MATH ECOLE

37e année

183

Jeux

L'évaluation formative fondée sur la pratique de classe

Helvétiquement vôtre

juin 1998

Math-Ecole,

pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros): Suisse Fr. 25.- / Etranger FS. 30.- CCP 12-4983-8

Prix au numéro : Fr. 6.-
anciens numéros : Fr. 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 Fr. 18.- par abonnement
de 10 à 50 Fr. 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E–mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

37e année 5 numéros par an

183

juin 98

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut romand de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43
CH - 2007 Neuchâtel 7 - CP 54
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Un modèle en Suisse romande[1]

Claude Zweiacker, Chef du Service de l'enseignement primaire, NE

PLAN D'ETUDES ROMAND DE MATHEMATIQUES - DEGRES 1-6

Document primordial, le «Plan d'études romand de mathématiques - Degrés 1-6» est référence et ressource. Les maîtres s'en imprègnent progressivement car il définit désormais la «ligne mathématique» en Suisse romande.

Dernier né des plans d'études approuvés par la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP-SR+TI), il tient du modèle.

D'un seul regard, le maître peut situer son action dans la matière – et fait nouveau pour un plan d'études – dans le temps. En effet, le plan offre une vue générale du développement et de la progression d'un contenu de la préscolarité au terme de la scolarité obligatoire. Il mesure ainsi toutes les intentions du programme.

Large vision, objectifs écrits de manière à tenir compte des nouvelles pratiques d'évaluation du travail des élèves, mise en évidence des moments-clefs de la résolution des problèmes et des visées de l'enseignement des mathématiques, tout est dit de manière concise et dans un langage clair.

«L'enseignement des mathématiques doit favoriser la communication par l'utilisation d'éléments propre au langage mathématique» tel est l'un des buts assignés à cette discipline lit-on dans ce plan de couleur bleue.

Aussi le concept du nouveau «Plan d'études romand de mathématiques» est-il un modèle de communication entre la Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP-SR+Ti) ainsi que la Conférence des chefs de service de l'enseignement primaire de la Suisse romande et du Tessin (CS1) et les maîtres. Il leur donne un cheminement bien balisé pour conduire allègrement leur enseignement des mathématiques de la 1ère à la 6ème année.

On apprécie donc vivement la rigueur de cet outil et l'esprit de créativité qui a soufflé dans le groupe de travail[2] chargé de la réalisation de ce document.

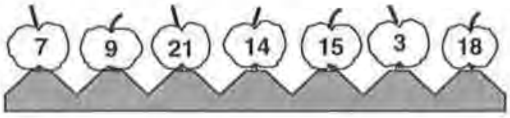
1 **[ndrl]** L'éditorial du numéro 181 présentait le nouveau plan d'études romand de mathématiques comme une étape, parmi d'autres, dans le processus permanent de l'évolution de l'enseignement des mathématiques. Dans le numéro suivant de Math-Ecole, notre collègue Jacque-André Calame présentait l'élaboration de ce plan d'étude, vue des coulisses. Nous sommes heureux de présenter, dans ce numéro 183, un troisième éclairage du même document, cette fois-ci du point de vue de l'institution scolaire. Nous remercions M. Claude Zweiacker, Chef du service de l'enseignement primaire du canton de Neuchâtel, d'avoir complété ainsi l'information des lecteurs de Math-Ecole sur cet objet-clé qu'est un plan d'études dans l'innovation importante que vit l'enseignement des mathématiques en Suisse romande.

2 D. Berney, J.-A. Calame, A. Gagnebin, Y. Michlig, J.-D. Monod.

6e Rallye mathématique transalpin : finale

Après les épreuves I et II (publiées dans les numéros 181 et 182) du 6e Rallye mathématique transalpin, voici la finale, qui s'est déroulée à Yverdon-les-Bains le 27 mai et qui a réuni les 18 classes ayant obtenu les meilleurs résultats aux épreuves précédentes. Quelques analyses de résultats seront publiées dans un prochain numéro. ***[ndlr]***

1. Tir à l'arc (Début Cat. 3)

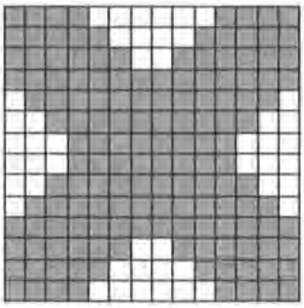


Guillaume aimerait obtenir 40 points exactement, avec le moins de flèches possible.

Quelles pommes doit-il viser ?

Justifiez votre réponse.

2. Mosaïque (Début Cat. 4)

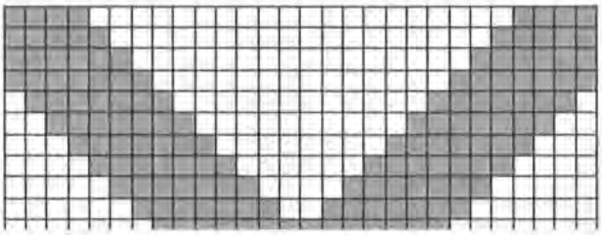


a) **Combien de carreaux gris a-t-on utilisés pour réaliser cette mosaïque, à l'intérieur d'un carré de 14 carreaux de côté ?**

b) On a commencé à représenter, ci-dessous, une mosaïque du même type à l'intérieur d'un carré de 28 carreaux de côté.

Combien de carreaux gris faudrait-il en tout pour la réaliser com-plètement ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

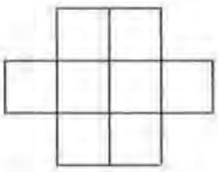


3. Ne me touche pas ! (Début Cat. 5)

Complétez cette grille en plaçant dans les cases les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Mais attention : deux cases qui se touchent ne doivent pas contenir deux nombres qui se suivent. (Par exemple 1 et 2, 2 et 3, etc.)

On dit que deux cases «se touchent» si elles ont soit un côté commun, soit un sommet commun.



(Par exemple, la case du haut «touche» les trois cases de la ligne au-dessous d'elle.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

4. Calendrier

Le 1 janvier de l'an 2001 sera un dimanche.

Quel jour de la semaine sera le 150e jour de l'année 2001 ?

Justifiez votre réponse.

5. Table de multiplication

Alain a construit une petite table de multiplication, des nombres de 1 à 6 (dans la ligne du haut) par les nombres de 1 à 4 (dans la colonne de gauche).

Dans sa table, Alain a écrit trois fois le nombre 12.

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	**12**
3	3	6	9	**12**	15	18
4	4	8	**12**	16	20	24

Berthe a construit une grande table de multiplication, des nombres de 1 à 25 (dans la ligne du haut) par les nombres de 1 à 70, (dans la colonne de gauche).

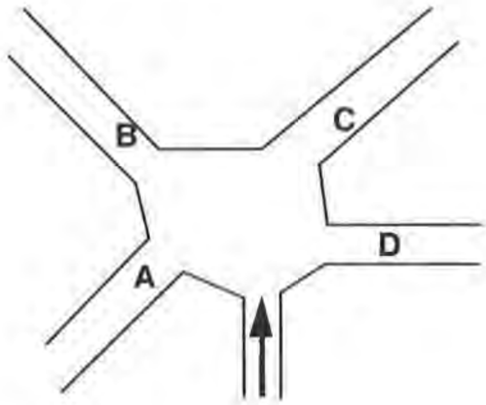
Combien de fois a-t-elle écrit le nombre 72 ?

Justifiez votre réponse.

6. La route de Siena (Début Cat. 6)

Arezzo, Firenze, Pisa et Siena sont quatre belles cités de Toscane.

Lorsqu'on arrive au carrefour par la route désignée par la flèche, on peut se rendre à chacune de ces quatre villes par l'une des routes A, B, C ou D.



On sait que :

- la route A conduit à une ville dont le nom a plus de quatre lettres,
- le nom de la ville qu'on rejoint par la route B n'utilise que deux voyelles différentes,
- la route C conduit à une ville dont le nom s'écrit avec moins de six lettres,
- le nom de la ville où conduit la route D a plus de deux consonnes différentes.

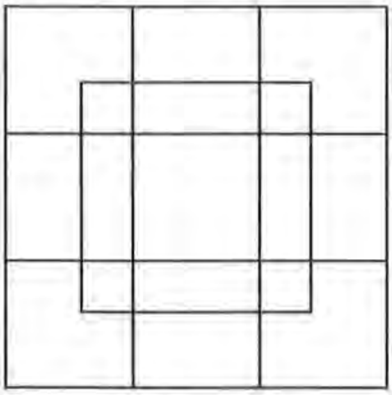
Où mène chaque route ?

Expliquez votre raisonnement.

7. Combien de carrés (Début Cat. 7)

Combien de carrés peut-on voir dans cette figure ?

Justifiez votre réponse.



(Fin Cat. 3)

8. Images à gagner (Début Cat. 8)

Cinq amis ont gagné en tout 40 images lors d'un jeu.

A la fin de la partie, ils comptent les images que chacun a gagnées :

- Albert a gagné 4 images de plus que Claude.
- Barbara en a gagné autant qu'Albert et Claude ensemble.
- Emile n'a pas eu de chance et n'a rien gagné.
- Danielle a gagné 4 images.

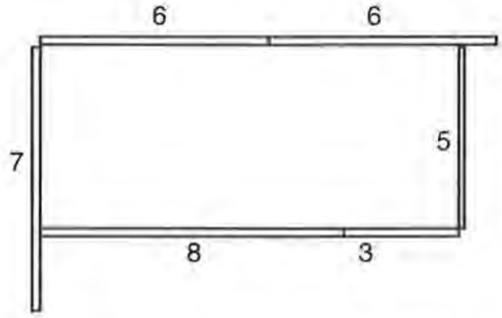
Pouvez-vous dire combien Albert, Barbara et Claude ont gagné d'images ?

Expliquez votre raisonnement.(Fin Cat. 4)

9. L'enclos de la chèvre

Monsieur Seguin a construit un enclos rectangulaire pour sa chèvre avec 6 barrières de 3 m, 5 m, 6 m, 6 m, 7 m et 8 m de long.

Sa chèvre n'est pas contente du tout. Elle pense que, avec les mêmes barrières, on peut lui offrir un espace rectangulaire plus grand, où il y a plus d'herbe à brouter.

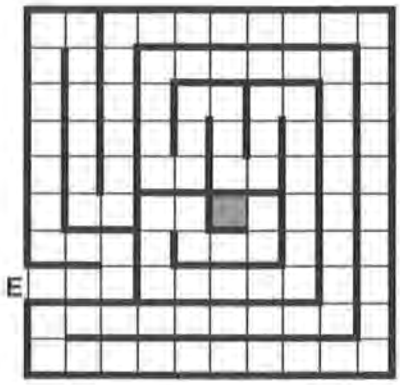


Quel est le plus grand enclos possible, de forme rectangulaire, que peut construire Monsieur Seguin avec ses six barrières, pour satisfaire sa chèvre ?

Justifiez votre solution. (Fin Cat. 5)

10. Labyrinthe

Ariane a parcouru tout le labyrinthe en 8 étapes.



Elle est partie de l'entrée E.

Lors de la deuxième étape, elle a franchi une case de plus qu'à la première, et ainsi de suite : à chaque étape, elle franchit une case de plus qu'à l'étape précédente.

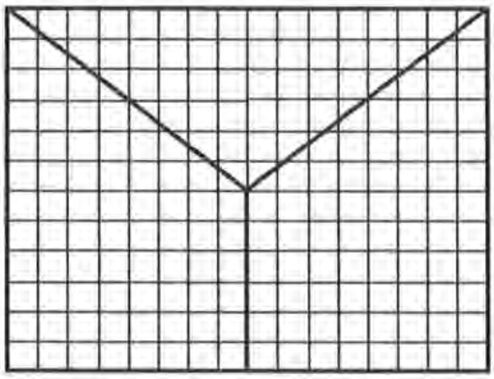
Elle a terminé la huitième étape sur la case grise.

Combien de case a-t-elle franchies lors de la première étape ?

Expliquez votre réponse et comment vous avez procédé.

11. Rectangle à partager

Anne aurait voulu partager ce rectangle en deux trapèzes et un triangle isocèle, tous les trois de même aire. Mais elle n'y est pas parvenue! Les deux trapèzes ont bien la même aire mais ils n'ont pas la même aire que le triangle.



Et vous, auriez-vous pu effectuer ce partage ?

De combien de façons et comment ?

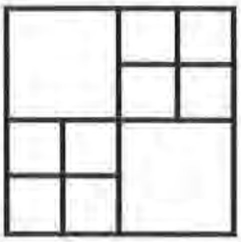
Justifiez votre réponse.

12. Des carrés à n'en plus finir

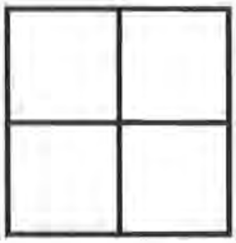
Monsieur Konrad Rey est fabriquant de carrés. Son travail consiste à partager des carrés en carrés plus petits, pas forcément de même taille.

Voici ses derniers partages :

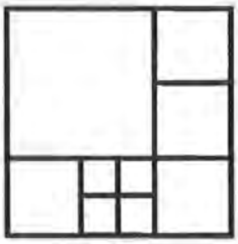
en 10 carrés :



en 4 carrés :



en 9 carrés :



Pour avoir la gamme complète de partages de 1 à 10, il aimerait encore trouver des manières de partager un carré en 2 carrés, 3 carrés, 5 carrés, 6 carrés, 7 carrés et 8 carrés.

M. K. Rey arrivera-t-il à trouver tous les modèles de partages souhaités ?

Justifiez votre réponse. (Fin Cat. 6)

13. Jeunes vieillards

C'est l'anniversaire d'Arnold, il a 11 ans. Berthe, qui est invitée dit : «Eh bien, moi, j'ai 120 mois aujourd'hui».

«Carlo a exactement 500 semaines», dit sa maman.

Denise : «ce n'est pas beaucoup, mon papa qui est prof de math m'a dit que j'ai déjà vécu 4000 jours».

