MATH ECOLE

37e année

185

Autour des outils de calcul

Problème ouvert et division terminale

L'horloge de la gare de Mons

décembre 1998

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 25.- compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 30.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 6.-
anciens numéros : CHF 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 18.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,**
par courrier électronique E–mail : **François. Jaquet @ irdp. unine. ch**,
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

37e année 5 numéros par an

185

décembre 98

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Aux abonnés absents.

F. Jaquet, rédacteur responsable

L'arrière automne est la période des rappels d'abonnements pour notre revue. La tâche n'est pas des plus plaisantes et, reconnaissons-le, nous avons bien des retards et des lacunes dans le domaine de l'administration de notre fichier.

Chaque année, il y a des abonnés qui nous quittent pour cause de retraite, il y en a d'autres qui disparaissent – «sans laisser d'adresse» comme nous le dit la poste qui nous renvoie alors le numéro du disparu – il y a les «abonnés absents» qui ne répondent pas, il y a ceux qui renoncent à la revue parce qu'elle ne répond plus à leurs besoins. Mais de plus en plus fréquemment, il y a aussi ceux qui nous disent qu'ils peuvent consulter *Math-Ecole* dans leur établissement scolaire et, par conséquent, ne voient plus l'intérêt de maintenir un abonnement personnel. Quoi de plus logique, dans une perspective purement économique !

Et pourtant, toujours dans cette même perspective économique, les responsables de la revue n'y trouvent pas leur compte. Pour maintenir le frêle équilibre financier de *Math-Ecole*, il faut affronter les dures lois du marché : un abonné de perdu représente une perte, qu'il faut compenser. Nos campagnes d'abonnements de ces dernières années ont certes connu un grand succès auprès des directions d'école qui reconnaissent l'intérêt de la revue pour l'information et la formation de leurs maîtres. Mais si elles aboutissent à un simple transfert d'abonnés, nous n'y voyons aucun profit.

Bien au contraire, ce passage d'un engagement individuel vers un abonnement collectif est loin de correspondre à nos aspirations.

Les revues sur l'enseignement des mathématiques sont rares, leur durée de vie est variable, mais, globalement, elles existent et subsistent depuis fort longtemps. *Math-Ecole* est l'une d'entre elles, modeste, même si son âge peut être considéré comme vénérable. Tous ceux qui animent ces revues ont compris, depuis toujours, que leur contrat repose quasi inexorablement sur le bénévolat. Mais, en contrepartie, ils savent que leur publication répond à un besoin, voire une nécessité : celui de constituer un forum permanent, un espace de réflexion, un lien entre ceux qui ont la lourde tâche de faire partager les connaissances mathématiques, de les rendre accessibles, de les faire maîtriser, de donner envie de les améliorer en permanence.

Les lecteurs, de leur côté, ressentent aussi cette nécessité professionnelle. Ils savent pertinemment que c'est de leur engagement personnel que dépend la survie de leur revue : ils peuvent la faire connaître, s'abonner, y proposer des articles, répondre aux problèmes ou suggestions proposées, réagir.

Finalement, ce sont les lecteurs qui déterminent l'existence de leur revue. S'ils souhaitent continuer à la recevoir dans leur propre boîte à lettres et à la conserver dans leur documentation personnelle ils feront l'effort nécessaire. S'ils se contentent de la voir passer sur la table de la salle des maîtres, ils s'offusqueront peut-être de sa disparition mais ne pourront pas en mettre la faute sur «les autres» ou sur leurs «responsables scolaires».

Autour des outils de calcul

J.-A. Calame, Ecole Normale (NE)
F. Jaquet, IRDP

Le cadre

Dans une approche respectueuse des différentes procédures que les élèves peuvent adopter pour résoudre un problème du domaine des nombres et des opérations, quel est le statut des «outils de calcul» à leur disposition, largement décrits dans les nouveaux moyens d'enseignement et le plan d'études romand de mathématiques ?

Cette question, souvent posée par les maîtres, a été évoquée récemment par le groupe des formateurs des cantons de Berne, Jura, Neuchâtel et Fribourg (BEJUNEFRI), qui a décidé d'y consacrer une réflexion plus approfondie, voire d'envisager de la traiter dans un nouveau «module théorique» du «Concept de formation» mis en oeuvre depuis l'automne 1997.

Il y a différentes manières d'aborder ce statut des outils de calcul. On peut par exemple lire et discuter les textes qui y sont consacrés, mais la littérature est très abondante sur le sujet et ses analyses sont bien subtiles. Et même si on arrivait à s'entendre sur une définition de ces outils, en serait-on plus avancé pour autant ? Le plan d'études romand et les commentaires didactiques[1] qui accompagnent les nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques de 1P à 4P distinguent «calcul réfléchi», «algorithmes», «répertoires», «calculatrice», auxquels on peut encore ajouter des matériels concrets ou différents arrangements ou représentations des nombres en bandes, tableaux, axes. Mais malgré cette distinction et les descriptions qui en découlent, les questions subsistent.

On peut imaginer de traiter le sujet à partir de pratiques de classe. Mais on se retrouve alors devant les questions qui sont à l'origine de la réflexion et qui ont toutes trait à ce qu'on appelle «l'institutionnalisation des connaissances» :
la table de multiplication, quand, avec quel degré de maîtrise ?
les algorithmes, lesquels seront nécessaires par la suite ?
le calcul réfléchi, jusqu'à quel niveau ?
la calculatrice, quels seront les conséquences de son utilisation sur les autres outils ?

Une autre approche consiste, à partir de productions d'élèves, à s'interroger sur les outils réellement mis en oeuvre dans leur élaboration. Si la production est orale, on demande «comment as-tu trouvé ?» ou «quel calcul as-tu fait ?». En cas de production écrite, on analyse les traces des calculs, on imagine les procédures sur lesquelles elles reposent et, si nécessaire, on interroge l'enfant pour lui demander des explications complémentaires.

C'est cette dernière approche que nous avons choisie, celle de l'examen de traces écrites d'une résolution d'un problème proposé par les moyens d'enseignement romands de 2e année primaire[2].

---

1 Gagnebin A. , Guignard N., Jaquet F. (1998) *Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*, Corome, Edition 1998.

2 Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E., (1997) *Mathématiques, deuxième année* . Corome

Le problème et sa présentation

Billets verts, billets rouges

Dans cette tirelire, il y a des billets verts et des billets rouges.

Un billet vert vaut 5 points et un billet rouge vaut 2 points.

Au total, les billets valent 50 points.

Combien y a-t-il de billets verts et de billets rouges ?

Recherche toutes les manières d'obtenir 50 points.

(au bas de la page, le dessin d'une tirelire en forme de grenouille - cochon)

Dans le livre du maître, l'activité est prévue par groupes de 2 élèves, la mise en commun «permet de dresser l'inventaire des différentes solutions découvertes» et des prolongements sont proposés.

L'activité se situe dans le thème *Reconnaître des problèmes multiplicatifs et divisifs* et on peut lire, dans les deux pages d'introduction précédant la description des activités :

« ...
En deuxième année, sans vouloir exiger systématiquement les écritures multiplicatives, il faut toutefois profiter de se familiariser avec elles lorsque la situation les fait apparaître spontanément, en compagnie de leurs correspondantes additives, c'est-à-dire là où elles sont la meilleure représentation écrite d'expressions ou d'action, là où elles apportent un gain de temps ou de clarté, là où elles se révèlent efficaces pour le calcul.
Par exemple, dans *Billets verts, billets rouges*, lors de la comparaison de différentes écritures du nombre 50, au cas où la décomposition additive apparaît :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$$
$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5 + 5 + 5$$

il serait souhaitable qu'elle soit accompagnée des deux écritures 15 x 2 et 4 x 5, séparées elles-mêmes par un signe d'addition, et que l'élève puisse juger lui-même des avantages et inconvénients respectifs des deux notations.
... «

La passation

Le problème a été proposé à plusieurs classes de 3e et 4e en début d'année scolaire, dans les conditions prévues ci-dessus. L'une de ces classes, de 3e année, suit déjà un enseignement renouvelé des mathématiques, ce sont les résultats de ces élèves qui seront analysés ici.

L'enseignante a présenté l'activité dans les conditions prévues par les moyens d'enseignement (rappelées précédemment). Sur demande d'un tiers des groupes environ, elle a fourni des feuilles de papier rouge et vert que les élèves ont découpées en billets. Elle a dû intervenir auprès d'un groupe qui ne comprenait pas ce qu'il devait faire et leur a simplement demandé de relire la consigne. Après 20 à 30 minutes, des synthèses partielles entre quelques groupes leur ont permis de se vérifier s'ils avaient toutes les solutions.

Les derniers protocoles de groupes donnant les résultats de la recherche accompagnés d'explications ont été rendus après 40 minutes environ.

Les productions des élèves

Nous avons réparti ainsi les 13 productions des groupes :

A. Réponses sous forme de textes (4 productions)

Les élèves donnent la liste de leurs solutions, en indiquant le nombre de billets de chaque sorte.

Exemple :

Il y a 8 billets verts et 5 billets rouges
4 billets verts 15 billets rouges
2 vert 20 rouges
6 vert 10 rouges

Dans cette première catégorie, il n'y a aucune trace écrite des calculs effectués, ni des méthodes ayant permis d'aboutir aux solutions, justes et complètes à une exception près.

B. Dessins, accompagnés des descriptions de la catégorie précédente (2 productions)

Chaque solution se présente sous forme d'un dessin des billets de chaque couleur, alignés. (fig. 1)

Ces deux productions donnent chacune les quatre solutions, justes. Mais ici aussi, les calculs n'apparaissent pas, bien qu'ils aient été effectués quelque part.

C. Dessins, descriptions, et traces numériques intermédiaires (2 productions)

Aux dessins et descriptions sous forme de textes, s'ajoutent ici des signes d'addition et la valeur de chaque billet (fig. 2) ou les traces des comptages intermédiaires (fig. 3).

L'une de ces productions se réfère directement à l'addition, l'autre au comptage de 2 en 2 et de 5 en 5. L'outil de calcul est ici bien évident et explicite : il s'agit de la connaissance de la suite des nombres pairs et de celle des premiers multiples de 5. (S'il fallait le situer par rapport aux outils reconnus, nous le placerions dans la catégorie des «répertoires mémorisés», ou plutôt «automatisés».)

D. Écritures additives et réponses schématisées par des dessins (2 productions)

Dans l'une de ces productions (fig. 4) les 6 billets verts et 10 billets rouges de la première solution sont dessinés et les termes sont regroupés de différentes manières (les solutions suivantes sont simplifiées, un seul billet par couleur est dessiné)

L'écriture de la première somme :

$$5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$$
$$5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5$$

donne une indication précieuse sur les outils de calcul dont disposent ces enfants : le regroupement par dizaines de cinq termes «2» et de deux termes «5», qu'on peut placer dans les «répertoires».

La deuxième somme est obtenue par commutativité des termes, c'est-à-dire que son élaboration requiert l'outil «calcul réfléchi».

La deuxième production de cette catégorie (fig. 5) propose les résultats intermédiaires. Il est fort vraisemblable que l'outil permettant de trouver la première somme - des huit termes «5» « est le comptage de 5 en 5, déjà mentionné précédemment et le plus souvent utilisé dans cette situation. Les sommes 40 + 10, 30 + 20, etc. relèvent du «répertoire additif», plus précisément de la décomposition de 50 en deux termes multiples de 10. Il faut relever à ce propos que ce répertoire est beaucoup plus étendu que la simple table d'addition des nombres de 1 à 10.(fig. 5)

E. Écritures mixtes - additives et multiplicatives - et réponses schématisées par des dessins (2 productions)

Ces élèves produisent les mêmes écritures que les deux groupes précédents. Mais, ensuite, il les accompagnent par des écritures mixtes ou franchement multiplicatives :

$$\left.\begin{array}{l} 8 \times 5 \\ 5 \times 2 \end{array}\right\rangle = 50$$

L'apparition d'écritures multiplicatives a sans doute des incidences sur les outils de calcul élaborés ici. On peut faire l'hypothèse que, chez ces élèves, la mémorisation de la suite des multiples de 5 ou des nombres pairs constitue la base du répertoire multiplicatif et que ce dernier se crée par souci d'économie : il est plus pratique et plus sûr de savoir que 8 x 5 = 40 que de dire 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 en s'aidant des doigts et en s'arrêtant sur le huitième.

