MATH ECOLE

37e année

182

avril 1998

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-
anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 Fr. 18.- par abonnement
de 10 à 50 Fr. 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E–mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

36e année 5 numéros par an

182

avril 98

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

L'école ? Oui, avec plaisir !

Michel Brêchet

Utopie ou réalité accessible ? L'entrée en matière est certes un peu abrupte, mais l'école, dans sa mission formatrice et éducative, ne devrait-elle pas avant tout être un lieu où l'on se sent bien, où l'on s'émerveille des beautés et des richesses de notre monde, où l'on forge ses armes dans la sérénité ? Et d'où l'on sort avec un esprit d'ouverture : ouvert à l'inédit avec l'envie de s'y lancer, ouvert et à l'écoute de ses proches et réceptif à leurs demandes.

Dès lors, pourquoi le plaisir ne constituerait-il pas le fil conducteur du parcours scolaire de l'enfant ? Le plaisir d'apprendre, de découvrir des dimensions cachées, d'explorer des univers mystérieux, mais aussi de travailler en groupes et d'échanger.

Au placard les longues heures de cours rébarbatives, l'accumulation de connaissances dont on ne sait pas vraiment à quoi elles servent, le psittacisme ! Est-il nécessaire d'atomiser les élèves, d'avoir des plans d'études gonflés à bloc, une réglementation démesurée, un système sélectif, voire antisocial ? Ce tableau est un peu sombre, mais ne reflète-t-il pas, toute proportion gardée, la réalité scolaire d'aujourd'hui ?

Dans le domaine de l'éducation, la formulation de généreuses intentions fait toujours resurgir la lancinante et éternelle question: comment faire ? Sans prétendre à l'exhaustivité, décrivons brièvement quelques outils pédagogiques permettant de mettre en oeuvre ces beaux principes.

La quête de perspectives inconnues comme moteur de l'apprentissage : partir des intérêts des élèves, les valoriser, puis mettre en relief le caractère limité et momentané (la plupart du temps) des satisfactions qu'ils peuvent en tirer; leur proposer ensuite d'aller plus loin, vers ce qui pourra leur procurer un plus grand contentement, dans des registres qu'ils ignorent.

Certains jeux éducatifs que l'on trouve dans le commerce sont très motivants et se prêtent bien à la mathématisation. Par ce biais, mais aussi par une pratique assidue, les élèves ont la possibilité de faire évoluer leurs tactiques initiales. De proche en proche, ils découvrent ainsi de nouvelles stratégies, insoupçonnées jusqu'alors.

L'étude des probabilités, qui conduit fréquemment à remettre en cause l'expression «C'est la chance, on peut pas savoir !», incite l'élève à modifier son regard sur les phénomènes aléatoires et à se rendre compte que là où le hasard est à l'oeuvre, il n'y a pas que mystère et incompréhension.

Le plaisir de venir à bout des difficultés rencontrées, et donc d'apprendre, comme source de motivation : proposer aux élèves des situations conduisant à des obstacles non prévisibles, et, ce faisant, les inviter à trouver des solutions originales, voire personnelles.

A partir d'activités géométriques en apparence anodines, par exemple lors de l'apprentissage de la démonstration, on peut amener les élèves à produire des résultats qui sont en complète contradiction avec leurs prévisions. Piqués au vif, ébranlés dans leurs conceptions et leurs visions de la réalité, ils seront alors bien déterminés à franchir les obstacles imprévus.

La recherche de la longueur de la diagonale d'un carré de périmètre connu, problème a priori ne sortant pas de l'ordinaire, réserve en réalité bien des surprises: la mesure à l'aide de la règle graduée et le calcul avec la sacro-sainte calculatrice sont mis en échec. Il n'en faut pas plus pour stimuler la curiosité des élèves et leur donner «l'envie de savoir». Parce qu'il présente une rupture considérable, le passage des nombres rationnels aux nombres irrationnels est source d'un intense questionnement.

La mobilisation par la complexité : confronter les élèves à des savoirs qu'ils n'imaginent pas, à des problèmes qui, à première vue, les dépassent et ne sont pas censés les intéresser. Les enjeux et les exigences ainsi posés peuvent être vécus comme un appel, une invitation à découvrir de nouvelles choses. Quitter en quelque sorte la «pédagogie du simple» qui, sous prétexte de s'adapter aux possibilités des élèves, ne leur soumet en règle générale que des connaissances réduites à de vulgaires habiletés et à des applications banales.
L'étude du langage algébrique, parce qu'il conduit à manier mentalement des choses qu'on ne connaît pas, parce qu'il offre une liberté de manoeuvre mentale et qu'il permet d'amener la pensée à une expression symbolique soumise à des lois de calcul, est un moment privilégié pour plonger les élèves dans des questions scientifiques difficiles, questions desquelles émergeront, avec un peu de patience toutefois, simplicité et beauté.

Les différents systèmes de numération (maya, babylonien, égyptien, décimal, ...), et leurs caractéristiques (présence du zéro, numération additive, de position, ...) sont attrayants par le fait qu'ils sont un sujet d'étude d'un haut niveau culturel et qu'ils s'inscrivent dans l'histoire de l'humanité. Mystérieux et complexes au premier abord, ils révèlent progressivement l'ingéniosité des civilisations à désigner des quantités, à construire des signes et à élaborer des syntaxes.

Toutefois, sans exigence éthique et sans sollicitude à l'égard de l'enfant, tout projet pédagogique peut se dégonfler comme un ballon de baudruche. Il ne suffit pas en effet de se contempler dans sa position d'enseignant, d'avoir la conviction que son propre enthousiasme et sa jubilation personnelle entraîneront immanquablement ceux des élèves. Il est essentiel de se laisser interpeller et interrompre par les élèves «qui ne suivent pas», de décrocher et d'aller à leur rencontre, de reconnaître leur résistance à l'entreprise pédagogique comme une précieuse occasion d'inventer de nouveaux moyens pour que l'école soit un lieu de partage et de réussite.

Le plaisir d'apprendre, dans un environnement rassurant, grandir en construisant de nouveaux savoirs dans l'harmonie, tout simplement !

Le Kangourou sur Internet

www.mathkang.org

A cette adresse vous pouvez trouver tous les renseignements sur le Kangourou et même jouer ! En effet, pour la deuxième année, le Kangourou est mondial ! Tout le monde peut jouer sur internet. Voici trois des 10 questions de l'an dernier :

Q1 : Le cloneur

Un mouton pèse 135 kg. Je me propose de le cloner.

Mais, pour mon premier essai je vais produire un clone trois fois plus petit (à l'échelle 1/3).

Combien mon clone pèsera-t-il ?

(suite à la page n° 25)

La confection du nouveau plan d'études romand de mathématiques, racontée depuis les coulisses.

J.-A. Calame, Ecole Normale Neuchâtel

L'éditorial de notre numéro 181 était consacré à la parution du nouveau plan d'études romand de mathématiques. Jacques-André Calame, président du groupe des cinq auteurs de ce document, membre de notre comité de rédaction, a pensé que les lecteurs de Math-Ecole seraient intéressés par ce qui s'est passé en coulisses, avant le lever du rideau. C'est avec plaisir que nous accueillons cet éclairage insolite d'un document très officiel.
Une remarque encore : notre collègue ne travaille pas pour l'Office du tourisme de l'Oberland bernois, mais c'est tout petit, déjà, qu'il est tombé dans la marmite, glacière, évidemment. [**ndlr**]

Acte 1, scène 1 (le président de la CS1, le futur président du groupe APERO)

«... *et puis cela ne devrait pas être une affaire trop lourde. Il s'agit de modifier, de retoucher les pages bleues du Grap, ...*»

La voix et la personne sont accueillantes, encourageantes, chaleureuses, et c'est vrai que le sujet est plus que «tentant».

«... *merci de votre confiance, je pense que je vais accepter ...*»

Acte 2, scène 2 (le club des cinq à Aeschlen, lac de Thoune)

Ce n'est pas le Paris-Dakkar, c'est le pari d'Aeschlen ! Régulièrement, Danielle de Genève, Jean-Daniel de Lausanne, Yvan de Sion, Alain de la Neuveville et Jacques-André de Sauges, quittent leurs villes ou chantiers A5-Rail 2000... pour retrouver un petit havre de paix, confortable, familial, convivial face aux Trois Bernoises. Passé le premier café (avec Nussgipfel), le travail commence, il est 9h15.

«... *Génial, ta maquette, comme un prospectus, ...*»

«... *Les six domaines de math, il faut les séparer les uns des autres, il ne faut pas les hiérarchiser, ...*»

«... *La résolution de problème, on n'y coupe pas, une page pour ça au minimum, ...*»

«... *Entre proportionnalité et linéarité, on n'a encore pas fini de discuter ! Et dire que cette règle de trois, ça fait vingt ans qu'on lui a tordu le cou ! ...*»

«... *La calculatrice, elle est là, de fait, chez tous les enfants, dans toutes les serviettes, que le maître l'autorise ou pas ! Alors... on en fait quoi ? ...*»

«... *T'es allé au séminaire de Chaumont ? Touffu, l'affaire des algorithmes ! On n'est pas sortis de l'auberge. ...*»

«... *Tu l'ouvres, cette bouteille de Petite Arvine ? Faut s'encourager, midi, c'est que la fin du premier tiers de la journée ! ...*»

«... *Comment faire comprendre que la géométrie, c'est comme la parabole du semeur... c'est si important, mais ça doit mûrir chez chaque élève selon son rythme propre ! Tiens un bon exemple, les alignements pour situer un lieu. Le Stockhorn, tu l'as exactement dans l'alignement Aeschlen-Einigen ! Mais depuis Münsingen, c'est autre chose !*

Donc, les angles, ...».

Derrière le Simmental, le soleil s'est couché (non sans qu'on l'ait admiré au passage !)

A l'abri des téléphones, des fax et autres natels, le club d'Aeschlen, communément appelé APERO (ajustement du plan d'études romand) relit les décisions de la journée. Il est 22h. Puis après un bon dessert «maison» comme en font les hôteliers soucieux d'un accueil touristique digne de ce nom, chacun se retire dans ses appartements ! Qui avec un livre de didactique, qui avec un livre d'il y a trente ans pour voir comment on y parlait de la linéarité, qui avec une publication de l'IRDP sur la calculatrice.

La nuit sera courte, mais quelle motivation dans tout cela. C'est vrai que les math, c'est génial, à tous les niveaux de l'enseignement et de la recherche, quand on y croit tous ensemble !

Acte 3, scène 3 (Vous connaissez le secret ?)

«... *Comment ça marche, votre groupe ?* ...

Ouais, mais quand même, vous êtes tous très différents, avec des caractères bien trempés ! Alors ? ...»

C'est en réalité très simple.

Il y a quelques règles élémentaires de vie de groupe posées au départ de ces trois ans de travail :

1) Présider, oui, mais imposer, non !

2) Se réunir les cinq oui, à deux ou trois, non, sauf sur des travaux ponctuels qui sont une mise en oeuvre des décisions prises à cinq !

3) Nul n'est plus compétent qu'un autre, ou plus exactement, les compétences du groupe réuni sont supérieures à la somme des compétences individuelles.

4) L'écoute de chacun est fondamentale, des idées même les plus anodines, «le désert peur refleurir» !

5) Respect et souci de l'autre empêchent les affrontements où chacun tirerait la couverture à soi ! En revanche, l'écoute favorise la mise à plat de toutes nos représentations avant de reconstruire un plan ensemble !

6) Savoir perdre du temps pour en gagner ! Mieux vaut bien vivre des samedis de travail en paix que de courir les séances en fin de journée après des cours et séminaires !

7) Savoir que c'est avec le soutien et l'aide de toutes les personnes consultées, quelles que soient leurs fonctions, c'est avec leur motivation et leurs critiques constructives que nous avons cherché à élaborer ce plan d'études.

Et tout cela... pour que la mathématique romande reste vivante et possible, et que l'enfant puisse s'y épanouir dans un cadre nécessaire, certes, mais toujours ouvert et en devenir !

D'où notre conclusion : vivre intensément ce plan ... mais que vive aussi et déjà maintenant dans la tête de tous un plan encore plus audacieux pour 2008 !

Un président de groupe
reconnaissant pour tout
ce qu'il a reçu !

CABRIdées : De l'observation d'une figure à la construction d'une notion

Michel Chastellain, SPES

Le fundamentum du programme de géométrie des classes scientifiques de 7e année du canton de Vaud précise, entre autres :

– «*mettre l'accent sur le développement d'une attitude entreprenante vis-à-vis des questions posées et sur l'imagination;*

– *s'habituer à porter son attention sur une partie de figure;*

– *effectuer une construction donnée par une marche à suivre;*

– *calculer des aires;*

– *savoir effectuer quelques constructions, en particulier celles des droites principales d'un triangle;*

– *savoir utiliser le fait que :*

  - *dans un triangle, la somme des mesures des angles égale 180°,*

  - *dans un cercle, tous les angles inscrits interceptant le même arc ont même mesure,*

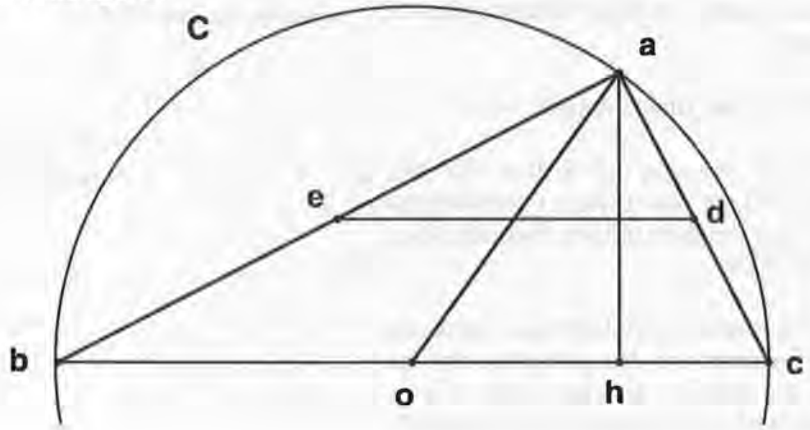
  - *l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit dans le même arc de cercle,*

– *savoir calculer la diagonale d'un rectangle de côtés donnés.*»

Les notions géométriques, dont il est question ici, sont généralement découvertes les unes après les autres, au fur et à mesure de l'avancement dans le programme. Mais une fois n'est pas coutume, pourquoi ne pas les aborder globalement, dans le cadre d'une même activité d'observation ? Et pourquoi ne pas utiliser l'aspect dynamique de «Cabri-géomètre» pour investiguer, au-delà d'une figure, la famille à laquelle elle appartient ?

D'où l'idée de l'énoncé suivant, étudié durant quatre périodes en salle informatique par groupes de deux ou trois élèves :

1. Construisez cette figure :



dans laquelle :

- ***a** est un point mobile du cercle **C**, de centre **o**.*
- *Le diamètre [**bc**] du cercle **C** mesure 12,5 cm.*
- ***e** et **d** sont, respectivement, les milieux des côtés [**ab**] et [**ac**] du triangle **abc**.*
- *[**ah**] est la hauteur du triangle **abc**.*

2. *Notez la marche à suivre de votre construction.*
3. *Déterminez, lorsque **a** se balade sur le cercle **C**, les valeurs de :*
   - *[**ab**], [**ac**], [**bc**], [**ab**]^2, [**ac**]^2, [**bc**]^2, [**ah**], [**ed**] et [**oa**];*
   - *l'aire et le périmètre du triangle **abc**;*
   - *la mesure des angles **bac**, **abc** et **acb**;*
   - *la somme des angles du triangle **abc**.*
4. *Que peut-on déduire des résultats ?*

Souhait :

votre compte-rendu fournira tous les éléments nécessaires à la bonne compréhension de votre recherche, des constructions précises, un maximum de remarques, ainsi qu'une tentative de justification lorsque cela est possible.