Et François ajoute : «il y a100000 heures que je suis né, c'est mon grand papa qui me l'a dit et il est horloger !»

Classez ces cinq enfants du plus jeune au plus âgé.

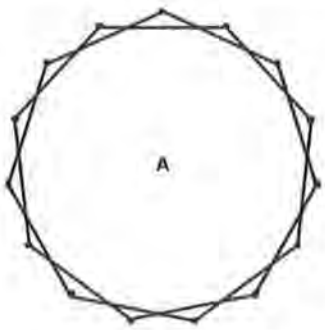
Justifiez votre classement. (Fin Cat. 7)

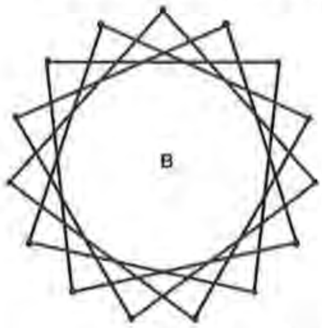
14. Etoiles

Sur des clous disposés en cercle, on a construit ces deux étoiles A et B en respectant les règles suivantes :

- on n'utilise qu'un seul fil (on fait le dessin d'un seul trait, sans lever le crayon),
- on passe par tous les clous,
- il y a toujours la même distance entre deux clous qui se suivent sur le fil (tous les côtés sont de même longueur).

Sur des clous disposés de la même façon, et avec les mêmes règles de construction, combien peut-on former d'autres étoiles, différentes des deux premières (sans compter le polygone régulier convexe qui passe d'un clou au suivant)?





Dessinez votre (vos) solution(s) et expliquez comment vous avez procédé. (Fin Cat. 8)

Les résultats de la finale romande du 27 mai 1998

Participation : 16 classes sur les 140 ayant passé les épreuves I et II, et 2 classes invitées.

Cat.	Classe	Rang	Int.*
3	Montmollin NE (Mme M. Oppliger-Haas)	I	IV (5)
3	Collège de Chailly VD (Mme M. Buttet)	II	
4	Prés Walker, Bienne BE (Mmes F. Villars et E. Pfander)	I	I (6)
4	Ecole primaire de Courrendlin JU (Mme E. Lachausse),	II	
4	Collège du Chaney, Echandens VD (Mme S. Giorgis)	III	
4	Scuola elementare, Lodrini TI (Sga Nevis Danioth)	IV	
4	Nouveau collège, Valeyres-sous-Montagny VD (Mme F. Tröhi)	V	
5	Ecole du cercle de Corsier (Mme V. Bourquin)	I	II (5)
5	CESSNOV, Cheseaux-Noréaz VD (Mme J. Pilet Perotti)	II	
5	Collège de Bôle NE (Mme A. Kull)	III	
5	Ecole de Vandoeuvres GE (Mme A.-M. Deléaval)	IV	
6	Collège du Pré-aux-Moines, Coppet VD (Mme S. Resin)	I	I (6)
6	Ecole du cercle de Corsier VD (Mme C. Marclay)	II	
6	Etablissement secondaire de Prilly VD (M. Philippe Dony)	III	
7	Et. sec. de Beausobre, Morges VD (Mme C. Perrinjaquet)	I	II (6)
7	**1 5-6, CO de Monthey VS (Mme M. Ferolles)	II	
8	Scuola Media, Lodrino TI (Sgr. Elvio Bernardi)	I	I (3)
8	**2S1, CO de St Guérin, Sion, VS (Mme C. Kohnke)	II	

* Cette colonne donne le rang des vainqueurs de la finale romande, après analyse comparative de leurs solutions avec celles des vainqueurs des finales régionales d'Italie : Parma, Cagliari, Siena, Val d'Aosta, Pesaro. Il s'agit en fait d'une finale des finales

Pour cette comparaison, toutes les épreuves des classes gagnantes des différentes finales ont été corrigées une seconde fois, par une nouvelle équipe, selon les critères d'analyse établis précédemment au niveau international. Seules quelques différences de 1 à 2 points sont apparues sur les totaux, chez moins de 10 % des classes concernées. La fiabilité des critères est donc satisfaisante et permettra des analyses comparatives ultérieures, très riches d'enseignements.

** Classes gagnantes du concours «Espace mathématique» qui a réuni, pour sa deuxième édition, 84 classes des Cycles d'orientation du Valais, des degrés 7et 8. Ces deux classes ont été invitées à la Finale romande du 6e Rallye mathématique transalpin, ouvert pour la première fois aux classes de ces degrés.

Pour ces deux catégories, la première place s'est jouée à un point : 27 contre 26 en cat. 7, 25 contre 24 en cat. 8 !

L'évaluation formative fondée sur la pratique de classe[1]

M. Brêchet, J.-A. Calame, M.Chastellain, F. Jaquet

Les fonctions constituent l'une des notions les plus importantes et fécondes des mathématiques. Elles recouvrent la majorité des situations arithmétiques que l'élève rencontre au cours de sa scolarité obligatoire. Elles sont à la base de toute instruction programmée et ouvrent un des champs d'études privilégiés de l'enseignement secondaire supérieur.

Durant les années qui précèdent la 7e, les élèves se sont familiarisés avec les fonctions, dans les activités sur les «machines» multiplicatives et additives, par les représentations au moyen de tableaux et graphiques, ainsi que par des observations répétées sur les fonctions linéaires. Tout ce travail s'est effectué sans aucun formalisme et sans terminologie précise. Pour les fonctions linéaires en particulier, les propriétés «de la somme et du produit» n'ont été utilisées qu'implicitement et les valeurs calculées de proche en proche seulement. Aux niveaux 7,8 et 9 de la scolarité, il s'agit non seulement de poursuivre, de consolider et de dresser une synthèse des connaissances acquises jusque là, mais encore de les intégrer sous la notion de fonction et d'entreprendre une étude plus systématique des fonctions les plus usitées. Pour y parvenir – on pourrait parler d'**environnement** de travail et d'**outils** à forger – les activités proposées dans les moyens d'enseignement porteront sur :

- les représentations d'une fonction (boîtes noires, tableaux, graphiques, diagrammes, expressions algébriques, ...);
- l'étude de situations linéaires (propriétés, notion de rapport, pente, ...), affines et autres;
- le portrait d'une fonction (ensemble de définition et ensemble des valeurs, notion de couple, de variable, croissance, minimum, maximum, rôle des coefficients, ...).

Les activités retenues visent à atteindre des objectifs fondamentaux, organisateurs des apprentissages, définis sous le terme d'**objectifs noyaux** :

Objectifs noyaux	Commentaires
– Percevoir le «caractère fonctionnel» d'une situation (sentir, supposer, deviner, imaginer qu'il y a une dépendance entre grandeurs ou entre nombres dans le contexte proposé). – Distinguer les «grandes familles» de fonctions les plus fréquentes	A l'école secondaire, on se situe dans une première phase de sensibilisation à ces deux objectifs noyaux dans la mesure où l'appréhension du concept de fonction nécessite une longue maturation qui s'étend au-delà de la scolarité obligatoire.

[1] Le problème traité ici, ainsi que les commentaires qui l'accompagnent sont issus des propositions formulées par le groupe de réflexion mandaté par COROME pour élaborer un projet de moyens d'enseignement de mathématiques pour les degrés 7-8-9 de la scolarité obligatoire de Suisse romande.

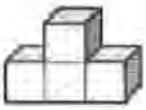
Objectifs noyaux	Commentaires
– Reconnaître les situations qui relèvent de la linéarité (proportionnalité).	Parmi toutes les situations où les fonctions sont sous-jacentes, certaines mettent en évidence des propriétés particulières qui permettent d'identifier la spécificité des fonctions linéaires. L'élève peut apprendre à les identifier : – par les représentations possibles de telles fonctions (droite passant par l'origine, tableau de nombres avec suites proportionnelles, mise en évidence du facteur de linéarité, ...); – par la nature même du texte d'un problème, ce qui est plus difficile (couples de nombres ne permettant pas la mise en évidence d'un facteur ou de suites proportionnelles, ... , absence de représentation visuelle); – par la pratique, l'élève découvrira que des contextes peuvent laisser présager de la linéarité (agrandissement de photo, prix d'une marchandise, ...), mais celle-ci sera toujours à vérifier.
– Choisir et mettre en oeuvre une procédure de résolution dans une situation où interviennent des fonctions «simples».	A propos des fonctions «simples», à savoir les fonctions ... – affines $x \mapsto ax + b$, – linéaires $x \mapsto ax$, – quadratiques $x \mapsto ax^2$, – rationnelles $x \mapsto \frac{a}{x}$, – cubiques $x \mapsto ax^3$, l'élève devra, en particulier : – identifier les ensembles en relation (en langage de mathématicien) ou les grandeurs en jeu (en langage universel); – identifier les couples en relation et les représenter (par une liste, un tableau, un graphique); – déterminer la «loi de passage» de l'élément de départ du couple à son image (le «truc», la «machine», la(les) opération(s) mathématique(s), l'expression fonctionnelle lorsqu'elle est formulable).

A titre d'exemple, arrêtons-nous un bref instant sur l'activité intitulée *Escaliers*, pour mettre en évidence quelques objectifs noyaux (en gras dans la suite du texte) du domaine «FONCTIONS» qui sous-tendent les différentes phases que les élèves rencontrent durant l'étude de ce problème.

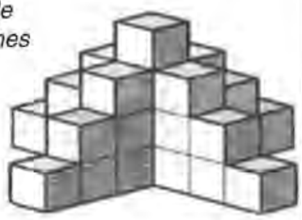
Escaliers

escalier simple
hauteur : 3 marches

escalier double
hauteur : 2 marches



escalier quadruple
hauteur : 4 marches



Comment déterminer rapidement le nombre de cubes nécessaires à la construction d'escaliers de chaque sorte, de 1500 marches de hauteur ?

- Approche :
  après la phase d'appropriation (lecture, reformulation, tri des informations pertinentes, etc.), les élèves peuvent dessiner ou construire successivement des escaliers de hauteurs différentes de structure «simple», «double» ou «quadruple», à l'aide d'un matériel adéquat.

- Dénombrement :
  ils comptent le nombre de cubes et notent leurs résultats. Dans cette phase initiale de la recherche, les inscriptions se font généralement de manière «sauvage», c'est-à-dire sans aucune référence particulière à un outil mathématique comme un tableau ou un graphique.

- Observation :
  c'est probablement seulement à la suite de ces deux premières étapes que les élèves découvrent qu'il existe une dépendance entre, d'une part, la hauteur d'un escalier et, d'autre part, le nombre de cubes nécessaires à sa construction. **Ils perçoivent** alors **le «caractère fonctionnel» de la situation**.

- Analyse :
  pour répondre à la question posée – «*Comment déterminer rapidement le nombre de cubes nécessaires à la construction d'escaliers de chaque sorte, de 1500 marches de hauteur ?*» – les élèves sont amenés à organiser leurs résultats. A priori, c'est le tableau de nombres qui se révèle être l'outil privilégié. Il fait apparaître rapidement que **la situation ne relève pas de la linéarité**, ce qui oblige les élèves à **mettre en oeuvre une autre procédure de résolution.** Ils effectuent alors des tâtonnements successifs, afin de **déterminer les lois de passage d'un élément de départ du couple à son image.**

L'escalier double ne pose pas de difficulté particulière et les élèves découvrent rapidement que le nombre de cubes nécessaires à sa construction correspond au carré de sa hauteur. En des termes plus mathématiques, ils sont confrontés à **la fonction quadratique** «simple» de type $x \mapsto ax^2$.

Pour les deux autres escaliers, **la détermination des expressions fonctionnelles** qui s'y rapportent est plus délicate, car ces situations ne relèvent pas de fonctions «simples». **L'identification des couples en relation** débouche généralement sur des propositions incomplètes ou alors sur des solutions correctes, mais dont l'expression algébrique n'est pas réduite.

Par exemple dans le cas de l'escalier :

- simple, dont la loi de passage est : $x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$, les élèves perçoivent bien la «dimension multiplicative» sans toujours parvenir à l'exprimer correctement ;
- quadruple, dont la loi de passage est : $x \mapsto 2x^2 - x$, ils peuvent traduire leur résultat par des expressions comme $x \cdot x \cdot 2 - x$, $x(2x-1)$ ou encore, $x^2 + x(x-1)$.

EVALUATION FORMATIVE

Chaque fois qu'on agit pour favoriser la construction de nouvelles connaissances, par des explications, des corrections, des remédiations, des choix d'activités complémentaires, des encouragements, des remises en question, ... on pratique une évaluation que l'on qualifie aujourd'hui de «formative», par opposition aux évaluations dites «certificative» ou «sommative» à caractère institutionnel, qui consistent à certifier, juger, orienter, sélectionner.

L'évaluation formative est le «pilotage» des apprentissages, sur la base d'observations, d'analyses et de réflexions. Dans une classe, c'est le maître qui en définit le cadre général par l'organisation du travail, mais l'élève y est très étroitement associé car c'est de lui que dépend, en dernier ressort, la qualité des connaissances et compétences acquises.

Même s'il est implicite ou inconscient, ce type d'évaluation est - et a toujours été - une tâche permanente de l'enseignant, dans la préparation de la leçon, dans le choix des thèmes, dans la gestion de la classe, dans les aides apportées aux élèves. Mais ce n'est qu'au cours de ces vingt dernières années que s'est dégagé plus explicitement le concept d'évaluation «formative» et qu'on arrive à mieux définir quels sont ses points d'ancrage et ses fonctions.

En effet, la didactique des mathématiques est une science jeune. Ses résultats permettent aujourd'hui de mettre en évidence les différentes phases caractéristiques de la construction d'une connaissance, les obstacles, les représentations et d'autres phénomènes d'apprentissage, sur lesquels se fondent l'évaluation formative. Et c'est aussi dans la récente perspective socio-constructiviste de l'apprentissage que s'est développée la réflexion sur les aspects «formatifs» de l'évaluation. (Voir encadré p. ...).