Il faut relever que, l'une des productions de cette catégorie ne mentionne qu'une solution et l'autre trois, alors que les quatre solutions figurent dans presque toutes les réponses des catégories précédentes.

F. Ecritures exclusivement multiplicatives (1 production fig. 6)

Cette dernière production est révélatrice d'une perte de sens du problème.

Les deux premières égalités reliées, 5 x 4 = 20 et 2 x 15 = 30 constituent une première solution, mais les autres n'ont plus rien à voir avec les conditions initiales fixées par l'énoncé. Elles répondent seulement à sa dernière demande, «Trouvez toutes les manières d'obtenir 50 points», avec une condition implicite créée par les élèves : « ... au moyen d'une somme de deux produits valant 20 et 30".

L'outil de calcul privilégié est ici le répertoire multiplicatif des nombres 20 et 30, c'est-à-dire leurs décompositions en produits de deux facteurs.

La mise en commun

Selon les travaux récents en didactique des mathématiques[3], pour acquérir le statut d'outil, une connaissance passe par de nombreuses phases. Après sa construction dans des situations où l'élève est confronté à des obstacles, elle n'est encore qu'implicite et ne fonctionne que dans le contexte de son émergence. C'est lors de la mise en commun qu'elle acquiert alors un statut de savoir autonome et socialisé, pour devenir un objet explicite. L'évaluation que le maître et l'élève en font à ce moment détermine les phases suivantes : la consolidation et l'entraînement. Celles-ci sont décontextualisées et l'objet y devient un outil bien maîtrisé. Cet «outil-objet», pourra alors être transféré, mobilisé dans d'autres contexte, réinvestit dans la construction de connaissances nouvelles.

Il en va ainsi des «outils de calcul», où le rôle de l'entraînement des procédures et de la mémorisation sont particulièrement importants, afin de réduire le coût de certaines tâches, alléger la charge de la mémoire à court terme, libérer l'esprit au profit de la résolution des problèmes posés, de la découverte de stratégies, ...

Les productions examinées précédemment sont le reflet des travaux des groupes de la classe, à l'articulation entre la phase de recherche et celle de la mise en commun, c'est-à-dire au coeur de la démarche de construction des savoirs. C'est ici que se situe le défi de l'innovation actuelle de l'enseignement des mathématiques. Va-t-on pouvoir s'assurer que l'activité a abouti à la connaissance visée et que celle-ci est iden-

[3] Les ouvrages d'ERMEL, en particulier (1997) *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes, CM1* donnent une bonne synthèse de ces travaux. On pourra se référer aussi à l'ouvrage cité en note 1.

tifiée ? Va-t-on décider de la «renvoyer» aux élèves pour «maturation» et approfondissement ou estimer que le temps est venu de la rendre opérationnelle ?

Le maître qui, jusque là s'était refusé «à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il désire voir apparaître»[4], redevient animateur. Dans un premier temps, il reprend certaines des responsabilités dévolues aux élèves dans les phases précédentes : il suscite les confrontations, il interpelle les élèves, il renégocie un nouveau contrat pour d'éventuels compléments. Puis, dans un deuxième temps, après plusieurs mises en commun éventuellement, il reprendra sa fonction d'enseignant, développera certains points, établira des synthèses, dressera des bilans, apportera sa caution, donnera un statut social et scientifique aux nouvelles connaissances apparues en les institutionnalisant.

Voici quelques questions qui pourraient apparaître lors de la mise en commun qui suit la recherche des billets verts et rouges. Nous nous limitons à celles qui concernent les outils de calcul, objet de notre investigation, tout en avouant qu'il y aurait bien d'autres choses à dire à propos des productions examinées :

Comment les élèves des groupes A et B sont-ils parvenus à leurs solutions et quels sont les calculs qu'ils ont faits pour arriver à 50 ?

Quel est le statut de la suite des nombres pairs et des multiples de 5 chez les élèves de C (fig. 3) ? sont ils mémorisés, récités par comptage, relevés sur une bande numérique ?

[4] Brousseau Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1986. Vol 7.2 pp 33-115.

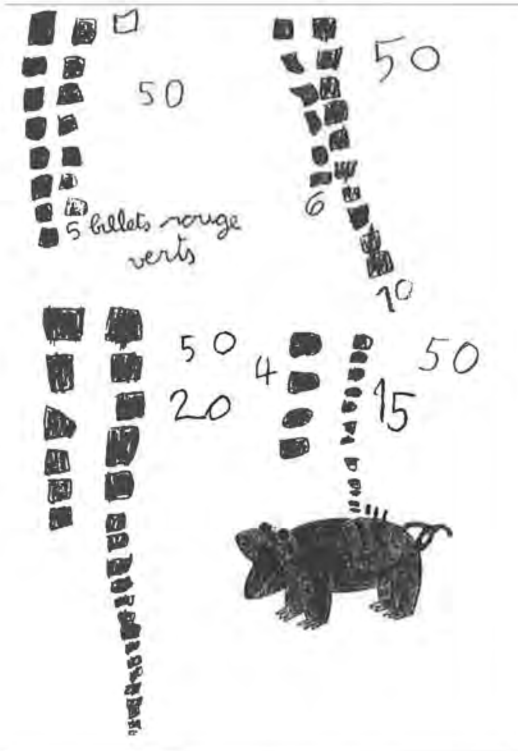
Comment les élèves des groupes D et E s'y retrouvent-ils dans leurs longues additions de termes égaux ? comment sont-ils certains d'être arrivés à 50 ? sur quels résultats intermédiaires s'appuient-ils ?

Pourquoi les groupes de E et F qui ont utilisé la multiplication n'ont-ils pas trouvé toutes les solutions du problème ?

Les outils de calcul identifiés, il s'agira alors de savoir ce que le maître et les élèves en feront. Va-t-on valoriser ceux qui ont été efficaces, comme le répertoire des nombres pairs ou des multiples de 5 ? Va-t-on en proposer un entraînement ou, au contraire, laisser agir le temps ?

Les réponses sont multiples, elles dépendent du moment, du temps à disposition, de la classe, des élèves, des besoins en connaissances et savoirs pour la suite du programme, etc. Dans tous les cas, le rôle et l'action du maître durant cette «mise en commun» seront déterminants pour que, chez ses élèves, les outils de calcul utilisés soient progressivement reconnus, valorisés et entraînés pour devenir efficaces dans d'autres situations.

Pour relever le défi, il faudra bien que chacun, dans une perspective socio-constructiviste, construise sa propre «connaissance» des outils de calcul, de leur genèse, de l'opportunité de leur usage, des situations où ils pouront être opérationnels.



5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 +
5 + 5 + + + + +
= 50

8 billets verts et 5 billets rouges

5 10 15 20 25 30 35 40 2 4 6 8 10

8 billets verts
5 billets rouges

40 + 10 = 50

5 10 15 20 25 30 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

30 + 20 = 50

6 billets verts
10 billets rouges

80 − 30 = 50
2 billets verts
20 billets rouges

5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2
+ 5 + 5 = 50

5 5 5 5 5 5 6

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5
+ 5 + 5 + 5 + 5 = 50

5 5 5 5 5 5 6

10

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40
2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

verts billets
8

billets
5

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20

billets verts
4

billets rouge
10

1 5 × 4 = 20 R
2 2 × 10 = 20 R
3 10 × 2 = 20 R
4 2 × 15 = 30 V
5 3 × 10 = 30 V
6 10 × 3 = 30 V

Problème ouvert et division terminale

M. Chastellain, SPES (VD)

«*Ce problème est intéressant, mais ça ne marchera jamais avec mes élèves* !»

Cette petite phrase anodine traduit parfaitement le doute qui existe souvent chez beaucoup d'enseignants, lorsqu'ils évoquent une activité de recherche ou la résolution d'un problème, surtout s'il s'agit de travailler avec des élèves dont l'intérêt pour les «choses» de l'école ne représente pas la qualité première. Malgré l'engouement suscité pour les concours mathématiques (Championnat international francophone des jeux mathématiques et logiques, Mathématiques sans frontières, Rallye mathématique transalpin, ...), même si les revues proposant des jeux et des énigmes mathématiques foisonnent (*Tangente, Hypercube, Maths en vacances, Jouer, Math-Ecole*, ...), même si les résultats de la recherche en didactique des mathématiques montrent que les notions étudiées au travers de situations-problèmes et de problèmes ouverts favorisent la construction du savoir, la perplexité face à la conception d'un apprentissage par le problème demeure encore solidement ancrée dans bien des esprits.

L'affirmation «*ça ne marchera jamais avec mes élèves*» cache, en vérité, une pluralité de craintes bien connues, craintes qu'il s'agit ni de sous-estimer, ni de fustiger. Certaines d'entre elles qui touchent plus spécifiquement à l'enseignement dans les filières «non académiques» méritent d'être une fois encore signalées :

- Le pouvoir de concentration, le rythme d'apprentissage, ou encore, l'aisance dans le raisonnement de la majorité des élèves orientés dans de telles divisions se révèlent des facultés qui n'atteignent pas le niveau de celles généralement rencontrées dans les classes prégymnasiales. Dans ces conditions, entreprendre une recherche de longue haleine signifie souvent ouvrir la porte au découragement.
- Dans une activité favorisant une véritable démarche scientifique, le rôle du maître est parfois délicat à tenir, car il doit conforter les élèves dans leur procédure, sans pour autant intervenir pour imposer la sienne. Face au découragement précédemment invoqué, cette difficulté représente un obstacle réel qu'il n'est pas toujours aisé de surmonter.
- Les dernières années de la scolarité obligatoire des filières à exigences moins élevées devraient préparer progressivement les élèves à entrer dans le monde professionnel. Or, l'idée généralement répandue – c'est une erreur, comme on pourra le découvrir à la lecture de l'article de C. Neet intitulé «A propos du hasard et de la nécessité» (p. 18) – consiste à croire que les examens et les contenus de cet autre ordre d'enseignement n'ont, eux, subi aucune évolution. Dès lors, les enseignants concernés imaginent qu'il est inutile de consacrer trop de temps à l'acquisition d'objectifs comportementaux, alors que les élèves ne seront évalués, dès la sortie de l'école, que sur leur maîtrise des notions traditionnelles d'arithmétique comme les calculs d'aires et volumes, les pourcentages, mélanges et alliages, ou encore, sur la fameuse «règle de trois».
- Un problème ouvert ne permet pas d'aborder les notions mathématiques du

programme officiel. Ce genre d'activités représente donc une surcharge en temps de travail qu'il s'agit de caser dans une planification déjà bien étoffée !

- ...

Sans vouloir minimiser ces différentes conceptions, il convient toutefois de les nuancer, ce que vise modestement cet article.

Quel habillage ?

Par souci de «rentabilité dans l'apprentissage», souci par ailleurs parfaitement louable, les exercices proposés «habituellement» en classe visent souvent à la maîtrise du fonctionnement d'un outil mathématique particulier. Une telle démarche s'inscrit dans une conception d'un enseignement par objectif spécifique, de type behavioriste, qu'il est facile d'évaluer par la suite. L'outil ainsi forgé se révèle alors relativement efficace dans des situations similaires.

A titre d'exemple, voici deux types d'exercices «classiques», à propos de la notion de fonction, qui sont à la portée de tous les élèves et qui s'inscrivent dans cette logique.

Proposition 1 : Complète le tableau a) :

premier nombre	deuxième nombre
1	1
2	4
3	9
4	16
5	...
...	36
...	...
n	...

Par le choix d'une suite de nombres «simples», déjà organisés du plus petit au plus grand, on facilite la recherche de la loi qui permet de passer de n'importe quel nombre de l'ensemble de départ à son image dans l'ensemble d'arrivée. Les élèves peuvent découvrir alors qu'à 5 est associé 25 et que 36 est le carré de 6. L'expression de la généralisation ($n \mapsto n^2$) se traduit souvent par une formulation du style : «*on multiplie le nombre par lui-même*».

Dans cet exercice, l'élève remplit un tableau en cherchant les liens qui existent entre des grandeurs variant l'une en fonction de l'autre. En fait de problème, on lui fournit les données nécessaires pour trouver la réponse à la question finale. Le même objectif peut être alors entraîné de nombreuses fois, au travers d'autres propositions progressivement plus complexes. Par exemple :

b)

premier nombre	deuxième nombre
1	1
2	3
3	6
4	10
5	...
...	21
...	...
n	...

c)

premier nombre	deuxième nombre
1	1
2	6
3	15
4	28
5	...
...	66
...	...
n	...

