dernier, avec plus de cent classes romandes et tessinoises, la tâche a été trop lourde. Cette année, l'effectif augmentera encore et on ne peut plus demander à une dizaine de bénévoles d'évaluer et analyser près de 1000 copies ou plus, en un après-midi. Il faut que de nouvelles personnes s'engagent activement. L'objectif serait d'atteindre une vingtaine de membres dans l'équipe d'animation, qui pourraient se répartir les tâches et alléger ainsi le travail de chacun. Même si elle requiert du temps et de l'énergie, l'animation du rallye est une tâche gratifiante et d'un très grand intérêt professionnel. Il faut espérer que les maîtres des classes participantes seront nombreux à s'inscrire dans l'équipe des animateurs. Il en va de l'avenir du concours.

Bulletin d'inscription **à retourner à *Math-Ecole*, IRDP, C. P. 54, 2007 Neuchâtel 7, avant le 31 janvier 1998.**

Je souhaite participer avec ma classe au *6e Rallye mathématique transalpin :*

Nom et prénom du titulaire : ....

Adresse personnelle : ....

.... tél ....

J'accepte de m'engager dans l'équipe des animateurs (évaluation, analyse ou rédaction des épreuves) dans la mesure de mes disponibilités : **oui** **non**

Renseignements sur ma classe: Classe: .... degré (3, 4, 5, 6, 7, 8): .... nombre d'élèves: ....

Collège (nom, adresse)..

Je désire recevoir des problèmes pour une épreuve d'essai. **oui** **non**

Signature : .... Date : ....

Le potager d'Aloïs

Michel Chastellain, SPES (Vd)

Comme chaque printemps, Aloïs modifie l'emplacement de son jardin potager. Cette année, il décide de l'implanter le long de la façade sud du rural, de façon à ce qu'il soit rectangulaire. Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22 m.

A quelle distance de la façade va-t-il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximum ?[1]

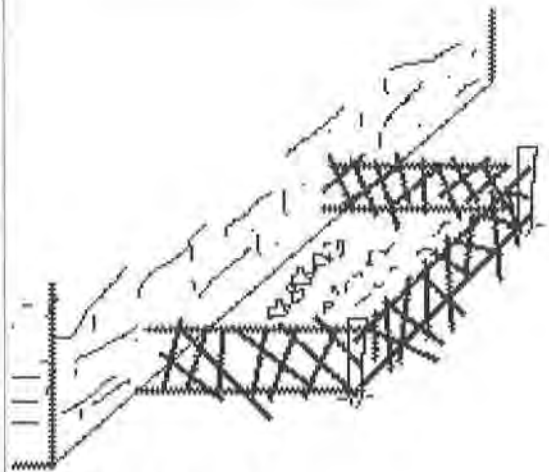
La formulation de ce problème «classique» permet d'affirmer qu'il s'agit d'un problème ouvert, notamment parce que :

- l'énoncé est court,
- il n'induit pas la démarche menant vers la solution,
- il permet à chacun de faire personnellement quelques essais, voire de donner des éléments de réponse.

La valeur numérique choisie, ici 22 mètres, est suffisamment grande et «agréable» (nombre naturel) pour engendrer un réflexe de confiance chez l'élève, mais elle se révèle juste assez intéressante pour mesurer les effets non négligeables relatifs à la pertinence de la réponse fournie.

Le problème se prête à de multiples démarches de recherche qui vont de la plus empirique à la plus sophistiquée favorisant ainsi la différenciation pédagogique. Par exemple :

[1] *Ce problème est un exemple de l'une des propositions formulées par le groupe de réflexion mandaté par COROME pour élaborer un projet de moyens d'enseignement de mathématiques pour les degrés 7-8-9.*



- **Travail dans IN**

La recherche s'effectue dans un ensemble discret et les élèves procèdent par essais successifs. Ils obtiennent, par exemple, un tableau de valeurs dont les résultats ne seront pas nécessairement organisés de manière structurée.

Dans ces conditions, le maximum annoncé sera probablement de 60 m^2, ce qui correspond à un éloignement de la façade de 5 ou 6 mètres :

largeur (m)	2 x largeur (m)	longueur (m)	périmètre (m)	aire (m^2)
1	2	20	22	20
2	4	18	22	36
3	6	16	22	48
4	8	14	22	56
5	10	12	22	60
6	12	10	22	60
7	14	8	22	56
8	16	6	22	48
9	18	4	22	36
10	20	2	22	20

Ce tableau suscite un certain nombre de remarques sur les différentes relations qui existent entre les grandeurs en présence :

- plus la largeur est petite, plus la longueur est grande,
- lorsque la largeur augmente, la longueur diminue,
- le périmètre est constant alors que l'aire varie,
- l'aire augmente avec la largeur, elle passe par un maximum, puis elle diminue avec la longueur.

Les objectifs visés ici touchent avant tout à la sensibilisation aux notions de fonction et variable.

- **Travail dans IR**

Une observation plus fine – éventuellement suggérée par une «relance» du maître – montre qu'il existe une «symétrie» :

f(1)	=	f(10)	=	20
f(2)	=	f(9)	=	36
f(3)	=	f(8)	=	48
f(4)	=	f(7)	=	56
f(5)	=	f(6)	=	60

«*Il se passe donc quelque chose entre 60 et 60 !*» Les élèves chechent alors une solution «plus fine», en référence à un ensemble plus étendu de nombres. Ils trouvent, pour une valeur intermédiaire de 5,5 m, la solution où l'aire maximale devient $5{,}5 \cdot 11 = 60{,}5$ m^2.

- **Par voie graphique**

A ceux qui restent sur l'une étude des valeurs entières, le maître pourrait proposer de représenter graphiquement la situation et induire ainsi le questionnement à propos de l'aire maximale entre 5 et 6.

- **Par équation**

La situation se traduit ainsi :

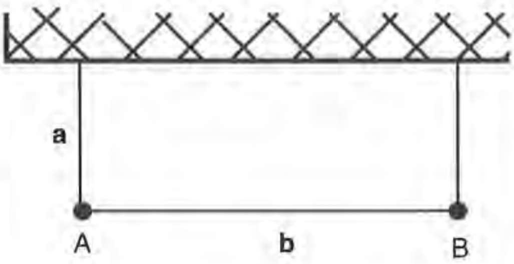
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} = 22,$$

avec **a** qui représente la distance de la façade jusqu'au piquet A et **b** celle qui sépare les piquets A et B. Dans ce cas, on a :

$2\mathbf{a} + \mathbf{b} = 22 \Rightarrow \mathbf{b} = 22 - 2\mathbf{a}$,

avec la demande que l'aire

$\mathbf{ab} = \mathbf{a}\,(22 - 2\mathbf{a})$ soit maximale.



Dès lors, la fonction de la parcelle est :

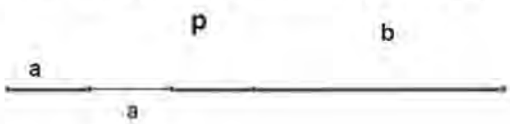
$f : \mathbf{a} \mapsto -2\mathbf{a}^2 + 22\mathbf{a}$ dont les deux zéros sont 0 et 11. Le coefficient (–2) assure que la fonction présente un maximum. Pour le trouver, il s'agit de calculer l'image de la moyenne arithmétique de 0 et 11, c'est-à-dire f(5,5) = 60,5.

- **En généralisant**

Le maître peut proposer un prolongement qui porte sur une solution relative à n'importe quelle longueur de clôture.

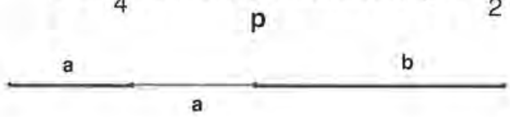
Les élèves devront alors découvrir, par essais successifs, que :

- la longueur de la clôture $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



– l'aire maximale est obtenue lorsque :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p}}{4} \text{ et dans ces conditions } \mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}}{2}$$



Quant à l'aire maximale, elle mesure :

$$\mathbf{A}_{max} = \frac{\mathbf{p}}{4} \cdot \frac{\mathbf{p}}{2} = \frac{\mathbf{p}^2}{8} ,$$

c'est-à-dire que la fonction est quadratique et l'aire varie en fonction de la longueur de la clôture.

Pour faciliter le travail des élèves, l'activité pourrait être menée en salle informatique, à l'aide de «Cabri-Géomètre», pour autant que les élèves connaissent la similitude des triangles et le concept de lieu géométrique.

L'article «CABRidées» de la page 21 décrit la manière de procéder à l'aide de ce logiciel.

Informations sur le GReFE

*Dans le cadre d'une information réciproque sur des associations concernées par la formation des enseignants, formation tant initiale que continue, le GReFE (*Groupe de **Ré**flexion sur la **F**ormation des **E**nseignants en Suisse romande et au Tessin) *se présente aux lecteurs de Math-Ecole, qui peuvent être intéressés par les thèmes qu'il traite.* Le GReFE s'est constitué le 23 novembre 1996 ; il compte une cinquantaine de membres individuels ; la possibilité d'avoir des membres collectifs sera examinée en novembre, lors de la prochaine assemblée générale.