Construction de la figure

Cette première phase met en évidence certaines erreurs inhérentes aux concepts du logiciel, dont on peut affirmer qu'elles n'auraient certainement pas été commises lors d'une construction à la règle et au compas.

Sans entrer dans trop de détails, peu significatifs pour les non initiés, il convient toutefois de signaler quelques-unes de ces fautes «classique» :

- recours, comme support du diamètre [**bc**], à une droite de base ajustée approximativement afin qu'elle «passe» par le centre du cercle **C**;
- création d'un segment [**oa**], en tant que rayon du cercle **C**, dont la taille se modifie tout naturellement à chaque tentative de déplacement du point **a** sur le cercle;
- détermination d'un point **a** dont on ne peut modifier l'emplacement parce que créé comme l'intersection de la perpendiculaire au diamètre [**bc**] (qui passe par le point **h**) avec le cercle **C**;
- recours à l'outil «*Cercle de base*», plutôt qu'à l'outil «*Cercle défini par centre et point*», avec apparition d'un nouvel obstacle lié au dimensionnement du diamètre du cercle **C**, comme le confirment les propos de Bastien et Yannick :

Nous nous sommes posé la question : Comment faire un cercle qui garde toujours la même taille (12,5 cm)
Nous ~~nous~~ sommes ~~dans~~ aller dans cercle de base, mais nous n'avons pas pu lui donner le diamètre voulu. nous avons décider de recommencer.

Par contre, d'autres erreurs illustrent parfaitement les représentations que les élèves se font fréquemment d'une figure géométrique, lorsqu'ils lui attribuent des propriétés sur la base de ce qu'ils voient, sans se rendre compte que ces caractéristiques n'existent que dans leur esprit et ne peuvent pas être véritablement déduites de l'hypothèse formulée dans la consigne.

En voici deux exemples (le texte des élèves figure sous la forme d'un fac-similé, par gain de place) :

- *«... nous avons commencé par faire un segment de 12,5 cm (ndrl : [bc]), puis la médiatrice de ce segment.*

  A l'intersection de la médiatrice et de ce segment, nous avons nommé le point o.

  La médiatrice et le segment forment une croix droite. Nous avons alots tracé un segment qui coupe l'angle de 90° en deux, ce qui fait deux angles de 45°.

  A l'autre extrémité du segment qui coupe l'angle de 90° en deux, nous avons nommé ce point le point a ...»

Voilà une erreur bien connue : dans la figure qui accompagne la donnée, le rayon [**oa**] est interprété comme faisant un angle de 45° avec le diamètre [**bc**], parce qu'il semble, «à l'oeil», que ce soit le cas !

De plus, la procédure mise en place ne permet pas de modifier la position du point **a**, ce que les élèves constatent d'ailleurs par la suite :

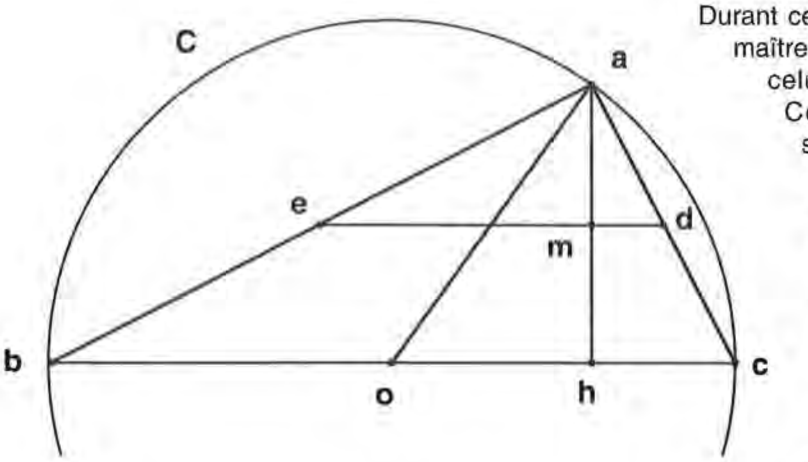
«... Nous avons tracé un segment qui va de a à b et un second qui va de a à c.

Puis nous avons tracé un segment qui part du point a et qui tombe perpendiculairement sur le segment [bc]. Nous avons nommé le point h.

Nous nous sommes trompés, le point a n'est pas mobile ! ...»

- Après avoir construit correctement le cercle **C**, le triangle **abc** et le segment [**ah**], un autre groupe a commis «l'erreur» suivante :

«... Nous avons mis le milieu m du segment [ah] et nous avons tiré une droite passant par ce point et qui est perpendiculaire au segment [ah]. Le croisement de la droite que nous venons de tirer ainsi que les segments [ab] et [ac] donnent les points e et d. Enfin, nous avons tiré le segment [ed] ...»



Bien que l'hypothèse ne donne aucune information à ce sujet, l'observation superficielle de la figure de base conduit les élèves à imaginer, d'une part que les segment **[hm]** et **[am]** sont isométriques et, d'autre part, que le segment **[ed]** est perpendiculaire à la hauteur **[ah]**. Or, par chance, ces deux propriétés sont vraies. Dès lors, la suite de la recherche se poursuit sans obstacle majeur.

On touche là à un type de difficulté qui se révèle souvent délicat à faire comprendre aux élèves : comment les sensibiliser au «danger» d'une affirmation non fondée, alors qu'elle est tout de même juste mais qu'il s'agit justement de prouver ?

Pour y parvenir, une première phase descriptive peut s'avérer utile. Celle-ci consiste à leur demander de décrire, à tour de rôle, une propriété de la figure de base, afin de bien différencier ce qui est réellement donné de «ce que l'on aurait tendance à imaginer.»

Marche à suivre

En règle générale, tous les groupes sont parvenus à élaborer une figure adéquate. Pour certains, les essais ont été évidemment plus nombreux que pour d'autres.

Durant cette phase, le rôle du maître a essentiellement été celui de «vérificateur». Cela signifie qu'à la suite de la question «*M'sieur, on a fini, c'est juste ?*», il se contentait de saisir la figure par un élément pour la déplacer, afin de mettre en évidence sa «solidité».

En d'autres termes, cela signifie qu'une figure correctement élaborée conserve ses propriétés invariantes lorsqu'elle est modifiée, alors qu'une figure comportant des erreurs de ce type se désagrège, sous le regard stupéfait des élèves.

En ce qui concerne la marche à suivre, l'apprentissage de l'écriture d'un texte concis correct au plan du français et respectueux de la terminologie adéquate ne se fait pas du jour au lendemain. Au début de la 7e année, les erreurs «traditionnelles» sont légion : «un point est perpendiculaire à ..., il est tracé, on tire une droite [**bc**], on place, un point **A** sur un cercle **C** ou encore, on parle d'un angle **a**, **b** ou **c**.»

Toutefois, peu à peu une amélioration apparaît et il est parfois réjouissant de découvrie un compte-rendu – même si tout n'est pas parfait – comme celui de Jonathan, Aris et Gatien :

On a fait le segment [bc] qui mesur 12,5 cm,
On a fait le milieu du segment [bc],
On a fait un cercle de centre o passant par c,
On a fait un point sur le cercle C (a),
On a fait un segment [a o],
On a fait un segment [a c],
On a fait un segment [a b],
On a fait le milieu du segment [a c] et on l'a appelé d,
On a fait le milieu du segment [a b] et on l'a appelé e,
On a tracé le segment [e d],
On a tracé une droite passant par le point a et perpendicula au segment [bc].
On a nommé h l'intercertion entre le segment [bc] et sa perpendiculaire passant par a,
On a fait le segment [a h],
On a camouflé la droite passant par [a h].

Collecte des mesures

Les élèves devaient effectuer le relevé des différentes mesures demandées pour une dizaine de cas. On découvre ici tout l'intérêt de «Cabri-géomètre» qui facilite grandement la tâche par son aspect dynamique, en évitant de devoir réaliser plusieurs fois la même construction.

Cette phase n'appelle aucun commentaire spécifique, sauf en ce qui concerne l'organisation des résultats. A ce propos, on constate que le recours à un tableau à double entrée n'est pas systématique. En effet, 50% des élèves notent les mesures les unes après les autres, dans un style plus ou moins proche de celui de Lorraine et Cécile :

Nous avons encore déplacé le point a.
Voici les nouvelles mesures: a.b = 11,5 , a.c = 5,1 , b.c = 12,6
$[a.b]^2 = 132{,}25$, $[a.c]^2 = 26{,}01$, $[b.c]^2 = 158{,}76$

Nous mesurons maintenant les segments : a.h = 4,7 , e.d = 6,3
L'aire du triangle a.b.c = $\frac{b.h}{2}$ = 39,69
Perrimètre du triange a.b.c = 12,6 + 11,5 + 5,1 = 29,2
Mesures des angles : b.a.c = 90°, a.b.c = 24°, a.c.b = 66°, a.a.c = 47
La somme des angles du triangle a.b.c. = 180°

Et pourtant, l'utilisation d'un tableau facilite grandement la poursuite de l'étude en vue de la comparaison des valeurs obtenues, comme on peut le constater dans le compte-rendu de Fanny et Anna.

	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
[ab]	10,8	9,8	11,8	8,1	7,3	6,3	4,0	6,5
[ac]	6,3	7,8	4,3	9,5	10,2	10,8	11,9	10,7
[bc]	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5
$[ab]^2$	1166,4	96,04	139,24	65,1	53,29	39,69	16	42,25
$[ac]^2$	39,69	60,84	18,49	90,25	104,4	116,64	141,61	114,49
$[bc]^2$	156,25	156,25	156,25	156,25	156,25	156,25	156,25	156,25
[ah]	5,4	6,1	4,0	6,2	5,9	5,5	3,8	5,6
[ed]	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3	6,3
cm² } aire abc	34,0	38,2 cm²	25,2	38,7	37,1	34,2	23,9	34,8
perimètre abc	29,6	30,1	28,6	30,1	30	29,6	28,4	29,7
angle bac	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°	90°
angle abc	30°	39°	20°	49°	54°	60°	71°	59°
angle acb	60°	51°	70°	41°	36°	30°	19°	31°
angle aoc	60°	77°	40°	99°	109°	119°	142°	147°
Somme des angles du Δ abc	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°	180°

Observation

Chaque lecteur aura déjà compris que, derrière la recherche de la mesure de quelques segments et angles, se cachait en vérité la découverte d'un certain nombre de faits et de propriétés géométriques bien connus (nous ne parlerons pas ici de similitude, ni d'homothétie) comme :

- la relation de Pythagore,
- les propriétés d'un «segment moyen»,
- l'isométrie des rayons d'un cercle,
- l'isométrie de deux côtés et de deux angles d'un triangle isocèle,
- l'égalité, dans un triangle rectangle, du produit de l'hypothénuse par sa hauteur et de celui des deux «cathètes»,
- la relation entre l'aire et la hauteur d'un triangle de base constante,
- l'invariance de la mesure de l'angle de sommet **a** (angle droit) appartenant au cercle de Thalès de diamètre [**bc**],
- le concept de lieu géométrique,
- les notions d'angle inscrit et d'angle au centre,
- la caractéristique d'angles complémentaires dans un triangle rectangle,
- la constance de la somme des angles d'un triangle,
- la valeur d'un angle extérieur (angle supplémentaire) dans un triangle,
- ...

Arrêtons-nous donc un bref instant sur quelques remarques et constatations formulées dans les différents groupes, en prenant la peine de préciser que les affirmations relatives au parallélisme et à la perpendicularité de certains segments sont fondées sur les réponses de l'ordinateur, questionné à l'aide de l'outil «*Vérifier une propriété*» :

- *«Le segment [bc] mesure toujours 12,5 cm, parce que c'est le diamètre du cercle C.*
- *Le segment [ed] est la moitié du segment [bc] et il est parallèle au segment [bc].*
- *Le segment [oa] est toujours la moitié du segment [bc].*
- *Les segments [ed] et [oa] sont toujours de la même longueur.*
- *Le segment [ah] est toujours perpendiculaire aux segments [ed] et [bc].*
- *Si on additionne les mesures de l'angle abc et les mesures de l'angle acb, nous obtenons 90°, tout comme la mesure de l'angle de l'angle bac qui reste toujours 90°.*
- *Nous remarquons que la somme des angles d'un triangle fait toujours 180° (puisque nous avons remarqué que la mesure de l'angle bac fait toujours 90° et que la somme des deux autres angles fait aussi 90°).*
- *Nous n'avons pas trouvé de lien entre la colonne des mesures de l'aire du triangle abc et de son périmètre.*
- *Si on fait l'aire du triangle aoc + aob, on obtiendra l'aire du triangle abc. Le segment [ao] divise le triangle en deux.*
- *L'aire du triangle aed est la moitié de l'aire du triangle aoc.*
- *Quand on forme un triangle isocèle, la médiane et la hauteur se confondent.*
- *Le point o est le centre de rotation du point a».*

Pour compléter cette liste de remarques, voilà encore trois extraits de productions qui illustrent la richesse de cette démarche. (La troisième présente la totalité des constatations formulées par Alexandre et Jean-Etienne.)

Propos de Marc et Nicolas :

④ les points e et d sont les milieu des côtés du triangle [a b c]. Si on relie les points e et d à o nous obtenons 4 petit triangles qui séparent en 4 le triangle [a b c]. Ces 4 petits triangles ont la même aire et la même forme. Un grand triangle est donc formé de 4 triangles identique.

Propos de David et Raphaël :

On aditione les carrés de [AB]² [AC]² [BC]² et on trouve chaque fois à peu près 312 cm² mais une fois 317 cm². Nous nous pausons la question: « Pourquoi on arrive une fois a 317 cm² .»
Nous avons refait les mesures et nous avons découvert que nous avions fait une erreur. Nous avions mis que la mesure [ab]² mesurait 138, 825 cm² en faite elle mesure 133, 4025 cm². Alors nous avons pu constater que la somme des carrés [ab]² [ac]² [bc]² est tout le temps à 312 cm² ça marche pour tous les triangles.

Propos d'Alexandre et Jean-Etienne :

- le segment [b c] mesure toujours 12,5, parce que c'est le diamètre du cercle "C" que l'on a jamais changé au cours du travail et le carré du segment ne changera pas non plus il restera 156,25
- le segment [e d] (droite reliant le milieu des cathètes du triangle) reste toujours 6,250 c'est à dire la moitié du segment [b c], il est aussi parallèle au segment [b c] et perpendiculaire au segment [a h], ces affirmations tant que l'on a un triangle rectangle.

- l'angle $\widehat{bac}$ ne change jamais, il reste 90° et les angles $\widehat{abc}$ et $\widehat{acb}$ font toujours 90° quand on les additionne donc la somme des reste toujours 180°
- lorsqu'on prend un segment quelconque, que l'on marque son milieu qui va servir de centre du cercle qui l'inscrit, puis on met un point sur ce cercle que l'on trace de ce point deux segment allant aux extrémités du segment primitif ces deux segments sont toujours perpendiculaires.
· quand on additionne les carrés des segments [ab] et [ac] on trouve le carré du segment [bc].
· Nous constatons que le segment [ao] est une médiane du triangle
· l'angle $\widehat{abc}$ est toujours la moitié de l'angle $\widehat{aoc}$ et l'angle $\widehat{acb}$ et aussi la moitié l'angle $\widehat{aob}$.
Quand on additionne l'angle $\widehat{aob}$ à $\widehat{aoc}$ on obtient 180°
· Quand on met notre triangle simple en un triangle rectangle rectangle isocèle la médiane et la hauteur sont confondues et les angles $\widehat{abc}$ et $\widehat{acb}$ sont égaux et à 45° et les segments [ed] et [ah] ou [ao] sont égaux et mesurent 6,2. les segments [ab] et [ac] sont égaus, ils mesurent 8,8.