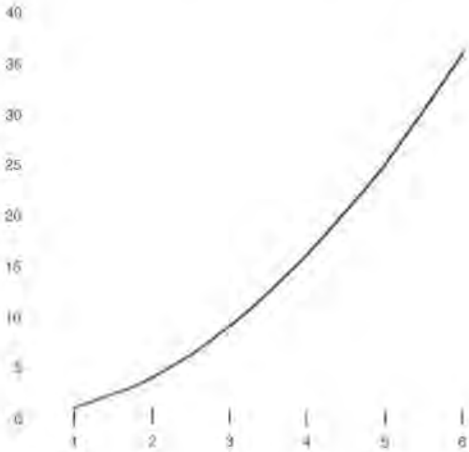
Ce type d'exercices s'apparente à la recherche de «ce qui se passe dans une boîte noire» et figure dans de nombreux ouvrages scolaires. Sans vouloir minimiser son intérêt, ne serait-ce que parce qu'il permet l'étude et la comparaison de couples de nombres tout comme la révision des opérations dans $\mathbb{R}$, il faut bien reconnaître que sa signification réelle est limitée : travailler «dans un tableau» déjà donné et structuré ne favorise pas l'apprentissage de l'autonomie! Par contre, il offre un gain de temps appréciable, puisque toute la phase d'appropriation et d'organisation du travail est inexistante.

Proposition 2

Une autre présentation du même exercice consisterait à s'intéresser à la bonne «lecture» d'un graphique. Dans ces conditions, les trois questions précédentes pourraient devenir :

a)

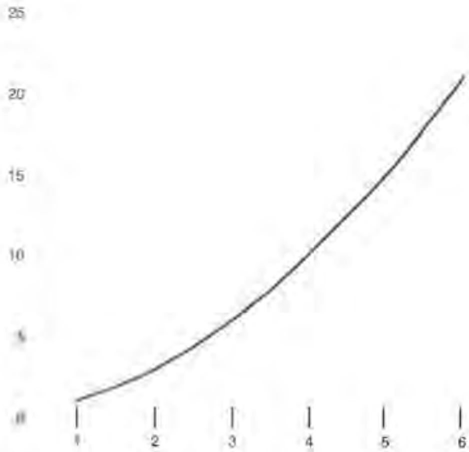
- Vérifie que les points **a** (1 ; 1), **b** (2 ; 4), **c** (3 ; 9) et **d** (4 ; 16) appartiennent effectivement à la courbe suivante :



- Quelles sont les coordonnées manquantes des points : **e** (5 ; ...) et **f** (... ; 36) ?

b)

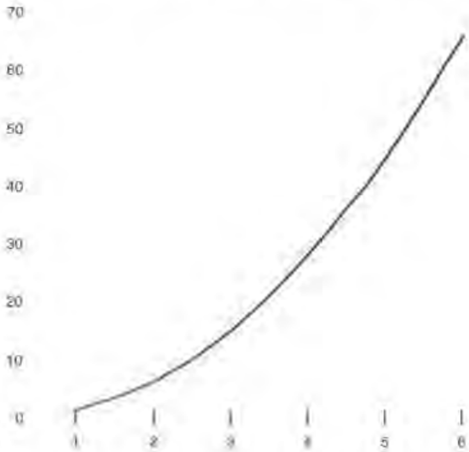
- Vérifie que les points **a** (1 ; 1), **b** (2 ; 3), **c**) (3 ; 6) et **d** (4 ; 10) appartiennent effectivement à la courbe suivante :



- Quelles sont les coordonnées manquantes des points : **e** (5 ; ...) et **f** (... ; 21) ?

c)

- Vérifie que les points **a** (1 ; 1), **b** (2 ; 6), **c** (3 ; 15) et **d** (4 ; 28) appartiennent effectivement à la courbe suivante :

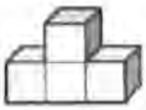
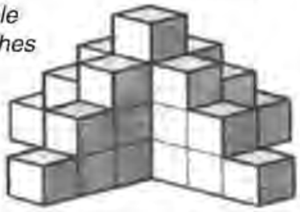


- Quelles sont les coordonnées manquantes des points : **e** (5 ; ...) et **f** (... ; 66) ?

Là encore, de telles questions appartiennent effectivement aux programmes 7, 8 et 9 de la scolarité obligatoire et sont généralement étudiées par la quasi totalité des élèves. Et pourtant, au-delà de la vérification d'une interprétation judicieuse des graphiques présentés – dans le but de recouvrir le champ théorique abordé probablement précédemment lors de l'étude des fonctions – ces exercices se révèlent relativement pauvres, parce que trop «fermés». Certes, en faisant varier les nombres de chaque énoncé, l'enseignant vise, après la construction d'un outil, à sa consolidation. Mais, même s'il répond aux différentes questions, l'élève adopte une attitude passive dans la construction de ce nouveau savoir, puisqu'il applique une procédure précédemment définie par le maître. Dans ces conditions, il existe un risque de forger un outil qui se révèle inopérationnel dans un autre contexte, plus global, par suite d'un transfert inexistant.

Un joli déguisement !

Dans le n° 183 de *Math-Ecole* figurait l'énoncé suivant[1] :

> ***Escaliers***
>
> *escalier double*
> *hauteur : 2 marches*
>
> 
>
> *escalier simple*
> *hauteur : 3 marches*
>
> 
>
> *escalier quadruple*
> *hauteur : 4 marches*
>
> 
>
> *Comment déterminer rapidement le nombre de cubes nécessaires à la construction d'escaliers de chaque sorte, de 1500 marches de hauteur ?*

Voilà une troisième façon de présenter la même recherche, mais cette fois, avec toute la richesse d'un contexte qui s'apparente à un problème ouvert. Pour s'en convaincre, il suffit de revenir aux différents aspects soulevés dans l'article précédemment cité.

Et pourtant, ce dernier exercice s'inscrit dans la lignée de ceux dont on a dit : «*ce problème est intéressant, mais ça ne marchera jamais avec mes élèves* ». Non convaincu de cette affirmation, j'ai donc profité d'un remplacement récent dans une classe de 8T vaudoise (division à coloration préprofessionnelle), pour vivre cette activité durant deux périodes de 45 minutes. Les élèves disposaient de petits cubes, mais leur nombre n'était pas suffisant pour leur permettre de représenter les constructions relatives à une hauteur de 1500 marches.

Attention ça marche !

Bien évidemment, on pourrait dire qu'il suffit d'être convaincu pour faire passer son message ! Au-delà de cette boutade, intéressons-nous un instant à quelques-unes des productions des groupes (la plupart des comptes rendus figurent sous la forme de fac-similés par souci de gain de place) :

Julien et Hamed

1) 2h / 4c	*2) 3h / 6c*
3h / 9c	*4h / 10c*
4h / 16c	*5h / 15c*
5h / 25c	*6h / 21c*
6h / 36c	*7h / 28c*
7h / 49c	*8h / 36c*
8h / 64c	*9h / 45c*
9h / 81c	*10h / 55c*
10h / 100c	

[1] «*L'évaluation formative fondée sur la pratique de classe*»

Anaïs et Valérie

L'escalier double :

au début on a : 2 de hauteur, 3 de large — 4 cubes

en rajoutant 5 cubes on obtient :

3 de hauteur, 5 de large — 9 cubes

en rajoutant 7 cubes on obtient :

4 de hauteur, 7 de large — 16 cubes

Conclusion : c'est au carré.

L'escalier simple :

au début on a : 3 de hauteur, 3 de large — 6 cubes

en rajoutant 4 cubes on obtient :

4 de hauteur, 4 de large — 10 cubes

en rajoutant 5 cubes on obtient :

5 de hauteur, 5 de large — 15 cubes

en rajoutant 6 cubes on obtient :

6 de hauteur, 6 de large — 21 cubes

Giorgio et François

a) *2 hauteur = 4*
3 hauteur = 9
4 hauteur = 16
5 hauteur = 25
6 hauteur = 36

b) *3 hauteur = 6*
4 hauteur = 10
5 hauteur = 15
6 hauteur = 21
7 hauteur = 28
8 hauteur = 36
9 hauteur = 45

c) *4 hauteur = 28*
5 hauteur = 45
6 hauteur = 66

Le nombre de hauteur fois le même nombre.

le nombre de hauteur : on fait toujours moins 1 jusqu'à zéro et on trouve le nombre de carrés.
Exemple :

8 hauteur
8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 carrés.

Rosalba et Maria

escalier : double	*simple*
2 – 4	*3 - 6*
3 – 9	*4 – 10*
4 – 16	*5 – 15*
5 – 25	*6 – 21*
6 – 36	*7 – 28*
7 – 49	*8 – 36*
8 - 64	*9 – 45*
9 – 81	*10 – 55*
10 – 100	
Toujours faire :	*Il faut faire :*
hauteur X hauteur	*3 X 4 : 2 = 6*

Hellen et Jelmire

Le tableau présenté est identique à celui de Rosalba et Maria avec pour commentaire :

Il faut toujours multiplier le chiffre par lui même

Il faut faire pour 3 étages :
3 + 2 + 1 = 6

Il faut toujours faire :
3 x 4 : 2 = 6
5 x 6 : 2 = 15
6 x 7 : 2 = 21

1) 2h 4 cubes
3h 9 cubes
4h 16 cubes
5h 25 cubes
6h 36 cubes

1500 · 1500 = 2250000

Céline Lulije

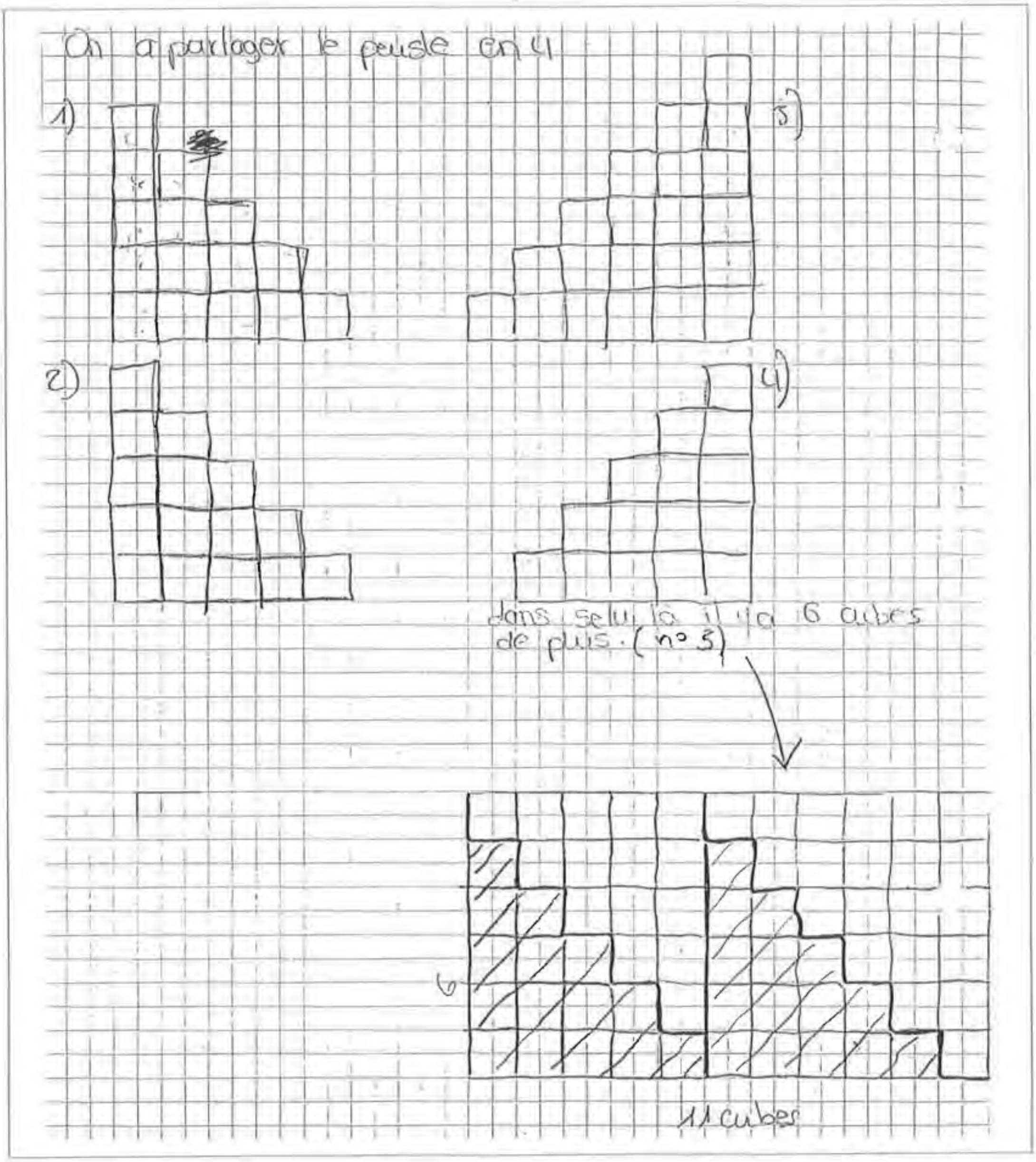
Explication: on a trouver parc-que 2h = 4 cubes allors on fait 2 · 2 = 4 cubes : 3h = 9 cubes 3 · 3 = 9 ainsi de suile.