Le GReFE a pour but les échanges et la réflexion sur la formation des enseignants, quel que soit leur degré ou leur ordre d'enseignement, en Suisse romande et au Tessin. Ses activités actuelles : l'organisation de rencontres, l'animation d'activités diverses – par exemple, un atelier d'écriture sur les pratiques quotidiennes – la publication d'une feuille d'informations ... Le public qu'il vise est celui des formateurs, que ce soit ceux des écoles normales, des futures HEP, des Universités, de l'enseignement professionnel, des écoles de préparation aux «métiers de l'humain», ceux des centres de perfectionnement, ou alors les enseignants maîtres de stage ou formateurs de terrain, mais aussi les enseignants, les responsables administratifs, politiques, syndicaux, bref toute personne intéressée par la formation des enseignants.
Les moyens dont dispose le GReFE sont ceux de toute association similaire : fort minces, et dépendants pour la plus grande part des cotisations des membres ; mais en grattant un peu partout, en coopérant avec d'autres associations ou institutions, le GReFE arrive néanmoins à offrir des prestations intéressantes. On peut citer les journées de Bienne ou de Porrentruy, consacrées à la formation des maîtres de stages ou à la place de la pratique professionnelle dans la formation, organisées alors même que le GReFE n'était pas encore constitué mais formait un réseau poursuivant les mêmes objectifs. La conférence-débat de Pierre Vermersch sur le mode de fonctionnement des formateurs, lors de l'Assemblée constitutive, a été la dernière prestation offerte. La prochaine sera un débat autour du thème «La formation des enseignants – une formation d'adultes» lors de l'Assemblée générale, le 15 novembre 97. Les projets ne manquent pas, si l'on se réfère aux activités que l'association entend mener conformément à ses statuts. A suivre !

Pour tout renseignement, ou pour participer au prochain débat :

M. Cattin
18, av. des Libellules
1219 Le Lignon

Repérer les compétences des élèves entrant en 1P.

Janine Cosandey,
maîtresse d'appui à Blonay.

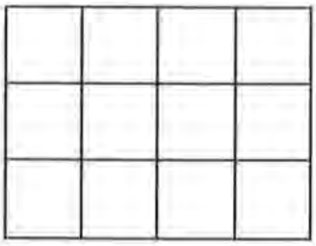
Pas facile de trouver le temps en début d'année scolaire pour faire ces repérages avec vingt-quatre nouveaux petits élèves de 6 ans ! (comme le recommande ERMEL CP pp. 49-52)[1]

En tant que maîtresse d'appui, pour donner un coup de main à mes trois collègues de 1P, j'ai testé 69 élèves individuellement, pendant 8 minutes environ. Ils venaient pour «me montrer tout ce qu'ils savaient déjà». Les mots «nombre», «compter», «calcul», «math», etc. ont été soigneusement évités !

Je vous rends compte du premier test : «L'enfant recourt-il spontanément au dénombrement pour résoudre un problème ?» (ERMEL op. cit. et Commentaires didactiques [2] p.50)

Il importait vraiment de mettre ce test en premier, avant que l'enfant puisse s'apercevoir qu'on l'interrogeait sur les nombres.

On présente donc à l'enfant un quadrillage de 3 sur 4.



C'est une «boîte de chocolats» vide. Les «chocolats» sont à disposition en grande quantité dans un sachet placé à l'autre bout de la classe.

«Va chercher juste ce qu'il faut de chocolats pour remplir la boîte. Assez pour que ce soit tout plein, mais pas trop. Juste ce qu'il faut, du premier coup».

Si l'enfant faisait mine de partir sans avoir regardé le quadrillage, je le retenais en ajoutant :

«Regarde bien avant de partir. Du premier coup, il faut que tu amènes juste. Trouve un truc pour faire juste, avant de partir».

N.B. il sera confirmé dans les tests suivants que tous les élèves savent compter au moins jusqu'à 12 : réciter la comptine et préparer une collection de 10, même s'ils n'ont pas encore la conservation du nombre.

Combien, sur les 69, auront recours au nombre ?

18	comptent et amènent juste	26 %
9	comptent mais se trompent de 1 ou 2	13 %
3	considèrent la configuration (en rangées de 3 ou 4) et amènent juste	4 %

[1] ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours préparatoire,* Hatier, Paris, 1991.

[2] Gagnebin, A., Guignard, N., Jaquet, F. *Apprentissages et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire.* COROME, Suisse romande, 1997.

14 considèrent la configuration mais amènent faux (8, 9,15) 20 %

14 amènent une poignée presque juste (entre 10 et 13) 20 %

9 amènent une poignée beaucoup trop grosse ou petite 13 %

2 amènent juste par terme à terme visuel (malgré la distance) 3 %

soit 23 réussites (1/3 des élèves). Mais ce sont surtout les démarches qui sont intéressantes :

27 élèves comptent

17 élèves considèrent la configuration

23 amènent une poignée

2 ont recours au terme à terme (malgré la distance).

Sollicités à exprimer leur démarche, ils disent :

– «ben, j'ai compté !»

– «j'ai vu, 3 puis 3, puis 3 ...»

Quand il y a erreur, la réaction de l'élève est parlante : certains retournent pour corriger (par ajout) ou disent : il y a ça de trop. D'autres recommencent sans plus de succès.

Voici enfin deux réactions extrêmes qui montrent bien l'écart entre les élèves quant à la construction du nombre :

– «j'peux pas puisque tu veux pas que je prenne la boîte là-bas !»

– «une élève, qui se révélera par la suite très à l'aise avec les nombres, détourne son regard de la boîte.»

«Pourquoi est-ce que tu ne regardes pas la boîte ?» Rire.

«Si je regarde, c'est trop fa-fa !»

Entre ces deux élèves, 67 autres pour qui c'est un vrai problème de cardinal, déjà surmonté ou pas encore.
Ce qui a encouragé mes collègues à se lancer dans «Les cousins» p. 95 du livre du maître[3].

[3] Ging, E., Sauthier, M.-H., Stierli, E. *Mathématiques, première année. Livre du maître.* COROME, Suisse romande, 1996.

Extraits de PanoraMath96 :
(*kangourou des collèges – concours individuel à choix multiples – près de 1'000'000 de participants)*

Dans une classe, 40% des élèves ont une mauvaise vue.

70% des élèves ayant une mauvaise vue portent des lunettes, les 30% restant ont des lentilles de contact.

Dans cette classe, on compte 21 paires de lunettes.

Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ 45 élèves ont une mauvaise vue.
- ☐ 30 élèves ont une bonne vue.
- ☐ on compte 100 élèves dans la classe.
- ☐ 10 élèves ont des lentilles de contact.
- ☐ aucune des quatre affirmations précédentes n'est vraie.

Etonnantes égalités arithmétiques

André Calame, Sauges (NE)

La collection Que sais-je ? s'est récemment enrichie d'un excellent ouvrage (no 3220) dû à Michel Criton et intitulé : *Les jeux mathématiques* (voir *Math-Ecole* no 178, p. 45). On y trouve, en page 20, des égalités surprenantes :

$$
\begin{aligned}
618^n + 753^n + 294^n &= 816^n + 357^n + 492^n \\
672^n + 159^n + 834^n &= 276^n + 951^n + 438^n \\
654^n + 132^n + 879^n &= 456^n + 231^n + 978^n \\
852^n + 174^n + 639^n &= 258^n + 471^n + 936^n
\end{aligned}
$$

«Dans ces égalités, n peut prendre les valeurs 1 ou 2. De plus, dans chacune d'elles, on peut supprimer les chiffres des centaines de tous les termes, ou les chiffres des dizaines, ou bien encore ceux des unités, sans altérer leur propriété d'être vraies à l'ordre 1 (n = 1) ou à l'ordre 2 (n = 2).»

Détaillons ce texte pour la première égalité :

pour n = 1, $618 + 753 + 294 = 816 + 357 + 492 = 1665$

pour n = 2, $618^2 + 753^2 + 294^2 = 816^2 + 357^2 + 492^2 = 1035369$

En supprimant les chiffres des centaines, on a :

pour n = 1, $18 + 53 + 94 = 16 + 57 + 92 = 165$

pour n = 2, $18^2 + 53^2 + 94^2 = 16^2 + 57^2 + 92^2 = 11969$

En supprimant les chiffres des dizaines, on a :

pour n = 1, $608 + 703 + 204 = 806 + 307 + 402 = 1515$

pour n = 2, $608^2 + 703^2 + 204^2 = 806^2 + 307^2 + 402^2 = 905489$

On pourrait même ne garder que les unités :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } n = 1, & 8 + 3 + 4 = 6 + 7 + 2 = 15 \\ \text{pour } n = 2, & 8^2 + 3^2 + 4^2 = 6^2 + 7^2 + 2^2 = 89 \end{array}$$

Existe-t-il de nombreuses égalités de ce type ? Est-il facile d'en fabriquer ? Comment tenir compte de toutes les contraintes sur les centaines, les dizaines et les unités ? ▶

C'est le problème que nous allons aborder.

Commençons par chercher des triplets de nombres naturels (a,b,c) et (r,s,t) tels que :

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + s^2 + t^2 \qquad (n = 2)$$

avec la condition supplémentaire :

$$(2) \quad a + b + c = r + s + t \qquad (n = 1)$$

Nous dirons dans la suite que la paire de triplets (a,b,c) et (r,s,t) donne dans ce cas une solution de notre problème. Dans ce but, écrivons d'abord les triplets formés des nombres de 1 à 9. On débute par :

$$1^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$ ▶

jusqu'à :

$$9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$$

On remarque alors que 27 est le plus petit nombre qui admet deux décompositions :

$$1^2 + 1^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

mais :

$$1 + 1 + 5 = 7 \neq 3 + 3 + 3 = 9$$

En revanche, 33 conduit à une solution parce que les triplets satisfont aux deux conditions:

$$\begin{array}{ll} & 1^2 + 4^2 + 4^2 = 2^2 + 2^2 + 5^2 = 33 \\ \text{et} & 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 9 \end{array}$$

On recense au total dix possibilités. Nous appellerons triplets élémentaires les deux décompositions d'un même nombre dans le tableau suivant :

nombres		décompositions	somme des termes
33	=	$1^2 + 4^2 + 4^2 = 2^2 + 2^2 + 5^2$	9
54	=	$2^2 + 5^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 6^2$	12
62	=	$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2$	12
81	=	$3^2 + 6^2 + 6^2 = 4^2 + 4^2 + 7^2$	15
89	=	$2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$	15
99	=	$1^2 + 7^2 + 7^2 = 3^2 + 3^2 + 9^2$	15
101	=	$1^2 + 6^2 + 8^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2$	15
114	=	$4^2 + 7^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 + 8^2$	18
122	=	$3^2 + 7^2 + 8^2 = 4^2 + 5^2 + 9^2$	18
153	=	$5^2 + 8^2 + 8^2 = 6^2 + 6^2 + 9^2$	21

A partir de ces triplets élémentaires, il est aisé de construire de nouvelles solutions en utilisant deux procédures :

D'abord, en multipliant tous les termes par un même facteur k, on obtient une nouvelle solution.