Certes, il ne s'agit pas de croire que le simple fait de constater qu'une figure possède certaines propriétés suffit à les assimiler spontanément, au point de pouvoir les réutiliser ultérieurement avec efficacité. Mais une découverte ou une prise de conscience réalisée de manière autonome – en groupe ou individuellement, mais sans l'apport de «celui qui sait» – s'inscrit dans une conception constructiviste de l'apprentissage et favorise, par là même, un meilleur ancrage de la notion mathématique étudiée.

La phase, particulièrement riche, de mise en commun et de synthèse qui a suivi la recherche a été l'occasion de poser de nombreux jalons, à propos des notions sousjacentes, jalons qui ont servi de points de repère tout au long de la 7e année, notamment lors de l'approfondissement de chacune des propriétés mises en évidence dans les productions écrites des élèves. Notons encore qu'une recherche du même type a été menée par la suite, mais cette fois dans le cas d'un triangle **abc** quelconque.

Le partage du carré (5)

L.-O. Pochon, IRDP

Dans les numéros 175, 179, 180 et 181 de Math-Ecole, les lecteurs ont pu suivre les rebondissements de la saga du partage du carré en six triangles semblables.

Au dernier épisode, 97 solutions étaient trouvées. La question est posée de savoir s'il y en a d'autres. Mais une question préalable de M. Theumann, dans Math-Ecole 180, est de s'assurer qu'il n'existe pas de solutions avec des triangles non rectangles. Voici une manière simple de s'en convaincre qui procède par une recherche systématique en éliminant toute piste conduisant à un triangle rectangle ou à des partages avec plus de 6 triangles.

Sans trop de formalisme, les observations qui permettent les éliminations sont les suivantes :

a) L'ordre (c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues) de chaque sommet du carré doit évidemment être supérieur à 2. Sinon l'angle droit du carré appartient à un des triangles du recouvrement.

b) La somme de ces ordres doit être inférieure à 6. Le cas suivant (figure 1), par exemple est impossible puisqu'il y faudra au moins 8 triangles pour compléter le dessin. Chaque côté du carré supporte au moins un triangle et chacun des angles 1, 2, 3, 4 fait également partie de triangles tous nécessairement différents.

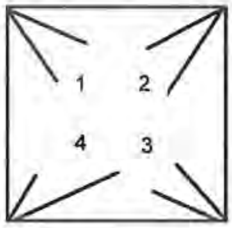


fig. 1

c) Les angles rencontrés sur la figure sont au maximum de trois grandeurs différentes (puisqu'on désire que tous les triangles soient semblables). En particulier, si on trouve trois angles différents, la somme de leur mesure vaut 180°.

d) Dans le cas d'un sommet d'ordre 3, l'arête «intermédiaire» doit faire un angle de 45° avec les côtés du carré. En effet, supposons que les deux angles soient a et b distincts avec a + b = 90°. Le troisième angle (selon le point c) de la figure est g = 180 - (a+b). Par conséquent on est dans un cas de recouvrement avec des triangles rectangles.

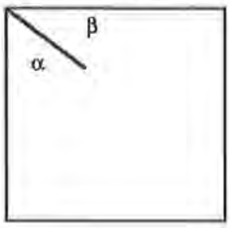
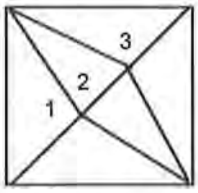


fig. 2

e) Dans le cas où deux sommets adjacents du carré sont d'ordre 3, un sommet se trouve nécessairement sur le côté (sinon, selon d, on aura à faire à un recouvrement par des triangles rectangles isocèles). Le côté du carré supporte au moins les côtés de deux triangles différents du partage.

f) Selon les points d et e, le cas où les quatre sommets sont d'ordre 3 est impossible (8 triangles au moins dans le partage). De même, on ne peut trouver 3 sommets d'ordre 3 et un sommet d'ordre supérieur à 4, ni 2 sommets d'ordre 3 adjacents et deux sommets d'ordre 4 (dans ces deux cas le partage est composé de 7 triangles au moins). Le seul cas à considérer est finalement le cas suivant:



Cette situation est évidemment impossible:

fig. 3

si le triangle 1 a un angle obtus, 3 également et 2 a tous ses angles aigus. Si le triangle 1 a tous ses angles aigus, alors 2 a un angle obtus. Ils ne peuvent être semblables.

C'est un peu laborieux, mais pour le moment un argument «tueur» reste à trouver. Par ailleurs, la question des 97 triangles reste ouverte. De même celle de savoir s'il existe une partition du carré en n triangles semblables non rectangles.

Cette dernière question, à moins de découvrir un argument «tueur», ne semble pas facile à résoudre. En reprenant les cas déjà mentionnés et en procédant par élimination, on peut par exemple montrer qu'il n'existe pas de recouvrement du carré par des triangles isocèles dont un angle est 45° (et les deux autres 135/2 °).

Entretiens avec Béatrice [1]

Les formes et leurs noms [2]

F. Speranza, Université de Parma

Premier entretien

Au moment du premier entretien, Béatrice [3] va avoir neuf ans. A l'école, en géométrie, elle a fait un peu de ce que l'on pourrait appeler éducation spatiale élémentaire, ou géométrie «de situation» (ce qui est appelé improprement «topologie») : suivre et décrire un parcours, ... C'est un fait positif que, au début de l'école élémentaire italienne, on s'intéresse à ces activités plus «spatiales» que «géométriques». Naturellement Béatrice, comme tant d'élèves de son âge, connaît quelques termes spécifiques de la géométrie, de façon informelle, appartenant aussi au langage commun.

L'approche traditionnelle de la géométrie en tant que telle, considère la terminologie comme une évidence, comme un «fait» à apprendre, sans se poser de questions : mais nous savons qu'il existe des difficultés, dans la reconnaissance des formes par exemple. Il s'agit de reconnaître (ou de trouver) des termes généraux dont chacun représente une classe d'objets géométriques («triangle», «carré», «isométrie», ...); au niveau mental, chacun sera un «concept».

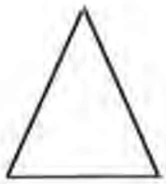
Nous voulons insister sur le caractère «constructif», «subjectif» de la construction du savoir géométrique. Le parcours suivi ici prend immédiatement en compte les mots qui font partie aussi du langage commun : un parcours qui commencerait au troisième entretien serait plus radical en laissant la liberté de choix à la personne interrogée. De toute façon, un enseignant pourra trouver d'autres voies pour affronter le problème de la classification.

Commençons par quelques-uns des termes typiques de la géométrie pour voir si Béatrice les connaît [4]. (figure a)

Dessine un rectangle

Dessine-en un autre

Dessine un triangle



Dessine un triangle isocèle **???**

Dessine un losange **???**

Fig. a

1 Traduction de François Jaquet

2 Cet article est publié simultanément dans *L'Educazione Matematica* et dans *Math-Ecole.*

3 Béatrice est la petite fille de l'auteur.

4 Les questions posées à Béatrice sont notées en *italique*; ses réponses sont en **gras**, comme ses incertitudes (**???**) et les indications de manipulations non accompagnées de descriptions. Les commentaires et les textes plus généraux sont en caractères normaux. La première entrevue a duré une heure environ, la deuxième et la troisième une demie-heure chacune environ.

Observe ces figures maintenant (figure b) :

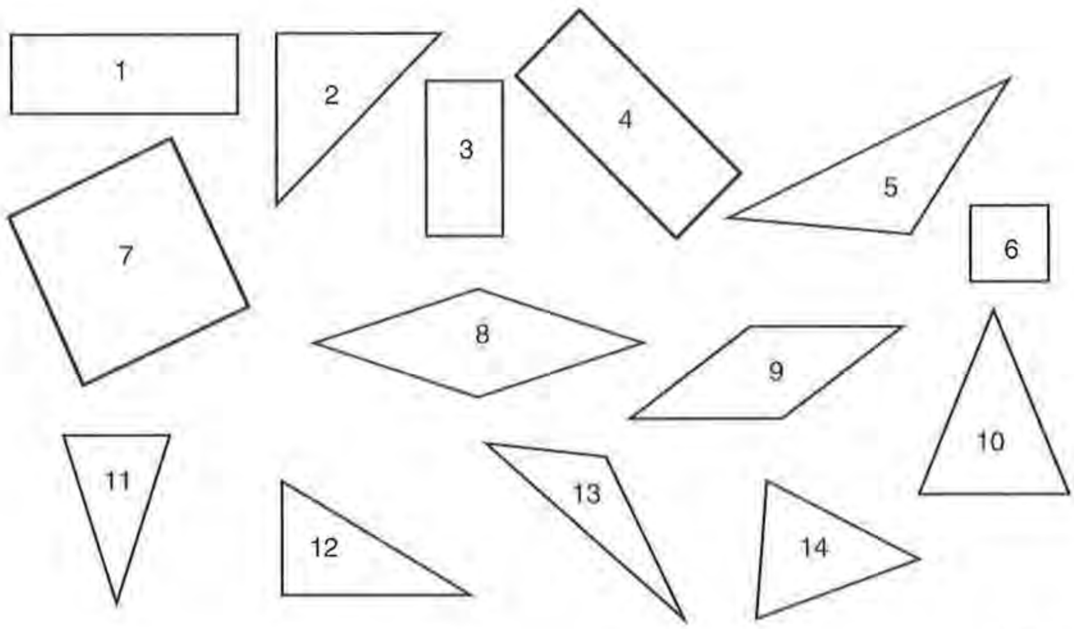


Fig. b

Lesquels sont des rectangles ? **1, 4, 3.**

Lesquels sont des triangles ? **2, 5, 10, 11, 12.**

(Elle se souvient d'avoir entendu parler de «losanges»)

Lesquels sont des losanges ? **7, 8, 9.**

Lesquels sont des carrés ? **6, 7.**

Attention ! Il y a une figure (7) que tu as mentionnée deux fois! Pourquoi ?

Si on tourne un carré ... (il devient) ... (hésitation) **Non!** (Ne trouve pas les mots pour s'exprimer.)

Tu te souviens des carreaux des salles de bain ?

(Dans l'une d'elles, ils sont «inclinés» de 45°.)

C'est des carrés, mais dans une, ils sont tournés.

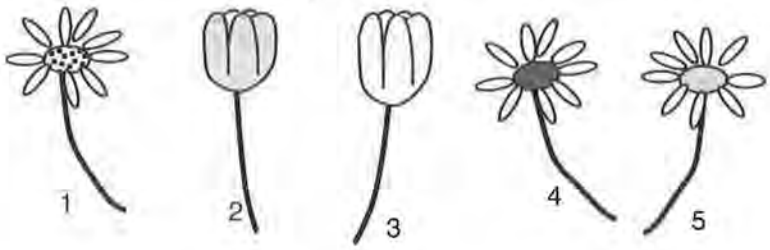
6 est un losange ? Regarde : 7 et 8 sont «sur la pointe», 9 est «sur un côté», 6 est aussi «sur un côté».

Si on le tourne, ça devient un losange.

Pour voir comment Béatrice se débrouille avec deux concepts inclus l'un dans l'autre, je lui propose le test bien connu de Piaget : je dessine 3 marguerites et 2 tulipes (figure c) et je lui demande :

Y a-t-il plus de fleurs ou plus de marguerites ?

Fig. c



Plus de marguerites !

Regarde encore ces figures: (figure b). Tu as dit que 6 et 7 sont des carrés mais aussi que ce sont des losanges; Que peux-tu dire de la fleur 1 (une marguerite) ?

C'est la même que la 4 et que la 5, c'est une marguerite.

Et alors ?

(J'ai compris!) C'est une fleur!

Si c'est une marguerite ? ...

c'est toutes des fleurs.

Tu peux dire que c'est une marguerite, mais tu peux aussi dire ...

c'est une fleur.

Le même problème de classification (un concept «inclus» dans un autre), a été résolu plus rapidement sur l'exemple géométrique que sur l'exemple «naturaliste» : ceci peut être une indication intéressante.

Continuons : Tu sais ce qu'est un triangle isocèle ? **???**

10 et 11 sont des triangles isocèles, 12 et 13 n'en sont pas. ? Est-ce que tu vois d'autres triangles isocèles ? Attention, dans certains cas, ce n'est pas facile!

Les mathématiciens et ta maîtresse te diront qu'un triangle est isocèle quand ... (Mais nous, nous nous comprenons aussi; c'est comme si je te faisais voir un chat et que je te disais «voici un chat : montre m'en un autre») et alors l'explication suivante m'échappe : *à l'origine, cela veut dire «deux jambes égales».*

14 est isocèle.

Est-ce qu'il y en a encore d'autres ? **2.**

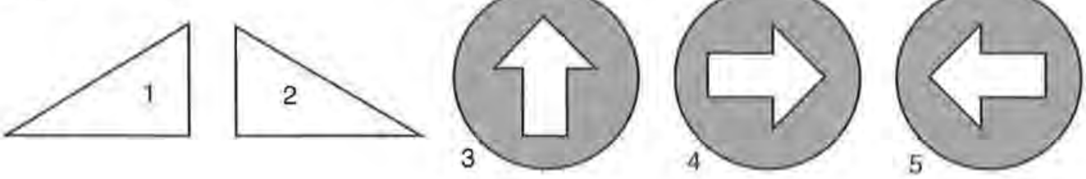
Et le 5 ?

Non, si je le tourne, cette jambe n'est pas égale à celle-là.

Dans ces cas, pour donner un nom à une figure, c'est important de pouvoir la tourner.

Observe maintenant ces signaux routiers. (figure d)

Fig. d



Tu te souviens quand on les fixait aux arbres ? il y avait des petits malins qui, la nuit, les détachaient et les tournaient.

Regarde les triangles 1 et 2 : est-ce qu'ils sont ÉGAUX ?

Non, parce qu'ils ne sont pas tournés de la même façon !

Mais, avant, si on tournait une figure on pouvait lui donner le même nom !

Les signaux routiers NE SONT PAS égaux. (nous abordons une problématique qui n'est pas simple...)

En conclusion: «ÉGAUX» (ou «LES MÊMES») peut dire plusieurs choses. Hier, Valeria (la petite soeur de deux ans) avait un biscuit dans chaque main et elle disait «c'est les mêmes». Qu'est-ce que cela voulait dire? Manger l'un c'est comme manger l'autre ? Y avait-il le même dessin sur chacun ? Les biscuits sont-ils les mêmes car ils ont des mêmes fleurs ?

(Mathématiques pour les adultes ou pour les enfants? Ou plutôt une manière de les présenter aux enfants et une autre de les présenter aux adultes ?)

Les adultes ont l'habitude d'expliquer les mathématiques de manière précise, avec les termes justes .... Mais, pour les enfants ....

Béatrice a d'abord montré qu'elle est capable d'affronter le problème de la classification des figures et que, en particulier, elle sait gérer les concepts dont les «extensions» se recouvrent. On pourrait même dire que cette situation logique est plutôt mieux comprise dans un contexte géométrique que dans un contexte plus «familier».