2h 3 cubes
2) 3h 6 cubes
4h 10 cubes
5h 15 cubes
6h 21 cubes
7h 28 cubes

on fait 2 + 1 = 3, 3 + 3 = 6 mais c'est pas la bonne solution
2 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15 15 + 6 = 2
21 + 7 = 28 ainsi de suile

Explication 2 · 3 = 6 6 : 2 = 3
3 · 4 = 12 12 : 2 = 6
4 · 5 = 20 20 : 2 = 10

Quand on fait le calcul on rajoute 1 cubes de plus pour réusir a faire le calcule, puis on divise par 2.



La lecture des comptes rendus ainsi que l'observation de «ce qui s'est réellement passé en classe» appellent un certain nombre de commentaires :

- Les groupes sont immédiatement «entrés dans le problème» en manifestant un intérêt comparable à celui d'élèves orientés dans une division prégymnasiale.

- Durant l'activité, la motivation a fluctué au même rythme que lors d'un cours frontal, plus traditionnel, dans une alternance de concentration et de «respirations».

- Chaque groupe a livré un résultat plus ou moins pertinent. Par exemple, Julien et Hamed donnent des réponses pour les dix premières hauteurs d'escaliers des questions 1 et 2, sans aucune proposition de généralisation. Anaïs et Valérie, elles, dégagent la loi pour l'escalier double, mais ne se prononcent pas dans les autres cas. Par opposition à une activité de type juste ou faux, que l'on résout ou pas, chacun a donc été valorisé en fournissant tout ou partie de la solution.

- La situation ayant été représentée à l'aide d'un tableau, par exemple dans le cas de Giorgio et François, les élèves sont capables d'observer et de découvrir un résultat en fonction des précédents : «*exemple 8 :*

8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 carrés !»

- Les traces écrites de la recherche ne sont encore que des ébauches d'un compte rendu de qualité. Mais cet aspect n'appartient pas tant à l'orientation des élèves qu'à un manque certain de pratique dans ce domaine.

  Et même si quelques expressions demeurent approximatives – par exemple pour Hellen et Jelmire «*il faut toujours multiplier le chiffre par lui même*» – beaucoup de propositions se fondent sur un raisonnement parfaitement correct. C'est par exemple le cas dans le même travail, lorsque la loi pour l'escalier simple

$$n \mapsto \frac{n(n+1)}{2}$$

  est traduite, pour trois valeurs successives, par :
  «*il faut toujours faire :*
  3 · 4 : 2 = 6
  5 · 6 : 2 = 15
  6 · 7 : 2 = 21».

  Une des démarches est même remarquable, comme dans le cas de la représentation schématique de Céline et Lulije qui décomposent l'escalier quadruple de hauteur 6 pour le reconstruire sous la forme d'un rectangle de 6 X 11. Sans avoir poussé le raisonnement jusqu'à la généralisation ($n \mapsto 2n^2 - n$), elles ont tout de même découvert qu'un escalier quadruple de hauteur n se compose de quatre escaliers simples :
  trois sont de hauteur (n – 1), alors que le quatrième est de hauteur n.

Conclusion

Pour être complète, la démarche présentée ici devrait être accompagnée d'une description des phases de validation, par une mise en commun des résultats obtenus et d'institutionnalisation. Malheureusement, puisqu'il s'agissait d'un remplacement impromptu, ces deux périodes n'ont pu avoir lieu. Cependant, on peut admettre que pour les groupes ayant proposé des solutions correctes, la phase de validation s'est déroulée par le retour à la donnée lors d'une confrontation avec les valeurs découvertes en construisant les escaliers. Quant à la phase d'institutionnalisation, elle aurait permis, entre autres, de mettre en rapport les résultats des élèves avec des tableaux «canoniques et avec des graphiques tels qu'ils figurent dans la première partie de cet article. C'eût été alors l'occasion d'assimiler la notion de fonction par un entraînement à l'utilisation de ces deux outils mathématiques.

On voit donc, qu'une activité introduite par un problème présentant un intérêt permet d'aborder les notions du programme, tout en plaçant les élèves, même de niveaux moins élevé, dans une attitude de réflexion, de prise en charge personnelle et de construction d'un savoir nouveau.

A ce propos, il est particuliérement intéressant de savoir que l'OFIAMT a adopté un nouveau plan d'études en 1993 pour la maturité professionnelle, afin de permettre aux jeunes gens et jeunes filles d'obtenir les bases nécessaires pour une promotion professionnelle future et une formation continue tout au long de leur carrière. Les lignes directrices qui s'y rapportent précisent, entre autres, que les élèves doivent :

- *«démontrer leur compréhension des faits et de leur structure,*
- *défendre leurs propres raisonnements,*
- *faire preuve d'un esprit ouvert face à des situations nouvelles,*
- *savoir exprimer leurs intérêts et leurs sentiments,*
- *considérer les sous-systèmes et les particularités dans un contexte général,*
- *juger et décider avec soin,*
- *parler et écrire correctement.»*

Dans ces conditions et sans vouloir rejeter les exercices traditionnels qui visent à l'entraînement et à l'assimilation de notions mathématiques fondamentales, il est essentiel de permettre à tous les élèves de pouvoir atteindre ces objectifs comportementaux. Le recours à une mise en pratique d'un certain nombres d'activités ouvertes ne saurait que concourir à cette finalité et la brève expérimentation relatée ici semble montrer que, non seulement c'est possible, mais encore, que les élèves y découvrent du plaisir et de l'intérêt.

Miam-miam

Corine la bergère possède trois agneaux qu'elle met paître dans son champ.

Celui-ci a la forme d'une grille carrée, de cinq cases sur cinq cases.

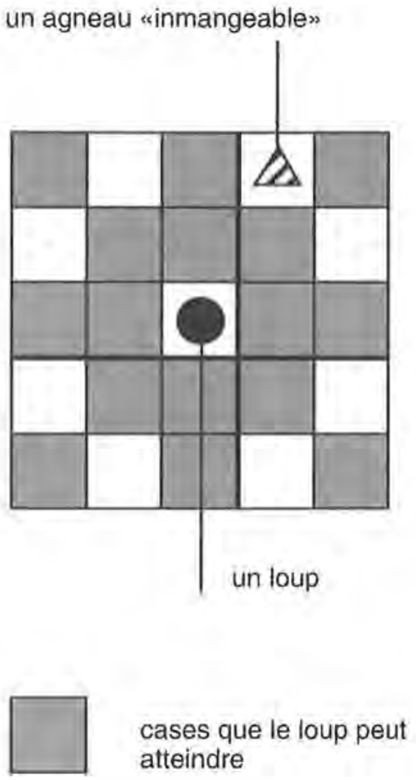
Chaque agneau occupe une case.

Mais voilà que les cinq loups de Mathieu investissent la grille, chacun d'entre eux occupant également une case.

Ils ont la particularité de pouvoir se déplacer selon les mêmes règles qu'une Dame, dans le jeu d'échec.

Existe-t-il une possibilité pour que, tous les animaux figurant dans la grille, les loups de Mathieu ne puissent croquer les agneaux de Corine ?

Merci d'envoyer votre solution à la rédaction.



A propos du hasard et de la nécessité

C. Neel-Sarqueda Adj. péd. des branches scientifiques SFP / DFJ / VD

De quoi avons-nous besoin et surtout dans quel but?

Cette interrogation prend tout son sens si on la ramène au monde de l'enseignement. Le cadre étant fixé, nous allons recentrer la question sur les mathématiques et plus particulièrement sur leur enseignement dans la formation professionnelle. D'aucuns diront que dans ce domaine les mathématiques se restreignent souvent au calcul professionnel (nous verrons plus avant que les choses sont plus complexes), et quand bien même, reste à définir quelles en sont les bases nécessaires.

Ces dernières années, dans le sillage de la mondialisation, la formation post-obligatoire a connu une évolution allant dans le sens d'exigences croissantes en matière de compétences, tant au niveau des savoirs que du savoir- être. Ce développement s'est opéré dans un laps de temps qui n'a pas toujours permis à tous les acteurs s'occupant d'enseignement de confronter leurs langages respectifs et encore moins de les évaluer en regard de leur apport comme certification de l'intégration de l'apprenant dans nos sociétés.

La formation professionnelle se caractérise par une dualité: un enseignement professionnel suivi en école et une formation pratique en emploi. Pour y accéder, le futur apprenti aura généralement à passer par des tests d'aptitudes organisés, le plus souvent, par des associations professionnelles, avant de pouvoir signer un contrat d'apprentissage dans la profession de son choix. Nul n'ignore qu'actuellement ces tests sont des concours devant permettre aux associations professionnelles de définir le profil nécessaire à la réussite de la formation dans la branche considérée. Si personne ne remet en question la légitimité de ces tests, il est par contre nécessaire de vérifier que leur contenu puisse mettre en évidence les compétences requises pour la réussite de la formation. A cet égard, une variable qui n'est pas négligeable est le langage utilisé dans les tests. En effet, afin d'améliorer l'adéquation des tests avec les exigences respectives des différentes professions, nombre d'associations professionnelles ont adapté, voire parfois même modifié, le contenu et le langage de leurs tests, plus particulièrement en mathématiques. Dans cet esprit, une collaboration s'est instaurée entre conseillers pédagogiques des mathématiques du SENEPS[1] et du SFP[2] ainsi qu'avec les responsables d'associations professionnelles, pour l'élaboration de tests de mathématiques, notamment pour les monteurs-électriciens. Il est à relever que si les notions de bases en mathématiques sont exigées, les compétences pour résoudre des problèmes et des situations concrètes de la vie courante sont également demandées.

Aux cours professionnels, les mathématiques sont abordées au travers d'exercices permettant de résoudre des situations propres aux différentes professions, allant du simple calcul de proportions et pourcentages à des applications plus complexes. Pour les professions les plus techniques, les mathématiques deviennent ainsi l'outil principal de la physique. Ceci étant dit, on se rend bien compte de la nécessité que la notion du nombre sous toutes ses formes soit bien

[1] SENEPS : Service de l'Enseignement Enfantin, Primaire et Secondaire.

[2] SFP : Service de la Formation Professionnelle

maîtrisée pour permettre la réflexion nécessaire à la résolution de problèmes concrets.

Depuis quelques années déjà, les apprentis ont la possibilité de suivre, en plus de leurs cours professionnels, des cours pouvant les mener à l'obtention d'une maturité professionnelle, leur ouvrant ainsi la porte des hautes écoles spécialisées. La philosophie de ces maturités professionnelles met l'accent sur l'acquisition de méthodes de travail permettant aux élèves de démontrer leur compréhension logique des faits et de leur structure, de défendre leurs propres raisonnements par l'argumentation, de faire preuve d'un esprit ouvert face à des situations nouvelles et d'exprimer leurs intérêts. Les candidats à la maturité professionnelle traitent ainsi méthodiquement de problèmes ouverts et complexes, inhérents à des domaines familiers. Ils savent faire des recherches, se documenter et établir des résumés. Ils savent ce qu'il ont fait et pourquoi il l'ont fait. Ils sont capables d'évaluer leur démarche avec un esprit critique en utilisant leurs connaissances générales. Le principe de cet enseignement est également d'élaborer, d'exploiter et d'étendre les relations avec d'autres branches, car elles motivent les développements mathématiques. Toutefois, pour atteindre les objectifs généraux qui précèdent, l'enseignement doit être intégré, du niveau de la scolarité obligatoire au hautes écoles spécialisées. Il doit d'autre part suivre un développement par étapes, qu'il s'agisse des cours, des contrôles, ou des examens de maturité :

1. Maîtriser et appliquer automatiquement des règles, savoir appliquer des solutions standards.
2. Comprendre et saisir des faits, concepts et théorèmes. Expliquer le fonctionnement d'un algorithme en utilisant ses propres mots, en évaluer l'importance.
3. Appliquer sa connaissance à de nouvelles situations. Savoir transférer ce qui a été appris de manière à trouver une solution appropriée à un nouveau type de problème.
4. Analyser des relations complexes. Trouver par soi-même des principes et des structures sous-jacents.
5. Poursuivre la réflexion, la compléter et l'améliorer. Rassembler et lier entre elles les choses que l'on a apprises.
6. Porter un jugement. Evaluer un tout plus vaste et plus complexe. Se forger une opinion en se fondant sur plusieurs points de vue.