Par exemple, en multipliant par 7 les triplets de 62, on trouve :

$$7^2 + 35^2 + 42^2 = 14^2 + 21^2 + 49^2 = 3038 = 62 \cdot 7^2$$

avec $7 + 35 + 42 = 14 + 21 + 49 = 84 = 12 \cdot 7$

De manière générale,

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + s^2 + t^2 \text{ entraîne :}$$
$$(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2 = (kr)^2 + (ks)^2 + (kt)^2$$

et $a + b + c = r + s + t$ entraîne :

$$ka + kb + kc = kr + ks + kt$$

Ensuite – et c'est beaucoup plus surprenant – on peut procéder par addition des triplets élémentaires.

Par exemple choisissons les triplets de 62 et de 253 :

1 5 6 et 2 3 7
5 8 8 et 6 6 9

Par addition :

6 13 14 et 8 9 16

On a bien :

	$6^2 + 13^2 + 14^2 = 8^2 + 9^2 + 16^2 = 401$
et	$6 + 13 + 14 = 8 + 9 + 16 = 33$

Au lecteur de vérifier que «ça marche» quelles que soient les lignes choisies dans le tableau. Toutefois, la prudence s'impose! On ne peut pas sans risque permuter les termes d'un triplet.

Reprenons l'exemple ci-dessus en posant :

1 6 5 et 2 7 3
5 8 8 et 6 6 9

Par addition :

6 14 13 et 8 13 12
$6^2 + 14^2 + 13^2 = 401$,

mais :

$$8^2 + 13^2 + 12^2 = 377$$

En fait, si la méthode d'addition jouait à tous les coups, cela reviendrait à dire que dans le calcul de $(a + b)^2$, le double produit 2ab n'a pas d'effet !

Pour clarifier le mystère, il faut s'astreindre à quelques calculs algébriques.

Supposons deux solutions :

d'une part :

(1)	$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + s^2 + t^2$
(2)	$a + b + c = r + s + t$

d'autre part :

(1')	$d^2 + e^2 + f^2 = u^2 + v^2 + w^2$
(2')	$d + e + f = u + v + w$

Examinons à quelle condition l'addition terme à terme donne encore une solution.

Nouveaux triplets par addition :

a+d b+e c+f et r+u s+v t+w

on a bien sûr la relation :

$(a+d) + (b+e) + (c+f) = (r+u) + (s+v) + (t+w)$

qui découle de l'addition des relations (2) et (2').

Calculons les sommes de carrés :

$$\text{(I)} \quad (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2be + e^2 + c^2 + 2cf + f^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (d^2 + e^2 + f^2) + 2(ad + be + cf)$$

$$(II)\quad (r+u)^2+(s+v)^2+(t+w)^2 = r^2+2ru+u^2+s^2+2sv+v^2+t^2+2tw+w^2 =$$
$$= (r^2+s^2+t^2)+(u^2+v^2+w^2)+2(ru+sv+tw)$$

En tenant compte des égalités (1) et (1'), on voit qu'il y a égalité entre (I) et (II) si et seulement si

$$(3)\quad ad + be + cf = ru + sv + tw$$

Cette condition est automatiquement vérifiée pour tous les triplets élémentaires comme nous l'avons dit plus haut, et à condition de préserver l'ordre de chaque triplet, Par exemple, pour les triplets de 114 et 122 :

$a = 4$ $b = 7$ $c = 7$ $r = 5$ $s = 5$ $t = 8$
$d = 3$ $e = 7$ $f = 8$ $u = 4$ $v = 5$ $w = 9$
$ad + be + cf = 12 + 49 + 56 = 117$
$ru + sv + tw = 20 + 25 + 72 = 117$

Résumons-nous. A partir de deux solutions qui satisfont les relations (1), (2) et (1'), (2'), si la relation (3) est satisfaite, alors l'addition terme à terme fournit une nouvelle solution. C'est dire que le nombre des solutions est pratiquement illimité. Ainsi, pouvons-nous construire une solution avec des nombres de trois chiffres à partir des triplets élémentaires de 33, 54 et 62 : ▶

33 : 1 4 4 et 2 2 5

multiplication par 10 :

10 40 40 20 20 50
54 : 2 5 5 et 3 3 6

addition :

12 45 45 23 23 56

multiplication par 10 :

120 450 450 230 230 560
62 : 1 5 6 et 2 3 7

addition :

121 455 456 232 233 567

On a alors :

$$121^2 + 455^2 + 456^2 = 232^2 + 233^2 + 567^2 = 429602$$
$$\text{avec}\quad 121 + 455 + 456 = 232 + 233 + 567 = 1032$$

On pourrait multiplier les exemples surtout si l'on introduit des triplets élémentaires avec des nombres supérieurs à 9 : ▶

209 : 1 8 12 et 2 6 13
230 : 3 10 11 et 5 6 13

On vérifie que la condition (3) est satisfaite :

$$1 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 12 \cdot 11 = 215 = 2 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 13 \cdot 13$$

d'où, par addition, on obtient une nouvelle paire de triplets :

	4		18		23	et	7		12		26		
	4^2	+	18^2	+	23^2	=	7^2	+	12^2	+	26^2	=	869
avec	4	+	18	+	23	=	7	+	12	+	26	=	45

Jusqu'ici, nous avons négligé deux aspects essentiels des égalités citées en début d'article, deux aspects qui auront peut-être frappé le lecteur :

a) D'une part, les nombres du membre de droite sont les mêmes que ceux du membre de gauche lus à l'envers.

b) D'autre part, pour écrire chaque triplet, on utilise une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à 9.

Ce sont ces contraintes très strictes que nous voulons examiner de plus près.

Revenons au tableau des triplets élémentaires. Il n'y a que quatre décompositions où les chiffres utilisés sont tous différents. Nous les reprenons en indiquant à droite les chiffres manquants.

Manquent :

62	=	1^2	+	5^2	+	6^2	=	2^2	+	3^2	+	7^2	4, 8, 9
89	=	2^2	+	6^2	+	7^2	=	3^2	+	4^2	+	8^2	1, 5, 9
101	=	1^2	+	6^2	+	8^2	=	2^2	+	4^2	+	9^2	3, 5, 7
122	=	3^2	+	7^2	+	8^2	=	4^2	+	5^2	+	9^2	1, 2, 6

A partir de ces triplets élémentaires, tentons de former des nombres de trois chiffres en utilisant tous les chiffres de 1 à 9. Soit (a,b,c) et (r,s,t) deux triplets élémentaires correspondants et x, y, z les chiffres manquants.

Les trois nombres du membre de gauche s'écrivent :

$$100a + 10x + r \qquad 100b + 10y + s \qquad 100c + 10z + t$$

En renversant l'écriture, les nombres du membre de droite s'écrivent :

$$100r + 10x + a \qquad 100s + 10y + b \qquad 100t + 10z + c$$

Les sommes dans chaque triplet, sont égales puisque :

$$a + b + c = r + s + t.$$

Calculons les sommes de carrés :

Pour le membre de gauche :

$$\text{A)}\ (100a + 10x + r)^2 + (100b + 10y + s)^2 + (100c + 10z + t)^2 = 10000(a^2 + b^2 + c^2) + 100(x^2 + y^2 + z^2) + (r^2 + s^2 + t^2) + 2000(ax + by + cz) + 200(ar + bs + ct) + 20(rx + sy + tz)$$

Pour le membre de droite :

$$\text{B)}\ (100r + 10x + a)^2 + (100s + 10y + b)^2 + (100t + 10z + c)^2 = 10000(r^2 + s^2 + t^2) + 100(x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2000(rx + sy + tz) + 200(ar + bs + ct) + 20(ax + by + cz)$$

Après simplification en tenant compte de la relation :

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + s^2 + t^2$$

on a l'égalité entre A) et B) si et seulement si :

$$ax + by + cz = rx + sy + tz \text{ ou}$$

$$(a - r)x + (b - s)y + (c - t)z = 0 \qquad (4)$$

Les nombres manquants x, y, z doivent satisfaire cette relation où les coefficients sont tirés des triplets élémentaires.

Par exemple, à partir des triplets élémentaires de 89, posons :

$a = 2$, $b = 6$, $c = 7$, $r = 4$, $s = 8$, $t = 3$

$a - r = -2$, $b - s = -2$, $c - t = 4$

$-2x - 2y + 4z = 0$ ou $2z = x + y$

Les nombres manquants 1, 5, 9 satisfont cette relation de deux manières :

1. $x = 1 \quad y = 9 \quad z = 5$
2. $x = 9 \quad y = 1 \quad z = 5$

Dans le deuxième cas, les nombres du membre de gauche deviennent :

100a	+	10x	+	r	=	200	+	90	+	4	=	294
100b	+	10y	+	s	=	600	+	10	+	8	=	618
100c	+	10z	+	t	=	700	+	50	+	3	=	753

On retrouve la première relation citée dans *Que sais-je ?* :

$$294^n + 753^n + 618^n = 492^n + 816^n + 357^n$$

En utilisant le premier cas :

$$214^n + 698^n + 753^n = 412^n + 896^n + 357^n$$

En permutant les éléments des triplets (2,6,7) et (3,4,8), on a d'autres solutions :

213	654	798	et	312	456	897
293	654	718	et	392	456	817
258	613	794	et	852	316	497
258	693	714	et	852	396	417

La même méthode appliquée aux triplets élémentaires de 101 donne les solutions suivantes :

132	654	879	et	231	456	978	(*)
172	654	839	et	271	456	938	
134	679	852	et	431	976	258	
174	639	852	et	471	936	258	(*)
159	632	874	et	951	236	478	
159	672	834	et	951	276	438	(*)

Les solutions marquées (*) sont dans *Que sais-je ?*. Remarquons, pour terminer, que les nombres manquants pour 62 et 122 ne satisfont aucune des relations (4), quelles que soient les permutations de (a,b,c) et (r,s,t).