En ce qui concerne les aspects strictement géométriques, elle a compris que la classification standard (l'euclidienne) est définie «à une isométrie près» (ou peut-être mieux, à une similitude près) ...

La dernière partie de l'entretien jette le doute sur le terme «égal» (ou «même»). De temps en temps, il faut avoir le courage de provoquer quelques conflits, pour qu'on sache les gérer plus tard. En effet, «égal» a des significations différentes, et la situation se complique du fait que le mot est bien enraciné, autant dans la langue commune que dans la langage mathématique.

Chez Euclide, il signifie «équivalent» dans le sens «d'aire égale» (deux triangles de même base et de même hauteur [5] sont «égaux»). Pour les segments, la relation se réduit à celle d'isométrie. En général, le lien entre «isométrie» et «égalité» est précisé par la notion commune 4 («deux figures superposables sont égales»).

Dans des situations mathématiques qu'on ne peut pas préciser mieux, il faut s'attendre a ce que «égal» s'étende à «égal pour autant que ...» ou « égal à une transformation près, d'une classe K» (transformations géométriques ou d'autre genre), telle que la relation devient une relation d'équivalence. A ce point, on peut encore ouvrir la discussion (sans expliciter les concepts, évidemment), comme avec Béatrice. Au delà, en géométrie, on se rend compte que la classe K est un groupe de transformations (le groupe des isométries, celui des projections, ...). C'est le noyau du «programme d'Erlangen», par lequel Félix Klein, en 1872, a dressé le panorama des «géométries possibles».

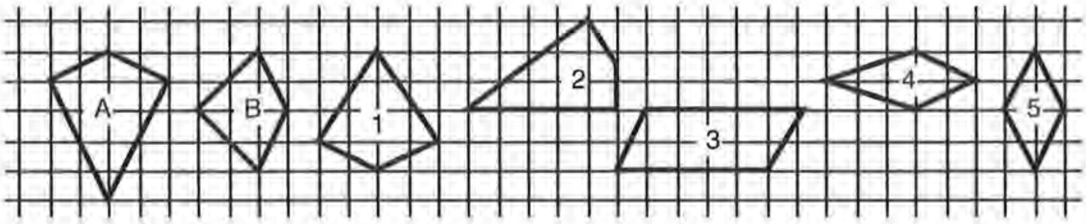
5 La proposition 37, du Livre I, dit plus précisément : deux triangles avec une base commune, dont les sommets sont situés sur la même parallèle à la base sont, égaux.

Deuxième entretien

Trois mois ont passé. Béatrice, toujours en troisième année, a commencé à faire un peu de géométrie «scientifique», c'est-à-dire celle qui se fonde sur une classification des figures. Mais ceci n'interfère pas avec le contenu de cet entretien où, délibérément, nous proposons des mots (et donc, au moins potentiellement, des concepts) qui n'appartiennent pas à la terminologie habituelle de la géométrie; et qui, dans un cas, ne sont même pas clairement définis. Ceci étonnera les mathématiciens, habitués à traiter de classes bien déterminées (et donc, au moins potentiellement, susceptibles d'être définies précisément).

La première activité (figure e) fait intervenir un concept précis, celui de *cerf-volant* ou de *deltoïde*, qui a été quasi officialisé au cours de ces dernières décennies (et qu'on doit à Georges et à Frédérique Papy). (Béatrice est avertie que, à propos des réponses, il peut y avoir des avis différents. Nous dirions qu'il pourrait exister un élément de subjectivité.)

Fig. e

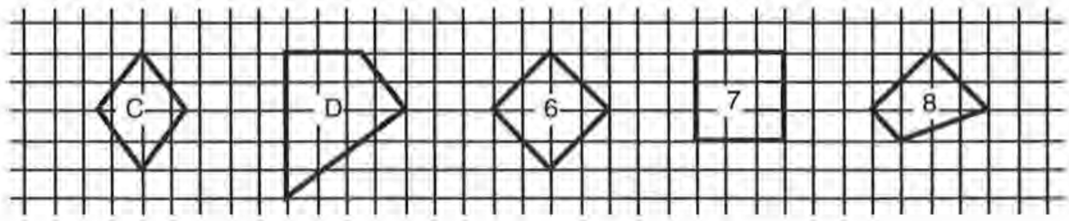


A l'école, on ne parle pas de cerfs-volants. Certains désignent ainsi les figures A et B.

Parmi les figures 1, 2, 3, 4, 5, lesquelles sont des cerfs-volants, lesquelles n'en sont pas ?

1, 2 oui, 3, 4, 5 non.

Fig. f



Nous donnons une information supplémentaire sur les cerfs-volants (figure f) : *C et D sont aussi des cerfs-volants.* (Comme ceci pourrait provoquer quelques conflits, nous nous expliquons :) *c'est comme si nous avions fait voir à un Martien deux chats tigrés en disant : «voici deux chats, montre moi d'autres chats»; celui-ci s'est fait une fausse idée des chats. Pour l'aider, on lui montre aussi un chat noir et un chat blanc.*

Parmi les figures 1 à 8, lesquelles sont des cerfs-volants, lesquelles n'en sont pas ?

1, 2, 6, 7 oui, 8 non.

Il y a encore une incertitude à propos de 4 et de 5; le conflit subsiste ?

Nous concluons par une définition du «cerf-volant», sans lui donner trop d'importance :

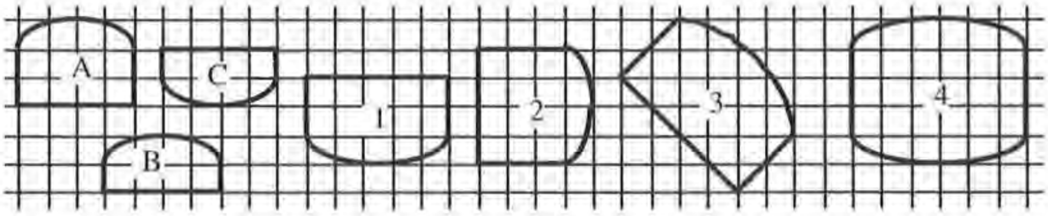
deux côtés consécutifs sont égaux, et les deux autres aussi.

(Après le troisième entretien, Béatrice se construira un objet formé de deux tiges de bois en forme de croix - perpendiculaires, la plus longue passant par le milieu de la plus courte - et l'utilisera comme cerf-volant, pour jouer et pour désigner la figure géométrique.)

Dans l'activité suivante (figure g) nous introduisons un terme volontairement imprécis et tentons de le faire «comprendre» par des exemples :

Nous appelons «casserolettes» les figures A, B, C. Parmi 1, 2, 3, 4 lesquelles pourrions-nous appeler «casserolettes» et lesquelles non ?

Fig. g



1 et 3 oui 2 et 4 non.

Troisième entretien

Un mois a passé entre le deuxième et le troisième entretien. Je propose les figures suivantes : (figure h)

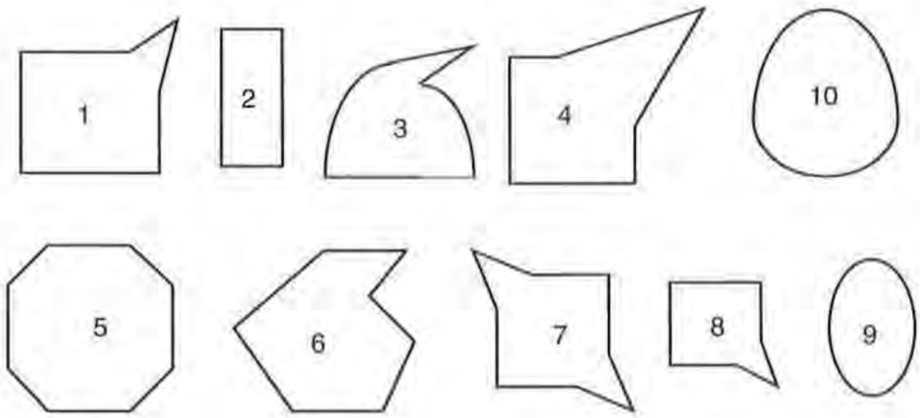


Fig. h

Tu te souviens, la première fois, je t'ai fait voir des figures auxquelles il est facile de donner un nom. Mais celles-ci sont un peu étranges, elles n'ont pas de «nom». Mais tu pourrais en inventer. L'important est de dire «à celle-ci, à celle-ci, ... je donnerais le même nom (même si, après, tu ne le donnes pas); à celles-là ... .

Ce ne serait pas intéressant de donner le même nom à toutes, ni de donner un nom différent à chaque figure.

Je dois trouver des familles ?

Disons trois ou quatre familles. L'une ou l'autre d'entre elles pourrait se composer d'une seule figure.

Les familles :

4, 1, 8, 3, 7 (les deux dernières sont ajoutées dans un deuxième temps),

5, 6 (initialement, il y avait aussi 7 dans cette famille),

2,

9, 10.

Par exemple, pourquoi as-tu mis 5 et 6 ensemble ?

5 et 6 sont comme ça (suit le pourtour), **elles ont beaucoup de côtés.**

Je te pose maintenant les mêmes questions pour ces nouvelles figures (figure i) :

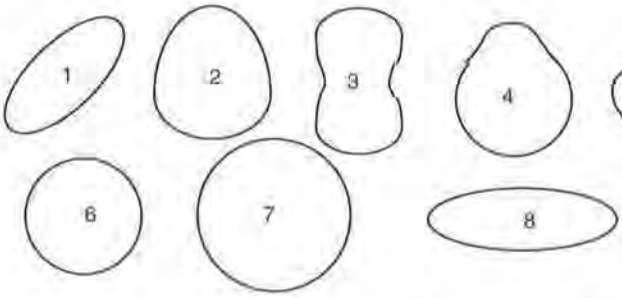


Fig. i

Elles sont toutes de la même famille.

Non.

Alors : **7, 6 8, 1 2, 5 3, 4**

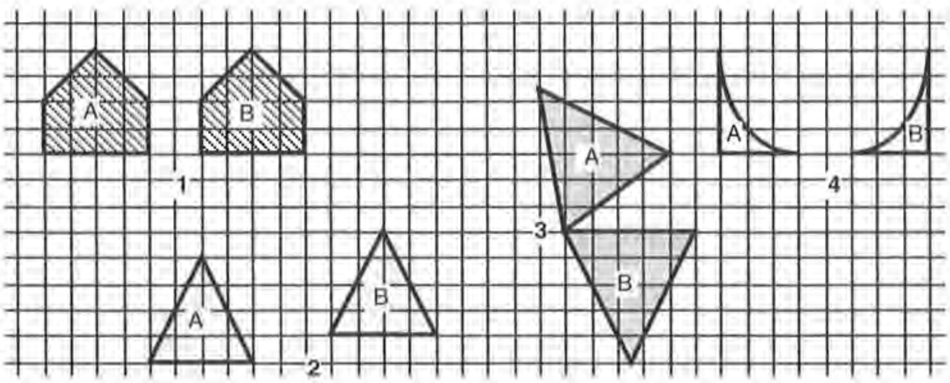
Béatrice appelle 1 et 8 des **ovales** : je lui dis qu'on les nomme plus précisément des «ellipses» (plus tard, dans un magasin, elle reconnaîtra des ellipses).

Tu vois, on a le droit de mettre ensemble ce qui nous semble juste. C'est comme si on mettait un chat tigré avec un tigre et un chat roux avec un lion.

Appendice

A la fin du deuxième entretien, nous avons abordé une autre problématique : celle de la construction des isométries des types les plus élémentaires (figure j)

Fig. j



Il s'agit de découvrir, cas par cas, la transformation qui conduit d'une figure à l'autre.

Explique-moi comment tu fais, dans chaque cas, pour transformer la figure A en la figure B (concrètement, on peut utiliser des modèles découpés dans du papier, un modèle de la figure A suffit).

1. En prenant des mesures égales. (La question a été mal interprétée, comme s'il s'agissait de «comment peux-tu dire que les figures A et B sont égales ?») *mais même avec des mesures égales, B pourrait être à un autre endroit.*

Nous passons au modèle de A. La transformation se réalise physiquement : **Béatrice «rabat» le modèle**, ce qui équivant à appliquer une symétrie axiale. En effet, A et B ne sont pas seulement images l'une de l'autre par une translation, mais aussi symétriques. La symétrie, comme rotation dans l'espace autour d'un axe, apparaît plus évidente que la translation.

Est-ce que tu peux le faire sans retourner le A ?

Oui, en le déplaçant.

De combien ?

De 3 carrés, de 6 carrés. (Elle regarde les sommets en bas à gauche).

Et si un sommet se déplaçait de 6 carrés et l'autre de 5, est-ce qu'on aurait la même figure ?

Non.

2. Met B sous A (la base de B et celle de A l'une sur l'autre). **Je déplace de 6 carrés.**

Mais comment les as-tu comptés ? Dans le cas précédent, c'était facile parce que ça se déplaçait le long des lignes.

Ici (de B à A) **1 vers le bas et 7 vers la gauche.** (D'habitude, elle dit «1» quand la figure est encore immobile : elle compte à partir de 1. Mais, ce problème particulier mis à part, la translation est bien définie.)

3. En le retournant (c'est-à-dire par une rotation dans l'espace ou par une symétrie axiale). **Avec le modèle, elle exécute correctement la rotation dans le plan.**

Comment peux-tu appeler ce mouvement ?

En le retournant, en le renversant. *Non,* **En le faisant tourner.**

4. En le retournant.

Un couple de polygones homothétiques était aussi proposé : **A est un agrandissement de B**. Avec un peu de patience, en désignant les sommets homologues et **en les reliant**, Béatrice serait arrivée à construire l'homothétie, mais notre intervention aurait été trop importante. Ici, nous voulions nous en tenir à l'initiative de l'enfant. Dans un deuxième temps il est juste que l'adulte intervienne pour conduire les intuitions de l'enfant vers les connaissances comunes, ou en «socialisant» les constructions.

Par cette activité, nous abordons un problème fondamental de la philosophie de tous les temps, le *problème des universels* : que sont, que représentent les termes généraux comme ceux de «cheval», de «triangle», ...

Selon Platon et les «réalistes», il s'agit d'idées dont l'existence est indépendante de notre pensée; selon Aristote, ce sont des «formes» immanentes aux objets réels (mais pour les «objets mathématiques» l'idée ne paraît pas applicable); selon les «nominalistes» il s'agit seulement de paroles; selon les «terministes», qu'il serait plus correct, au moins aujourd'hui, d'appeler «conceptualistes», ce sont des constructions de notre esprit. Le philosophe anglais John Locke écrivait ceci (1690) :

«*Le général et l'universel* n'appartiennent pas à l'existence réelle des choses, mais sont des inventions et des créatures de l'intellect, faites à son usage, et qui se rapportent seulement aux signes, qu'ils soient des paroles ou des idées.

Kant reprend, vers la fin du 18ème siècle, l'idée «constructiviste» : les idées fondamentales des mathématiques sont notre construction, mais élaborée de façon pour ainsi dire obligée, elles se situent dans notre esprit. Pour employer une image informatique, ce dernier serait un élaborateur fourni par la nature avec un *software*, déjà préfabriqué pour interpréter l'expérience. C'est sans doute une version réductrice du constructivisme : l'histoire des sciences de ces deux cents dernières années a montré que nous avons une certaine liberté de choix dans la construction des théories scientifiques, à commencer par les classifications (pour poursuivre l'analogie, c'est nous qui nous construisons le *software* selon des critères d'opportunité donnés au gré des circonstances). C'est pour cela que nous avons proposé des concepts (termes) au-delà de la terminologie officielle. Ainsi, nous avons incité Béatrice à proposer ses propres mots nouveaux (qui, potentiellement représentent de nouveaux concepts), à discuter ensemble.