Les pages qui suivent précisent comment s'articule l'évaluation formative sur le déroulement d'une activité-clé dans la construction des connaissance mathématiques. Cette présentation ne peut se faire sans références aux pratiques qui donnent leur sens aux processus d'évaluation formative. Le problème choisi pour les illustrer et celui des *Escaliers*.

Les observations d'élèves et de maîtres en rapport avec ce problème, sont directement inspirées d'expérimentations réelles, mais elles tiennent compte également de celles vécues lors de l'étude de thèmes très voisins ce qui fait qu'elles conservent, en partie, un caractère fictif. Le choix d'un seul et même problème est dicté par des nécessités d'unité et d'appropriation. Il paraît en effet indispensable à la bonne compréhension de cette présentation des points d'ancrage de l'évaluation formative, que le lecteur ait résolu lui-même le problème et lu les commentaires (des pages précédentes) qui l'accompagnent.

L'évaluation des connaissances et de compétences des élèves selon différentes conceptions de l'apprentissage.

La conception transmissive de l'apprentissage est très ancienne et traditionnelle. Selon elle, les objets mathématiques ont une existence propre, différente de la réalité physique, indépendante de l'espace, du temps et de l'homme qui les évoque. Faire des mathématiques c'est accéder à l'ordre théorique qui fonde la rationalité du monde, indépendamment de nos systèmes de raisonnement.

Dans ce type de conception, on accède aux vérités mathématiques par le discours, par l'exposé, par la démonstration. Le rôle de l'enseignant est de présenter les connaissances comme un enchaînement de propositions vraies, que l'élève doit reconnaître comme une évidence.

L'évaluation des connaissances et des compétences de l'élève se fonde avant tout sur leur maîtrise finale. C'est lors du contrôle de chaque articulation de l'enchaînement des raisonnements, que peut intervenir une évaluation à caractère «formatif». Elle se manifeste alors par des répétitions, des explications complémentaires, une meilleure exposition des enchaînements logiques, l'utilisation d'autres représentations.

La conception béhavioriste repose sur l'idée que, pour faire passer l'élève d'un niveau de connaissance à un autre il faut stimuler les comportements attendus et renforcer les réponses positives. On définit très précisément les étapes par lesquelles doit passer l'élève, objectif par objectif, puis on met en place des situations au cours desquelles il sera conduit à découvrir le nouveau comportement, qu'on renforce aussitôt. Enfin, une fois l'objectif atteint, on propose des entraînements systématiques pour automatiser le comportement nouveau, avant de passer à l'objectif suivant.

Dans ce modèle l'évaluation est programmée et intégrée à l'enseignement. Le feed back est donné à chaque étape et des remédiations sont proposées automatiquement à celui qui n'arrive pas à franchir la marche, le plus souvent par de nouvelles propositions de marches, plus petites. On est en présence d'une «pédagogie par objectifs» où tout est fait pour que l'élève ne soit jamais en situation d'échec. Il s'agit bien d'un «pilotage» caractéristique de l'évaluation formative, mais dans lequel l'élève est guidé, sans avoir à se poser de questions sur sa progression, ni de choix à opérer.

Selon **le modèle socio-constructiviste**, apprendre ne consiste pas à recevoir le savoir d'une manière passive, mais à agir sur les informations reçues de la situation en les transformant. Les connaissances nouvelles sont construites à partir de ce que l'on sait déjà. Elles demandent un temps d'»assimilation», au cours duquel on établit des analogies, on compare, on cherche des ressemblances et des différences avec ses anciennes connaissances, qu'il faut souvent déséquilibrer avant de les reconstruire à un niveau supérieur. Le processus est complexe, il est différent pour chaque apprenant.

L'évaluation formative exige ici des observations et des analyses plus fines que dans les autres modèles de l'apprentissage. Derrière les productions de l'élève, ses erreurs ou ses réussites, ses procédures, le maître doit formuler des hypothèses sur le degré de construction des connaissances et s'efforcer de les vérifier. L'élève a aussi des responsabilités importantes dans l'explicitation de ses démarches, dans la prise de conscience de ses représentations et de celles de ses camarades. C'est l'interprétation de ces perceptions des uns et des autres qui déterminera les décisions à prendre pour poursuivre l'élaboration des savoirs en jeu.

L'analyse a priori, préparation de l'évaluation formative

Au moment d'aborder avec ses élèves un savoir mathématique nouveau ou de faire réinvestir une ancienne connaissance dans un contexte différent, le maître procède à des choix et se pose de nombreuses questions. C'est l'objet de «l'analyse a priori» de l'activité - le plus souvent un problème - qui va être proposée aux élèves. C'est à ce moment que le maître pose les jalons de l'évaluation formative qui viendra se greffer sur l'activité mathématique :

Questions générales	Exemples
• Justification du choix de l'activité en fonction de ses contenus mathématiques, de son opportunité dans le développement des connaissances des élèves, de son intérêt intrinsèque.	• *L'escalier* se compose de trois recherches : l'escalier «simple», le «double» et le «quadruple». Va-t-on les proposer simultanément ? Choisir la première car elle permet de revoir les nombres triangulaires déjà abordés dans un autre contexte par la classe ? Choisir la deuxième car la loi de passage, «élever au carré», est simple à découvrir ? Choisir la troisième car elle se prête bien à la confrontation de formules équivalentes ? Se contentera-t-on de la réponse «pour 1500 marches» ou va-t-on s'intéresser à la généralisation de la question ? Va-t-on privilégier le travail sur la formulation algébrique de la relation ?
• Prévision des obstacles, des représentations des élèves, et des procédures qu'ils vont mettre en oeuvre.	• Au vu des activités proposées en classe précédemment, les élèves trouveront-ils facilement l'existence d'une correspondance entre le nombre d'étages et le nombre de cubes ? Vont-ils penser à commencer par rechercher le nombre de cubes pour des petits escaliers dont la construction matérielle pourra les aider ? Seront-ils capables d'organiser les résultats en tableau ? Comment vont-ils franchir l'obstacle principal du passage de la procédure «étage par étage» à la procédure fonctionnelle «étage - nombre total de cubes», quasi indispensable pour trouver l'image de 1500 et justifier le résultat ?

• Définition du contrat fixant les devoirs et attentes réciproques du maître et des élèves : les consignes, l'organisation du travail, la durée de la recherche, le type de présentation des résultats, leur validation, ...	• Va-t-on opter pour un travail individuel ou par groupes ? Va-t-on imaginer une procédure «mixte» commençant par une recherche individuelle de quelques minutes pour l'appropriation du problème suivie d'un travail par groupes pour la recherche ? Veut-on obtenir la réponse seulement ou la rédaction d'un compte rendu détaillé de la démarche, avec justification du résultat ? Veut-on organiser une confrontation des différentes solutions de la classe lors d'une une mise en commun ?
• Identification des variables du problème en vue de relances éventuelles permet-	• Que faire de l'élève qui aura construit l'escalier simple de 15 marches avec 120 cubes et qui proposera, pour 1500 marches, 12000 cubes (120 x 100) ? Les interactions dans un groupe de travail permettront-elles de déstabiliser cette conception linéaire (erronée) de la situation ? Faudrait-il lui demander de trouver le nombre de cubes pour un escalier dont le nombre d'étages est premier ? Va-t-on imaginer un système de bons de commandes pour les cubes obligeant les élèves à anticiper avant de se lancer dans des constructions effectives ?

A la suite de cette analyse a priori, la plupart des décisions concernant les modalités et les finalités de l'évaluation formative au cours de l'activité devraient avoir été prises. Nous supposons, par exemple, que le maître a choisi les options suivantes :

- Limitation de la recherche au cas de l'escalier «quadruple» (parce que ses élèves ont déjà rencontré les deux autres cas; parce que les chances d'apparition de plusieurs formules équivalentes lui paraissent plus grandes ici; parce que, pour les cas «simple» et «double», son expérience lui a montré que la procédure «fonctionnelle» se rencontre moins fréquemment; etc.).

- Enoncé : Celui du moyen d'enseignement, adapté au cas choisi : Comment déterminer rapidement le nombre de cubes nécessaire à la construction d'un «escalier quadruple» de ce type mais de 1500 marches de hauteur, (avec figure : escalier quadruple, hauteur : 4 marches).

- Contrat : 10 minutes d'appropriation individuelle, 30 minutes d'appropriation collective et de recherche par groupe avec élaboration d'un compte rendu qui sera affiché puis discuté lors d'une mise en commun au cours de la période suivante, puis travail différencié sur la mise en évidence de liens fonctionnels.

C'est sur la base de ce choix d'options que sont construits les exemples suivants.

⇨

La phase d'appropriation, contrôle de l'analyse a priori, premières évaluations interactives chez les élèves

Dès que l'activité est lancée, la résolution du problème est à la charge des élèves, dans le temps et les modalités déterminés explicitement par le contrat. Le maître s'est ainsi réservé un moment précieux pour l'observation qui prépare l'évaluation. De leur côté, dès qu'ils seront par groupes, les élèves se retrouveront en pleine phase d'évaluation, caractérisée par leurs multiples interactions : ils devront immédiatement confronter leurs premières représentations pour pouvoir travailler en commun.

Questions générales	Exemples
<u>Pour le maître</u>	
Observation de la manière dont les élèves «entrent» dans le problème.	Quelles sont les premières réactions des élèves ? Pensent-ils à utiliser du matériel ? Font-ils un dessin ? Demandent-ils de l'aide ?
Examen critique de l'énoncé et de sa présentation.	
Décision d'intervention en cas de blocage.	Que faire dans le cas où un élève reste figé devant l'énoncé ? Va-t-on se contenter de le relire avec lui ? Va-t-on modifier immédiatement la variable «nombre d'étages» en proposant de commencer par un escalier avec un petit nombre de marches, ou au contraire, va-t-on laisser «mijoter» l'élève pour toute la durée impartie à l'appropriation individuelle ?
	Des élèves butent sur l'expression «comment déterminer rapidement ...» de l'énoncé. N'y aurait-il pas une manière plus «naturelle» de poser la question ? Par exemple, simplement : «Combien faudrait-il de cubes ... ?

Questions générales	Exemples
	(Dans ce dernier questionnement, c'est le texte du problème qui est évalué et qui ramène à l'analyse a priori. Le maître va peut-être prendre la décision de jouer sur les variables d'énoncé immédiatement, par une intervention non prévue, ou de donner une aide à un élève ou à un autre, quitte à revoir l'énoncé pour une prochaine pratique.)
<u>Pour l'élève</u> Lecture et relecture de l'énoncé, recherche de mots-clés, d'indices. Réminiscences et recherche d'analogies avec d'autres problèmes connus.	Ça ne sert à rien de construire car je n'arriverai jamais à 1500 étages. Il y a quatre escaliers et un «pilier central» de 1500 cubes. Mais pour savoir le nombre de cubes de chaque escalier .... ? Il me semble que j'ai déjà vu ce problème à l'école primaire. Oui, je m'en souviens. il y avait un escalier simple. Mais je ne me souviens plus des explications du maître. C'est peut-être un problème de fonctions puisqu'on est dans ce chapitre !

Dans le cas où le contrat ne prévoit pas de travail de groupe, la phase d'appropriation est moins riche en constats et évolutions chez les élèves, vu l'absence d'interactions .

Les blocages apparus en phase individuelle vont subsister plus longtemps et le maître devra intervenir plus fréquemment. Mais, en compensation, lors de ces interventions, il aura l'occasion de conduire une évaluation formative plus intense, tout en risquant de déposséder l'élève d'une part des découvertes qui lui sont dévolues.

La phase de recherche, évaluation intensive pour l'élève, recueil d'observations pour le maître

Lors de cette phase prévue par le contrat, l'entière responsabilité de la résolution du problème est encore à la charge des élèves. Si l'analyse a priori a été bien conduite, le maître n'aura pas à intervenir, à moins qu'il n'ait changé d'idées et décide de faire une partie ou l'ensemble du problème à la place des élèves. Or, c'est très difficile pour lui de rester inactif devant les hésitations de ses élèves, leurs blocages, les fausses pistes dans lesquelles ils s'engagent. Cette dévolution de la tâche à l'élève sera plus facile à respecter si on peut lui substituer une activité d'évaluation explicite comme, par exemple, un relevé d'observations.

Questions générales	Exemples
Pour le maître Observation des groupes : évolution des rôles et fonctions au sein du groupe, aptitudes à écouter l'autre, à faire des hypothèses, à défendre ses idées, etc. Relevé des conceptions ou représentations erronées dans les échanges, etc.	Dans un groupe, le «leader» cherche à imposer le calcul immédiat de l'escalier de 1500 étages, en refusant de tenir compte des constructions que ses camarades sont en train d'élaborer avec des cubes. Il est important alors de savoir si ces derniers seront en mesure de faire évoluer leurs procédures sans s'attarder longtemps sur l'expérimentation et si, de son côté, le leader sait profiter des résultats des autres et les intégrer dans sa méthode. Ces observations seront décisives lors des phases suivantes où les activités seront différenciées.
Pour l'élève L'évaluation est intégrée dans le processus de la démarche scientifique puisque chaque hypothèse doit être accompagnée d'essais, de vérifications, puis de justifications.	Deux élèves s'engagent sur la piste de la linéarité. Pour les 4 étages de l'escalier «quadruple», ils comptent 28 cubes sur la figure. Ils en déduisent qu'il y en aura 56 pour huit étages, 14 pour 2 étages et 70 (56 + 14 pour 10 étages). L'un d'eux n'est pas certain de ce résultat, compte les cubes de l'escalier de 2 étages et en trouve 6 au lieu de 14. Il est évident pour les deux élèves que l'hypothèse est à revoir et qu'il faut changer de méthode. Toute l'évaluation formative s'est faite ici à l'initiative des élèves, sous leur propre responsabilité. Cette prise en charge a été favorisée par les choix du maître effectués lors de l'analyse a priori : travail par groupes, durée suffisante accordée par le contrat à la phase de recherche.

Si la phase de recherche se déroule individuellement, l'élève et le maître ne peuvent compter sur les interactions pour leurs observations ou constats. L'élève a bien l'intention de vérifier la validité des hypothèses successives qu'il a élaborées. Mais comme il n'a pas besoin de les formuler pour ses camarades, il risque de perdre la trace de la plupart d'entre elles et, par conséquent, de ne plus être en mesure de les valider.