On s'attend donc, en fin de compte, à ce que les élèves reconnaissent les situations et soient à même d'appliquer des stratégies de résolution des problèmes exercées pendant et en dehors du cours de mathématiques. Ce sont donc les procédés d'induction, la démarche heuristique, les suppositions et argumentations, qui sont visés par l'enseignement professionnel.

On en vient alors à la question du hasard et de la nécessité dans l'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire: on ne peut enseigner en espérant que le hasard de la sélection naturelle fasse son travail, bien au contraire puisqu'il s'agit de donner les outils permettant à chaque élève de progresser dans sa future formation; on ne saurait pas non plus enseigner uniquement en fonction de la nécessité de besoins futurs définis par les professions et qui, d'ailleurs, s'avèrent souvent vite être dépassés.

Par contre, le développement d'une méthode de travail et de l'esprit critique nécessaire à toute résolution de problèmes, qu'ils soient théoriques ou pratiques, me paraît être le fondement qui devrait être à l'origine du portfolio de chaque élève sortant de la scolarité obligatoire. En cela, l'enseignement des mathématiques n'est pas une fin en soi, mais bien un vecteur formateur.

Le Kangourou des Mathématiques

Participez à la plus grande fête des maths du monde le Jeudi 18 mars 1999

Comme chaque année depuis 1991, le Kangourou des mathématiques se déroulera dans toute l'Europe, le jeudi 18 mars prochain.

- 21 pays participent
- plus de 1 million et demi d'élèves
- Des centaines de milliers de cadeaux
- Des dizaines de voyages en Pologne, Hongrie, France, Russie, Ecosse ...

La Diffusion de Culture Mathématique

(extraits de la Charte du Kangourou Sans Frontières)

" L'association Kangourou des mathématique et l'association Kangourou Sans Frontières, contribuent à la popularisation et à la promotion des mathématiques auprès de tous les jeunes. Elles ont pour objectif de stimuler et motiver la grande majorité des élèves en complément d'autres actions, concours, rallyes, olympiades.

A l'occasion de ce jeu, il est diffusé auprès de tous les participants des brochures et livres de jeux, de culture et de vulgarisation mathématiques Ces deux associations s'efforcent de promouvoir les échanges culturels entre les pays membres. A ce titre, chaque année des séjours-rencontres d'été sont organisés entre les lauréats des différents pays. "

Comment Jouer ?

- Si vous êtes enseignant, parlez-en à votre classe et suivez "la marche à suivre" ci-dessous.
- Si vous êtes un élève, entre 9 et 18 ans, parlez-en à votre professeur de mathématique.
- Si vous êtes parent d'élèves, parlez-en à vos enfants qui en parleront à leurs professeurs !
- Sinon parlez-en à un parent d'élèves !

En plus des malices du Kangourou que tout participant reçoit en échange de ses 15 FF de participation. Un élève sur six environ recevra un livre, un cdrom ou un T-shirt. Ces cadeaux supplémentaires sont distribués dans chaque établissement au prorata du nombre d'inscrits et quels que soient les résultats de l'établissement.

La Marche à Suivre

1. Vous nous renvoyez votre bulletin d'inscription (voir plus loin).
2. Avant le 18 mars, préparer le jeu qui aura lieu dans le matin du jeudi 18 mars 1999.

   Notez que vous pouvez jouer postérieurement au jeudi 18 mars 1999 (même jusqu'à fin avril; simplement vos élèves ne pourront alors pas gagner de premiers prix).
3. Début mars nous vous ferons parvenir les feuilles de réponses.
4. La veille du concours, nous vous e-mailons , les sujets (que vous devez reproduire) ainsi qu'une feuille de réponses «secours» au cas où vous n'auriez pas reçu les feuilles standard.

5. Début mai nous vous envoyons les malices du Kangourou, que vous avez payées et les cadeaux supplémentaires de votre établissement (colis de 170 g environ par élève). Les résultats vous parviendront par courrier séparé, si possible par courrier électronique.

Suisse

BULLETIN D'INSCRIPTION

Nom de l'établissement : ....

Nom du professeur coordinateur Kangourou : ....

Adresse de l'établissement :

....

....

....

Fax (confidentiel) : ....

E-mail (confidentiel, auquel vous souhaitez recevoir les sujets) :

....

Nombre de participants en :

Ecoliers	Cm1 (4P)	I__I I__I	Cm2 (5P)	I__I I__I
Benjamins	6ème (6ème)	I__I I__I	5 ème (7ème)	I__I I__I
Cadets	4 ème (8ème)	I__I I__I	3 ème (9ème)	I__I I__I
Juniors	2nde (10ème)	I__I I__I	1ère S (11ème)	I__I I__I

autres classes de lycées I__I I__I

Etudiants terminale S I__I I__I math sup. I__I I__I

Total :

Ci-joint un chèque de .... x 15 FF = ... Francs Français.

Minimum 30 Malices du Kangourou soit minimum **450 Francs Français** correspondant à

Notre Numéro de fax : 00 33 1 43 31 40 38
Notre e-mail : info@mathkang.org
Le site internet : http://www.mathkang.org

Ou trouver les Infos sur le Kangourou des Mathématiques ?

Association Kangourou :
tél. : 0033 1 43 31 40 30
fax : 0033 1 43 31 40 38

- Pour recevoir les rapports de l'association 1998, une affiche 99, les sujets 98 et 97, envoyer une enveloppe à votre adresse, timbrée à 18FF.
- Pour voir le règlement, une expo-math, tous les pays qui jouent au Kangourou, d'autres sites sur les mathématiques dans le monde :

http://www.mathkang.org

Jouez ou Entraînez-vous ...

Voici quelques extraits des questions 98, et des malices du Kangourou 98 choisies parmi les plus difficiles (réponce sur l'internet) :

1) Blanche neige partage entre les sept nains rangés par taille sa récolte de 77 champignons. Elle sert d'abord le plus petit et, ensuite, chaque nain reçoit un champignon de plus que le nain précédent. Combien de champignons aura reçu le plus petit de sept nains ?

   7   8   9   10   11

2) Le jour sur Mars dure 40 minutes de plus que sur la Terre. Quelle est la différence de durée entre une semaine sur Mars et une semaine sur la terre ?

   4h40min   2h80min   7h20min
   40min   0min

3) Une pastèque pèse 4/5ème de kg de plus que 4/5ème de cette pastèque. Quel est son poids ?

   4/5 kg   4kg   3kg   4,5kg   5kg

4) Adel et Filip ont chacun trois cartes posées visibles devant eux. Adel a les numéros 2, 4, 6 sur les siennes et Filip les numéros1, 3, 5. Ils placent leurs cartes chacun leur tour sur l'une des six cases :

   |_| |_| |_| |_| |_| |_|

   Adel joue en premier. Son objectif est que le nombre de six chiffres obtenu finalement soit le plus petit possible et l'objectif de Filip est d'obtenir le plus grand possible. Chacun joue de son mieux. A quel nombre vont-ils aboutir ?

   123456   654321   254361
   253146   253416

5) Les nombres entiers de 1 à 2049 sont inscrits en rond, comme autour du cadran d'une horloge. On barre un nombre sur deux en commençant par barrer le nombre 1 et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Quel sera le seul nombre survivant ?

   2   64   512   1024   1998

   (Question subsidiaire : et si l'on place autour du cadran les nombres de 1 à 1998, quel sera alors le dernier chiffre barré ?)

6) Dans une pièce obscure il y a 20 pots de confiture : 8 pots de framboises, 7 de prunes et 5 d'abricots. Quel est le nombre maximum de pots que l'on peut prendre (dans le noir) si l'on veut être sûr qu'il y ait une sorte de confiture dont il reste au moins 4 pots et une autre dont il reste au moins trois pots ?

   5   6   7   8   9

Le Tapis du Sarconistan

[ndlr] *Le casse tête du numéro 184 (rappelé ici) nous a valu deux belle réponses de lecteurs que nous avons le plaisir de publier aujourd'hui, la seconde figurant à la page 30. Merci à Martine d'avoir accompagné sa réponse d'explications. Merci à Ahmed d'avoir osé ses quelques lignes d'accompagnement pleines de savoureux «sarconismes». Ces deux lecteurs recevront un livre de problèmes, en français !*

CASSE TETE

Corine et Mathieu se sont acheté, tout récemment, deux superbes tapis en provenance du «Sarconistan» ! Le premier mesure 1 m x 8 m, alors que la taille du second est de 10 m x 10 m.
Malheureusement, la pièce dans laquelle ils comptent les placer est une surface rectangulaire de 9 m x 12 m.
Ils ne désirent couper que le plus grand des deux tapis, et seulement en deux morceaux.
Comment vont-ils procéder ?

Chers Corine et Mathieu,

Permettez-moi tout d'abord de vous donner un petit conseil : avant d'acheter un tapis, pensez à mesurer la pièce dans laquelle vous voulez le placer ! En effet, n'est-il pas regrettable de devoir couper ce magnifique «Sarconistan» ? sans parler de la difficulté liée à l'opération elle-même...

Malgré ma réprobation, et après 3 tubes d'aspirine, je suis en mesure de vous communiquer le plan de découpe ci-joint.
Avec mes cordiales salutations.
Martine Simonet (La Montagne de Cernier)

NB.

Je trouve difficile d'expliquer la démarche qui nous a conduit à la solution; malgré tout je vais tenter de le faire ci-dessous (bien que ça ne soit pas demandé explicitement) :

1. *Envie de résoudre ce casse-tête car on peut le faire au moyen du dessin (visualisation).*

2. *Très vite, j'ai eu des «certitudes» intuitives !*

   a) la découpe du grand tapis doit permettre de repositionner les 2 morceaux en les décalant pour diminuer la longueur et augmenter la longueur.

   b) les 2 morceaux doivent être symétriques (aspect esthétique !)

   c) le trou (1 x 8) sera au milieu et dans le sens de la longueur.

   d) on ne retourne pas de pièce, sinon on obtient un drôle de tapis !

3. *Passer à l'action : j'ai procédé à partir du tapis de 10 x 10 mais également de celui de 9 x 12 (avec le trou 1 x 8 au milieu), par dessin puis par découpage pour vérification, ajustements, nouveau dessin et découpage, etc.)*

   La certitude d'être sur la bonne piste (cf. point 2) m'a permis de ne pas céder au découragement... J'évalue à environ 30 min. (pause comprise !) le temps mis pour trouver la bonne «combinaison».

[ndrl] Le plan mentionné est le même que celui qui figure à la page 30.

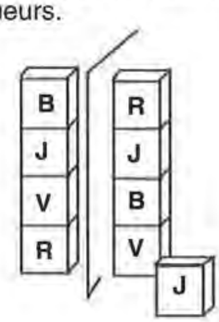
La tour cachée

F. Jaquet, IRDP

Le jeu

Voici un jeu très apprécié de première année primaire[1] .. Il se joue à trois joueurs qui disposent de multicubes rouges, verts, bleus, jaunes et d'un petit carton. Ses règles sont simples et, après quelques parties, les élèves peuvent le pratiquer de manière autonome :

«Dans la carton, le meneur de jeu cache une tour de quatre étages construite avec un cube rouge, un cube jaune, un cube bleu et un cube vert. Il ne doit plus y toucher.
Les deux autres joueurs doivent découvrir la couleur qui correspond à chaque étage de la tour.
Ils construisent ensemble une première tour avec les quatre couleurs à disposition. Le meneur de jeu leur donne les cubes correspondant aux étages dont la bonne couleur a été trouvée. Par exemple : il donne un cube jaune si le cube jaune se trouve à la même place sur sa tour que sur celle fabriquée par les deux joueurs.