Nous touchons ici une autre contraposition célèbre, celle de l'acquis (ou de l'empirisme) et de l'inné (la connaissance est-elle construite à partir de l'expérience ou est-elle déjà présente dans l'esprit ?). Federigo Enriques, mathématicien et philosophe, écrivait en 1906 :

«Les prémisses de l'inné et de l'empirisme apparaissent à la fois, jusqu'à un certain point, vraies, mais les conséquences qu'on en tire sont incalculables et incomplètes. Les deux voies tendent à s'accorder dans la recherche de l'explication de l'intuition spatiale comme un développement psychologique des sensations, dans lequel on tient compte de la structure psychologique du sujet».

Dans un esprit déjà partiellement formé nous pouvons, dans quelques cas, identifier ces deux «composantes» (on est ramené à l'assimilaton et l'accomodation dont a parlé Piaget); mais avant un certain âge, leur jeu n'est pas encore distinct et il n'est pas possible de déterminer un échange réflexif dans le fonctionnement essentiellement différent d'un esprit adulte.

Pour conclure : les grands problèmes de la connaissance ne sont pas «difficiles» en eux-mêmes. On les rencontre aussi en étudiant des questions «élémentaires» qui facilitent ainsi leur compréhension.

Le Kangourou sur Internet

(suite de la page 3)

Q8 : Paule au pôle !

Paule est en promenade quelque part sur la terre, supposée parfaitement sphérique. Elle effectue 5 km vers le nord, puis 5 km vers l'ouest, puis 5 km vers le sud, et là, elle se retrouve à son point de départ. Si elle n'a pas rêvé, où peut-elle être sachant qu'elle n'est pas au pôle sud ?

Q9 : Tous les chemins y mènent !

Supposons que l'on creuse un tunnel absolument rectiligne entre Paris et Rome. Puisque la terre est ronde, ce tunnel s'enfonce sous la terre. A mi-chemin des 1100 km à vol d'oiseau entre ces deux villes, le tunnel est à sa plus grande profondeur.

Quelle est cette profondeur ?

Allocution de Guy Brousseau

docteur honoris causa de l'Université de Montréal

Trouvé sur (http://www.labomath.univ-orleans.fr/ARDM/) :

«L'association pour la Recherche en didactique des Mathématiques (ARDM) présente un évènement exceptionnel : à l'Université de Montréal, le 5 juin 1997, il a été remis à Mr. Guy Brousseau, professeur des Universités à l'IUFM d'Aquitaine, directeur du Ladist, un doctorat honoris causa par Mr René Simard recteur de l'université.

Le discours du récipiendaire Guy Brousseau

Le discours de Gisèle Lemoyne

La presse montréalaise du 2 Septembre 1997, extraits du DEVOIR : l'entretien de Louise Jullien avec Guy Brousseau

Sur Guy Brousseau

Les photos de l'heureux récipiendaire.»

Nous publions, pour les lecteurs de Math-Ecole l'allocution prononcée par le récipiendaire. Les autres textes sont à disposition à la rédaction de la revue, pour ceux qui ne disposent pas de liaison Internet. **[ndlr]**

Allocution de Guy Brousseau

Monsieur le Recteur,

Madame la Vice-rectrice et Messieurs les Vice-recteurs,

Monsieur le représentant du doyen de la faculté des études supérieures, Madame la doyenne de la Faculté des sciences de l'éducation

Distingués invités,

Chers collègues et chers amis, merci de me recevoir parmi vous.

1. La didactique est une activité ancienne et naïve

Depuis qu'il est convenu que personne ne peut proposer un énoncé mathématique nouveau sans en apporter publiquement la preuve, la didactique des mathématiques est une activité nécessaire et ordinaire des mathématiciens. Réorganiser un ensemble d'énoncés pour le rendre plus facile à communiquer et à utiliser, par exemple, ou inventer de nouveaux problèmes pour montrer l'utilité et le sens de ces énoncés sont clairement des activités de nature didactique. Et d'Euclide à Bourbaki en passant par Diophante et Stévin, les exemples ne manquent pas qui attestent de la nécessité et de la grandeur de cette activité. Mais elle s'efface devant les résultats qu'elle produit, tellement imbriquée dans le processus de production qu'elle s'y fond, et passe inaperçue. Nous manquons d'ailleurs de moyens de la reconnaître. Or devant l'afflux des résultats, aujourd'hui plus que jamais, la communauté des mathématiciens a besoin de puissants moyens didactiques de réorganisation et de diffusion, ne serait-ce que pour s'assurer de la consistance de l'ensemble. Par conséquent, il est sans doute nécessaire que la dimension didactique du travail des mathématiciens s'intensifie et sorte de son innocence.

2. Qui peut l'étudier ?

L'étude de la diffusion des mathématiques, la description de ses modalités et la découverte de ses lois, s'il en existe, constitue aujourd'hui un champ scientifique naturellement ouvert à des chercheurs d'origines très diverses : psychologues, linguistes, pédagogues, sociologues etc. Mais en l'absence d'un moyen d'intégration de leurs travaux, l'accumulation des injonctions et des contraintes qui en résultent pour les enseignants ne permet pas à ceux-ci d'en faire bon usage. Un moyen d'intégration est indispensable : ce moyen est une science de la diffusion des connaissances mathématiques : la didactique des mathématiques.

Les secteurs de connaissances mathématiques sont établis au cours d'aventures toujours différentes. Leur enseignement demande par conséquent lui aussi des processus spécifiques différents. Alors il m'a paru qu'il resterait une part irréductible aux disciplines évoquées ci-dessus, et non dérivable d'elles ; et que l'étude de cette part incombait aux mathématiciens. Je crois que cette part n'est pas un appendice, mais au contraire le coeur de la didactique.

3. A qui s'adresse cette science ?

Diffuser les connaissances mathématiques produites, faire partager l'illumination de la découverte ou de la compréhension sont une ambition et un plaisir qui tentent et occupent beaucoup de mathématiciens et eux seuls peuvent le faire, car avec Thurston j'aurais tendance à dire en retour que tous ceux qui participent à la diffusion des mathématiques sont aussi des mathématiciens : mathématiciens d'école, de collège, ou d'université. Cette science s'adresse donc aux mathématiciens.

4. Qui l'accueille ?

Sur cette terre nouvelle qu'est l'étude de l'activité didactique en mathématique, il y a place pour beaucoup de d'amis, autochtones ou immigrants mais il y a une certaine différence entre ceux qui passent ou qui donnent des conseils et ceux qui restent et cultivent le sol. Il y a une nuance entre un psychologue qui s'intéresse à la didactique et un didacticien psychologue d'origine, entre une mathématicien didacticien et un didacticien qui s'intéresse aux mathématiques.

Dans une même équipe de recherche en didactique des mathématiques, un psychologue-didacticien doit rester un membre et un interlocuteur de sa communauté de psychologues et un mathématicien-didacticien de la communauté mathématique. Chacun a beaucoup de mal à présenter à ses pairs l'objet de son travail et pour l'instant, cette terre donne rarement une citoyenneté aux nouveaux arrivants. Les facultés d'éducation, plus sensibles au besoin immense de repérer, de comprendre et de soulager les difficultés de l'éducation et de l'enseignement donnent plus facilement leur soutien à la didactique et maintiennent en leur sein des équipes de chercheurs décidés qui concentrent autour d'eux les énergies. C'est probablement la bonne voie et je crois qu'elles seront récompensées de leur persévérance.

5. Ici, à l'Université de Montréal,

j'ai pu constater la profondeur, la conviction et la valeur de l'engagement de l'équipe qui, autour de Gisèle Lemoyne et de Jean Portugais a organisé ce colloque et cette cérémonie. Je me sens très honoré de leur confiance et très heureux de la chaleur de nos échanges. Je sais que le chaînon que nous venons de nouer sera solide et permettra la pose de nouveaux chaînons car la recherche est une longue patience où les encouragements réciproques sont aussi nécessaires que les critiques constructives.

Je considère qu'à travers moi, ce grade reconnaît et récompense tous ceux qui ont partagé l'ambition de faire de la didactique des mathématiques une science, et au delà toute la communauté des didacticiens.

C'est pourquoi, Monsieur le Recteur, Monsieur le doyen, mes chers collègues et amis, je tiens à exprimer ma fierté d'être admis parmi les docteurs Honoris Causa de cette remarquable Université, et mes sentiments de gratitude pour ceux qui m'ont distingué.

6e Rallye mathématique transalpin, 1998

Epreuve II

Après l'épreuve I, publiée dans le numéro 181 voici l'épreuve II du 6e Rallye mathématique transalpin. Sera-t-elle plus facile que la précédente,dont les problèmes ont été jugés un peu trop ambitieux pour les degrés 3 et 4 ? On le saura en prenant connaissance des résultats et analyses dans le prochain numéro.**[ndlr]**

cat. 3 : de 1 à 7 **cat. 4 : de 2 à 8,**
cat. 5 : de 4 à 10 **cat. 6 : de 5 à 11**
cat. 7 et 8 : de 7 à 13

1. LES CUBES

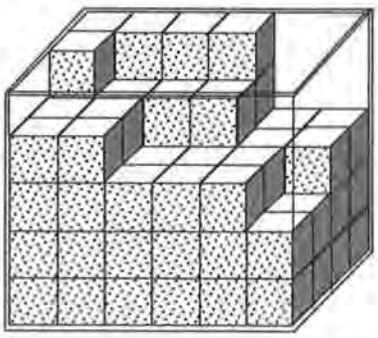
Catherine a déjà empilé beaucoup de cubes dans cette boîte transparente. Il lui reste encore 30 cubes à disposition.

Aura-t-elle assez de cubes pour remplir entièrement sa boîte ?

Expliquez pourquoi.

Pourriez-vous dire combien de cubes Catherine a déjà mis dans la boîte ?

Expliquez votre réponse.

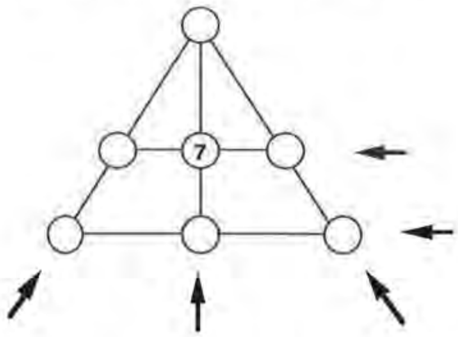


2. TRIANGLE MAGIQUE

Il faut placer les nombres de 1 à 6 dans les six cercles vides de ce triangle (le 7 est déjà placé). Le triangle sera magique si, lorsqu'on additionne trois nombres situés sur une même ligne, on trouve toujours la même somme. (Les cinq lignes sont indiquées par des flèches.)

Placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 pour que le triangle soit magique.

Indiquez comment vous avez trouvé.



3. LES PIÈCES D'OR D'ALADIN

Le premier janvier, Aladin demande au génie de sa lampe de lui mettre chaque jour, sous son oreiller, une pièce d'or de plus que ce qu'il a mis le jour précédent.
Le lendemain matin, il trouve une belle pièce d'or sous son oreiller et il la met de côté.
Le jour suivant, il trouve deux nouvelles pièces d'or et il les met avec celle du jour précédent. Et ainsi de suite.

Aladin aimerait offrir à Jasmine un collier précieux qui coûte 62 pièces d'or.

Quel jour de janvier pourra-t-il l'acheter ?

Expliquez votre raisonnement.

4. BOUTEILLES D'ANNIVERSAIRE

A chaque anniversaire de chacun de ses quatre enfants, un père met de côté une bonne bouteille de vin.

Aujourd'hui, c'est l'anniversaire du plus jeune. Le père descend dans sa cave avec une nouvelle bouteille et compte alors 23 bouteilles en tout dans sa réserve de bouteilles d'anniversaire. Le plus jeune des quatre enfants a la moitié de l'âge du plus âgé.

Quels sont les âges de ses enfants ?

Justifiez votre réponse.

5. LA FAMILLE

Jean dit : j'ai autant de frères que de soeurs. Sa soeur Alice ajoute : moi, j'ai deux fois plus de frères que de soeurs.

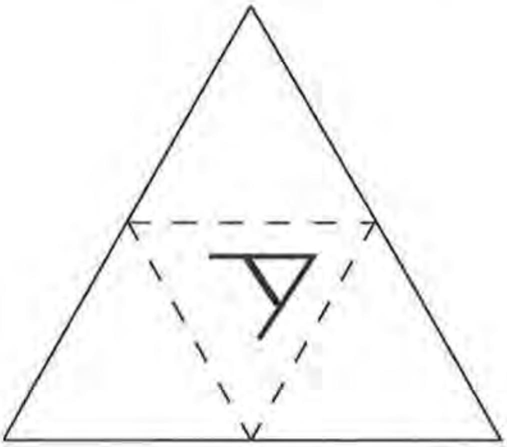
Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

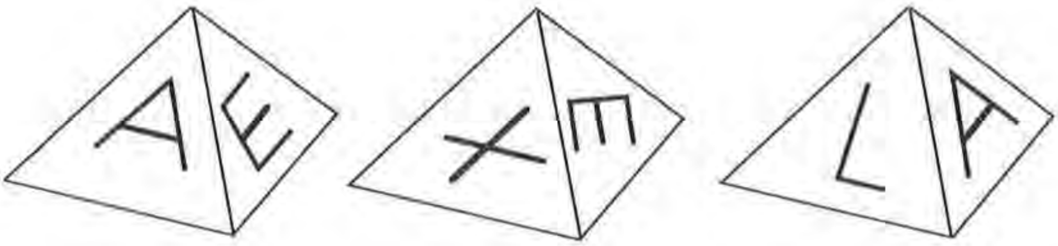
Justifiez votre réponse.

6. ALEX

Alex découpe ce grand triangle et le plie le long des lignes en pointillés pour former un bel objet. Avant de le coller, il écrit les lettres L, E et X sur les trois triangles encore libres. (Le A est déjà écrit sur le triangle du centre.)

Alex pose alors son objet sur la table, de trois façons différentes. La première fois, il voit le A et le E, debout. La deuxième fois, il voit le E et le X, couchés. La troisième fois, il voit le L et le A, debout.





Dessinez les lettres L, E, X qu'Alex a écrites dans le grand triangle de départ, à la bonne place et dans la bonne position.

Votre dessin doit être précis.

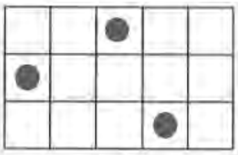
7. LES JETONS DE MICHELA

Michela désire déposer trois jetons dans les cases de la grille de sorte que :
- il y ait un jeton dans chaque ligne,
- il n'y ait pas plus d'un jeton dans chaque colonne.

Une solution est représentée ici. Mais il y en a d'autres.

Combien y a-t-il de solutions possibles en tout ?

Indiquez toutes vos solutions.



8. LE ROBOT

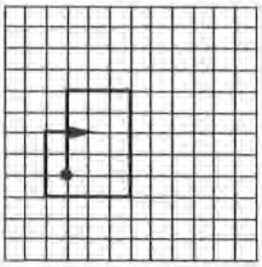
Un robot qui se déplace sur ce quadrillage reçoit les ordres suivants :

(1) avance de 4 pas, tourne à droite, puis :

(2) avance de 3 pas, tourne à droite, puis :

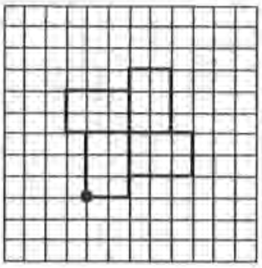
(3) avance de 5 pas, tourne à droite, puis effectue l'ordre (1), etc.