Il faut relever ici les avantages du choix de travail par groupes en résolution de problèmes lorsqu'on veut y associer une évaluation formative. Une des conséquences de la recherche collective est l'obligation de communiquer ses conjectures aux autres membres du groupe, cette communication implique à son tour une trace écrite ou une mémoire à laquelle chacun se référera lors de la vérification des essais correspondants, cette explicitation clarifie les infirmations ou confirmations des hypothèses et, par conséquent, les décisions à prendre pour la suite de la recherche, qui sont précisément les éléments caractéristiques de l'évaluation formative.

La mise en commun, le moment privilégié de l'évaluation formative

La plupart des observations ou constatations effectuées lors des phases précédentes sont très nombreuses et de courte durée. Dans l'action, ni le maître ni les élèves n'ont le temps d'y accorder l'importance qu'elles méritent. La phase de mise en commun est là pour suppléer à ces carences. C'est l'occasion de valider les résultats, de mettre en évidence les tentatives infructueuses et leurs raisons, de comparer les procédures.

Questions générales	Exemples
Pour le maître Organisation de la mise en commun pour faire apparaître le plus d'informations possible sur les obstacles, les erreurs, les démarches, les arguments, ... Phase intense d'évaluation où le maître joue un rôle plus actif que précédemment.	Trois formules apparaissent pour exprimer le nombre de cubes de l'escalier «quadruple» en fonction du nombre d'étages : $2n^2 - n$, $n^2 + n(n-1)$ et $n(2n - 1)$. Elles conduisent chacune à 4 498 500 cubes. Mais les élèves défendent leur propre formule et pensent que celles des autres ne marchent pas pour tous les nombres. L'évaluation formative se fait ici «en direct». Au vu de l'intérêt de la motivation, le maître peut saisir l'opportunité de faire évoluer les conceptions des élèves sur le domaine de définition d'une fonction (en faisant vérifier que les différentes formules conduisent toujours aux mêmes résultats) et, simultanément sur l'équivalence d'écritures en lien avec le calcul littéral.
Pour l'élève Formulation de la démarche et des résultats obtenus, passage à l'écriture, débat et mise en commun, défense des solutions	Dans l'exemple précédent, les élèves doivent renoncer à leur croyance en une seule formule pour admettre celle des autres.

Questions générales	Exemples
et des justifications, mise en doute d'affirmations, perception et explicitation des contradictions.	Pour justifier leurs arguments ou réfuter ceux des autres, ils doivent faire de nombreuses vérifications, en particulier sur les nombres les plus «originaux» de l'ensemble de définition. L'évaluation est donc multiple dans ce cas. Elle porte sur des procédures, des écritures, sur les argumentations des autres et de soi-même. Elle est à caractère nettement autoformatif, comme dans la phase précédente.

Phases d'institutionnalisation et de structuration

Dans ces phases plus «traditionnelles» consacrées à la reconnaissance des savoirs, aux conventions et aux écritures, à l'entraînement et à la structuration, l'évaluation formative est avant tout au service de la différenciation : choix des nouveaux problèmes à proposer en fonction des niveaux et des besoins de chacun, structuration, entraînement, instrumentation, etc.

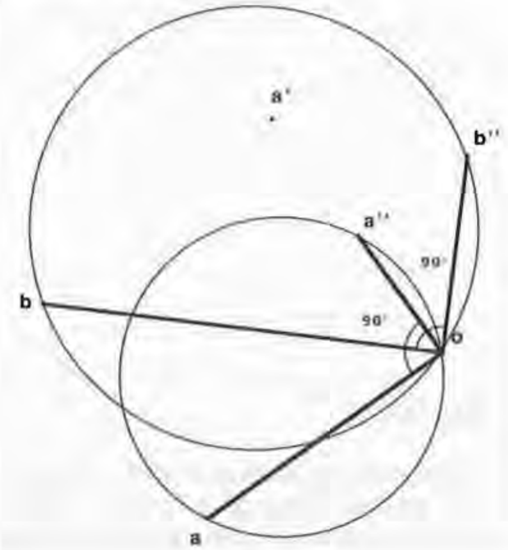
On pourra par exemple proposer une situation proche comme *Ça se gâte* avec certains élèves encore hésitants dans cette recherche du lien fonctionnel. On pourra aussi demander à d'autres d'inventer des constructions plus «coriaces» que les premiers escaliers.

On se référera aux chapitres sur la différenciation pour poursuivre cet examen des points d'ancrage de l'évaluation formative aux cours de ces dernières phases.

En vertu du théorème suivant lequel toute similitude admet un point fixe, appelons le nôtre **o**.

L'image de Ascona (**a**) est **a"**. L'image de Berne (**b**) est **b"**. Les angles **aoa"** et **bob"** sont des angles droits. Il suffit donc de construire deux cercles de Thalès, l'un de diamètre [**aa"**] et l'autre de diamètre [**bb"**].

Leur intersection (la bonne !) est le point **o** cherché.



Voyage au centre de la géométrie

Le puzzle, un outil didactique au service des mathématiques[1]

G. Sarcone

«Découper, assembler, comprendre. Au-delà de la forme, la mécanique du savoir».

Découper une forme, de sorte qu'en assemblant différemment ses pièces l'on obtienne une toute autre forme, demande de l'astuce et un bon sens visuel, voire esthétique.

Trouver de nouvelles découpes qui permettent d'obtenir de telles métamorphoses provoque également une jouissance intérieure, identique à celle que ressent un sculpteur devant son oeuvre achevée. Non, ce n'est pas de l'exagération. Pouvoir interagir sur les formes est un des plaisirs les plus simples et les plus indispensables à l'homme. Les formes géométriques ne sont pas l'apanage des mathématiciens, elles sont aussi les mamelles dont les artistes s'alimentent.

Les mouvements suprématiste, néoplasticiste[2] et, plus proche de nous, de l'Art construit, ont remis la géométrie au centre de l'attention. On réalise enfin que les formes géométriques pures sont porteuses de mystère et d'absolu. Le grand architecte italien Alberto Sartoris ne disait-il pas que "la géométrie détermine une pensée. Elle ne se contente pas d'instincts ou d'émotions. Elle construit des permanences, définit des lois universelles de l'harmonie et de la beauté". Nous ajouterons également que la géométrie est "jeu de l'esprit".

Moduler, articuler, imbriquer des espaces est un art à part entière. Plus modestement, nous vous proposons, dans les pages qui suivent, une sensibilisation au monde géométrique par la pratique. Notre outil de base, rivalisant avec celui des artistes peintres, ne sera pas le pinceau, mais le cutter; ainsi, notre langage plastique ne sera pas la couleur, mais l'incision. Vous aurez affaire aux problèmes dits de "dissection"; les triangles, et plus spécialement les triangles équilatéraux, feront les frais de nos premières expériences. Il va de soi qu'une grande précision est demandée, ainsi qu'une triple dose de patience.

N'hésitez pas à réaliser en classe quelques-uns des puzzles proposés. Nous vous suggérons de coller le fruit de votre labeur sur du carton fort, du bois ou de la mousse EVA avant de découper les pièces. Nous vous rendons attentifs au fait que réaliser c'est bien, mais comprendre c'est mieux... Si vous n'avez pas compris le principe de dissection, soyez curieux, démontez les puzzles dans tous les sens... Comprendre, c'est avant tout une question de curiosité! Enfin, n'hésitez pas à innover, à trouver d'autres solutions plus simples, originales ou esthétiques de découpage et faites-nous parvenir vos créations.

---

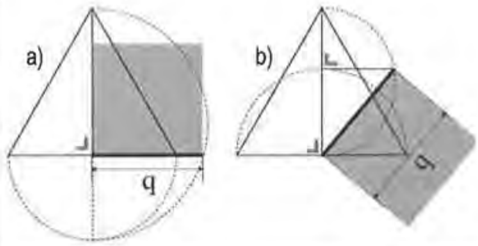
1 Suite de l'article paru sous le même nom dans dans le n° 179 de Math-Ecole, octobre 1997.

2 dont le Russe K. Malevitch et le Hollandais P. Mondrian en sont les chefs spirituels. Les oeuvres de Malevitch sont exposées au Kunsthalle de Berne, celles de Mondrian, au Stedeljik Museum d'Amsterdam. Bien que ne faisant pas partie de ces mouvements, je citerai aussi le couple Delaunay dont les peintures alliant géométrie et couleur valent la peine d'être admirées au musée national d'Art moderne de Paris.

Triangles au carré

Voici trois façons de découper un triangle, de sorte qu'en réassemblant ses pièces il forme un carré. Le premier découpage (fig. 1) a été découvert par le mathématicien et puzzliste H.E. Dudeney. Bien que moins élégantes, nos contributions s'avèrent toutefois intéressantes (fig. 2 et 3). Le dernier découpage, vraiment très simple, permet de construire un «carré» acceptable.

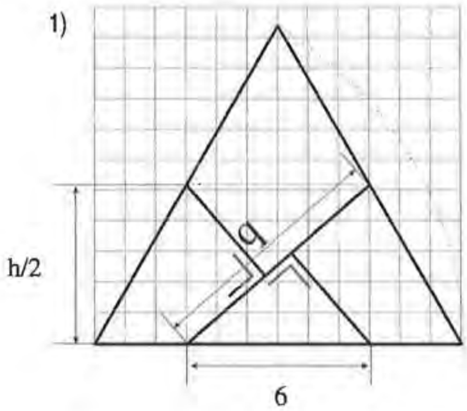
*Deux façons de trouver la valeur **q** d'un triangle équilatéral avec compas et équerre :*

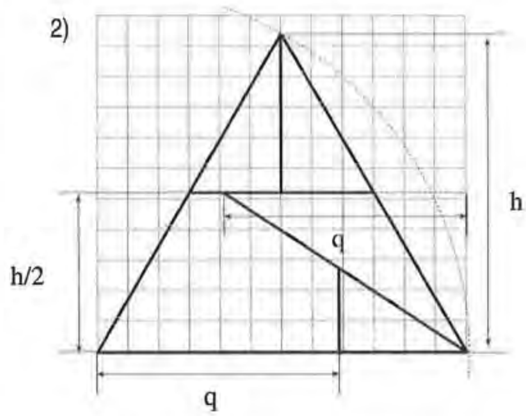


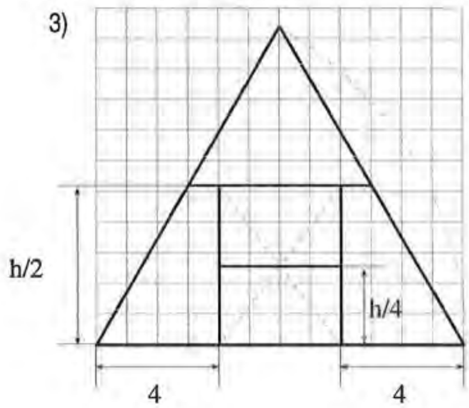
Dimensions :

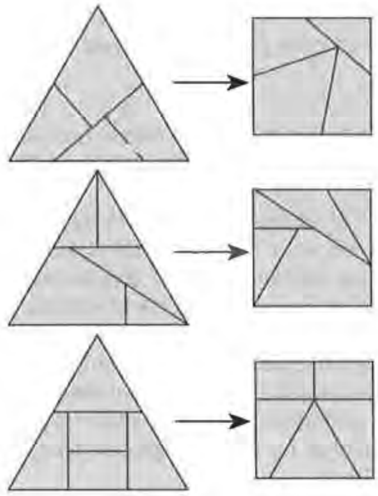
côté du triangle : c (12)

hauteur : $h = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (10,392 ...) et $q = c \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ (7,896 ...)







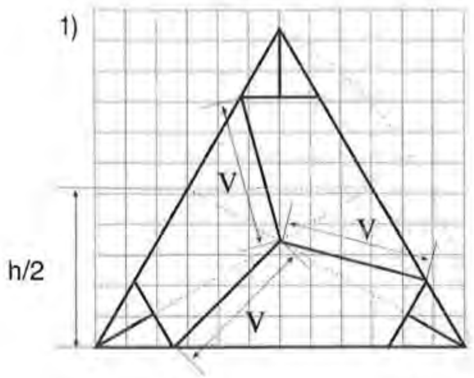


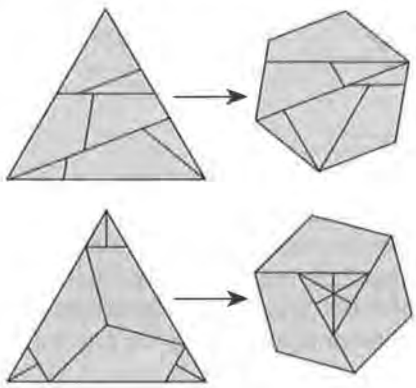
Triangles équilatéraux en gros

Ici, nous vous avons concocté deux façons de découper un triangle de sorte que, en rassemblant ses pièces différemment, nous obtenions un hexagone (fig. 1 et 2).

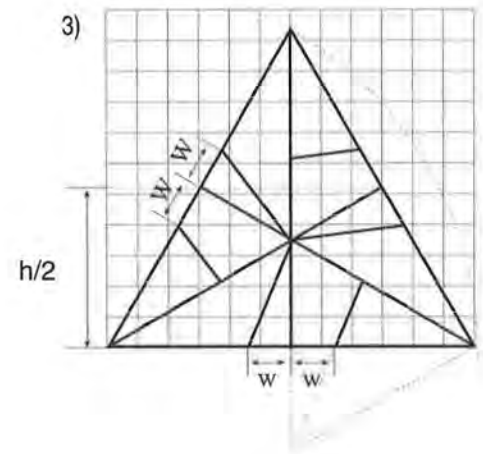
⇨

1)



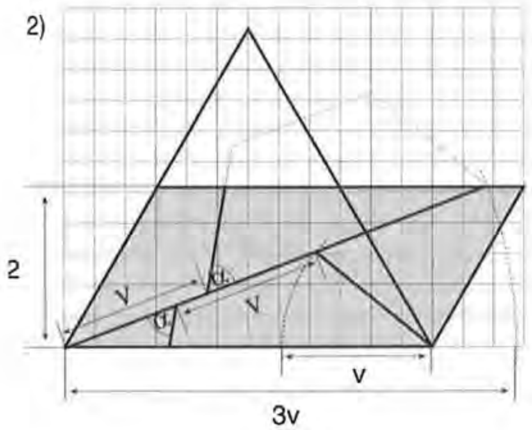


3)



A la fig. 3, nous avons un triangle dans lequel il s'agit d'imbriquer un petit triangle annexe en modulant et en gardant toutes les pièces du puzzle triangulaire.