[1] Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E. (1996). *Mathématiques, première année. Livre du maître*. p. 59. Corome

Puis les deux joueurs construisent une deuxième tour, le meneur de jeu leur donne de nouveaux renseignements, et ainsi de suite jusqu'à la découverte de la tour cachée. Les tours fabriquées pour découvrir la tour cachée ne doivent pas être défaites.»

Du point de vue de l'enseignant, les problèmes de gestion de ce jeu étant facilement résolus, il reste à savoir quels sont les apprentissages favorisés par l'activité et comment les évaluer sans devoir mettre en place un lourd dispositif d'observation.

Les lignes qui suivent tenteront de donner quelques réponses à ces deux questions.

Analyse mathématique

Cette analyse est nécessaire pour pouvoir se prononcer sur les propositions des joueurs qui cherchent à découvrir la tour, sur leurs réponses aux informations données par le meneur de jeu et sur le nombre d'essais nécessaires. Que penser d'une découverte en deux essais, en quatre, en dix ... ?

Il y a 24 tours possibles respectant les contraintes de l'énoncé. (Il s'agit des permutations de 4 objets, dont le nombre est donné par la formule $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.)
Nous allons examiner chacune de ces possibilités, d'un point de vue d'un joueur qui utilise à chaque fois toutes les informations reçues et en tire les conséquences logiques dans la construction de ses propositions successives.

1. Premier essai

La probabilité de découvrir la tour cachée (TC) au premier essai est de 1 cas sur les 24 cas possibles, comme le montre le tableau suivant, qui indique également le nombre de cubes bien placés (cbp) par rapport à la tour cachée. (Les quatre étages de celle-ci sont représentés, de haut en bas, par les quatre lettres a, b, c, d, plus faciles à mémoriser que d'autres codes comme «rouge, bleu, jaune, vert» ou «R, B, J, V». En gras, les cbp de chacun des choix).

TC choix posssibles

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
a	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	d	d	d	d	d	d
b	**b**	**b**	c	c	d	d	a	a	c	c	d	d	a	a	**b**	**b**	d	d	a	a	**b**	**b**	c	c
c	**c**	d	b	d	b	**c**	**c**	d	a	d	a	**c**	b	d	a	d	a	b	b	**c**	a	**c**	a	b
d	**d**	c	**d**	b	c	b	**d**	c	**d**	a	c	a	**d**	b	**d**	a	b	a	c	b	c	a	b	a
cbp	4	2	2	1	1	2	2	0	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	0	0

Dans 23 cas (sur 24) il faudra un deuxième essai. Sur ces 23 propositions, 6 ont déjà deux cubes bien placés, 8 n'en ont qu'un seul et les 9 dernières n'en ont aucun. Il faudra examiner chacune de ces trois situations dans la suite de l'analyse.

2. Deuxième essai

2a, Deux cubes bien placés au premier essai (6/24)

Les 6 propositions avec deux cubes bien placés ont chacune deux cubes mal placés. Il suffit donc d'intervertir ces derniers pour obtenir à coup sûr la tour cachée au deuxième essai.

2b Un cube bien placé au premier essai (8/24)

Il n'y a qu'un seul cube présenté par le meneur de jeu, et pourtant cette information a déjà de nombreuses implications que nous illustrons par ce tableau à double entrée, à côté duquel la TC est comparée à l'une des huit propositions dont un cube est bien placé (p1, *20* dans le tableau précédent) :

couleurs

étages	a	b	c	d
4			non	non
3	non		non	
2	non	non	oui	non
1		non	non	

TC	p1
a	d
b	a
c	**c**
d	b

- La présence du cube (notée en caractères gras dans le tableau de droite) permet d'écrire «oui» dans la ligne du deuxième étage et la colonne de la couleur c.
- Le principe logique du «tiers exclu» permet de dire que si le cube c est au deuxième étage, il n'est pas au premier, ni au troisième, ni au quatrième et d'écrire «non» dans les trois cases correspondantes de sa colonne.
- Le même principe dit que ni a, ni b, ni d ne trouveront leur place au deuxième étage et permet d'écrire trois nouveaux «non» dans cette ligne.
- L'absence de réponse positive pour les trois autres cubes est la négation de leur

présence aux étages proposés en p1, qui se traduit par trois «non» : au quatrième étage pour d, au troisième pour a et au premier pour b.

Le joueur sait donc, par cette suite de déductions, qu'il n'a plus que deux choix possibles pour chacun des cubes a, b et d pour élaborer son deuxième essai.

S'il choisit de placer a en 4, b ne pourra y être et se retrouvera à l'étage 3 (seule possibilité), par conséquent, le cube d sera en 1. Par ce premier choix, il obtiendra la TC au deuxième essai.

Si, dans l'autre éventualité, il choisit de placer le cube a au premier étage de sa tour, c'est d qui se voit obligé d'aller en 3 et b en 4. Dans ce cas, la deuxième proposition ne recevra, comme au premier essai, qu'une seule réponse affirmative : le cube c. Mais on pourra ajouter trois nouveaux «non» dans le tableau en a1, b4 et d3.

Il y a donc une chance sur deux, dans ce cas, de découvrir la tour cachée au deuxième essai. En cas d'insuccès, on est certain d'y arriver au troisième essai. Ceci revient à dire que sur les 8 premières propositions dont un cube est bien placé, il y aura 4 réussites au deuxième essai et 4 au troisième.

2c Aucun cube bien placé au premier essai (9/24)

Si on ne reçoit aucun signal du meneur de jeu pour la première proposition, il ne faut pas en déduire qu'il s'agit d'un «coup dans l'eau», car cette absence se traduit par quatre négations, comme l'illustre le tableau suivant, relatif à l'une des neuf propositions dont aucun cube n'est bien placé (p0, *10* dans le premier tableau) :

couleurs

étages	a	b	c	d
4		non		
3			non	
2				non
1	non			

TC	p0
a	b
b	c
c	d
d	a

Ce tableau montre qu'il ne reste plus que trois choix possibles pour chaque couleur. Examinons ces trois éventualités, en décidant de commencer par placer le cube a :

- Si a va au quatrième étage, il subsiste trois choix pour b, mais les positions de c et d seront, à chaque fois, entièrement déterminées.
- Si a va en 3, c'est pour c qu'il restera trois choix, les positions de b et d étant déterminées.
- Si a va en 2, c'est pour d qu'il restera trois choix, les positions de b et c étant déterminées.

Finalement, cette proposition (p0) conduit à 3 x 3 = 9 constructions à choix pour le deuxième essai.

Ces 9 nouveaux choix pour chacune des 9 propositions initiales ne présentant aucun cbp conduisent à examiner 81 (9 x 9) combinaisons des premier et deuxième essais. Il y a, certes, des regroupements possibles, en fonction de la «parité» des tours proposées (l'étude des permutations en distingue deux catégories; les paires et les impaires), mais la tâche reste longue et répétitive. (Le lecteur pressé peut passer directement au tableau de synthèse de la page ...)

Par exemple, voici ce que devient le tableau ⇨ précédent après un deuxième essai (noté q1). On constate dans ce cas qu'il n'y a qu'un seul cbp : le cube a, et que le troisième essai est entièrement déterminé et aboutit à la TC : c2 et d1, puis, par conséquent, b3.

couleurs

étages	a	b	c	d
4	oui	non	non	non
3	non		non	non
2	non	non		non
1	non		non	

TC	p0	q1
a	b	a
b	c	d
c	d	b
d	a	c

Les deuxièmes essais de ces 81 combinaisons se répartissent ainsi :

- 9 tours avec 4 cbp, c'est-à-dire la découverte de la tour cachée 1 fois sur les 9 cas où aucun cube n'est bien placé au premier essai. En se référant aux 24 permutations initiales, on peut dire que, globalement, l'une d'elle conduit à la tour cachée après un premier essai avec 0 cbp.
- 24 tours avec 2 cbp,
- 24 tours avec 1 cbp,
- 24 tours avec 0 cbp.

Bilan provisoire, après le deuxième essai

Sur les 24 permutations initiales:

1 est la TC au premier essai.
Probabilité : 1/24 ou 4,2 %

11 = 6 + 4 + 1 conduisent à la TC au deuxième essai.
Probabilité : 11/24 ou 45,8 %

Au total, on a donc 12 chances sur 24; c'est-à-dire une probabilité de 1/2 ou 50%, de trouver la TC au premier ou deuxième essai.

3. Troisième essai

3b. Un seul cube bien placé au premier et au deuxième essai

Ces 4 cas ont été examinés en *2b.* Il ne reste plus qu'une possibilité pour chaque cube et le troisième essai sera donc le dernier. Probabilité de 4/24 = 1/6 ou 16,7 %.

3c1. Aucun cube bien placé au premier essai , deux cubes bien placés au deuxième essai

Comme en *2a*, il suffira de permuter les deux cubes mal placés pour obtenir la TC au troisième essai.
La probabilité est, pour ces cas, de 1/9 ou 11,1 %. (9/24 x 24/81 = 1/9).

3c2. Aucun cube bien placé au premier essai , un cube bien placé au deuxième essai

Ce cas a été examiné par l'exemple du tableau précédent. Le troisième essai est le dernier.

Comme en *3c1*, la probabilité de cet événement est 1/9.

3c3. Aucun cube bien placé au premier essai ni au deuxième essai

Voici un exemple qui, après les deux essais sans cbp, laisse encore quatre choix possibles pour le troisième essai :

- a4, b3, c2, d1, c'est la TC,
- a4, b1, c2, d3, c'est une tour avec 2 cbp, qui conduira à la TC lors du quatrième essai,
- a2, b3, c4, d1, c'est de nouveau une tour de 2 cbp,
- a2, b1, c4, d3, c'est une tour sans cbp, qui ne laisse plus qu'un seul choix, la TC, pour le quatrième essai.

couleurs

étages	a	b	c	d
4		non		non
3	non		non	
2		non		non
1	non		non	

TC	p0	d0
a	b	d
b	c	a
c	d	b
d	a	c

Il y a d'autres situations où il n'y a que deux choix pour le troisième essai, l'un conduisant immédiatement à la TC, l'autre le reportant au quatrième essai.

Pour le troisième essai on obtient les probabilités de 31/72 = 1/6 + 1/9 + 1/9 + 1/24 et pour le quatrième, 5/72 = 1/24 + 1/36

Selon la formule consacrée, nous laissons le lecteur le soin de vérifier ces résultats, en s'aidant du diagramme suivant (les probabilités sont notées à chaque étage, celles qui sont entourées d'un rectangle sont les produit des probabilités - conditionnelles - qui «y conduisent»).

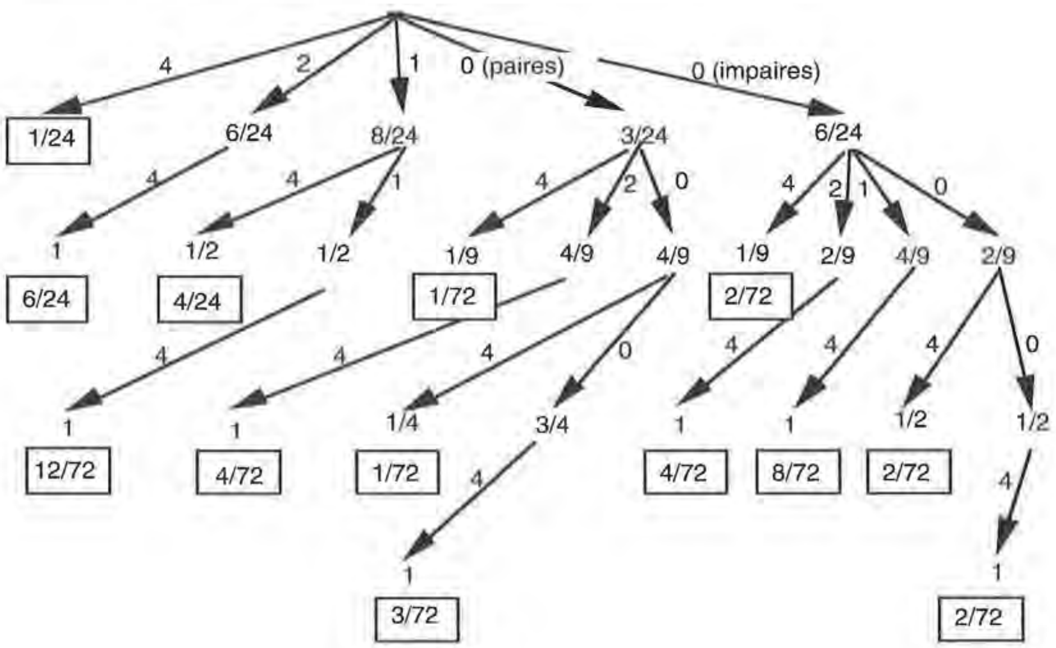


Tableau de synthèse

Nombre d'essais	probabilité de découvrir la TC	probabilité cumulée, en %
1	1/24 ou 4,2 %	4,2
2	11/24 ou 45,8 %	50
3	31/72 ou 43,1 %	93,1
4	5/72 ou 6,9 %	100

Evaluation

On tire trois types d'apports de cet examen de l'activité d'un point de vue mathématique

- Un constat sur les outils mobilisés ou renforcés dans le jeu de la tour cachée : des opérations logiques fondamentales telles que le principe du tiers exclu, la négation et la déduction.
- Un instrument d'analyse des parties : le tableau à double entrée qui met en évidence, très clairement, les relations et opérations logiques en jeu.
- Un moyen de calculer un «indice de réussite» de l'activité par le tableau de synthèse ci-dessus : on peut dire par exemple, de manière infaillible, qu'une succession de 5 essais pour découvrir la tour cachée révèle au moins une démarche inutile ou une contradiction logique; on peut aussi émettre des doutes sur la rigueur des démarches d'une personne qui a besoin, en moyenne de trois à quatre essais alors qu'un bon joueur réussit en deux ou trois essais dans la grande majorité des cas.