Sur ce dessin, le robot est parti du point noir, a obéi aux ordres (1), (2), (3), (1), (2) et il est en train d'exécuter l'ordre (3) pour la deuxième fois.



a) Dessinez la suite du parcours du robot.

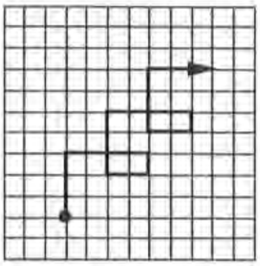
On a donné trois autres ordres au robot, qui a laissé cette trace-ci sur le quadrillage :



Le robot est parti du point noir, en direction du haut de la feuille.

b) **Quels sont les trois ordres donnés au robot pour tracer cette figure ?**

Ici, le robot est en train d'exécuter une nouvelle série d'ordres pour la troisième fois.



c) **Quels ordres a-t-on donnés au robot ?**

d) **Dessinez la suite du parcours de ce robot.**

9. EN PÉDALANT

Adrien, Bernard et Charles participent à une course de vélo, par équipes de trois coureurs.
Tous les 2 km, le premier passe en troisième position, le deuxième devient premier et le troisième se retrouve au milieu. Ils se relayent ainsi durant toute la course.
Au départ, c'est Adrien qui est en tête, et au neuvième kilomètre, c'est Charles qui est devant ses deux camarades.

Dans quel ordre se retrouveront les trois coureurs au 47e kilomètre ?

Expliquez votre raisonnement.

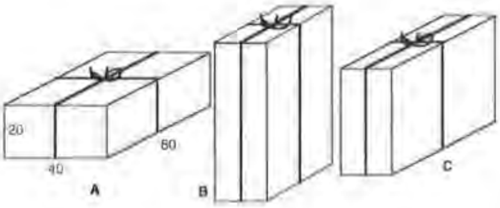
10. LES CADEAUX

Le Père Noël prépare des milliers de cadeaux en boîtes de mêmes dimensions ; 20 cm, 40 cm et 60 cm. Ses trois assistants ont des façons différentes de placer les rubans.

- Anastasie fait le noeud au milieu de la grande face (méthode A),
- Balthazar le fait sur une petite face placée en haut (méthode B),
- Célestine choisit une face moyenne pour son noeud (méthode C).

Les trois noeuds sont les mêmes et nécessitent 30 cm de ruban.

Le père Noël n'est pas content car il estime que deux de ses assistants gaspillent son ruban avec leurs méthodes.

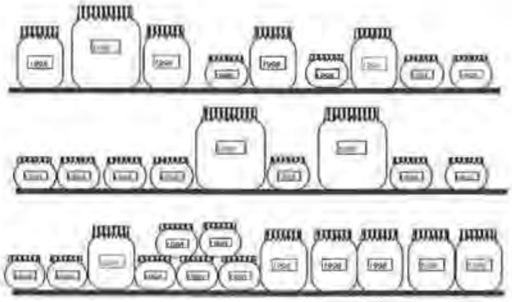


Le père Noël a-t-il raison ? L'un des assistants utilise-t-il moins de ruban que les autres ?

Expliquez comment vous avez procédé.

11. LES POTS DE CONFITURE

Maria a fait des confitures et a placé les pots, petits, moyens et grands, sur trois rayons :



Il y a exactement 5 kg de confiture sur chaque rayon.

Combien pèsent un grand pot, un moyen et un petit ?

Expliquez votre raisonnement.

12. LA VENDANGE

C'est l'époque des vendanges. Chaque vendangeur reçoit, pour une journée de 8 heures de travail une somme de 120 francs et une caisse de raisin.
Ce jour-là, après avoir travaillé 5 heures, Paolo a dû retourner chez lui. Pour son travail, il a reçu 60 francs et une caisse de raisin.

Quelle est la valeur d'une caisse de raisin ?

Expliquez votre raisonnement.

13. PHRASES À COMPLÉTER

Comment pouvez-vous compléter chacune des phrases de ce cadre par un nombre écrit en chiffres, de sorte que les quatre affirmations soient vraies.

Dans ce cadre il y a ... fois le chiffre 1 Dans ce cadre il y a ... fois le chiffre 2 Dans ce cadre il y a ... fois le chiffre 3 Dans ce cadre il y a ... fois le chiffre 4

Expliquez votre raisonnement.

Neuchâtel 98

CIEAEM 50

Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques

International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education

Introduction au thème et aux sous-thèmes de la rencontre

La 50 e rencontre de la CIEAEM a déjà été présentée succinctement dans les numéros 178 et 180 de Math-Ecole. Il est temps maintenant de donner une information plus détaillée sur les thèmes qui vont être débattus à Neuchâtel, du 2 au 7 août 1998, par les participants.

A ce jour on compte déjà plus de deux cents inscriptions, d'une bonne vingtaine de pays différents, et près de quatre vingt propositions de communication.

Le numéro 183 de Math-Ecole donnera le programme détaillé des activités. Certaines conférences et expositions seront ouvertes au public, pour permettre aux collègues de la région qui ne sont pas inscrits à la rencontre, de participer toutefois à certaines manifestations de cette importante rencontre. **[ndlr]**

THEME GENERAL DE LA RENCONTRE

Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques

Depuis sa fondation, en 1950, la CIEAEM se propose d'étudier les conditions actuelles dans lesquelles se déroule l'enseignement des mathématiques et ses possibilités de développement afin de favoriser son amélioration. Les conférences annuelles, qui sont le moyen essentiel d'atteindre ces buts, se caractérisent par des échanges ou discussions de travaux de recherche et de réalisations effectives, ainsi que par le dialogue entre chercheurs et enseignants à propos de tous les domaines de leur pratique.

Pour sa 50e rencontre la Commission a souhaité s'inspirer directement de ses buts, définis à son origine et rappelés ci-dessus. Les liens entre chercheurs et enseignants sont toujours plus nombreux, plus riches. Il vaut la peine de s'y pencher, de les expliciter, pour chercher à les resserrer, à les enrichir et les développer.

L'énoncé du thème, comme le texte des statuts de la CIEAEM sont évidemment réducteurs. Il n'y a pas de frontière bien nette entre pratique et recherche, entre enseignants et chercheurs. Les termes mêmes de «didactique des mathématiques» en français, ou de «mathematics education» en anglais n'ont pas toujours la même signification pour ceux qui les utilisent, au sein d'une langue, comme d'une langue à l'autre. Est-ce que «recherche» peut se traduire exactement par «research» en anglais ou par «investigacion» en espagnol ? Ces termes doivent être redéfinis au fur et à mesure que leur usage s'élargit, à une époque où toutes les connaissances dont on dispose sur la manière dont les enfants accèdent aux mathématiques aspirent au statut de domaine scientifique.

Une autre réduction fâcheuse consisterait à opposer la pratique à la recherche ou à la théorie. Dans le champ de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, on rencontre des comportements, des attitudes, des valeurs, des savoirs, des compétences. La recherche consiste à les analyser et les observer de manière systématique et consciente. Ce travail d'interprétation conduit à l'élaboration de théories, par l'enseignant comme par le didacticien. L'élève lui-même agit en fonction des théorèmes-en-actes qu'il s'est forgé. Cependant, ces interprétations, visant des objectifs très distincts selon qu'ils sont ceux de l'enseignant, du chercheur ou de l'élève, se développent sur des plans tout à fait différents, bien qu'ils soient en rapport.

Il y aura donc, sur le thème des liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques, un besoin et une nécessité permanents d'expliciter sa pensée et ses représentations, dans sa propre langue mais aussi dans celle des autres.

Deux pôles émergent distinctement parmi tous les partenaires de l'enseignement des mathématiques : celui de ceux qui sont chargés de la conduite quotidienne d'une classe, celui de ceux dont la fonction explicite est d'étudier les phénomènes de la didactique des mathématiques.

Que l'on se situe proche de l'un ou l'autre de ces pôles ou que l'on passe alternativement, de l'un à l'autre, il est important d'analyser les relations qu'ils entretiennent afin de les développer, et les faciliter. Ce travail d'explicitation et de comparaison doit permettre à chaque partenaire de mieux identifier les composantes de ses tâches et de ses fonctions. Cette clarification peut alors se traduire en actions, dans ses pratiques quotidiennes de recherche ou de conduite de la classe. Finalement on retrouve l'un des buts de la CIEAEM qui est d'améliorer l'enseignement des mathématiques.

Si les difficultés d'explicitation entre les deux pôles que nous avons privilégiés ci-dessus constituent déjà à elles seules matière suffisante à nos échanges, il faudrait cependant ne pas omettre d'autres partenaires qui pèsent de manière non négligeable sur l'enseignement des mathématiques: formateurs de maîtres, mathématiciens, méthodologues, auteurs de moyens d'enseignement, gestionnaires de programmes et de l'école en général, et enfin systèmes politiques, sociaux, économiques et culturels.

SOUS-THEMES

A. Finalités de l'enseignement des mathématiques

Ce thème est axé sur les savoirs mathématiques. Le mathématicien, le didacticien, l'enseignant, les auteurs de manuels, les parents, le citoyen en ont tous une représentation personnelle. Ils attribuent des finalités différentes à l'enseignement des mathématiques. Entre le «savoir savant» et le «savoir enseigné en classe» il y a une longue évolution, éclairée par les études des chercheurs sur la transposition didactique.

Parmi les individus et les institutions qui définissent des buts et la conduite de l'enseignement des mathématiques, les enseignants et les didacticiens jouent un rôle essentiel. Il est important qu'ils puissent identifier les différentes finalités attendues, d'eux-mêmes et des autres partenaires, en fonction des épistémologies de chacun.

Pour certains utilisateurs, les mathématiques se réduisent à l'algorithmique, pour d'autres, les compétences relationnelles et les aptitudes à la recherche passent avant tout, pour d'autres encore, ce sont les valeurs véhiculées par la discipline qui ont priorité sur les savoirs et les connaissances. Il pourra donc être intéressant de se poser les questions suivantes :

- Quelles sont les personnes, les groupes et les institutions qui pèsent sur les finalités de l'enseignement des mathématiques ?

- Quelles sont les conceptions épistémologiques des savoirs et finalités de l'enseignement des mathématiques, en quoi diffèrent-elles ?

- Les «épistémologies» des connaissances mathématiques sont-elles vraiment différentes entre mathématiciens, enseignants et chercheurs en didactique ? En quoi leur analyse leur permet-elle de mieux comprendre ce que l'autre place en priorité dans les finalités ?

- La CIEAEM devrait-elle se donner les moyens de promouvoir, dans le domaines des finalités de l'enseignement des mathématiques, certains choix plutôt que d'autres ?

B. Communication et collaboration entre praticiens et chercheurs

Le conflit apparent entre l'analyse de conduites d'enseignement et d'apprentissage en tant qu'objet de recherche et les modifications de ces conduites en tant qu'action au niveau de la classe crée un besoin urgent de réconcilier ces deux préoccupations.
A cet effet, il existe plusieurs modèles de collaboration entre praticiens et chercheurs. La recherche-action est souvent vue comme un moyen efficace de rapprocher les objets et intérêts de l'un et de l'autre car elle ouvre au chercheur un champ d'observation de changements et offre à l'enseignant un champ de découvertes de nouvelles approches. Le modèle de l'enseignant-chercheur permet d'échanger les rôles et de vivre alternativement les contraintes de la gestion de classe comme celle de la mise en évidence de phénomènes caractéristiques. Le modèle où certaines personnes sont désignées comme «interface» entre recherche et pratique est très courant; ce sont les formateurs, conseillers pédagogiques, qui sont alors chargés d'établir les liens nécessaires.

Pour chacun de ces modèles et pour toutes les autres formes de relations entre chercheurs et praticiens, se pose le problème de l'écriture des résultats de la recherche, du langage utilisé, des modes de communication, de la déontologie dans l'exploitation de données, de l'écoute des uns et des autres.

Enfin, le dialogue entre théorie et pratique est difficile en raison des modes de réflexion qui y sont pratiqués. Il y a par exemple une différence fondamentale entre une réflexion conduite pendant ou après une observation et une réflexion conduite pendant ou après une action. L'observateur et l'acteur ont des perspectives différentes, le second est centré sur ce qui se passe dans la situation et sur ce qu'il doit faire pour la conduire, le premier est à une plus grande distance des faits et les analyse a posteriori. Les deux perspectives sont à la fois incompatibles et complémentaires, ce qui entraîne des difficultés de communication mais aussi, lorsqu'il y a mise en correspondance et échanges, une meilleure image de la situation vécue et observée.

- Quels sont les différents modèles de collaboration entre praticiens et chercheurs : enseignant-chercheur, partenaires en recherche-action, «récepteur» des résultats de la recherche, «observateur et analyste» des pratiques scolaires ? Comment fonctionnent-ils ? Quelles sont leurs avantages et inconvénients ?

- Comment le chercheur peut-il transmettre ses résultats dans un langage et sur un mode de communication accessibles au praticien ? Y a-t-il une «didactique de la communication» ?

- Quelles sont les conditions permettant une confrontation positive et complémentaire des deux perspectives de l'observateur et de l'acteur, dans le champ de l'enseignement des mathématiques ? De quelles expériences dispose-t-on à ce propos ?
- Comment la CIEAEM a-t-elle, jusqu'ici, contribué à la diffusion des résultats de la recherche ? Pourrait-elle améliorer son action dans ce domaine ?

C. Recherche en didactique des mathématiques et formation des maîtres

La formation des maîtres est le lieu privilégié où se rencontrent chercheurs et enseignants. Une théorie didactique peut y être présentée comme un outil d'analyse de séquences vécues par le maître en formation dans sa classe, comme une réponse à des demandes spécifiques. Les résultats des recherches en didactique peuvent aussi être proposés à des maîtres en formation comme un objet d'analyse en soi, leur laissant la responsabilité de la mise en pratique. Ils peuvent encore être présentés comme un ensemble de connaissances à acquérir, pour la culture de la personne en formation.

Ces modalités relèvent - pour le domaine de la didactique des mathématiques - de conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage bien caractéristiques qu'on retrouve dans la plupart des disciplines scientifiques : des approches transmissives, béhavioristes, cognitivistes, socio-constructivistes, empiriques, ...

C'est dans l'intérêt des chercheurs de développer une «didactique de la didactique» qui place le maître en formation (comme peut l'être l'élève en mathématiques) au centre de ses préoccupations, qui cherche à le rendre actif dans la construction de ses savoirs . «Il semble discutable de s'écarter de ce modèle. Il n'y a sans doute pas d'autre alternative que de s'opposer à une attitude passive de consommateur, si l'on veut rendre visibles et explicites les conflits d'intérêt et s'engager dans des processus actifs d'apprentissage» (Krainer, 1994).

Dans le sens pratique-recherche, il y aussi des apports intéressants que le chercheur-formateur peut apprendre des maîtres en formation. Ces derniers subissent des contraintes qui les empêchent souvent de mettre en pratique les propositions issues de la recherche. L'observation de séquences d'enseignement montre que, à un moment ou à un autre, l'enseignant s'écarte du plan initialement prévu pour de multiples raisons qui n'apparaissent pas clairement. Manifestement, une part des explications de ces raisons est à la charge du praticien.