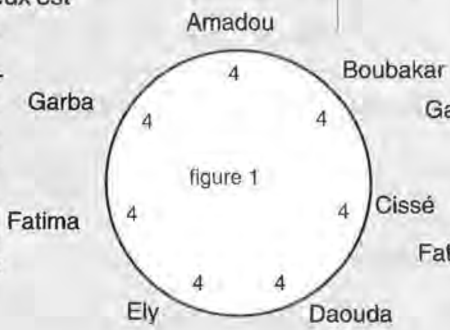
Extrait de PanoraMath96 : l'anniversaire (championnat du Niger)

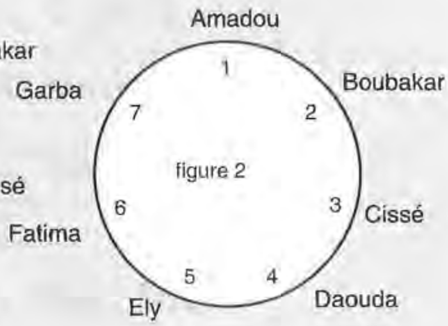
Lors d'un anniversaire, sept amis : Amadou, Boubakar, Cissé, Daouda, Ely, Fatima et Garba, assis autour d'une table (fig. 1) et disposant chacun de 4 bonbons, jouent au jeu suivant :

- l'un d'entre eux est tiré au sort;
- celui désigné par le sort doit donner un bonbon à chacun de ses deux voisins;
- tout joueur qui ne peut donner ses deux bonbons est éliminé.

A la fin du jeu, personnes n'a été éliminé et les sept amis possèdent le nombre de bonbons indiqués sur la figure 2.

Combien de fois au minimum ont-ils tiré à la courte paille ?





CABRIdées : Le pote âgé Aloïs !

Michel Chastellain, SPES (Vd)

Règle du jeu : «si vous n'avez pas lu l'article intitulé "Le potager d'Aloïs", reculez de 13 pages !»

Pour rappel, la consigne proposée était la suivante :

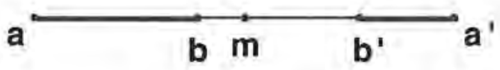
> *Comme chaque printemps, Aloïs modifie l'emplacement de son jardin potager. Cette année, il décide de l'implanter le long de la façade sud du rural, de façon à ce qu'il soit rectangulaire. Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22 m.*
>
> *A quelle distance de la façade va-t-il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximum ?*

Le recours à «Cabri-Géomètre» pour résoudre ce problème peut être envisagé de deux façons différentes :

- le maître élabore la figure de base, car ses élèves ne maîtisent pas suffisamment bien les outils du logiciel ou parce qu'il ne dispose pas d'une dotation horaire suffisante pour trouver le temps nécessaire à ce travail ;
- les élèves réalisent, dans un premier temps, la construction de la figure qui permettra d'étudier, dans un deuxième temps, tous les cas possibles.

Quel que soit le choix retenu, voici les différentes étapes de la construction :

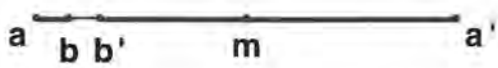
- tracer le périmètre [**aa'**] = 22 ;
- construire **m**, milieu de [**aa'**] ;
- tracer le segment [**am**] ;
- placer **b**, point sur objet du segment [**am**] ;
- construire **b'**, symétrique de **a** par rapport à **b** ;
- tracer (en gras) les segments [**ab**] et [**a'b'**].



Les segments [**ab**] et [**a'b'**] représentent, respectivement, la largeur et la longueur du potager d'Aloïs.

Ces deux dimensions varient l'une en fonction de l'autre, suivant la position prise par le point **b.**

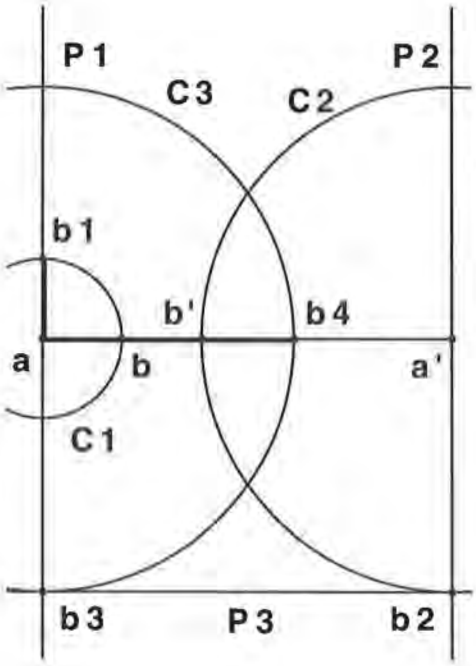
Comme **b** ne se «balade» que sur le segment [**am**], l'image **b'** du point **a** ne peut pas «sortir» du segment [**aa'**]. En modifiant la position de **b**, on obtient par exemple :



La suite de la construction consiste à reporter d'une part [**ab**], perpendiculairement à [**aa'**] en [**ab**$_1$] et, d'autre part, [**a'b'**] en [**ab**$_4$], avec comme support le segment [**aa'**].

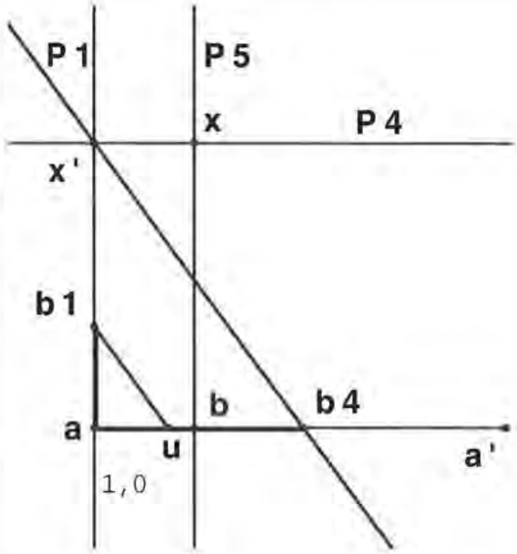
Pour y parvenir, il faut successivement :

- tracer **C_1** (**a** ; [**ab**]);
- Construire **b_1**, intersection de **C_1** avec la perpendiculaire **P_1** au segment [**aa'**];
- tracer **C_2** (**a'** ; [**a'b'**]) ;
- Déterminer les points **b_2**, intersection de la perpendiculaire à [**aa'**] par **a'** et **b_3**, intersection de **P_1** avec la perpendiculaire à **P_2** par **b_2**, à savoir la droite **P_3**.
- Tracer **C_3** (**a** ; [**ab_3**]) et construire son intersection **b_4** avec le segment [**aa'**].



La construction s'achève alors ainsi :

- sur [**aa'**], placer un point **u**, de telle manière que [**au**] = 1 ;
- par **b_4**, tracer une parallèle au segment [**ub1**] qui coupe **P_1** en **x'** ;
- tracer **P_4** et **P_5**, respectivement les parallèles à [**aa'**] et [**ax'**], par **x'**et **b** ;
- Chercher **x**, intersection de **P_4** et **P_5**.



En fait, on a reconstruit ici une «machine à multiplier» selon la démarche longuement décrite dans l'article «*CABRidée*» de «*MATH–Ecole* n° 174».

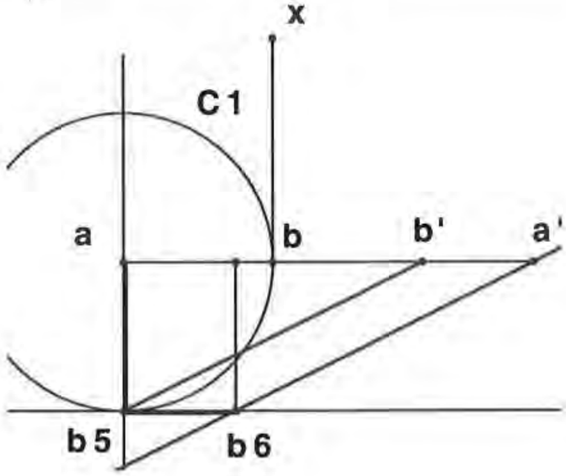
Comme les triangles **aub_1** et **ab_4x'** sont semblables, on a :

$$\frac{[ab_1]}{[au]} = \frac{[ab_1]}{1} = \frac{[ax']}{[ab_4]}, \text{ c'est-à-dire :}$$