Ces trois apports sont, évidemment, destinés à l'adulte. Il n'est pas question, par exemple, d'institutionnaliser les outils de la logique et du raisonnement. Il serait malheureux de faire des tableaux d'analyse des parties un objet d'enseignement. On trahirait toute la philosophie du jeu de la tour cachée en attribuant des notes scolaires ou des jugements basés sur les indices de réussites que permet d'établir l'analyse mathématique.

Ces déviations et perversions signalées, il faut reconnaître l'intérêt de ces apports, qu'on peut transcrire ainsi dans le domaine des besoins et préoccupations de l'enseignant :

1. Le jeu de la Tour cachée a une place légitime en classe de mathématiques car il ressort du développement de connaissances et outils reconnus nécessaires et indispensables pour cette discipline.

En marge de cette affirmation, il faut préciser que si l'activité «a sa place» en mathématiques, sa seule présence ne suffit pas à garantir l'émergence des connaissances potentielles qu'elle est susceptible de générer. On le verra dans les points suivants.

2. Le tableau d'analyse des parties est un instrument puissant d'évaluation des relations et opérations logiques mises en jeu par celui qui cherche la tour cachée. Au cas où l'enseignant souhaite savoir comment procède un élève, il prend le rôle du meneur de jeu et esquisse un tableau d'analyse. Il y note les «oui» et les «non issus de chacune des propositions et peut ainsi déterminer le type de relations dont l'élève tient compte (négation, exclusion,..) et le nombre de ces relations qu'il est en mesure de gérer simultanément. Cette observation peut aussi se faire au moyen de fiches d'analyses, remplies de manière autonome par les élèves (voir «fiche pratique», p. 33).

C'est ce contrôle qui permettra d'évaluer l'activité de l'élève, son degré de maîtrise des relations logiques sous-jacentes, ses progrès ou ses régressions et, finalement, de répondre à la question -existentielle - précédente sur la présence de connaissances mathématiques en construction.

3. L'indice de réussite permet une estimation rapide des progrès de l'élève. Par exemple, si ce jeu est placé au «Coin mathématique» il paraîtrait judicieux de l'accompagner d'un «rapport d'activité» sur lequel chaque élève noterait combien de parties il a jouées et en combien d'essais. Si on constate que, progressivement, ce nombre diminue, on peut en conclure, avec une quasi certitude, qu'un progrès a été réalisé.

Il faut relever à ce propos qu'on ne porte ici pas de jugement sur ce nombre moyen d'essais. Il dépend de l'âge et du développement intellectuel de l'enfant; mais d'autres facteurs interviennent vraisemblablement : le goût et le plaisir de jouer à ce jeu, le nombre de parties jouées, la qualité des interactions avec les autres joueurs (partenaire et meneur de jeu), etc.

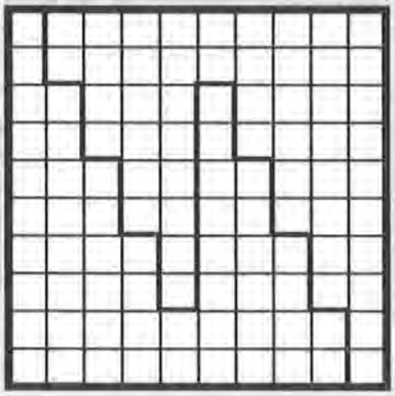
C'est la pratique[2] de la Tour cachée qui dira si des moyennes de 5 à 6 essais sont courants en première année, et à partir de quel âge, en général, l'activité perd tout intérêt parce que les stratégies de découvertes paraissent trop évidentes.

[2] Nous serions reconnaissants aux lecteurs intéressés par ce jeu de nous envoyer quelques indications sur le degré de réussite de leurs élèves, en fonction de leurs âges.

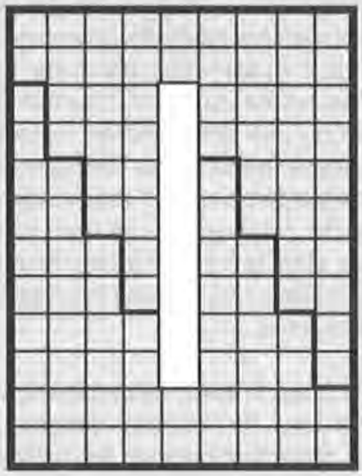
Mes amis,

Zi vous écris de Gian'Hi, la capitale di Sarconistan. Zi souis un lecteur très assidous di votre revue. Pour li casse tête, ti li fais comme ça :

Ti li découpes des escaliers dans li zouli tapis...



Ti glisses une partie sur l'autre



Mais l'histoire li dit pas si li Mathieu l'a laissé sa Corine au vendeur des zoulis tapis !

Ahmed ben Brehet

CABRidées :

Du cube à l'octaèdre

Michel Chastellain, SPES (VD)

Superbe idée et merveilleuse concrétisation dans cette construction de notre collègue Pierre-André Glauser qui méritait bien, depuis le temps, de figurer en bonne et due place dans notre rubrique de «CABRidées».

Il suffit de déplacer tranquillement le point **ici**, entre les points intitulés respectivement, **cube** et **octa**(èdre) pour voir apparaître, comme par magie, une succession de constructions qui représentent autant d'étapes intermédiaires entre ces deux solides.

Bien évidemment, l'illustration que l'on peut en faire sur un support papier n'a strictement rien à voir avec le «film» qui se déroule à l'écran, dans l'environnement de «Cabri-géomètre».

cube au départ

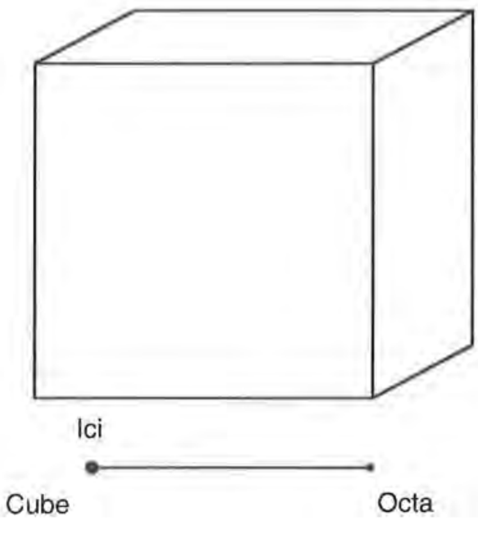


fig. 1

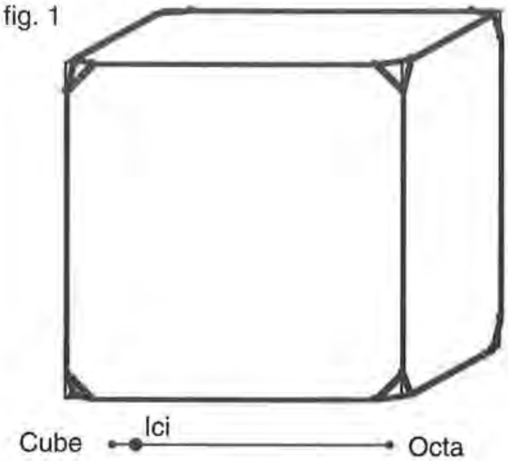


fig. 2

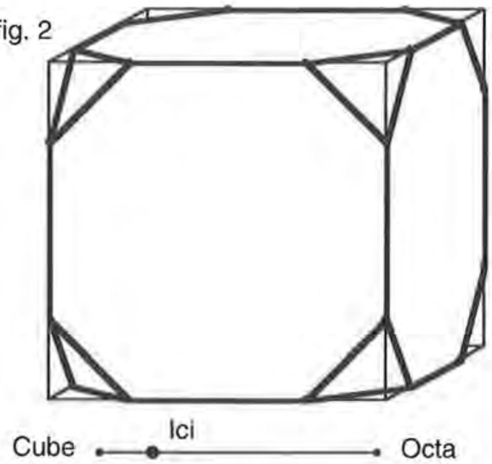


fig. 3

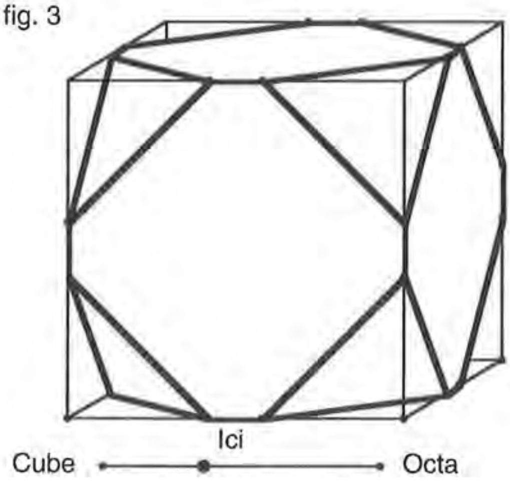


fig. 4

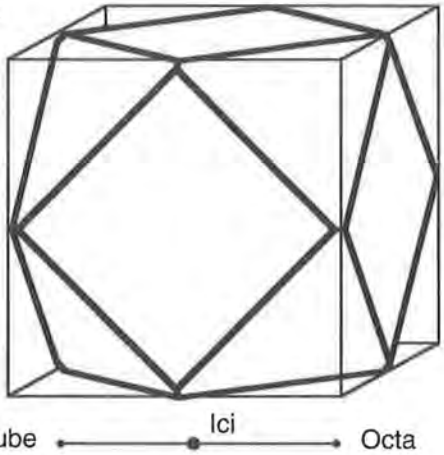


fig. 5

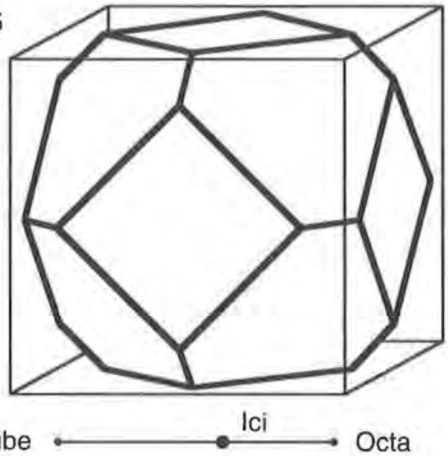


fig. 6

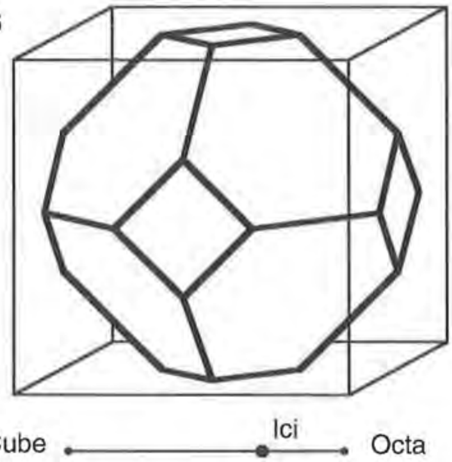
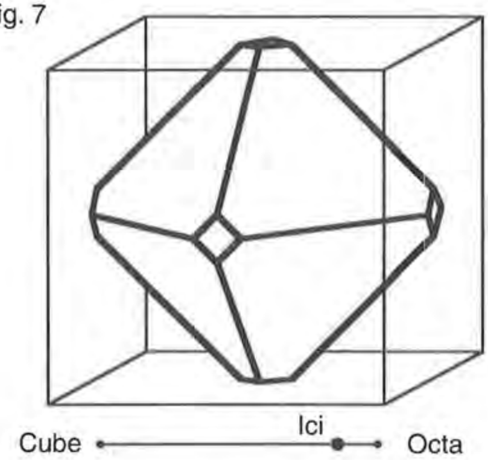
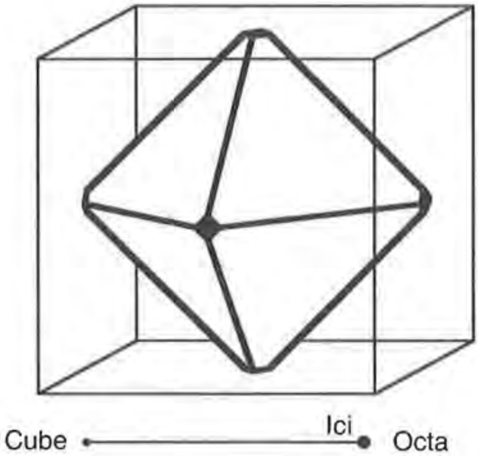


fig. 7



octaèdre à l'arrivée



Cette observation incite à poser une foule de questions comme :

– Combien y a-t-il de sommets, de faces et d'arêtes dans chaque figure ?