- Comment un formateur-chercheur peut-il transmettre ses théories aux maîtres en formation ? Quelles sont les contraintes qui s'exercent sur lui ?
- Peut-on développer les analogies entre les conceptions de l'apprentissage en mathématiques ou en didactique ? De quelles expériences et modèles dispose-t-on ?
- Comment un maître en formation peut-il faire comprendre au chercheur les contraintes qu'il subit dans sa classe ?
- Quelles sont les conditions pour qu'une action menée dans une classe par un maître puisse être reconnue comme une vraie recherche en didactique ?

D. Spécificités de la recherche en didactique des mathématiques

«Concilier les objets de la recherche et de l'enseignement est difficile parce que les systèmes d'activités correspondants se produisent et se reproduisent selon des structures temporelles totalement différentes. On dit que c'est même précisément ces différences de rythmes et de temps qui sont responsables de la plupart des difficultés dans la coopération entre la théorie et la pratique. D'une part, l'attention de la recherche est dirigée vers la reconstruction après que les activités étudiées se sont déroulées, tandis que la pratique d'enseignement se concentre sur la production d'événements futurs. D'autre part, la recherche s'intéresse aux changements à court terme qui se produisent peu après l'expérimentation ou les essais, alors que l'expérience de la pratique d'enseignement montre que les modèles dans la classe ne changent que lentement, sur le long terme.» (ICME 7, 1988).

«L'étude de la diffusion des mathématiques, la description de ses modalités et la découverte de ses lois, s'il en existe, constituent aujourd'hui un champ scientifique naturellement ouvert à des chercheurs d'origine très diverse : psychologues, linguistes, pédagogues, sociologues, etc. Mais en l'absence d'un moyen d'intégration de leurs travaux, l'accumulation des injonctions et des contraintes qui en résultent pour les enseignants ne permettent pas à ceux-ci d'en faire bon usage.

Un moyen d'intégration est indispensable : ce moyen est une science de la diffusion des connaissances mathématiques : la didactique des mathématiques. ... Alors, il m'a paru qu'il resterait une part irréductible aux disciplines évoquées ci-dessus et non dérivable d'elles et que l'étude de cette part incombait aux mathématiciens. Je crois que cette part n'est pas un appendice, mais au contraire le coeur de la didactique.» (Brousseau, 1997).

L'éducation et l'enseignement des mathématiques sont confrontés à de graves difficultés. Ils ont besoin des apports de la recherche en didactique. Or celle-ci n'est pas (encore?) en mesure de répondre à toutes les demandes, comme en témoignent les citations ci-dessus, car il existe des obstacles importants, au sein de la discipline comme dans sa diffusion. Plutôt que de s'impatienter, on peut clarifier les rôles respectifs du chercheur et de l'enseignant en débattant, ensemble, des questions suivantes :

- Qu'entend-on par «didactique des mathématiques» ? Quelle est son articulation avec la psychologie et les autres sciences humaines ?
- Qui peut étudier la didactique des mathématiques ou participer à la construction de ses savoirs ?
- A qui s'adresse-t-elle ?
- Quelle évaluation en font les praticiens ? En quoi les aide-t-elle ? Quelles sont les attentes auxquelles elle n'a pas encore répondu ?

E. La prise en compte de résultats de la recherche dans les moyens et les outils pour l'enseignement

L'évaluation des moyens d'enseignement révèle souvent une distorsion entre les propositions des auteurs de manuels et les conceptions pédagogiques des maîtres. On remarque aussi que ces auteurs jouent un rôle essentiel dans l'articulation (transposition) entre les textes officiels définissant les «savoirs à enseigner» et les pratiques de la classe. Cette position leur donne une grande responsabilité dans l'interprétation du curriculum, au même titre que les «inspecteurs», «conseillers pédagogiques», «méthodologues» responsables de la définition des programmes en termes d'activités à conduire en classe.

L'analyse des choix de manuels montre que les maîtres choisissent de préférence des moyens d'enseignement en cohérence avec leurs conceptions pédagogiques. Les programmes bien découpés ont également la faveur de ceux qui se sentent peu encadrés par le curriculum. Dans ce jeu de l'offre et de la demande, il arrive souvent que les habitudes et les traditions l'emportent et que les innovations inspirées par les travaux de la recherche ne sont pas prises en compte dans les outils pour l'enseignement.

- Quel est le statut d'un auteur de manuels ou d'un «méthodologue» par rapport à la recherche et à la pratique ? Quel est leur rôle et leur pouvoir dans la transposition didactique ?

- Y a-t-il des modèles de collaboration entre recherche et pratique dans la production de ces outils ?

Références

- Balacheff, N. et al. (1992). Discussion document for an ICMI Study. Educational studies in mathematic, 23, 625-630.

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 7 (2), 33-115.

- Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques. Petit x, 22, 47-68.

- Brousseau, G. (1997). Allocution prononcée lors de la remise du doctorat honoris causa de l'Université de Montréal. Montréal : Université.

- Burton, L. (1994). Research, theory and practice : a triad. In L. Bazzini (ed.), Theory and practice in mathematics education : proceedings of the fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education, Grado (Italy) (pp. 57-65). Pavia : ISDAF.

- Cooperation between theory and practice in mathematics education : ICME-7 proceedings / Topic Group 14 = Coopération entre théorie et pratique en éducation mathématique : actes d'ICME-7 / Groupe thématique 14. (1992). [DEU], 282-285.

- Krainer, K. (1994). Integrating research and teacher in-service education as a means of mediating theory and practice in mathematics education. In L. Bazzini (ed.), Theory and practice in mathematics education : proceedings of the fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education, Grado (Italy) (pp. 121-131). Pavia : ISDAF.

- Steinbring, H. (1993). Dialogue between theory and practice in mathematics education. In R. Biehler et al. (ed.), Didactics of mathematics as a scientific discipline. Utrecht : Kluwer (pp. 89-102).

- Weiss, J. (1996). Enseignant et chercheur : couple maudit ou partenaires du changement ? In F. Cros & G. Adamczewski, L'innovation en éducation et formation (pp. 129-138). Paris : INRP ; Bruxelles : De Boeck (Pédagogies en développement). A paru également dans la collection (Pratiques 93.202) à Neuchâtel : IRDP.

Information :

IRDP, cp 54, CH-2007 Neuchâtel 7

tél: ++(41) (32) 889 86 09

fax: ++41 (32) 889 69 71

E-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch

Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem/

Martine Simonet

BASCULE

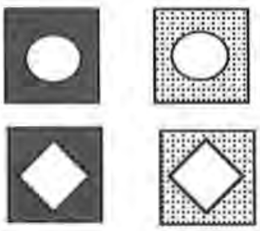
Ce jeu est repris d'un ancien jeu du commerce de la série Rubik's. Il peut être confectionné en bois, ou en carton-bois, par les enfants lors des cours de travaux manuels.

Nombre de joueurs : 2
Âge : dès 7 ans.
Durée de la partie : 5 à 15 minutes

Matériel

- 1 plateau de jeu de 4 x 4 cases (espacer les cases de 0,5 cm, ou coller des baguettes en bois. L'épaisseur de ces baguettes doit être inférieure à celle des plaques.)

- 16 plaques (de 5 cm X 5 cm) fond bleu au recto et rouge au verso : sur 8 de ces plaques on a dessiné un disque jaune au centre des deux faces et sur les 8 autres on a un carré jaune au centre des deux faces.



But du jeu

Juxtaposer 3 plaques identiques (même dessin, même couleur de fond) en ligne, en colonne ou en diagonale. Si l'adversaire, au coup suivant, ne peut détruire cet alignement, alors c'est gagné !

Règles

Chaque joueur prend 8 plaques identiques, donc l'un joue avec les disques (D) et l'autre avec les carrés (C). Durant toute la partie, les joueurs ont le choix de poser leurs plaques en montrant le côté bleu ou le côté rouge.

D place une de ses plaques sur une des 16 cases du plateau de jeu. C commence par "basculer" cette plaque, c'est-à-dire qu'il la retourne (changeant ainsi la couleur de fond) et la dépose sur une case adjacente (qui a un côté commun avec celle-ci). Puis il pose une de ses propres plaques à l'endroit de son choix.

D bascule à son tour la plaque de son adversaire sur une case libre adjacente puis pose une des siennes.

Et ainsi de suite...

On doit toujours commencer par basculer une des plaques de l'adversaire (pas nécessairement la dernière qui a été posée; une plaque peut ainsi être retournée plusieurs fois au cours d'une même partie) avant de poser la sienne. Il se peut qu'aucune plaque de son adversaire ne puisse être basculée; dans ce cas, on peut poser directement une des siennes.

Un joueur a gagné lorsqu'il a créé un alignement (horizontalement, verticalement ou en diagonale) de trois de ses plaques sur fond de même couleur et que son adversaire ne peut le détruire au coup suivant.

Attention !

1. On doit toujours d'abord "basculer" (si possible) une des plaques de l'adversaire avant de poser la sienne.

Si en ce faisant on crée un alignement de trois plaques adverses, la victoire va à l'adversaire !

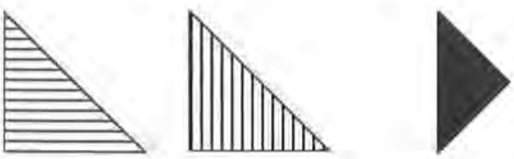
2. Un joueur n'est vainqueur que si son alignement de trois plaques identiques ne peut être détruit par son adversaire au coup suivant.

Quels sont les atouts de ce jeu ?

- La règle est simple, vite mémorisée. Une partie de démonstration et un rappel des 2 règles principales (voir encadré) suffisent pour que les élèves puissent ensuite jouer de manière autonome.
- Chaque partie est différente de la précédente; l'intérêt reste donc intact après de nombreuses parties.
- Pas de longs préparatifs: il suffit de sortir le plateau de jeu et de se répartir les plaques.
- Les parties sont relativement courtes (entre 5 et 15 minutes).
- Le fait de devoir "basculer" une des pièces de l'adversaire avant de poser la sienne apprend à l'enfant à se décentrer de son propre jeu.
- Si lors du basculement d'une pièce, le joueur crée un alignement de trois plaques chez son adversaire, ce dernier a gagné. Cette règle oblige le joueur à anticiper le résultat de son action.

LES CARRES DECORES

On dispose de deux sortes de grands triangles lignés et de petits triangles noirs :



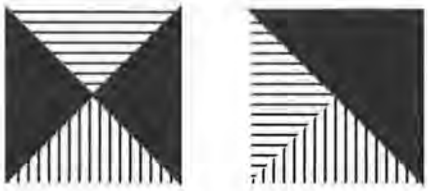
(Ces triangles sont isocèles rectangles. Le grand côté d'un triangle noir a la même longueur que les côtés égaux d'un triangle ligné.)

On a autant de pièces de chaque sorte qu'on le souhaite. Pour faire un carré décoré, on procède ainsi :

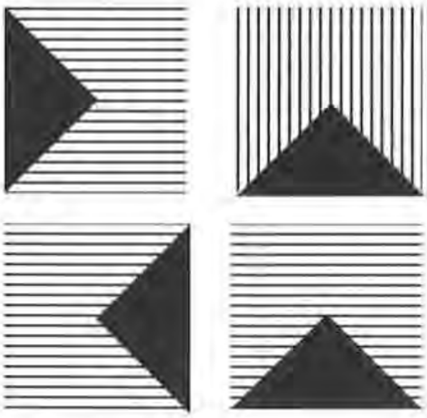
On prend deux grands triangles lignés et on les assemble pour former un carré. Puis on décore ce carré en posant dessus un, deux ou trois triangles noirs (avec leur grand côté sur un côté du carré et le sommet de l'angle droit au centre du carré).

Combien de carrés décorés différents peut-on construire ainsi ?

Voici 2 exemples différents de carrés décorés :



Voici encore quatre carrés décorés, mais les trois premiers sont identiques et ne comptent que pour un, le quatrième est différent des autres.



(solutions en page 44)

La comptine de la Saint-Valentin

Préparation au 6e Rallye mathématique transalpin en classe de 4e – 5e

Caroline Schlaeppy [1]

Il y a mille et une façons de se préparer à ce rallye mathématique ... Aux Verrières, nous avons décidé de prendre en compte les événements qui nous entourent pour nous préparer au mieux à ce concours.

Deux jours avant la Saint-Valentin, nous voilà partis dans un problème d'amour avant tout. Comment savoir si l'élu(e) de notre cœur nous aime vraiment ? Et bien croyez-nous, c'est mathématique ! Pour cela, il faut : une fleur, une jolie comptine et un peu de patience ...

Voici la recette :

J'effeuille une fleur en récitant :

Je t'aime
(j'enlève le premier pétale)

Un peu beaucoup
(j'enlève le deuxième pétale)

Passionnément
(j'enlève le troisième pétale)

A la folie
(j'enlève le quatrième pétale)

Et je recommence ma comptine.

1 Etudiante à l'Ecole Normale de Neuchâtel, en stage dans la classe de M. C.-A. Brunner, les Verrières

Voici une fleur à 9 pétales.

Quand j'effeuille le dernier, j'en suis à «Je t'aime», quelle chance !

A quelle expression est-ce que j'en serai lorsque j'arracherai le dernier pétale d'une fleur à 47 pétales ?

Et si ma fleur a 259 pétales ? (Comme les chrysanthèmes par exemple).

Explique bien ta démarche.

Devant une telle situation, les élèves se sont lancés avec enthousiasme !

Nous avons résolu ce problème en deux temps :

1) Chacun a reçu la consigne, a essayé seul quelques minutes, puis, par groupe de trois, les élèves ont mis leurs démarches en commun et ont rédigé une affiche.

2) Chaque groupe a présenté son affiche, nous en avons discuté et avons décidé de la meilleure stratégie à adopter.

Voici quelques résultats (la stratégie prévisible, suivie chaque fois d'une démarche découverte par les élèves) :

a) Certains élèves compteront tous les pétales, même s'il y en a 259 ! Les grands nombres ne les retiendront pas !

On a dessiné une fleur à 47 pétales et on est arrivé sur passionnement. Pour finir on a dessiné 259 pétales et on a ~~de~~ trouver passionnement, 2.

On a dessiner 259 pétales et on a mis a chaque fois qu'on est tombé. sur je t'aime il en reste 3 je t'aime un peu beaucoup passionnement.

b) D'autres élèves compteront pour les petits nombre (47), mais chercheront une nouvelle démarche pour les nombres trop élevés (259).

1) pour 47 j'ai compté jusqu'a 47 et j'ai trouvé

2) pour le nombre 259 je l'a divise par 4 et j'ai trouvé 64 et vu que pour 47 j'étais sur passionément j'ai continué j'usqua 64 et j'ai trouvé à la folie.

c) Certains élèves chercheront directement une stratégie pour tous les nombres :

- par la multiplication (x 4)

Nous avons fait quatre fois combien = à 47 et sa nous a donné 11 fois et la réponse est tombé sur 44 = à je t'aime et nous avons vu qu'il restait trois pétales. Nous les avons rajouté est sa nous a donné la réponse à = passionnément.

- par la division (: 4)

1. EXEMPLE

$$\begin{array}{r|l} 259 & 4 \\ \hline -0 & 064 \\ 25 & \\ -24 & \\ 19 & \\ -16 & \\ 3 & \end{array}$$

1. je t'aime
2. un peu beaucoup
3. passionnément

d) Certains trouveront des stratégies que nous n'aurions même pas imaginées.