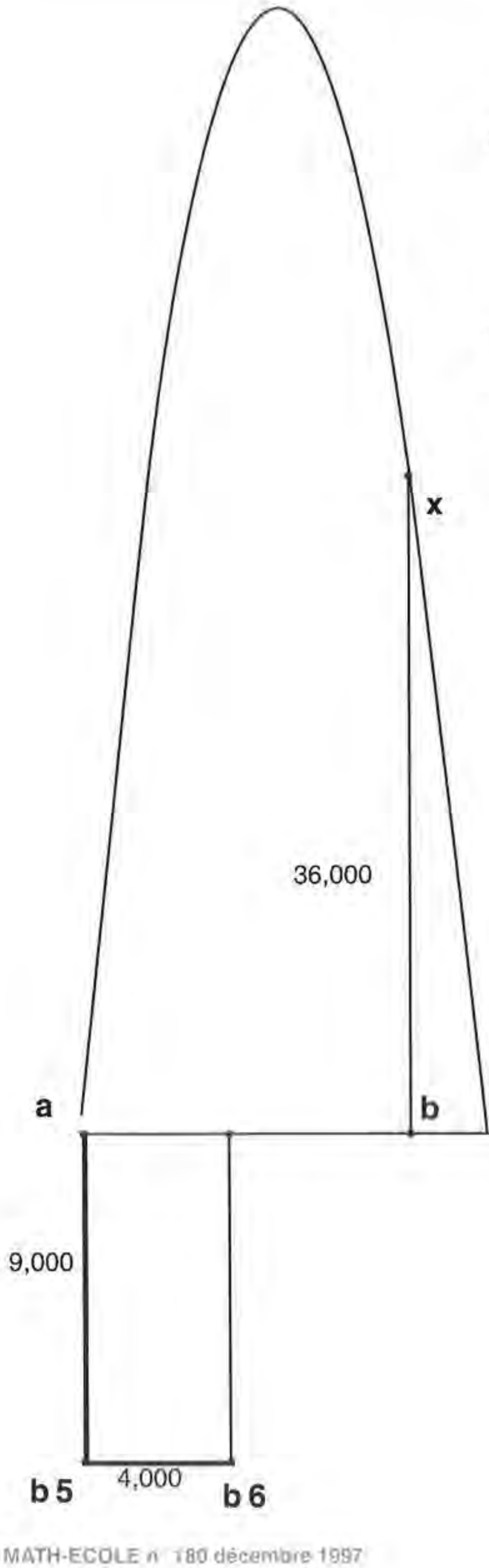
$$[ab_1] \cdot [ab_4] = [ax'].$$

On a ainsi représenté l'aire du potager d'Aloïs – correspond au produit de sa largeur ([**ab**] = [**ab1**]) par sa longueur ([**a'b'**] = [**ab_4**]) – à l'aide du segment de mesure [**ax'**] que l'on translate en un segment [**bx**] grâce à deux perpendiculaires **P_4** et **P_5**.

En modifiant la position du point **b** (pour rappel, il appartient au segment [**am**]), la largeur du potager prend toutes les mesures possibles de 0 à 11 m. L'aire correspondante se modifie alors instantanément et s'affiche en tant que longueur du segment [**bx**].



La figure peut être encore complétée par une représentations du potager rectangulaire d'Aloïs, que l'on obtient à l'aide d'un parallélogramme **a'b'b$_5$b$_6$**.



Finalement, il suffit de chercher le lieu géométrique du point **x**, lorsque le point **b** se balade sur le demi-segment [**aa'**], pour obtenir la représentation graphique de l'aire du potager d'Aloïs en fonction de sa largeur, comme le représente cette dernière illustration.

Neuchâtel 98

CIEAEM 50

Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education.

Information: IRDP, cp 54, CH-2007 Neuchâtel 7 tél: ++(41) (32) 889 86 09 fax: ++41 (32) 889 69 71
E-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem/

Deuxième annonce

La première annonce de la 50e rencontre de la CIEAEM – qui se tiendra à Neuchâtel du 2 au 7 août 1998 – a paru dans le numéro 178 de Math-Ecole. La deuxième annonce est prête et sera envoyée à toute personne qui en fait la demande (voir bulletin ci-dessous). Elle contient une description détaillée du thème et des sous-thèmes ainsi que toutes les modalités d'inscription.

Tous les lecteurs de *Math-Ecole* sont invités à participer à cette importante rencontre, pour échanger, pour se former, pour partager et trouver quelques réponses à leurs préoccupations, pour présenter leurs expériences ou des travaux de leurs élèves, etc.

Comme le thème est précisément celui des liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques, il est souhaitable que de nombreux enseignants viennent apporter leurs points de vue et leurs expériences de praticiens. Dans ce cadre général, les sous-thèmes aborderont plus précisément les sujets suivants :

A. Finalités de l'enseignement des mathématiques.

B. Communication et collaboration entre praticiens et chercheurs

C. Recherche en didactique des mathématiques et formation des maîtres

D. Spécificités de la recherche en didactique des mathématiques

E. La prise en compte de résultats de la recherche dans les moyens et les outils pour l'enseignement.

Bulletin à renvoyer à : **CIEAEM 50, IRDP, C.P. 54, CH - 2007 Neuchâtel 7**

Nom .... Prénom ....

Adresse ....

....

Le jeu de la boîte

Mireille Snoeckx

D'après une situation conçue par G. Brousseau pour l'enseignement de la soustraction.

Il s'agit d'une situation–jeu expérimentée avec des classes de 2P à 4P à Genève. Cette activité se déroule sur plusieurs séances, se module selon les «résultats» qu'obtiennent les enfants et permet aux enseignants d'expérimenter quelques concepts de la didactique des mathématiques et notamment celui de la dévolution.

(La situation-jeu s'inscrivait dans une démarche de formation des enseignants primaires des Etudes pédagagiques à Genève pour les divisions élémentaire et spécialisoe. Les étudiants expérimentaient d'abord eux-mêmes la situation puis observaient sa mise en place dans le suivi d'une classe pendant la période des cours. Il s'agissait de leur donner des outils pour comprendre les situations didactiques, de développer l'observation des conduites des élèves et de favoriser la construction d'une nouvelle attitude face à l'enseignement mathématique.)

Description de la situation

Matériel :

- une boîte contenant des pièces de type «blocs Dienes» entre une vingtaine et une centaine.
- papier, crayon ou document préparé.

Modalité :

toute la classe, par équipes de deux élèves ou individuellement.

Consigne :

«Nous allons jouer plusieurs fois au jeu de la boîte. A chaque jeu, je vous poserai cinq questions. Lorsque vous aurez joué, c'est vous qui vérifierez les réponses aux questions. Si vous avez la réponse juste, vous avez gagné.

Voici la boîte. Dans cette boîte, j'ai mis des formes géométriques.» (Si nécessaire, faire préciser ce que peuvent être des formes géométriques.) *La boîte est secouée, elle passe de mains en mains mais reste fermée par un élastique.*

Jeu 1

1. Combien y-a-t-il de formes dans cette boîte ?
2. Combien de formes rouges ?
3. Combien de formes qui ne sont pas rouges ?
4. Combien de formes bleues ?
5. Combien de formes qui ne sont pas bleues ?

Des exclamations, des interrogations fusent. Les entants sont encouragés à répondre à chaque question.

A la fin de la première série de questions, la phase de vérification est proposée : La boîte est ouverte et, à tour de rôle, deux enfants vont vérifier ce que contient la boîte. Ils organisent le contrôle, comptage, recomptage s'il y a lieu. Pas d'intervention de l'enseignant même en cas d'erreurs. Celui-ci se contente de noter le résultat au tableau comme les enfants le lui demandent : par exemple, 27, 7, 20, 9, 18. Les enfants de la classe contrôlent ensuite leurs écrits sur leur feuille personnelle ou celle de l'équipe.

Puis le jeu continue, les formes sont remises dans la boîte. Celle-ci est fermée avec l'élastique et l'enseignant précise : «Je n'ai rien ajouté, je n'ai rien enlevé».

Jeu 2

1. Combien de formes y a-t-il dans la boîte ?
2. Combien de formes jaunes ?
3. Combien de formes qui ne sont pas jaunes ?
4. Combien de formes bleues ?
5. Combien de formes vertes ?

La vérification s'effectue selon les modalités précédentes. Il arrive souvent que des erreurs de comptage apparaissent. L'enseignant n'intervient pas dans le débat pour confirmer ou infirmer les résultats mais il insiste pour que tous les élèves soient d'accord et qu'ils se donnent les moyens de vérifier et d'être sûrs de la réponse.

Jeu 3

1. Combien de formes carrées y a-t-il dans la boîte ?
2. Combien de formes qui ne sont pas carrées ?
3. Combien de formes qui ne sont ni rouges, ni bleues ?
4. Combien de formes rectangulaires ?
5. Combien de formes qui ne sont pas rectangulaires ?

Après chaque série de questions, le rituel de vérification est proposé. Un bilan des résultats est sollicité. Qui a gagné ? Combien de réponses justes ? L'enseignant écoute mais ne contrôle pas le bien-fondé des réponses et laisse aux élèves la responsabilité «de savoir s'ils ont gagné ou non».

Le lendemain, ou quelques jours plus tard, le jeu de la boîte est proposé (deux fois par semaine est un bon rythme). Les enfants sont persuadés qu'ils vont gagner à coup sûr. La reprise des mêmes questions ne leur permet pas nécessairement de réussir et l'enseignant a toute latitude pour soumettre de nouvelles questions à leur sagacité. Le choix de ces dernières va varier selon les réponses des enfants. L'enseignant propose, soit de reprendre les mêmes questions, soit de continuer à prendre en compte les différents critères possibles du contenu de la boîte.

De même, il varie la formulation des questions : «ce qui reste si on enlève les formes bleues», «combien de formes si je mets ensemble les rouges et les jaunes» etc ... Il demande, à partir de la troisième ou la quatrième fois, de discuter le résultat avant la vérification, et surtout de défendre «son point de vue».

Le jeu de la boîte se présente ainsi comme une situation d'action dont la stratégie de base est la réponse au hasard. Tant que l'élève n'envisage pas une possibilité de prévoir la solution, et donc d'imaginer un moyen pour cette prévision, l'enseignant ne peut pas lui faire comprendre qu'il lui pose un problème «où il y a quelque chose à comprendre».

Le but de cette première partie de la situation est que l'élève prenne lui même en compte le problème : c'est ce que Brousseau appelle la dévolution.