2)



Dimensions :

côté du triangle : c (12)

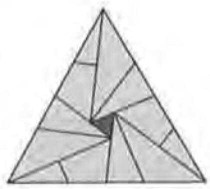
hauteur : $h = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (10,392 ...)

$$v = c \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (4{,}898\ ...)$$

$$w = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \quad (1{,}299\ ...)$$

Petit triangle de 1,5 unités de côté à ajuster dans le grand triangle.

⇦



Après ajustement.

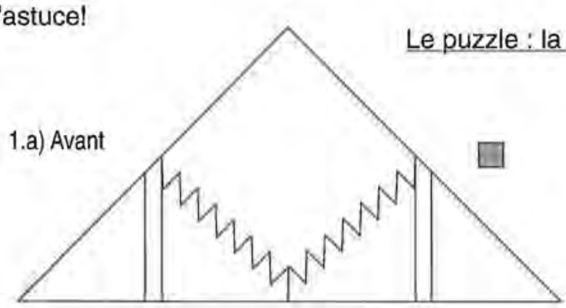
Triangles et paradoxes

Nous aimons bien clore nos chroniques avec de petits problèmes de dissection paradoxaux de notre invention. Ci-dessous, voici un triangle isocèle bien étrange qui permet, par modulation des pièces, d'ajuster un petit carré sans que sa surface ne soit «en apparence» modifiée.

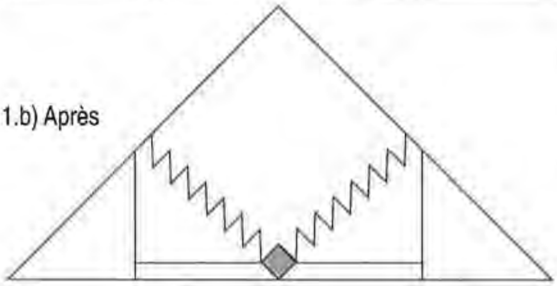
A vous de trouver l'astuce!

Le puzzle : la «pyramide d'Isis»

1.a) Avant



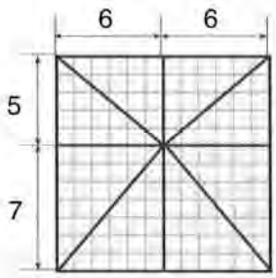
1.b) Après



Petit carré annexe à introduire dans le puzzle. ■

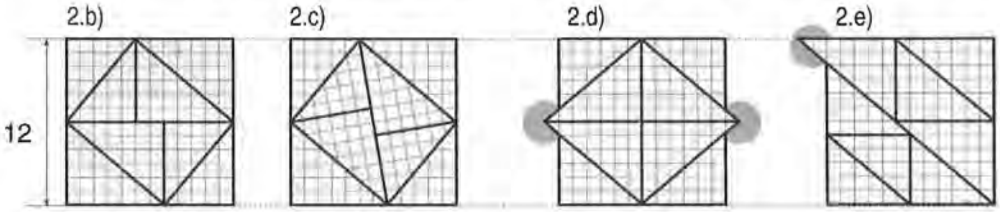
Si vous découpez un carré de 12 unités de côté en 8 triangles, selon l'exemple ci-dessous (fig. 2.a), vous obtiendrez des résultats étonnants en les réassemblant. Le premier assemblage (fig. 2.b) forme bien un carré, le deuxième (fig. 2.c), bien qu'il ressemble au premier, n'est pas un carré! Pouvez-vous dire pourquoi? Enfin, les deux derniers exemples (fig. 2.d et e) sont des carrés mais avec des appendices supplémentaires! Qu'est-ce qui cloche?

2.a)



Le puzzle : les «8 triangles de Circé»

2.b) 2.c) 2.d) 2.e)



Helvétiquement vôtre.

Denis Odiet

Dans chacune des figures suivantes, les Helvéties sont semblables.

Dans la figure 1, on passe d'une Suisse à l'autre par une translation.

Pour la figure 2, il s'agit d'une homothétie de rapport 2 (ou 0,5) dont le centre, point fixe de l'application, se trouve dans la région de Stuttgart.

Le point fixe de la rotation (± 90°) caractérisant la figure 3 est à chercher du côté de Coire.

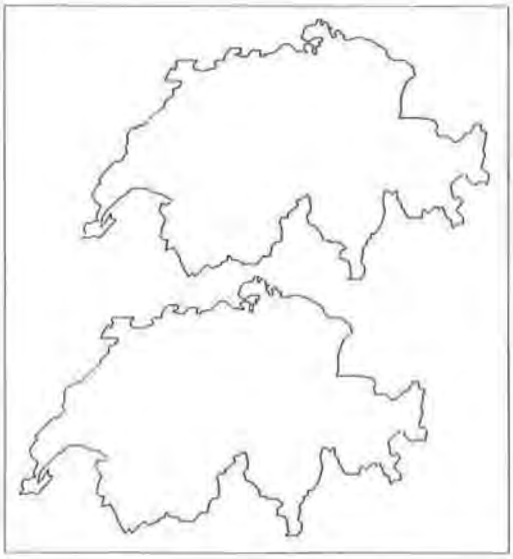


figure 1

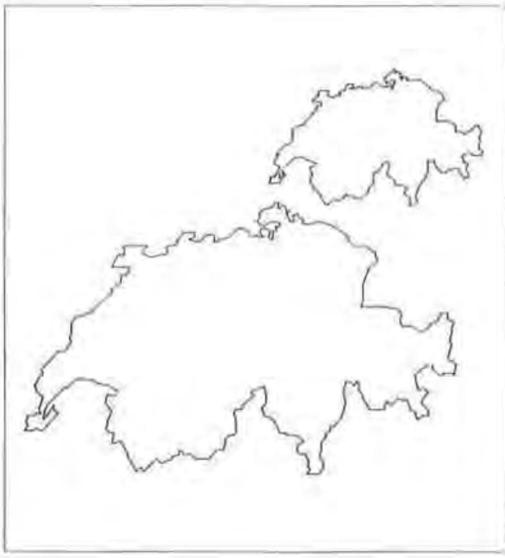


figure 2

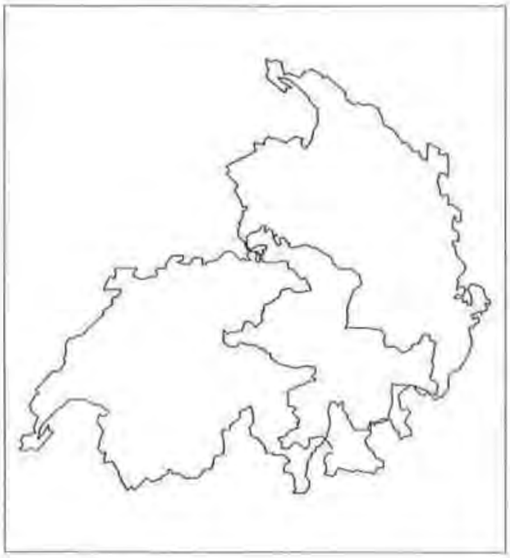


figure 3

Et pour la figure 4, cette similitude admet-elle un point fixe ? Si oui, où se trouve-t-il ? Comment le construire ? Intéressant, non ?

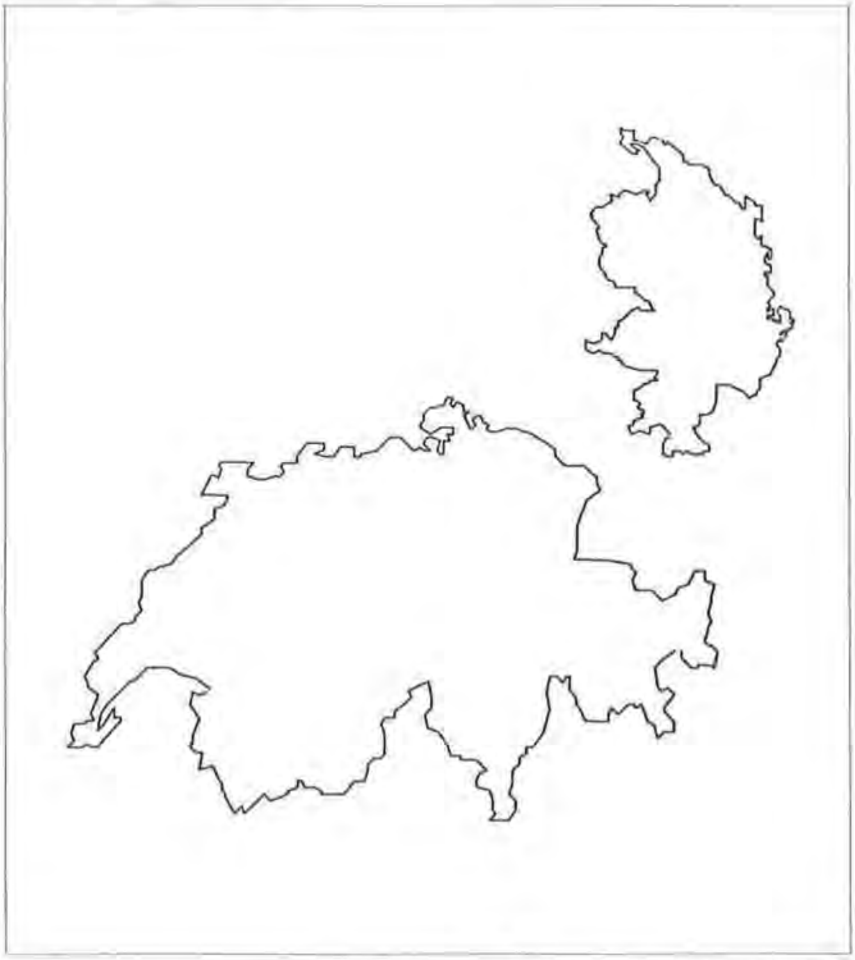


figure 4

Les lecteurs sont invités à y réfléchir et à envoyer leur(s) solution(s) à *Math-Ecole*, votre revue préférée s'engageant à publier la plus belle.

Un autre avantage de ce problème réside dans le fait que vous pouvez également mettre un visage sur son «concepteur», qui n'est autre que Jacques Lubczanski (Tonton Lulu pour les intimes).

Comme vous pouvez le remarquer, même les plus grands s'intéressent à *Math-Ecole* !

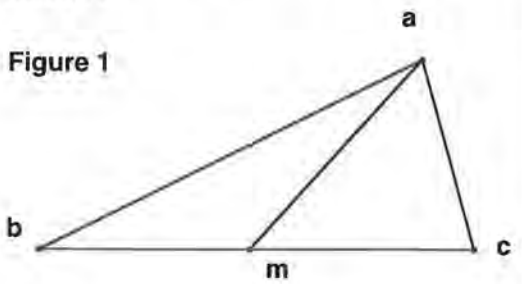
CABRidées :

Autour du périmètre !

Michel Chastellain, SPES

«*Comment placer un point* **m** *sur le côté [***bc***] d'un triangle* **abc***, de telle sorte que les triangles* **abm** *et* **amc** *possèdent le même périmètre ?*»

Figure 1



Voilà un petit problème amusant et riche de multiples notions mathématiques et géométriques à manipuler tout au long de sa résolution.

Après avoir élaboré une figure conforme à l'énoncé, c'est-à-dire avec un point **m** qui se balade sur le côté [**bc**] du triangle **abc**, la première question qui surgit est celle de déterminer rapidement les mesures des périmètres des triangles **abm** et **amc**. Une certaine frustration se manifeste alors, car l'outil «Calculer» de *Cabri-géomètre* n'offre aucune aide dans ce domaine. En effet, celui-ci ne fournit des informations qu'à propos de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point du plan, de la longueur d'un segment, de l'aire d'un polygone, de la mesure d'un angle, ou encore, de la pente d'une droite.

Dans ces conditions, rien n'empêche d'afficher la mesure de chacun des trois côtés [**ab**], [**bm**] et [**ma**] pour le triangle **abm**, de faire de même pour le triangle **amc** et d'effectuer leur somme. Mais une telle démarche comporte un certain nombre d'inconvénients, car il faut non seulement additionner trois nombres (et ceci deux fois de suite), mais encore comparer les résultats obtenus, déplacer légèrement la position du point **m** puis recommencer la même démarche à maintes reprises afin de déterminer l'emplacement qui convienne. De plus, si l'on souhaite obtenir un résultat précis, il est nécessaire de travailler avec trois chiffres après la virgule, ce qui alourdit passablement la tâche. C'est d'ailleurs à cause de cet aspect rébarbatif – Dieu sait si les élèves détestent additionner des nombres comportant beaucoup de chiffres – que naît le besoin de trou-

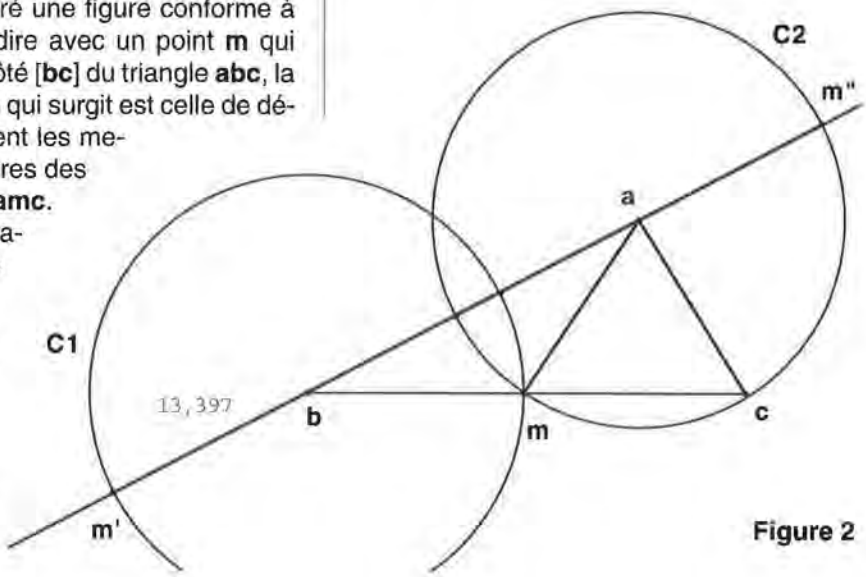


Figure 2

ver autre chose, d'inventer «une machine» sous la forme d'une construction qui permette de contourner ce désagrément.