(4x10) = 40+7 = 47 = 2R

(10x20) = 200+5x10 = 50+9 = 4R

J'ai une fleur à dix pétales quant on enleve la dernière on arrive à un peu beaucoup vingt aussi trante aussi et quarante aussi quarante+7 on arrive à Passionnément!

C'est difficile d'imaginer les stratégies que les élèves découvriront, car ils nous surprennent toujours.

Toutes les stratégies prévues sont ressorties dans un ou plusieurs groupes. D'autres démarches sont également apparues, créées de toutes pièces par les élèves. Malheureusement, aucune des nouvelles stratégies proposées n'était efficace. Cependant, n'oublions pas que l'erreur est formatrice et que tous les élèves ont appris quelque chose de ce travail (autant ceux qui avaient trouvé une démarche adéquate que ceux qui on dû remettre en question leur recherche).

Le moment de synthèse était comme un éveil pour les élèves qui étaient restés un peu à la traîne et presque un moment de gloire pour ceux qui avait trouvé une démarche valable. A chaque discussion sur une affiche, des têtes se relevaient dans un «ahhhhhh» d'illumination et de plus en plus de sourires apparaissaient.

Lors des derniers exemples, toute la classe avait adopté la méthode la plus efficace.

Pour finir, voici quelques avis sur l'activité :

C'était bien Ludovic

Jeffrey Malorie

plus le nombre grandi plus s'est dur

J'ai pas eu beaucoup de peine.
Joël

je n'ai rien trouvé difficil.
Moi non plus (A J)
et moi non plus (J.G)

M M J'ai trouvé que celle d'Ophélie était plus compliquée

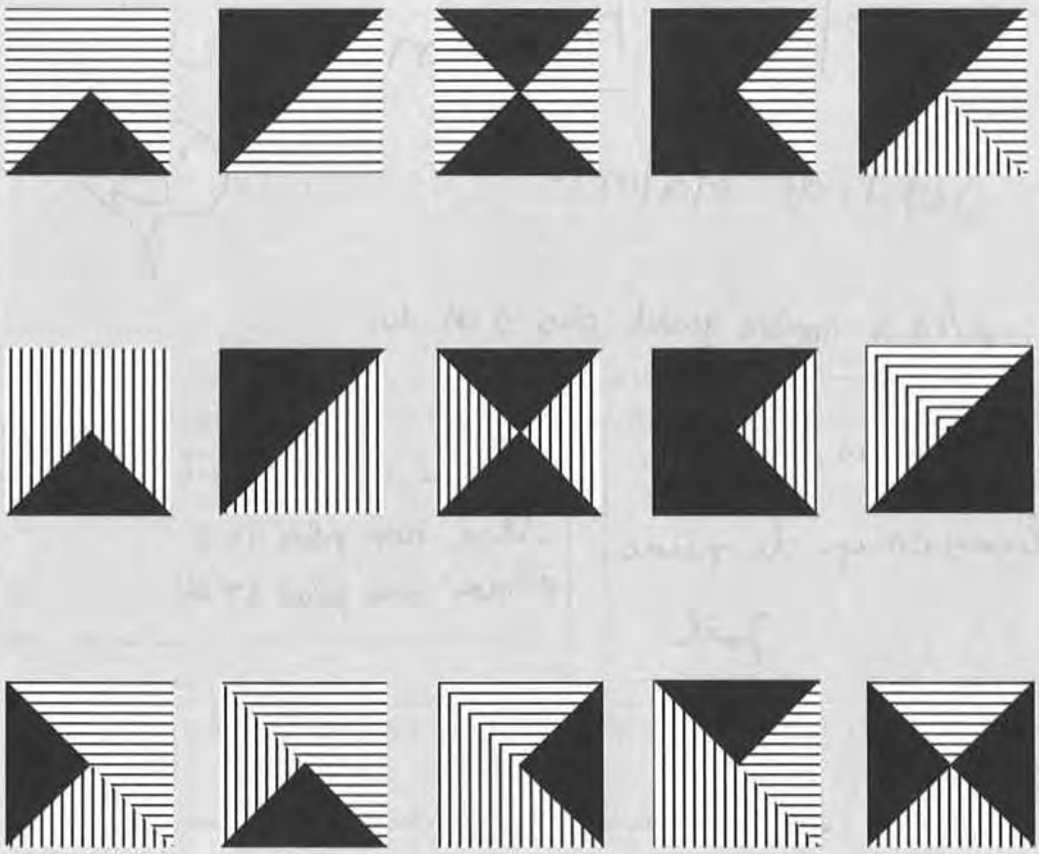
OB J'ai trouvé la recherche de Matthieu était moin compliquée

J.C J'ai trouvé que la recherche de Matthieu et d'Ophélie étaient mieux que la mienne car je n'ai pas trouvé de solutions j'ai eu de la peine àu 2 ème question. Camille

Cette manière de s'entraîner au rallye mathématique est réjouissante, profitable et enrichissante, elle permet d'exercer le travail de groupe tout en essayant de résoudre des problèmes, c'est pourquoi, nous vous la recommandons vivement !

Au fait, avez-vous découvert ce que pense l'élu(e) de votre cœur ?

Solutions relatives à l'article *JEUX* de la page 38.



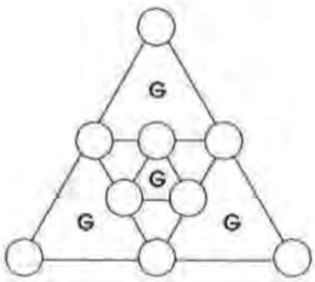
Mathématiques pratiques 7-8-9

J.-C. Aymon, C.-F. Bagnoud, A. Genoud, N. Rey-Bellet, H. Schild

Des collègues de l'AVECO (Association valaisanne des maîtres de Cycle d'orientation) sont en train de créer des fiches de travail, qui reprennent et développent des activités de leur «fichier de l'élève», lui-même extrait de «Mathématiques 7 à 9» du canton de Neuchâtel.

Voici deux de ces fiches. Si les lecteurs de Math-Ecole le demandent, il y en aura d'autres dans les prochains numéros. **[ndlr]**

La forteresse

1.Référence	Fichier de l'élève, 2e année section secondaire ou niveau 1, problème 23 p. 29, Logique et raisonnement
2. Objectif	Développer des stratégies de résolution.
3. Présentation de la leçon	Durée de l'activité: 1 à 2 périodes. travail de recherche individuel ponctué à intervalle régulier d'une mise en commun (débat).
4. Activité	**La Forteresse** Répartir les 45 prisonniers de cette forteresse dans les 9 cellules rondes de manière que chacun des quatre gardiens ait sous sa surveillance 17 prisonniers. Aucune cellule n'est vide. On précise que chacun des 4 gardiens indiqué par l'initiale G surveille les cellules situées autour de la pièce triangulaire dans laquelle il se tient. *Deux cellules distinctes ne peuvent contenir le même nombre de prisonniers.* 
5. Solution	**Raisonnement possible** La somme des prisonniers de cette forteresse = 45, somme des entiers de 1 à 9. Si les cellules étaient séparées, il devrait y avoir 68 prisonniers (4 gardiens, chaqun surveillant 17 prisonniers). Il y a donc 68 – 45 = 23 prisonniers surveillés par 2 gardiens.

Les trois cellules «extrêmes» ne sont gardées que par un seul gardien et comptent : 45 – 23 = 22 «pensionnaires».

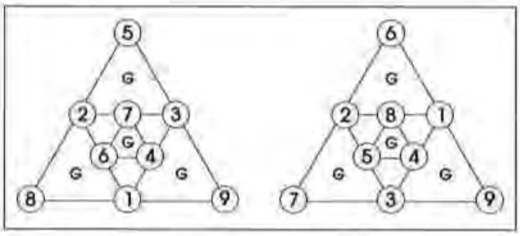
9 + 8 + 5 = 22 et 9 + 7 + 6 = 22 sont, dans ce cas, les seules façons de totaliser 22.

17 prisonniers occupent les 3 cellules «internes» (cf. donnée).

Les 3 cellules «milieu-externes» auront donc 23 – 17 = 6 prisonniers. Seule possibilité : 6 = 1 + 2 + 3.

5. Solution

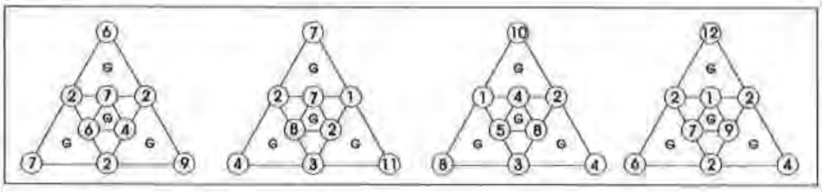
Avec 9, 8, 5 et 1, 2, 3 fixés la seule façon d'obtenir 17 est : 17 = 4 + 6 + 7.
Avec 9, 7, 6 et 1, 2, 3 fixés la seule façon d'obtenir 17 est : 17 = 4 + 5 + 8.
D'où les deux seules solutions :



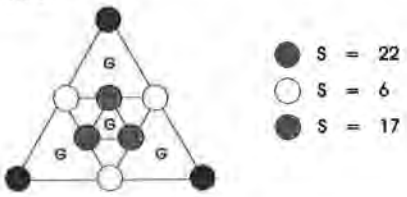
6. Remarque

Déroulement de l'activité

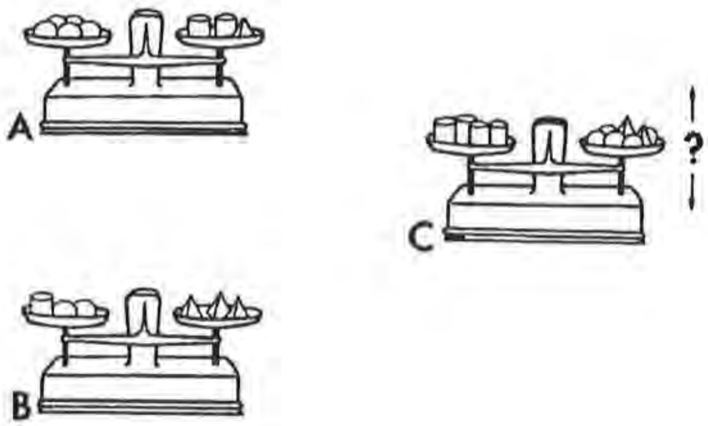
La compréhension de la donnée n'a pas posé de problème, si ce n'est qu'il a fallu se mettre d'accord sur la signification de «... Deux cellules distinctes ...». Comme après environ 20 minutes de recherche personne n'avait trouvé de solution, j'ai proposé à la classe de ne pas tenir compte, dans un premier temps, de la dernière remarque de la donnée (en italique dans le texte). Cela augmente considérablement le nombre de solutions possibles et a permis de relancer l'activité. A la fin de la période, la majorité des élèves avait trouvé une ou plusieurs solutions. Je vous en propose, ici, quatre :



Ces solutions, notées au tableau noir, ont nourri un vif débat et permis à la classe de découvrir des points communs («stratégie de résolution»). Quelques minutes suffirent alors aux élèves pour trouver une solution correcte à ce problème.



Penchera-t-elle ?

1. Référence	Fichier de l'élève 2e année, section secondaire ou niveau 1, problème 16 p. 27 (Logique et raisonnement).
2. Objectif	Approche et/ou illustration des règles d'équivalence d'équations; théorème de l'addition et de la multiplicationdes deux membres d'une équation. initiation au raisonnement déductif.
3. Présentation de la leçon	5' à 10' recherche individuelle. 5' petite mise en commun des différentes stratégies possibles. 20' recherche individuelle ou par groupe, «relances» (important). 10' mise en commun (état des recherches, solutions, ...).
4. Activité	**Penchera-t-elle ?** Les balances A et B sont en équilibre. La balance C penchera-t-elle à gauche, à droite, ou sera-t-elle en équilibre ? 

5. Solution par équation	A : 5b = 2c + p d'où : 10b = 4c + 2p B: c + 2b = 3p d'où : 5c + 10b = 15p donc : 5c + (4c + 2p) = 15p, ainsi : **9c = 13p** A : 5b = 2c + p C : 4c = 5b + 2p (?) d'où : 4c = 2c + 3p (?) ou : **2c = 3p (?)** Conclusion : **9c = 13p** <=> 18c = 26p **2c = 3p (?)** <=> 18c = 27p (?) Comme 18c < 27p, la balance penche à droite.
5. Solution par «raisonnement»	A l'aide des balances A et B et de leurs contenus, il est possible de simplifier la situation C proposée **4c = 5b + 2p (?)** devenant **1c = 2b (?)**. Trois cas possibles se présentent alors à nous : **1c = 2b** (équilibre) **1c ≠ 2b et 1c > 2b** (déséquilibre «gauche») **1c ≠ 2b et 1c < 2b** (déséquilibre «droit»). Pour vérifier chacune des hypothèses, il suffit alors de se référer aux balances A et B. Hypothèse I : **si 1c = 2b**, alors A : 1b = 1p et B : 3p = 4b ou 3b = 4b, d'où **contradiction !** Il y a donc déséquilibre. On a alors la certitude que 1c 2b. Hypothèse II : **si 1c > 2b**, alors A : 1b > 1p et B : 1b < 1p, d'où **contradiction !** Hypothèse III : **si 1c < 2b**, alors A : 1p > 1b et B : 1p > 1b, **aucune contradiction** dans ce cas ! La balance C penchera donc à droite.
6. Remarque	Cet exercice trouvera très bien sa place en parallèle au chapitre «Equation» en 2e année. Il semble, en revanche, inutile de vouloir inciter les élèves à résoudre ce problème à l'aide d'équations. Libre à eux de choisir leur chemin.

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole***. (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Collection «Maths pour tous»** (4 cahiers). **Histoire de maths.		
Le monde des symétries. Py, Pytha, Pythagore. La Magie du calcul.	.....	*(ex. à Fr. 45.-)*
Le nombre π, ADCS	.....	(ex. à Fr. 40.-)*
Les jeux de NIM, par Jacques Bouteloup, ADCS	.....	(ex. à Fr. 52.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*
Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	.....	(ex. à Fr. 32.-)*
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)*
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)*
Exos-malices, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)*
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)*
Panoramaths 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 20.-)*
Pliages mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 17.-)*
Apprivoiser l'infini, ACL	.....	(ex. à Fr. 25.-)*
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	.....	(ex. à Fr. 26.-)*
Maths en vacances. Hypercube.	.....	(ex. à Fr. 15.-)*

Les anciens numéros de ***Math-Ecole*** (prix en page 2 de couverture)

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques

- Niveau CM (degrés 4 et 5) : ..... (Fr. 13.- l'ex.)* :
  - ***Récrémaths*** .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques pour l'école*** ..... (ex. à Fr. 14.-)*
- Niveau collégiens :
  - ***Les Pentagones patagons*** (n° 8) .... ex.
  - ***Le Serpent numérique*** (n° 10) .... ex.
  - ***Le Trésor du vieux Pirate*** (n°12) .... ex.
  - ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques pour tous*** ..... (ex. à Fr. 16.-)*
- Niveau lycéens et adultes :
  - ***La Biroulette russe*** (n° 9) .... ex.
  - ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex.
  - ***Le Roi des Nuls*** (n°13) .... ex.
  - ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex.
  - ***50 Enigmes mathématiques pour lycéens*** ..... (ex. à Fr. 16.-)*
- Anciens numéros encore disponibles (n° 3, 5, 6 et 7) : ....

* Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1
envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

SOMMAIRE