(La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert.)

Mais l'activité-jeu continue, les enfants apprennent ce qu'ils ont à faire, comment ils savent qu'ils ont gagné et qui le décide. (En 2P, tous les élèves ou presque tous à ce moment–là pensent qu'il faut toujours compter, sinon on ne peut pas savoir ; en 4P, le complément à ... est une stratégie qui apparaît, mais la trace écrite n'est pas utilisée comme moyen de garder des informations bien que les enfants disposent de leurs feuilles de jeux précédentes).

Il est à relever que les notations sont laconiques, suite de nombres sans autres indications. Alors, pour provoquer la prise de conscience de l'utilisation d'un langage précis, l'enseignant demandera aux élèves de faire le point en proposant «d'écrire et de dessiner tout ce qu'ils savent de la boîte» de manière individuelle, d'échanger ensuite les productions écrites et d'en débattre ensemble. Cette séquence donne lieu à une variété de représentations du contenu de la boîte, ce qui permet une réflexion sur le codage et le symbolisme en mathématiques.

Lorsque les élèves sont familiarisés avec le fonctionnement du jeu, une variable va être introduite.

Jeu x

J'ajoute ces formes dans la boîte. Je vous les montre. (7 à 12 formes différentes sont ajoutées en une seule fois dans la boîte. La durée d'observation est courte, juste le temps de mettre les formes dans la boîte.) Cette étape est conçue de manière à provoquer un obstacle, «un saut informationnel».

1. Combien y a-t-il de formes dans la boîte ?
2. Combien de formes rondes ?
3. Combien de formes rouges ?
4. Combien de formes qui ne sont pas bleues ?
5. Combien de formes qui ne sont pas jaunes ?

Ainsi l'enseignant va modifier le contenu de la boîte, au vu et au su de tous. Les questions que les enfants connaissent bien vont être réinvesties, et le nouveau champ numérique ainsi constitué pourra fonctionner comme obstacle pour provoquer le développement et la construction d'autres stratégies que le comptage. De plus, l'enseignant s'enquiert de plus en plus souvent avant d'accepter le comptage : «Tu penses que tu vas gagner ? Qu'est-ce qui te fait dire cela ? Comment le sais-tu ?». Il incite les enfants à expliquer «leur méthode». Des mini débats peuvent être organisés.

Enfin, lorsque le jeu est bien installé, l'enseignant peut déclarer qu'il s'agit maintenant pour chacun :

D'apprendre à répondre en étant sûr de sa réponse ou de savoir qu'on ne peut pas être sûr et de trouver ce qu'il faut faire pour gagner.

Cette étape marque pour l'élève le début du passage de l'emploi d'une vérité contingente à une vérité nécessaire. L'élève est conduit à prévoir la valeur de sa réponse en simulant la vérification par comptage. L'addition et la soustraction remplaceront le comptage comme méthode d'anticipation du résultat .

Pour que cette situation puisse se réaliser dans les meilleures conditions possibles, l'enseignant doit être attentif à maintenir un équilibre entre incertitude et certitude, difficulté et facilité. Suffisamment de savoir bien connu, un peu de savoir en voie d'acquisition et la création d'un climat qui favorise la recherche personnelle.

Objectifs

- prendre conscience de la nécessité de l'écrit et utiliser celui-ci;
- mettre en relation des objets, des nombres, des sommes, des différences pour les comparer afin d'en tirer des informations pour raisonner;
- avoir envie d'y voir clair et pour ce faire, anticiper;
- organiser des tentatives de solutions, prouver, vérifier;
- être capable d'abandonner un modèle;
- choisir un code, une notation;
- acquérir des stratégies de comptage efficace;
- comprendre les notions de manque, de complément, de négation, de différence;
- additionner, soustraire.

Le jeu de la boîte s'attache à promouvoir la découverte et le mode d'emploi, par l'élève, d'un savoir. Au cours de cette situation, l'enseignant se doit d'accepter de faire une mathématique *momentanément* valable, tolérer des arguments incorrects, des omissions, des simplifications.

Il est **patient**, c'est-à-dire qu'il résiste à la tentation de «tout dire», qu'il s'engage à ne plus être essentiellement la source privilégiée et unique du savoir.

Il **observe** les élèves et décrypte derrière les mots maladroits une logique inattendue.

Il **encourage** l'enfant à exploiter chaque bribe d'idée, contribue à l'élaboration de synthèses partielles, centre, organise et facilite les débats entre les élèves afin de permettre l'émergence des procédures de résolution.

Quelques flashs à propos des conduites des enfants

Dans un premier temps, la plupart des enfants de 2P pensent «qu'il y a de la magie là-dessous»; ils essaient de repérer comment l'enseignant peut modifier le contenu de la boîte : cela laisse supposer que les enfants n'ont pas immédiatement une conscience nette de la permanence du contenu et ce, même si l'enseignant déclare : «Je n'ai rien ajouté, je n'ai rien enlevé, c'est toujours la même boîte».

Le comptage des objets de la boîte, toujours identique pendant la première partie du jeu, n'ébranle pas les certitudes des enfants. Tout se passe comme s'ils n'utilisaient pas leur vérification comme une donnée stable dont ils doivent tenir compte.

Puis un enfant affirme être sûr de sa réponse; il est invité à donner et à défendre son point de vue; il dit sa certitude «qu'il ne peut y avoir que 7 rouges puisqu'on vient de les compter et que rien n'a changé». Le groupe vérifie son idée, le doute s'installe mais tous les enfants ne sont pas nécessairement convaincus. Il faudra encore une familiarisation plus longue pour que les enfants dégagent avec conviction la certitude de la permanence du contenu.

De même, la prégnance de la solution comptage va persister longtemps : lorsque les enfants ont dénombré les objets rouges, pour connaître la quantité d'objets qui ne sont pas rouges, la seule possibilité envisagée et envisageable reste le comptage des objets restants; le complément à 27 («de 7 à 27, ça fait 20») sera la marque d'une étape intermédiaire avant de proposer et d'utiliser la soustraction (« 27 moins les jaunes 11, ça fait 16»).

Le choix des valeurs numériques (variable didactique) va influencer les stratégies des enfants ; si les opérations s'effectuent dans le champ numérique connu, les enfants vont pouvoir se représenter les objets et les compter mentalement ou utiliser un résultat connu («de 7 à 27, je sais que ça donne 20»).

Si les valeurs numériques augmentent, il est difficile d'avoir une représentation mentale de chaque élément de la situation; l'enfant peut s'appuyer sur l'ajout successif de petites collections (pour trouver le reste qui n'est pas rouge, prendre les bleus et les jaunes, 37 et encore 12, 37, 47, 48, 49) ou reconnaître que la situation relève de l'addition ▶ lacunaire :

$$20 + \ldots = 69$$

ou de la soustraction :

$$69 - 20 = 49$$

L'enseignant modifiera donc les variables didactiques afin de faire émerger les procédures fiables. Il s'autorisera à laisser les enfants expliquer comment ils donnent des réponses en représentant ce que ces derniers disent afin que les processus mentaux deviennent de plus en plus conscients.

Le jeu de la boîte permet aux élèves de construire le savoir de la situation sous leur responsabilité, l'enseignant jouant le rôle d'un meneur de jeu qui facilite, favorise et orchestre les règles.

Dies academicus

M. Thierry Béguin, Conseiller d'état

Ndrl. *Les propos d'un responsable politique tenus devant la communauté universitaire sur ses objectifs, son rôle dans la société et le sens de sa mission, sont-ils en rapport avec nos réflexions sur les finalités de l'enseignement des mathématiques ? M. Samuel Roller répond oui à cette question, sans hésitations. Et, sans tarder, il suggère de les faire partager aux lecteurs de Math-Ecole. Merci au fondateur de notre revue pour cette excellente idée et pour son engagement jamais démenti. Merci aussi M. Thierry Béguin, conseiller d'état, chef du Département de l'Instruction publique et des affaires culturelles, qui a eu l'extrême obligeance de nous laisser publier de larges extraits de son dicours, prononcé lors du Dies academicus de l'Université de Neuchâtel, le 1 novembre 1997.*

...

Si l'université a pour tâche de préparer une partie de l'élite de demain à assumer les fonctions dirigeantes dans la société, elle ne peut plus se contenter de transmettre des connaissances comme on verse de l'eau dans des vases et estimer avoir atteint son but parce qu'elle les a remplis à ras-bord. Pour apprendre à gérer l'extraordinaire évolution des sciences et des techniques, il ne sera plus possible d'accumuler des savoirs. Comme le relevait André Giordan, directeur du Laboratoire de didactique et d'épistémologie des sciences de l'Université de Genève, l'omniscience est devenue matériellement impossible puisque le savoir scientifique double tous les 10 ans en moyenne, que la moitié des données en technologie sont périmées au bout de 5 ans et que nous ne savons pas quelles seront les connaissances de base dans les 20 ans à venir : les neuf dixièmes d'entre elles sont encore tenues sous le boisseau de l'ignorance.

Cet état de fait doit nous conduire à réviser nos conceptions pédagogiques, du jardin d'enfants à l'université. Cette réflexion est en cours et elle doit impérativement se poursuivre. Plus que de savoirs appris et accumulés, nous aurons besoin demain, pour dominer l'expansion phénoménale des connaissances, d'intégrer une nouvelle culture de base fondée sur l'apprentissage de démarches de pensée, sur le tri et l'utilisation des informations. Il ne s'agira plus seulement d'apprendre à résoudre des problèmes, mais d'abord de savoir clarifier des situations pour pouvoir poser correctement les problèmes. Il faudra prendre conscience qu'il n'y a pas toujours une solution à un problème mais plusieurs et parfois aucune et qu'en tout état de cause celles-ci dépendront du contexte dans lequel le problème aura été préalablement posé. Bien sûr, cela ne signifie pas qu'il faille renoncer à enseigner les principes fondamentaux de chaque discipline, les quelques grands concepts organisateurs, les points de repère indispensables; en revanche la formation des intelligences requerra plus encore qu'aujourd'hui l'acquisition d'outils intellectuels que les diplômés ne cesseront de perfectionner et de transformer tout au long de leur vie professionnelle afin d'appréhender aussi bien la complexité que l'incertitude et l'aléatoire.