L'idée, probablement la plus simple, consiste à remplacer les trois côtés d'un triangle par un seul segment, d'une longueur équivalente à la somme des mesures de ces trois mêmes côtés. Cela signifie qu'il faut tracer deux cercles **C_1(b ; [bm])** et **C_2(a ; [am])** et chercher les intersections **m'** et **m"** avec la droite **ab**. On détermine ainsi un segment **[m'm"]** dont la longueur **[mb]** + **[ba]** + **[am]** correspond au périmètre cherché. (fig. 2)

⇨

Une démarche identique, mais cette fois avec la droite **ac** comme support du segment **[m'"m""]**, achève alors la première phase de la recherche. (fig. 3)

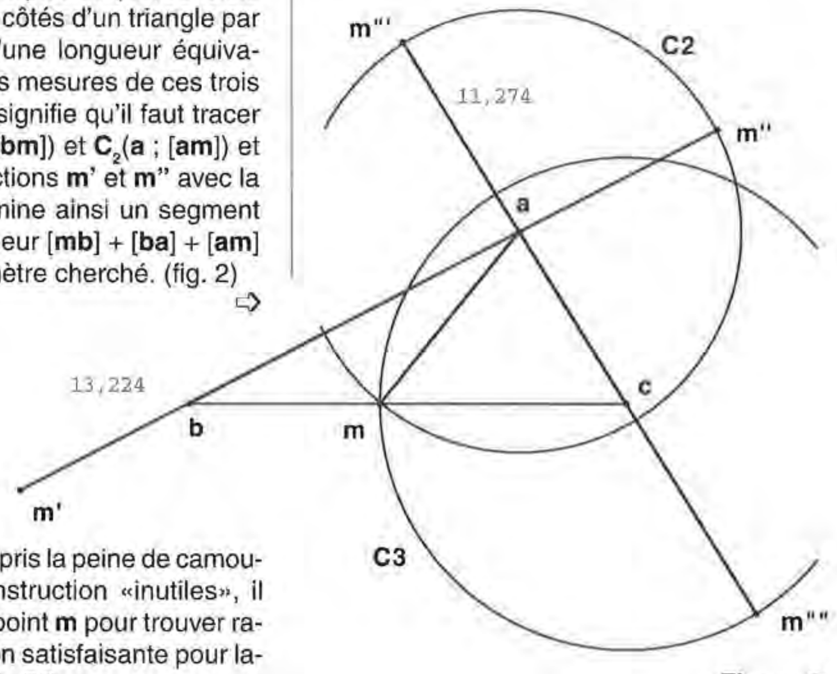


Figure 3

Dès lors, après avoir pris la peine de camoufler les traits de construction «inutiles», il suffit de déplacer le point **m** pour trouver rapidement une position satisfaisante pour laquelle **[m'm"]** = **[m'"m""]**.

A ce propos, il convient de remarquer que «l'égalité parfaite n'existe pas» si les mesures sont affichées à l'aide de trois chiffres après la virgule, notamment par suite de la qualité toute relative de la définition en pixel de l'écran avec lequel on travaille. (fig. 4)

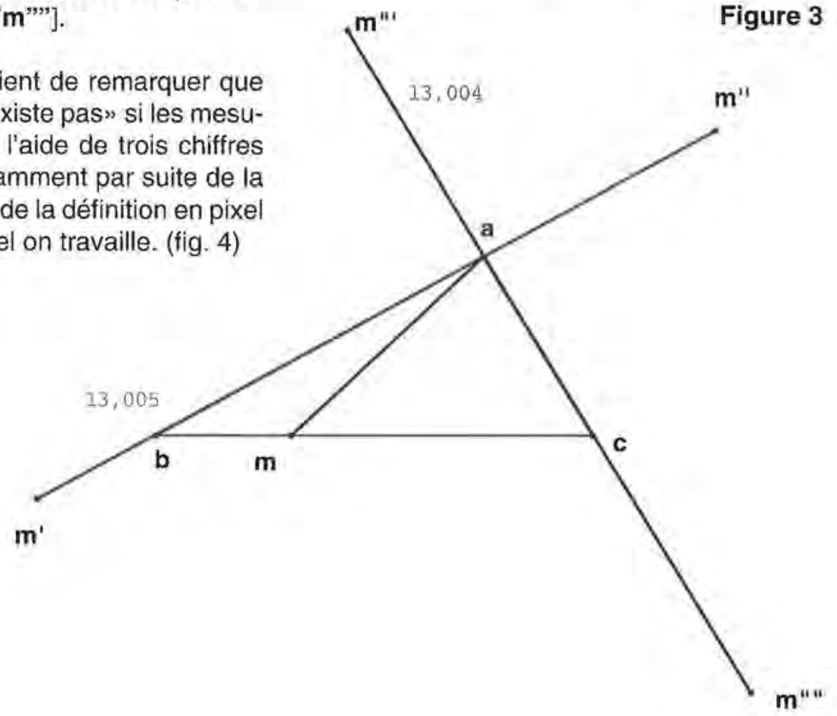


Figure 4

A ce stade de la recherche, l'emplacement du point **m** proposé satisfait généralement les élèves. Et pourtant, celui-ci ne correspond pas à une «solution géométrique», mais plutôt à une solution hybride, à moitié construite et à moitié bricolée ! En effet, s'il n'y a rien à redire sur la procédure d'élaboration des segments [**m'm"**] et [**m"'m""**], la détermination de l'emplacement précis du point **m**, elle, n'est que la résultante d'une lecture successive de mesures ! Dans ces conditions, le maître devra attirer l'attention des élèves sur cette problématique «classique» pour les sensibiliser au concept d'une comparaison de segment par construction, et non par mesure. Fort heureusement, il est aidé dans ce sens par l'approximation de l'affichage (dans notre cas 13,005 et 13,004).

⇨

C'est l'observation attentive de la figure qui conduit à énoncer deux hypothèses :

- le segment [**am**] appartient respectivement aux périmètres des triangles **abm** et **amc**; en conséquence il ne joue aucun rôle;
- dans ces conditions, et pour satisfaire à la question initiale, il faut que :

[**ab**] + [**bm**] = [**mc**] + [**ca**].

En procédant alors de manière semblable aux constructions précédentes, on détermine un point $\mathbf{m_1}$ qui satisfait à la condition précédente (en d'autres termes ce sera le milieu du segment [**a'a"**]), point sur lequel il ne reste plus qu'à superposer le point **m** pour obtenir la solution finale. (fig. 5)

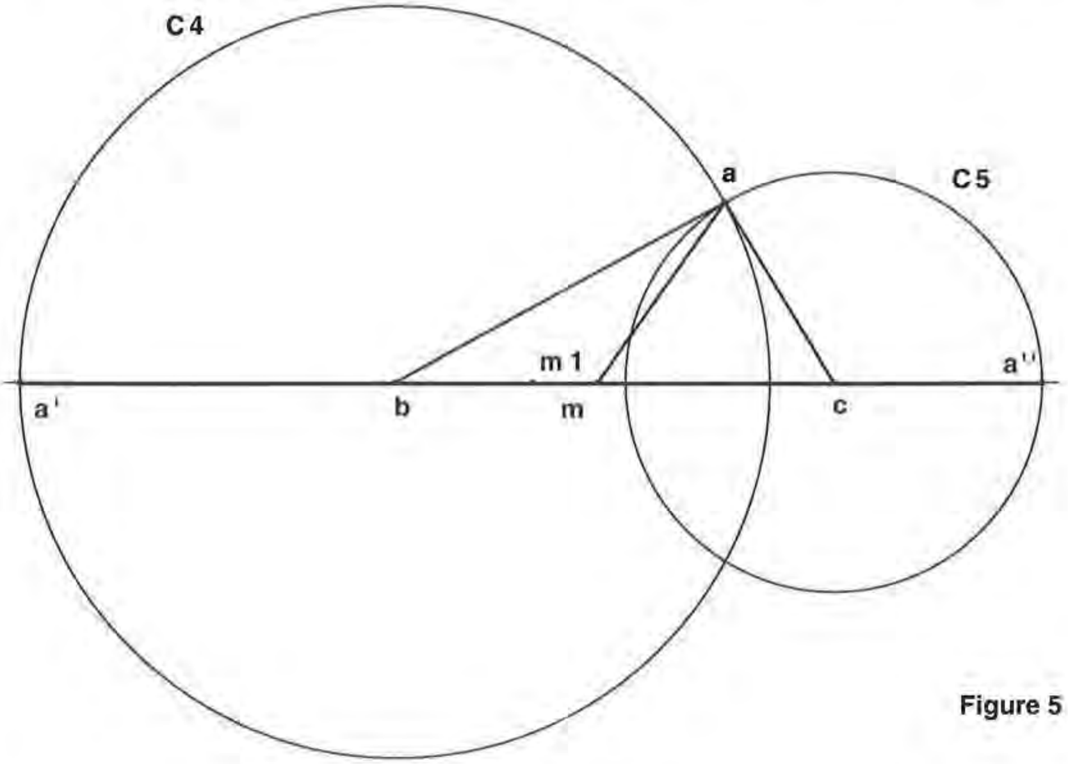


Figure 5

Et pourquoi ne pas se demander s'il est possible de trouver une solution pour obtenir deux triangles **abm** et **amc** de même aire ?

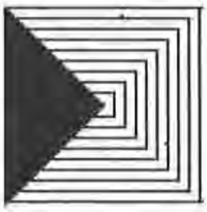
JEUX

Martine Simonet

La rubrique «Jeux», initiée dans le numéro précédent (182) par La bascule et Les carrés décorés, nous a déjà valu des réactions très positives de lecteurs. Nous remercions Martine Simonet de nous donner une suite aux Carrés décorés, de proposer trois jeux de calcul pour la première année primaire, Le Nain jaune , La Scopa et le Jeu d'Escoba, et un jeu de stratégie d'origine népalaise, Les tigres et les chèvres, dont nous nous réjouissons de recevoir les stratégies gagnantes. [**ndlr**]

LES CARRES DECORES (suite)

L'activité-recherche les carrés décorés m'a été inspirée par le jeu QUADS édité par Gigamic. Si vous avez fait cette activité, vous avez en votre possession 15 des 18 pièces nécessaires pour jouer à ce jeu. Voici les trois pièces qui vous manquent :



(pièce neutre)

Maintenant, vous devez encore construire une deuxième série de 18 pièces, en utilisant une autre couleur pour les petits triangles, par exemple rouge. Ces pièces appartiendront à votre adversaire. Le jeu se joue sur un plateau de 6 x 6 cases.

But du jeu :

Mettre l'adversaire dans l'impossibilité de jouer.

Règles du jeu pour 2 joueurs :

Au premier tour, Rouge place sa pièce neutre sur une case de son choix, puis Noir pose la sienne sur une case non voisine de la première. Ensuite, à tour de rôle, chaque joueur choisit une de ses pièces et la pose sur une case libre de son choix, en respectant les règles suivantes :

- une pièce doit être posée à côté d'au moins une autre pièce,
- les côtés en contact doivent être identiques:
  - noir à côté de noir
  - rouge à côté de rouge
  - lignes verticales à côté de lignes verticales
  - lignes horizontales à côté de lignes horizontales
- Rouge peut poser une de ses pièces à côté d'une pièce posée par Noir et vice versa.
- Une pièce peut être posée de manière à en toucher plusieurs autres.

Fin de la partie :

Le premier joueur qui ne peut plus poser de pièce perd la partie.

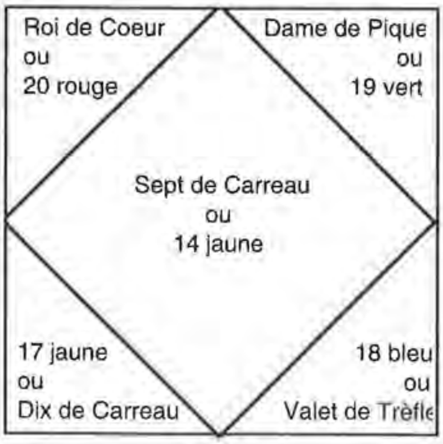
LE NAIN JAUNE

Le jeu du Nain Jaune connut sa plus grande vogue au XIXe siècle.

Dans les nouveaux moyens d'enseignement 1P, il trouverait sa place dans le Module 2 «Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens : établir une correspondance entre les symboles numériques et les mots-nombres dans un contexte ordinal ou cardinal».

Matériel :

- On se sert d'un jeu de 52 cartes, mais on peut également utiliser les cartes du jeu du Coucou (matériel de 1P) ou celles du jeu du Onze. Ces dernières permettent d'adapter la difficulté au niveau des élèves. En effet, si avec les cartes d'un jeu traditionnel la numération va de 1 (As) à 13 (Roi), avec celles du jeu du Coucou on peut partir de 8 et aller jusqu'à 20. Il suffit de modifier le tableau en choisissant 5 autres belles cartes.
- un tableau (voir ci-contre).
- des jetons.



But du jeu :

Se débarasser de toutes ses cartes.

Règles du jeu :

Chaque joueur reçoit 30 jetons (ou plus si on joue plusieurs parties de suite) et mise obligatoirement ainsi, en déposant le nombre de jetons demandé sur les cases du tableau :

- 1 jeton sur le Dix de Carreau (ou 17 jaune),
- 2 jetons sur le Valet de Trèfle (ou 18 bleu),
- 3 jetons sur la Dame de Pique (ou 19 vert),
- 4 jetons sur le Roi de Coeur (ou 20 rouge),
- 5 jetons sur le Nain Jaune, autrement dit le Sept de Carreau (ou 14 jaune).

Remarque : pour aider les joueurs à se souvenir des mises, on peut également les dessiner dans les cases du tableau.

Le donneur distribue le même nombre de cartes à chacun. Les cartes restantes sont mises de côté. Exemple : à 3 joueurs chacun reçoit 15 cartes et il en reste 7; à 8 joueurs chacun en reçoit 6 et il reste 4 cartes ...

La distribution terminée, le joueur assis à la droite du donneur commence. Il pose une carte de son choix sur la table, et continue de déposer des cartes tant qu'il peut continuer la série dans l'ordre croissant, sans tenir compte des couleurs. S'il ne peut plus jouer parce qu'il n'a pas la carte nécessaire, c'est le joueur suivant qui continue la série, ou à défaut le troisième joueur, ...

Si aucun joueur ne peut suivre, autrement dit si après un tour, la série n'a pas progressé, le joueur qui a dû l'interrompre a le droit de commencer une nouvelle suite.

Lorsqu'un joueur arrive à un roi (à 20), il peut recommencer une nouvelle série avec la carte de son choix.

Le joueur qui abat une belle carte (l'une de celles dessinées sur le tableau) gagne les jetons qui sont sur la case correspondante.

La partie se termine lorsqu'un des joueurs a déposé toutes ses cartes. Les autres joueurs lui donnent alors autant de jetons qu'il leur reste de cartes en main.
S'il reste des mises sur le tableau, on les laisse en place pour la partie suivante. Elles viendront s'ajouter aux nouvelles mises des joueurs.

Il peut arriver qu'un joueur réussisse à se défaire de toutes ses cartes du premier coup. On dit alors qu'il fait main pleine et il a le droit de ramasser toutes les mises du tableau.

Le gagnant est le joueur qui a le plus de jetons à la fin du jeu.

LA SCOPA

La Scopa, qui se traduit en français par «balai», est d'origine napolitaine et se pratique dans toute l'Italie avec un jeu de tarot ancien. On peut cependant utiliser un jeu français (trèfle, coeur, carreau, pique) ou les cartes du jeu du Coucou. (v. *Math. 1P*)

Dans les nouveaux moyens d'enseignement 1P, ce jeu aurait sa place dans le Module 3 «Des problèmes pour connaître l'addition: décomposer des nombres en somme de deux ou plusieurs termes».

Matériel :

- un jeu de 52 cartes dans lequel on enlève les figures, il reste ainsi quatre familles de dix cartes numérotées de 1 (As) à 10, ou les cartes de 1 à 10 (4 séries) du jeu du coucou (matériel accompagnant les nouveaux moyens d'enseignement 1ère année), soit 40 cartes.
- une boîte vide par joueur (pour y ranger ses gains).
- des jetons.

Nombre de joueurs :

En général 2, mais aussi 3 ou 4.

But du jeu :

Prendre une ou plusieurs des cartes exposées sur la table, avec une de ses cartes soit de même valeur, soit représentant le même nombre de points.

Règles du jeu pour 2 joueurs :

Le joueur A donne 3 cartes au joueur B et prend 3 cartes pour lui, puis il retourne 4 cartes sur la table; ces 4 cartes constituent le tapis. Le reste des cartes est posé à côté, en attente d'une nouvelle distribution.

Le joueur B commence : il peut prendre, avec une de ses cartes, une carte du tapis de même valeur ou plusieurs cartes dont la somme des valeurs est égale à la valeur de sa carte. Il ramasse sa carte et celle(s) qu'il prend et les pose faces cachées à côté de lui. S'il ne peut prendre aucune carte du tapis, il expose une de ses cartes avec celle(s) du tapis qui s'alimente ainsi en cours de partie.

Chaque joueur joue à tour de rôle jusqu'à épuisement de ses trois cartes (= 3 tours). Le joueur A distribue alors à nouveau 3 cartes au joueur B et à lui-même mais sans réalimenter le tapis; le paquet de cartes est épuisé après 6 distributions. (Le joueur B sera le donneur lors de la deuxième manche).

Lorsqu'un joueur ramasse toutes les cartes du tapis (même s'il n'y en a qu'une seule), il dit «Scopa» et prend un jeton.

A la fin de la partie, s'il reste des cartes sur la table (tapis), c'est celui qui a pris les dernières qui ramasse le tapis, mais il ne dit pas «Scopa», donc ne gagne pas de jetons.

Quand toutes les cartes sont épuisées, on attribue encore :

- 1 jeton pour celui qui a le plus de cartes;
- 1 jeton pour celui qui a le plus de dix;
- 1 jeton pour celui qui a le plus de coeur;
- 1 jeton pour celui qui a le sept de coeur.

Le gagnant est celui qui a le plus de jetons quand on s'arrête de jouer, après une partie (2 manches) ou plus.

Jeu d'ESCOBA
(adapté d'un jeu espagnol)

Matériel :

Un jeu de 52 cartes dans lequel on enlève les figures, les 10, les 9, et les 8.

Règles du jeu :

Les règles du jeu sont les mêmes que pour la «Scopa», sauf celles concernant la prise de cartes: un joueur peut prendre, avec une de ses cartes, une ou plusieurs cartes du tapis à condition que la somme des valeurs de sa carte et de celle(s) qu'il prend soit 10. Si un joueur ramasse toutes les cartes du tapis, il dit «Escoba» et prend un jeton.

Remarque :

Au lieu de 10, on peut fixer 15 (comme dans le vrai jeu) en utilisant alors toutes les cartes de 1 à 10.

Ces deux derniers jeux ont tout à fait leur place dans les classes de première année primaire. Ils visent à l'intégration des décompositons de 10 sous une forme ludique.

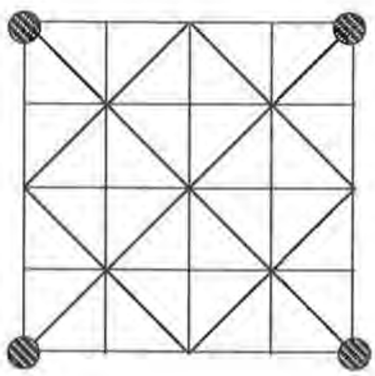
En terme d'objectif, le jeu de la «Scopa» développe chez l'enfant la capacité de décomposer un nombre inférieur ou égal à 10 en sommes de plusieurs termes; quant à celui de «l'Escoba», il permet de rechercher les compléments à 10, ces compléments s'exprimant à l'aide d'un nombre ou de la somme de plusieurs nombres.

JEU NEPALAIS :
les tigres et les chèvres

Nombre de joueurs : 2

Matériel :

- 1 plan de jeu.
- 4 tigres
- 20 chèvres



Règles du jeu :

Au début de la partie, les quatre tigres occupent les quatre sommets du plan du jeu.

Un des deux joueurs (B) joue avec les tigres.

Les tigres se déplacent le long des lignes tracées, d'un «pas» à la fois (d'une intersection à une intersection voisine) pour un déplacement normal, par sauts de deux «pas» lorsqu'ils mangent une chèvre.

L'autre joueur (A) possède les chèvres.

Les chèvres seront posées au cours de la partie. Elles ne changent pas de position.

Le joueur A commence. Il pose une chèvre à l'endroit de son choix, sur une intersection.

Le joueur B déplace un des quatre tigres, d'un «pas» ou d'un «saut» s'il mange une chèvre.

Le joueur A pose une deuxième chèvre.

Le joueur B déplace un de ses tigres.

Le joueur A place une troisième chèvre.

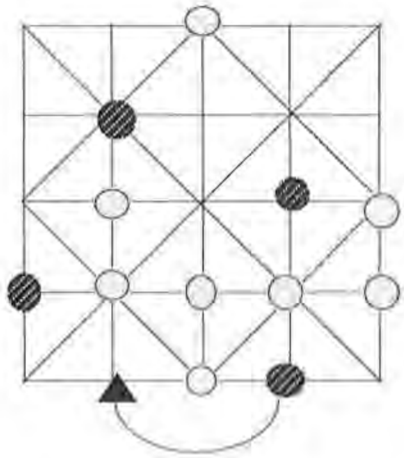
etc...

But du jeu :

Les tigres doivent manger 4 chèvres et les chèvres doivent se placer pour éviter d'être mangées.

Un tigre mange une chèvre en sautant pardessus.

Au départ du saut, le tigre doit être sur une intersection voisine de celle de la chèvre et pouvoir retomber sur l'intersection voisine située de l'autre côté. Si cette deuxième intersection n'est pas libre, ou si elle n'existe pas sur le plan de jeu, le tigre ne peut pas manger la chèvre.



Sur cette figure, il n'y a qu'une seule possibilité pour un seul tigre de manger une chèvre (indiquée par une flèche).

Gagnant :

Le joueur B gagne s'il a pu manger 4 chèvres et alors le jeu s'arrête.

Si le joueur A a placé toutes ses chèvres et que les tigres en ont mangé moins de 4, il gagne.

Il y a une stratégie gagnante pour les chèvres (je n'en ai pas trouvé pour les tigres !).

Laquelle ?

Suggestion :

les joueurs la cherchent ensemble...

Neuchâtel 98

CIEAEM 50

Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques

International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education

Information : IRDP, cp 54, CH-2007 Neuchâtel 7
tél: ++(41) (32) 889 86 09 fax: ++41 (32) 889 69 71
E-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch
Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem/

Activités publiques de la rencontre

La 50ème rencontre de la CIEAEM et ses thèmes ont fait l'objet d'articles des numéros 178, 180 et 182 de Math-Ecole. Il est temps maintenant de donner une information plus détaillée sur le programme détaillé des activités de cette semaine du 2 au 7 août et en particulier sur celles qui sont ouvertes au public (en grisé sur le programme de la page suivante).

Les conférences plénières du matin

John Mason : *Energies of practice and of Enquiries into Practices.*

Marie-Hélène Salin et Denise Greslard : *La collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes : le COREM.*

Nicolina Malara, Loredana Gherpelli, Rosa Iaderosa : *Theory and Practice : a case of fruitful relationship for the renewal of the teaching of algebra.*

Majcek Klakla : *Les relations entre l'enseignement mis en pratique et les recherches en didactique des mathématiques effectuées dans l'établissement formant les futurs enseignants.*

La synthèse du dernier jour

Cette séance permettra de faire le point sur l'ensemble des travaux de la rencontre. Elle sera animée et préparée par une équipe de la Société suisse de recherche en didactique des mathématiques (SSRDM): Jean Brun, Aldo Dalla Piazza, André Scheibler et Chantal Tièche Christinat

Les présentations en parallèle

Quatre groupes de trois courts exposés sur les sous-thèmes de la rencontre, suivis de discussions proposeront une première vision des questions qui seront traitées dans les groupes de travail des jours suivants.

Les sessions spéciales et la «Foire aux Idées»

On y traitera de sujets en marge du thème général de la rencontre, mais toujours dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. On y trouvera aussi des conférences, des expositions, des tables rondes sur l'histoire de la CIEAEM.

Le programme définitif des sessions spéciales et des présentations en parallèle sera disponible dès le 15 juillet.

Prix d'entrée pour «auditeurs»

15 francs par jour ou 50 francs pour l'ensemble des manifestations ouvertes au public.

Programme de la rencontre CIEAEM 50

Du 2 au 7 août 1998, Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel, Espace Louis-Agassiz 1

	Samedi 1 Saturday 1	Dimanche 2 Sunday 2	Lundi 3 Monday 3	Mardi 4 Tuesday 4	Mercredi 5 Wednesday 5	Jeudi 6 Thursday 6	Vendredi 7 Friday 7
09 00		Accueil Reception	Conférence plénière (M.-H. Salin)	Plenary lecture (N. Malara)		Conférence plénière (M. Klakla)	Session plénière (Synthèse) Plenary session (Synthesis)
09 30		Ouverture Opening			E		
10 00		Plenary lecture (J. Mason)	Pause café / Coffee break		X	Pause café Coffee break	
10 30			Groupes de travail Working groups	Groupes de travail Working groups	C	Groupes de travail Working groups	Pause café Coffee break
11 00		Café / Coffeee			U		Clôture Closing Ceremony
11 30		Groupes de travail Working groups			R		
12 00	RECEPTION ACCEUIL				S		
12 30		Déjeûner/Lunch			I	Déjeûner/Lunch	
14 00		Présentations en parallèle	Ateliers Workshops	Foire aux idées Forum of Ideas	O	Ateliers Workshops	
					N		
15 30		Pause café / Coffee break				Pause café Coffee break	
16 00		Sessions spéciales / Special sessions Foire aux idées /Forum of Ideas				Session spéciale Special session	
17 00		Apéritif de bienvenue Welcome reception		Vernissage expositions Opening exhibitions			
17 30			Réception officielle Official Reception				
18 30							
20 00				Visites à choix Optional visits		Dîner officiel Official Dinner	
22 00							

APPRENTISSAGES NUMERIQUES ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Cours moyen 1 (CM 1)

Institut national de recherche pédagogique équipe ERMEL, Hatier (Enseignants), Paris 1997

C'est toujours avec plaisir qu'on découvre les ouvrages de la collection «Apprentissages numériques et résolution de problèmes» de l'équipe ERMEL[1]. Le dernier en date confirme l'intérêt des précédents. On y retrouve une très solide description des conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement qui fondent les choix pédagogiques et didactiques de la collection. Les différents thèmes d'étude sont ensuite organisés en aspects théoriques et en propositions d'activités, regroupées en modules.