J'ai parlé des sciences et des techniques parce qu'elles dominent notre monde et qu'elles détermineront notre avenir. J'en ai parlé aussi parce que notre canton y excelle et nous sommes fiers des performances de l'IMT comme de celles du CSEM, institutions appelées à renforcer leur collaboration en lien avec l'EPFL d'une part et les HES d'autre part. Mais cela ne signifie pas que nous ignorons les autres disciplines, les sciences humaines en particulier, bien au contraire. Nous voulons, et nous espérons que vous partagez le même souci, que l'université reste l'Universitas, c'est-à-dire la communauté des écoles. Il vous appartiendra de nous dire quels choix vous envisagez parce que nous atteindrons bientôt les limites matérielles de notre développement. Mais les choix qui seront faits, imposés par la nécessité, ne sauraient remettre en cause le principe même d'universalité. Encore faut-il que les facultés se connaissent, se parlent et songent à améliorer leurs collaborations transversales. Le repli sur soi, l'hyper-spécialisation et l'ignorance des autres conduiraient à ce type d'intellectuels fustigés par Hervé Bazin, dont il disait qu' «ils connaissent de plus en plus de choses sur des sujets si rétrécis qu'ils finissent par savoir tout sur presque rien». Cet auteur poursuivait en affirmant que «la spécialisation à outrance d'un savoir trop important pour un seul cerveau oblige tout le monde à être nul en quelque domaine, sinon dans la plupart; et la bêtise des intellectuels est la plus redoutable, parce qu'elle est à la fois pourvue de références impressionnantes pour les gogos et riche d'une suffisance qui étouffe l 'autocritique».

Invités par le Président Mitterrand en 1988, les prix Nobel de toutes les disciplines ont débattu des promesses et des menaces à l'aube du XXIème siècle. Du résultat de leurs travaux j'extrais cette citation: « Chacun à sa manière, le scientifique et le littéraire participent à l'incessante transformation du monde, à l'élaboration de nouveaux modes de penser qui nous permettent de mieux appréhender la complexité et l'incertitude. La notion de transformation est sans doute l'une des clés de la réflexion contemporaine et elle tranche avec la notion finaliste de progrès qui a dominé la pensée scientifique pendant si longtemps, notion impérialiste qui a prétendu faire de la science la mesure de toute chose et qui a subi le choc en retour des catastrophes du XXème siècle. Le totalitarisme du concept de progrès et, à certains égards, de celui de progrès scientifique, explique sans doute pourquoi le génocide, Auschwitz, mais aussi Hiroshima ou Tchernobyl, ont conduit à charger la science de tous les maux dont nous souffrons. Il n'était donc pas inutile de remettre les choses à leur place, de mettre l'accent sur l'évolution des scientifiques et sur le rôle à nouveau important que peuvent jouer la culture, la littérature, la musique, la peinture dans une réflexion féconde sur l'état du monde. Mettre de l'harmonie entre différentes données, c'est ce que fait le scientifique, mais l'écrivain ne fait-il pas de même lorsqu'il met de l'harmonie entre les mots ou le peintre entre les images ? Ce faisant, les uns et les autres mettent en lumière des interdépendances créatrices dont l'intérêt n'est pas à souligner. Cet intérêt est d'autant plus évident lorsque les uns et les autres n'obéissent, dans leurs recherches ou leur création à aucune morale ou idéologie préétablie qui diraient de faire ceci ou de ne pas faire cela». Ce texte pourrait être la charte de l'université telle que nous la concevons; il rappelle un principe : la liberté de recherche; il prescrit une méthode : l'interdisciplinarité, seul moyen de saisir l'entier du réel, multiforme et changeant; il invite à l'humilité, c'est-à-dire à reconnaître notre relative incapacité à expliquer le monde; enfin, il donne un sens à l'activité de chacun : essayer de promouvoir le vrai progrès, c'est-à-dire la possibilité pour l'homme de se situer dans sa relation au monde et aux autres. S'il y a une liberté et s'il y a un bonheur c'est sans doute là qu'ils se situent.

...

(Dans la suite de son allocution, M. Béguin s'adresse à Mme Ruth Dreifuss, Conseillière fédérale, et soulève les problèmes de l'autonomie des universités cantonales et de la répartition des coûts entre la Confédération et les cantons.)

Faux extraits de Racine

Denis Odiet, collège de Delémont

Ce n'est pas parce que l'extraction d'une racine peut provoquer chez un élève une tragédie, que l'on peut pour autant en déduire qu'il n'a pas lu quelques extraits de Racine et de ses tragédies.

Voici une pensée digne de celles du «Chat» de Philippe Geluck. Puisque nous sommes en Belgique, restons-y. Depuis quelques années, une délégation d'enseignants jurassiens a l'occasion de participer au congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. Cette année, vers la fin août, c'est à Ciney, entre Liège et Namur, que la SBPMef était heureuse d'accueillir également d'autres collègues étrangers venant participer aux travaux proposés.

Raisonnablement, chaque lecteur s'attend maintenant à parcourir un compte rendu des activités et autres ateliers fréquentés durant ce séjour wallon. Il n'en sera rien... ou presque. En effet, il est bien difficile d'escamoter la redoutable efficacité de «Cabri-Géomètre» dans la recherche de critère(s) que doit remplir un pentagone pour qu'il puisse paver le plan et encore plus de passer sous silence la remarquable conférence de Monsieur Jean Dhombres, directeur de recherches au CNRS, sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques et l'histoire des mathématiques.

Au passage, n'est-il d'ailleurs pas judicieux de se poser la question de la place de cette dernière dans l'enseignement de cette discipline, quel que soit le degré considéré. N'est-ce pas une partie d'une culture mathématique totalement absente des plans d'études ? «Il ne faut pas chercher longtemps pour apercevoir une première raison de rechercher l'origine de certains concepts. En effet, l'histoire montre que les choses qui paraissent élémentaires aux adultes que nous sommes n'ont parfois été mises au point qu'avec difficulté, ce qui est bon à savoir lorsqu'on doit les enseigner».[1]

A propos d'histoire, au fait, Phèdre, vous connaissez ? Cette tragédie a été revue et corrigée par la plume experte de Monsieur Charles Dumont, enseignant le latin en Belgique. Le «pastiche mathématique» qui suit, fruit de son travail, a fait la délectation des participants au congrès de Ciney.

POLYGONE

Faudra-t-il que toujours en mon coeur enfermé

Je garde mon amour enfoui à tout jamais

A quoi cela sert-il de manier les ensembles

Si l'on reste muet lorsqu'on se trouve ensemble ?

Car je ne connais plus qu'une seule équation

Dont cette inconnue-là est la seule passion.

Avant de la connaître, j'étais trop mathisé

Depuis que je l'ai vue, je suis traumatisée.

Pour avoir étudié les maths à mort

Je ne suis pas pour autant un hardi matamore.

Mais la voilà qui vient et de ma passion

Il va falloir ici faire la démonstration.

Il n'est donc plus question de prendre la

[1] in «*Oh, moi les maths...*», A. Desmarets, B. Jadin, N. Rouche, P. Sartiaux, Editions Talus d'approche, 1997.

tangente

Si je veux la tenir en relation constante.

«Madame en cet instant où je vous vois paraître

Il est des vérités que vous devez connaître,

Mon coeur est en lambeaux, par vos soins déchirés

J'ai des segments de coeur, par vous suis partagé.

O Médiane adorée, vous êtes ma bissectrice

Pour vous j'ai délaissé ensembles et matrices

Et je me décompose en de nombreux facteurs

Dont l'amour est le commun dénominateur.

Ma passion pour vous, c'est fort mathématique

Connaît une progression toute géométrique.

Pour vous je renierai jusqu'aux nombres premiers

Euclide et Pythagore, je veux les oublier

Je ne serai qu'à vous, prêt à tout sacrifice

Jusqu'à me séparer de ma calculatrice.

Je vous aime en secret, je n'ose l'avouer

Maintenant, je l'ai dit, voilà, C.Q.F.D.»

MEDIANE

Après cet exposé, Monsieur, tout en logique,

Voici la réciproque en tous points symétrique.

Vous avez, Polygone, de nombreux bons côtés;

Sous tout angle, en effet, je vous ai mesuré ;

Vous êtes droit, carré, en votre âme on décèle

La sublime beauté des triangles isocèles

Et dans l'ensemble A qui comprend mes passions,

Vous êtes, en tous cas, l'élément singleton.

Mon doux penchant pour vous, au vôtre est parallèle

Ma flamme à votre feu est proportionnelle

Elle tend vers l'infini, ne peut se calculer ;

A votre gré je veux me laisser dériver.

POLYGONE

Médiane adorée, ma joie est intégrale

Fonction sans limite, bonheur sans décimale,

Nous ne serons plus qu'un. Plus de division !

Vous serez ma moitié, je le dis sans fraction

Mais pour vous faire honneur, c'est trop peu d'un poème

Pour vous j'inventerai de nouveaux théorèmes

Et pour gage discret de nos amours en fleurs

Recevez cette rose offerte avec mon coeur.

MEDIANE

Polygone adoré, tu es mon seul axiome

Plus fier qu'un angle droit, plus beau qu'un polynôme

POLYGONE

Pincez-moi, je vous prie afin de me prouver

Que tout ce que j'entends, je ne l'ai point rêvé.

MEDIANE

Non, tu ne rêves pas, tu es bien mon seul prince

Je vais te le prouver : c'est pour toi que j'en pince.