L'intitulé du premier thème est le même que celui des ouvrages précédents : *Des problèmes pour apprendre à chercher.* Quelques innovations apparaissent dans les axes de travail pour le CM1 où le déroulement des problèmes ouverts est décrit avec plus de détails, l'importance de l'argumentation est soulignée et où sont aussi envisagées la planification d'une résolution, la formulation et la communication de la démarche et des résultats. Les auteurs n'en restent pas aux intentions et à la définition des axes, les propositions d'activité qui suivent incitent, en effet, à passer à l'acte et à voir comment on peut gérer la classe pour que les élèves y pratiquent réellement une activité de résolution de problème, de l'appropriation à la rédaction des solutions.

Les titres des thèmes à caractère plus notionnel évoluent légèrement : les «calculs additifs et soustractifs ou «multiplicatifs et de division» sont traités maintenant dans les cadres plus généraux des «champ additif» ou «champ multiplicatif». Les «mesures, fractions et décimaux» font l'objet d'un thème en soi alors qu'elles étaient auparavant intégrées dans «connaître les nombres». Un nouveau thème, «activités d'entraînement» apparaît en fin d'ouvrage et propose un travail réparti en «calculs standardisés, résultats mémorisés» et en «calculs réfléchis, résultats reconstruits».

L'évolution des titres ne va pas du tout à l'encontre de la cohérence de la collection. C'est un phénomène dû en partie au processus de réflexion permanente lié aux multiples collaborations d'enseignants de terrains, de formateurs et de chercheurs à l'origine de ces ouvrages. Elle est due aussi à la progression dans les niveaux de l'école. Le CM1 (4e année primaire en Suisse romande), est, en France, l'année centrale du cycle des «approfondissements», qui suit celui des «apprentissages fondamentaux». Les auteurs l'expliquent ainsi dans leur introduction de leurs activités d'entraînement :

«Pour rester disponibles, les connaissances acquises sur les nombres et sur les calculs, ... doivent encore (et toujours) être entraînées. Mais le programme du CM1 est bien chargé et les connaissances nouvelles à construire risquent d'accaparer le temps des maîtres et des élèves. C'est pourquoi, contrairement aux choix faits dans les niveaux précédents, il nous a semblé préférable, au Cours Moyen, de mettre en évidence et hors des différents thèmes, les activités d'entraî-

[1] Les précédents ouvrages de la collection ont été présentés dans *Math-Ecole* no 151, 159, 161.

nement qui prendront la forme d'un rituel quotidien (environ 10 minutes par jour).

Les activités d'entraînement correspondent donc à des connaissances qui ont fait l'objet .... de constructions précises dans des situations permettant aux élèves de leur sonner du sens, de les utiliser comme outils pour résoudre des problèmes. Nous les distinguons des activités dites d'*accompagnement*, fortement liées aux situations de découverte proposées dans cet ouvrage et qui ont été placées dans les différents thèmes abordés, à la suite de chacune de ces situations. Ainsi, les procédures permettant de calculer le quotient entier et le reste dans la division de deux entiers ne sont pas abordées dans ce chapitre car elles sont en cours de construction et font partie de la progression décrite dans le thème 4 (Champ multiplicatif)».

Cette clarification nous paraît bienvenue. Elle met à leur place l'entraînement, la maîtrise et structuration dans une longue chaîne qui va de l'émergence de connaissances implicites aux savoirs reconnus de tous, en passant par les phases de construction, de reconnaissance, de transfert et de réinvestissement.

Les activités proposées dans ce nouveau chapitre montrent que l'entraînement n'est pas synonyme d'ennui, qu'il y a des exercices intelligents et une belle complémentarité à développer entre la prise de conscience de savoirs et leur structuration.

Nous ne pouvons, en conclusion, que reprendre à notre compte celle d'Alain Bouvier, auteur de la préface, qui décrit ainsi la principale qualité de l'ouvrage : «il incite l'enfant à être chercheur, il aide le maître à le devenir; il leur donne les moyens d'atteindre ces objectifs». Nous ajouterons que la collection complète des apprentissages numériques et résolution de problèmes est un document de référence et de réflexion permanente, comme un véritable instrument de travail.

Destinataires : enseignants de mathématiques de l'école primaire, formateurs, chercheurs en didactique.

Mots-clés : enseignement et didactique des mathématiques, école primaire, nombre naturel, opérations arithmétiques, résolution de problèmes.

FJ

LES NOMBRES, MATH UN PEU MA PLANETE

Jean Pézennac, Les DocuDéments no 16, Gallimard Jeunesse, 1997 (136 pages).

Bonjour ! Les nombres t'intéressent ? Je te propose un voyage passionnant sur Numéride, la planète des nombres, en compagnie du professeur Bosdématix.

Ah! Numéride ...
ses entiers naturels, ses entiers relatifs, ses nombres rationnels, ses nombres irrationnels, ses conjectures, ses grands théorèmes, ses beautés, ses mystères, ses régions inexplorées, un lieu idéal pour des vacances numériques à l'écart des foules.

Quelle est la différence entre une vache et un degré Celsius ?

Tout cela te semble un peu subtil ? Pourtant, dans la vie, tu fais tout naturellement la différence. Tu utilises tantôt les entiers naturels, tantôt les entiers relatifs, sans jamais te tromper.

Un exemple ? Quand tu parles de "15 vaches", 15 est un entier naturel. Il ne te viendrait pas à l'idée de dire qu'il y a "+15 vaches". Et si je te demande: "J'ai 15 vaches, j'en perds 20, il en reste combien ?", tu me *riras au nez en me répondant que la soustraction est impossible. C'est donc que, pour compter des vaches, tu prends des nombres sur le continent des entiers naturels.*

En revanche, si tu dis qu'il fait 15°, 15 est ici un entier relatif. Il veut dire +15. Si tu ne précises pas le signe, C'est que, vu la saison, ça ne peut être qu'un +. Mais au pôle Nord, tu pourras dire qu'il fait -15°.. Et si je te dis: "Il fait 15° cet après-midi, cette nuit il fera 20° de moins, quelle sera la température ?", tu me répondras sans hésiter: "Il fera 15 - 20 = -5°." C'est donc que les nombres que tu utilises pour mesurer les températures sont pris sur le continent des entiers relatifs, et que la soustraction 15 - 20 est devenue possible.

Ecrit (et illustré) sous une forme humoristique, ce livre de petit format et à petit prix s'adresse en priorité aux adolescents (dès 13 ans). Pour les enseignants, et je pense plus particulièrement à ceux du primaire, cette lecture est une bonne occasion de se rafraîchir la mémoire sans se casser la tête !

Destinataires : élèves, enseignants, ...

Mots-clés : mathématiques, histoire des nombres, humour!

(Extrait de **Les nombres, math un peu ma planète**) :

PASSANT !
CI-GÎT DIOPHANTE

LES CHIFFRES DIRONT LA DUREE DE SA VIE.
SA DOUCE ENFANCE EN FAIT LE SIXIÈME.
SON MENTON S'EST COUVERT DE DUVET,
PUIS UN DOUZIEME DE SA VIE
A PASSE AVANT QU'IL SE MARIE.
IL A VECU LE SEPTIEME DE SA VIE
SANS QUE SA FEMME LUI DONNE D'ENFANT.
LA NAISSANCE D'UNE FILLE
L'A RENDU HEUREUX,
PUIS CINQ ANS PLUS TARD, CELLE D'UN FILS.
LE DESTIN A VOULU QUE LA VIE DE CE FILS
SOIT DEUX FOIS PLUS COURTE
QUE CELLE DE SON PERE.
LE MALHEUREUX VIEILLARD A RENDU L'ÂME
QUATRE ANS APRÈS SON FILS BIEN-AIME.
PASSANT, SAURAS-TU DIRE À QUEL ÂGE
DIOPHANTE A ETE ENLEVE PAR LA MORT ?

La réponse :

Première étape, on va traduire le texte en termes d'équation. Appelons x la durée de la vie de Diophante (en années). Le texte nous dit que la durée de son enfance est égale à un sixième de sa vie, donc $x/6$ années; puis que, entre la fin de son enfance et son mariage, il s'est écoulé $x/12$ années. Après son mariage, il est resté $x/7$ années sans enfant. Ensuite il s'est écoulé encore 5 ans avant que naisse son fils, puis $x/2$ années jusqu'à la mort de celui-ci. Et enfin, encore 4 ans avant la mort de Diophante lui-même.

La durée totale de la vie de Diophante (x) s'exprime aussi en additionnant toutes les périodes indiquées. On arrive à l'équation $x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$.

Deuxième étape, on résout cette équation. Pour cela, on passe d'abord tous les termes contenant x dans le premier membre de l'équation, ce qui donne :

$$x - x/6 - x/12 - x/7 - x/2 = 5 + 4.$$

Ensuite, on simplifie l'expression de ce premier membre en réduisant tous les termes au même dénominateur, ici 84 (84 étant le plus petit dénominateur commun à 6, 12, 7 et 2), ce qui donne :

$84x/84 - 14x/84 - 7x/84 - 12x/84 - 42x/84 = 9$, autrement dit $9x/84 = 9$, d'où : $x = 84$.

Diophante a donc vécu 84 ans.

Connaissant x = 84, on peut aussi calculer qu'il s'est marié à 21 ans, a eu une fille à 33 ans, un fils à 38 ans, et qu'il a perdu ce fils à 80 ans.

LE MONDE DES CHIFFRES

André et Jean-Christophe Deledicq, Editions Mondo, 1997 (32 pages).

Les chiffres sont nés avec les lettres, lorsque les hommes eurent l'idée de l'écriture. À l'origine, les chiffres s'écrivaient à l'aide de traits, de bâtons ou de noeuds. De ces premiers signes au système décimal actuel, les chiffres et les nombres ont beaucoup changé. Ce livre nous invite à découvrir les étapes de cette passionnante aventure à travers les siècles et les civilisations.

André Deledicq enseigne à l'Université de Paris VII. Il est l'auteur de nombreux ouvrages de vulgarisation sur les mathématiques. Il organise en outre, chaque année, le concours Kangourou dans les écoles, les collèges et les lycées.

D'une présentation agréable à l'oeil, enrichi d'illustrations en couleur, cet album devrait figurer dans chaque bibliothèque de classe !

Destinataires : élèves dès la 3e primaire, enseignants, ...

Mots-clés : mathématiques, histoire des nombres.

HASARD OU PROBABILITES

Jean Cushman, Castor Doc D4, Flammarion, 1996 (133 pages)

Pile ou face ? As, roi ou dame ? Lorsque nous jetons deux dés, combien de chances avons-nous de tirer un double-six ? Tombola, partie de cartes, galette des rois - nous savons que le hasard joue, mais savons-nous quelles sont nos chances et comment les calculer ? Savons-nous que les probabilités peuvent nous aider à déchiffrer un message codé ? Ce livre de poche, qui se lit comme un roman, constitue une approche toute simple des notions de probabilités et de statistiques. Son auteur propose également des jeux et des expériences à réaliser pour approcher plus concrètement encore ces notions. En voici un exemple (le texte original a été légèrement adapté pour être utilisé par le maître avec ses élèves) :

Matériel à préparer par le maître : une grande boîte opaque contenant 100 jetons rouges, 150 jetons verts et 50 jetons jaunes.

«Dans cette boîte, il y a 300 jetons : des rouges, des verts et des jaunes. À vous de deviner combien il y en a de chaque couleur.

Vous aurez droit à trois essais : le premier lorsque nous aurons tiré de la boîte, tout à fait au hasard, un échantillon de 10 jetons, le deuxième lorsque nous en aurons tiré 20, le troisième lorsque nous en aurons tiré 30.» Le tirage est effectué par un élève qui communique le résultat à ses camarades. Par exemple: 5 rouges, 3 verts et 2 jaunes, au premier tirage. Idem pour les deuxième et troisième tirages. Après mise en commun des "prédictions" de chacun, le contenu de la boîte est révélé... et la discussion ouverte !

Destinataires : élèves dès 10 ans, enseignants.

Mots-clés : mathématiques, probabilités, statistiques, hasard, chance.

Sur ce sujet, voir aussi «Une histoire... improbable» in MATH-ECOLE 174, oct. 1996.

MS

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Collection «Maths pour tous» *(3 cahiers) :*

Histoire de maths. Py, Pytha, Pythagore. La Magie du calcul.	......	*(ex. à Fr. 32.-)**
Le nombre π, ADCS	......	(ex. à Fr. 30.-)*
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	......	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	......	(ex. à Fr. 20.-)
Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	......	(ex. à Fr. 32.-)
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	......	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Les maths & la plume, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Panoramaths 96, APMEP	......	(ex. à Fr. 15.-)*
Pliages mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	......	(ex. à Fr. 25.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	......	(ex. à Fr. 26.-)
Maths en vacances. Hypercube.	......	(ex. à Fr. 15.-)
Problemi, che passione, Ed. Capitello.	......	(ex. à Fr. 10.-)

Les anciens numéros de ***Math-Ecole*** (prix en page 2 de couverture)

Annales du Championnat de jeux mathématiques et logiques

- Niveau CM (degrés 4 et 5) :
  - ***Récrémaths*** .... ex.à (Fr. 13.-)
  - ***50 Enigmes mathématiques pour l'école*** .... ex. à (Fr. 14.-)
  - ***50 Enigmes mathématiques faciles*** .... ex. à (Fr. 16.-)
- Niveau collégiens :
  - ***50 Enigmes mathématiques pour tous*** ... ex. à (Fr. 16.-)
  - ***Le Serpent numérique*** (n° 10) ... ex. à (Fr. 10.-)*
  - ***Le Trésor du vieux Pirate*** (n°12) ... ex. à (Fr. 10.-)*
  - ***Le Singe et la Calculatrice*** (n° 14) ... ex. à (Fr. 10.-)*
- Niveau lycéens et adultes :
  - ***50 Enigmes mathématiques pour lycéens*** .... ex. à (Fr. 16.-)
  - ***La Biroulette russe*** (n° 9) .... ex. à (Fr. 10.-)*
  - ***Le Pin's Tourneur*** (n° 11) .... ex. à (Fr. 10.-)*
  - ***Le Roi des Nuls*** (n°13) .... ex. à (Fr. 10.-)*
  - ***Le Sabre d'Aladin*** (n° 15) .... ex. à (Fr. 10.-)*

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

SOMMAIRE