Tous les ouvrages mentionnés dans cette rubrique Notes de lecture sont disponibles à :

IRDP/Secteur Documentation
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
tél. : (032) 889 86 14
fax : (032) 889 69 71

et peuvent être empruntés gratuitement pour une période de un mois à raison de cinq documents à la fois.

Ce secteur de l'IRDP regroupe, dans sa bibliothèque, des documents (monographies, périodiques, cassettes vidéos) dans les domaines de l'éducation, de la sociologie et de la psychologie.

Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.

Jean Julo. Rennes : P.U.R., 1995 (collection «Psychologies»).

Les presses universitaires de Rennes (P.U.R.) nous offrent un excellent ouvrage, de Jean JULO, chercheur, enseignant de psychologie dans le cadre de la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques. Ce livre s'adresse à ceux dont le métier est (ou sera) d'enseigner les mathématiques ainsi qu'aux étudiants (psychologie, sciences de l'éducation) désireux de connaître les applications possibles de la psychologie cognitive dans l'enseignement.

Mais tous les formateurs et les psychologues s'intéressant d'une manière ou d'une autre à cette question passionnante de la découverte des solutions trouveront là matière à réfléchir et aussi à se distraire ... en essayant de résoudre des problèmes qui pourront les surprendre.

A lire la table des matière, on se rend compte immédiatement que l'auteur se propose d'offrir aux professionnels de l'enseignement des mathématiques un outil s'appuyant sur les travaux et résultats de la psychologie cognitive :

- Que veut dire «se représenter un problème» ?
- Comment se construit la représentation du problème (le processus d'interprétation et de sélection, de structuration, d'opérationnalisation).
- Les outils de modélisation (modélisation et traduction, la mobilisation des outils et ses conditions).
- Avons-nous une mémoire des problèmes ? (transfert analogique et formation de schémas, quelle mémoire pour les problèmes ?)
- Difficultés en mathématiques et représentations des problèmes (les effets de contexte, comparaison entre les «bons» et les «faibles», l'activité de représentation et ses défauts, pour empêcher les dysfonctionnements de se multiplier).
- Comment aider ni trop ni trop peu (qu'est-ce qu'une aide à la représentation, la présentation du problème, les interventions tutorielles).

- Des représentations aux connaissances (apprendre en modélisant : un exemple, représentation et conceptualisation).
- Conclusion (quelle pédagogie pour les représentations ?)

En entrant dans l'ouvrage, on constate avec bonheur que les chapitres sont courts, bien ordonnés, illustrés de très nombreux exemples bien choisis accompagnés de synthèses précieuses.

La plupart des réformes actuelles de l'enseignement des mathématiques – dont celles qui se développent actuellement en Suisse romande – placent la résolution de problèmes au coeur des apprentissages, sous l'impulsion de la recherche en didactique.

Les psychologues cognitivistes y donnent, eux aussi, la priorité en s'attachant à la description aussi précise que possible de ce qui se passe dans le tête de celui qui apprend ou, plus exactement, de l'activité mentale qui le conduit à adopter tel ou tel comportement dans une situation donnée.

«C'est ainsi que l'étude des processus cognitifs et des représentations devient centrale dans tous les secteurs de cette psychologie que l'on qualifie désormais de cognitive, que l'activité de résolution de problèmes, en particulier, est réexaminée à la lumière de cette nouvelle approche théorique et que la question de l'aide à la résolution de problèmes peut être repensée : la notion de représentation du problème et la connaissance de plus en plus précise des processus impliqués dans le fonctionnement de cette représentation permettent, en effet, d'envisager cette question importante sous un tout autre angle».

D'où l'idée d'aider ceux qui ont le plus de difficulté à se construire des représentations plus performantes en prenant en compte les fondements du système de pensée.

Plutôt que de vouloir à tout prix réduire la complexité du savoir en le découpant arbitrairement on peut proposer de vrais outils pour l'enseignant : les situations qu'il met en oeuvre pour induire tel ou tel apprentissage, telle ou telle compréhension.

Mots-clés :

psychologie cognitive, résolution de problèmes, représentations, modélisation.

Destinataires :

formateurs, maîtres, étudiants concernés par l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

F.J.

Oh, moi les maths ...

Alain Desmarets, Benoît Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux. Le Roeulx-Hainaut : Ed. Talus d'approche, 1997.

Un petit ouvrage, original, de lecture aisée, nous est proposé par des collègues belges, qui au sein du GEM (Groupe d'Enseignement mathématique) à Louvain-la Neuve, ont pris le temps de conduire des réflexions approfondies et de les faire partager à d'autres.

Nous reprenons ici l'avant-propos de ce livre qui, mieux que tout autre résumé, donne un reflet tout à fait fidèle de son contenu :

Imaginez un éditeur curieux qui se sent concerné par les maths, et que la difficulté n'effraie pas. Imaginez quatre enseignants, tou-

chant de près à l'apprentissage de ces maudites maths, que l'écriture n'effraie pas.

Figurez-vous leur rencontre :

– *« A quoi ça sert les maths ? Est-ce donc à ce point indispensable ? Qu'est-ce qui justifie leur statut d'outil de sélection ? questionne l'éditeur.*

– *«Ce n'est pas si simple et puis on a déjà tellement discuté de ces questions», répondent les pédagogues.*

L'éditeur, peu à peu déterminé, avance:

– *«Et si vous rassembliez vos idées, si vous confrontiez vos écrits pour qu'apparaisse une image collective et compréhensible par le plus grand nombre ?»*

Voilà nos quatre mousquetaires de l'équation confrontés à leurs visions différentes du problème.

Car enfin, que peuvent en dire ensemble un prof d'uni, un prof d'école normale, un prof du secondaire et un instituteur ? Eh bien, c'est tout l'intérêt du livre que vous tenez entre les mains. Ils ont relu attentivement leurs copies, les ont nettoyées et surtout confrontées à la diversité de leurs regards avec la volonté d'une lecture concentrique et susceptible d'éclairer l'épineux problème de l'apprentissage des maths, compte tenu des idées qu'on s'en fait.

Ils vous proposent un recueil destiné non seulement aux enseignants de mathématiques, mais aussi aux non matheux, ceux pour qui cette matière reste indigeste et nourrit de bien mauvais souvenirs, ceux qui n'ont rien à voir avec les maths et que l'acte d'apprendre intéresse. Pour tous, donc.

Certains passages peuvent paraître un peu plus arides (il en faut pour tous les palais, non ?); une lecture sautillante et indocile est donc fortement conseillée. Méfiez-vous, l'intérêt des textes n'est pas nécessairement proportionnel à leur longueur ! Les auteurs ont préféré garder leurs styles propres plutôt que de se fondre dans une uniformité molle. Commencez ce livre par où vous voudrez et laissez-vous mener par vos intérêts.

D'un chapitre à l'autre, des situations concrètes (à vos crayons !) et d'autres textes, prenant plus de recul, vous sont proposés. Cette variété illustre le plaisir du travail de confrontations sur une même matière. Elle illustre aussi l'absence de réponse linéaire et absolue aux questions de départ de l'éditeur curieux.

Qu'il soit ici remercié pour son goût du risque. Sans lui, les auteurs n'auraient pas pris le temps de s'asseoir autour de leurs feuilles éparpillées pour tenter de répondre aux préoccupations de plus de gens qu'on ne pense, mais surtout, ils n'auraient pas eu l'occasion d'articuler en un ouvrage cohérent des contributions jusque-là éparses.

Que ce pari ouvre la voie à d'autres démarches intradisciplinaires.

Mots-clés :

mathématiques, didactique, enseignement, apprentissage, problèmes, représentations, finalités, histoire.

Destinataires :

formateurs, maîtres, étudiants concernés par l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

F.J.

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Collection «Maths pour tous»** (4 cahiers). **Histoire de maths.		
Le monde des symétries. Py, Pytha, Pythagore. La Magie du calcul.	.....	*(ex. à Fr. 45.-)*
Le Trésor de tonton Lulu (vol.1, 28 probl. de niveau "10")	.....	(ex. à Fr. 25.-)*
Le Trésor de tonton Lulu (vol.2, 25 probl. de niveau "11")	.....	(ex. à Fr. 27.-)*
Le nombre π, ADCS	.....	(ex. à Fr. 40.-)*
Les jeux de NIM, par Jacques Bouteloup, ADCS	.....	(ex. à Fr. 52.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*
Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	.....	(ex. à Fr. 32.-)*
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)*
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Exos-malices, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)*
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Panoramaths 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*
Pliages mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 17.-)*
Apprivoiser l'infini, ACL	.....	(ex. à Fr. 25.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	.....	(ex. à Fr. 26.-)*
Maths en vacances. Hypercube.	.....	(ex. à Fr. 15.-)*

Les anciens numéros de ***Math-Ecole*** (prix en page 2 de couverture)

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques ..... (Fr. 13.- l'ex.)* :

- Niveau CM (degrés 4 et 5) :
  - ***Récrémaths*** .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques faciles*** ..... (ex. à Fr. 16.-)*
- Niveau collégiens :
  - ***Les Pentagones patagons*** (n° 8) .... ex. — ***Le Serpent numérique*** (n° 10) .... ex.
  - ***Le Trésor du vieux Pirate*** (n°12) .... ex. — ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques pour tous*** ..... (ex. à Fr. 16.-)*
- Niveau lycéens et adultes :
  - ***La Biroulette russe*** (n° 9) .... ex. — ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex.
  - ***Le Roi des Nuls*** (n°13) .... ex. — ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques pour lycéens*** ..... (ex. à Fr. 16.-)*
- Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 5, 6 et 7) : ....

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-
anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 Fr. 20.- par abonnement
de 10 à 50 Fr. 18.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole,*** **Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,**
par courrier électronique E-mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch,**
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)