– Quel est le nom de la figure n° 4 ?

– Si l'arête du cube mesure **a**, que vaut celle de l'octaèdre ?

– Quelle est l'aire totale de l'octaèdre ? Et son volume ?

– ...

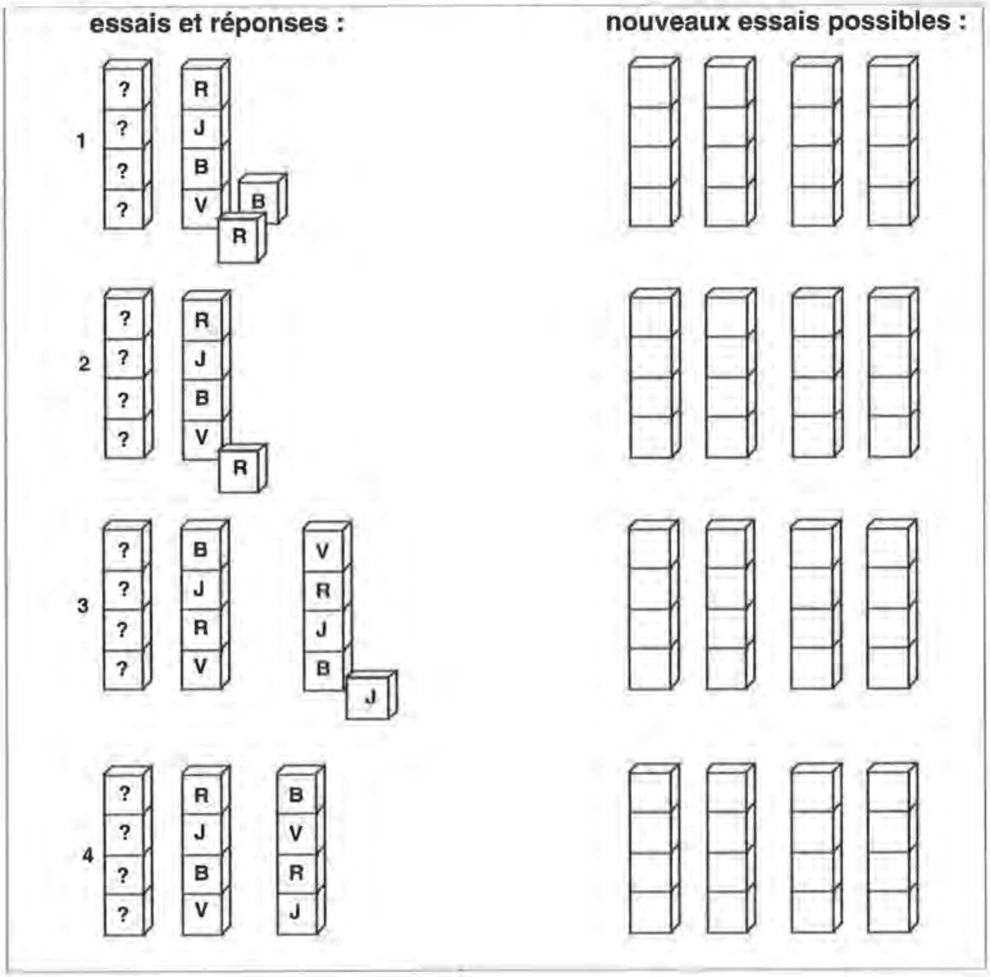
Fiches pratiques

La tour cachée[1]
Fiche pratique 185.1

Les quatre «tours cachées» sont formées d'un cube rouge (R), d'un vert (V), d'un bleu (B) et d'un jaune (J).

Pour la première, après ton premier essai, on te répond que le rouge et le bleu sont bien placés, Pour la deuxième, on te répond qu'il n'y a que le rouge bien placé. Pour la troisième, seul le jaune est bien placé au deuxième essai, alors qu'aucun cube n'est bien placé au premier essai. Les deux essais pour découvrir la quatrième n'ont aucun cube bien placé.

Peux-tu dire à chaque fois quelle est la tour cachée ? Pourquoi ?



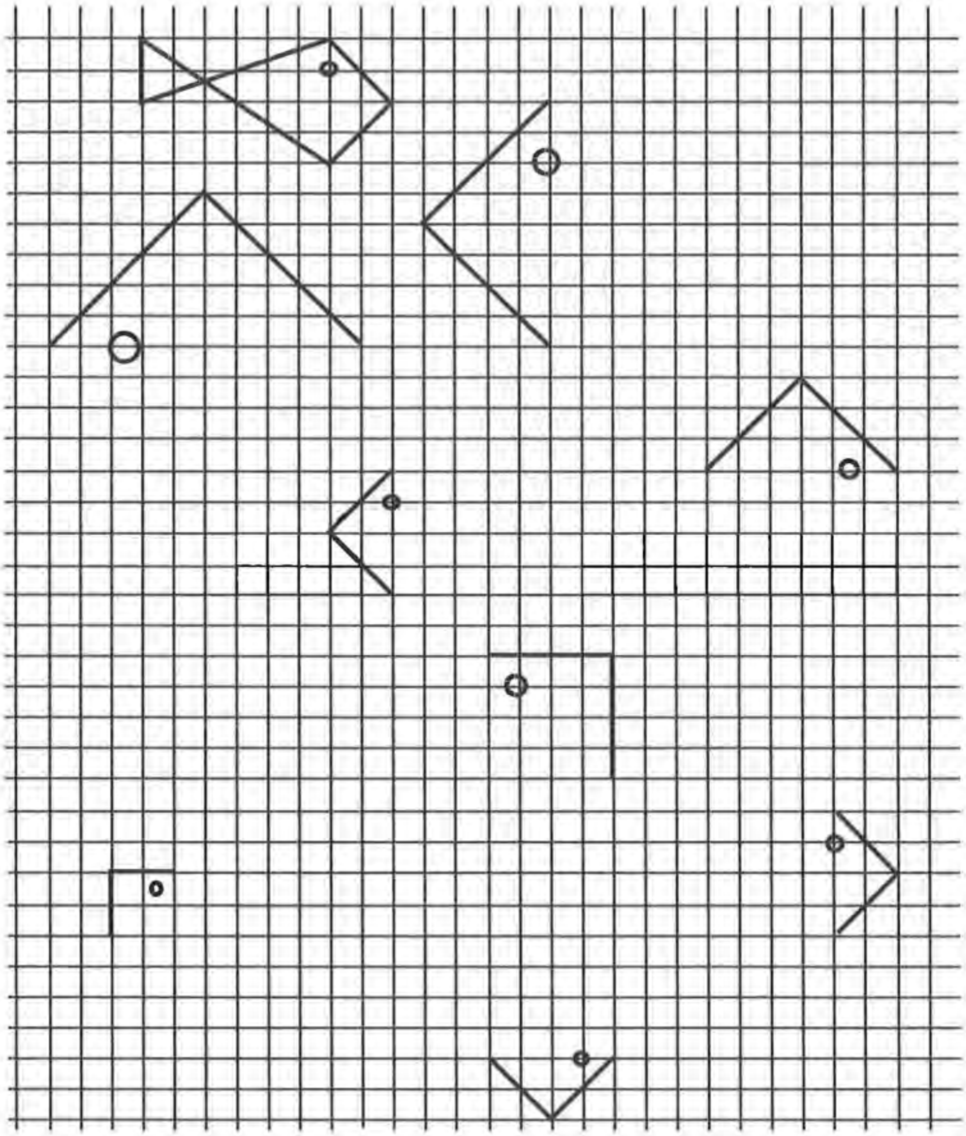
[1] Activité tirée de : Ging E., Sauthier M. -H., Stierli E. (1996). *Mathématiques, première année.* Livre du maître.. COROME. (p. 59)

POISSONS[2]

Fiche pratique185.2

Dans cet aquarium, il y a toute la famille Carpe : les grands parents Carpe, papa et maman Carpe et leurs cinq enfants, dont l'un est déjà dessiné entièrement. Naturellement, ils se ressemblent tous. Même s'ils n'ont pas toujours la même taille, ils ont tous exactement la même forme.

Complète les dessins des autres membres de la famille Carpe.



[2] Problème tiré de la finale du 5e *Rallye mathématique transalpin* (1997)

L'horloge de la gare de Mons

Denis Odiet

"Une grande part du temps scolaire est consacré à apprendre de nouvelles connaissances et à s'exercer à leur utilisation. Reste-t-il du temps pour développer le plaisir de chercher, pour lancer aux élèves des sortes de défis intellectuels dont l'objectif se trouve dans l'activité plus que dans le résultat ? Du temps aussi pour développer les attitudes et les connaissances nécessaires à cette activité, du temps pour essayer, pour se tromper, pour discuter une solution avec d'autres, pour tenter de convaincre, pour mettre en doute une méthode ou une réponse?"[1]

Dans le numéro 179 de Math-Jeunes[2], Claude Villers propose, sous le joli titre de "Quelle heure est-elle ?", un problème présentant les aspects essentiels cités plus haut. Le voici :

Au moment de pénétrer dans le vaste bâtiment de la gare, Maxime jeta rapidement un regard interrogatif sur la grande façade vitrée. C'est qu'elle était dotée d'une grande horloge au design très simplifié. Douze gros points marquaient les emplacements des heures et deux aiguilles lumineuses se chargeaient de renseigner les voyageurs. Bien que grossière, la lecture de l'heure du moment pouvait se faire à la minute près.

Maxime constata ainsi qu'il disposait encore de six minutes avant le départ de son train. Tout de suite, il se retrouva instantanément[3] *dans le hall d'attente où il jeta un coup d'oeil vers l'horloge visible par transparence.*

"Tiens, se dit-il, si je n'y prenais garde, je croirais disposer maintenant de trois heures et demie d'attente".

Quelle heure est-il à l'horloge de la gare?

Quelle est l'heure de départ du train que Maxime veut emprunter ?

Tout problème mathématique lié à une montre, notamment aux positions des aiguilles sur son cadran, plus précisément à l'angle formé entre celles-ci, me ramène inexorablement à ma période scolaire lycéenne. Mon professeur de mathématique d'alors, fervent adepte d'un enseignement de type purement transmissif, en était particulièrement friand, tellement d'ailleurs qu'il avait réussi à installer parmi plusieurs de ses élèves un véritable sentiment de dégoût. Il avait beau s'évertuer à asséner son schéma de résolution, sa méthode infaillible, son "Il suffit de faire comme ça !", peine perdue, chaque nouveau problème d'horloge suscitait systématiquement pour beaucoup d'entre nous angoisse, impossibilité de mobiliser la recette du prof, donc invitation à passer directement au problème suivant.

Bientôt vingt ans ont passé... Trouvé lors de quelques paisibles lectures de vacances, un extrait de Marc Legrand[4] résume à lui seul ce pittoresque professeur: "Dans le Supérieur plus encore que dans le Secondaire, on rencontre de telles personnes parfois passionnées par leur discipline; des élèves ou des étudiants, ou plus exactement

1 "Pourquoi des mathématiques à l'école?" Roland Charnay ESF Editeur, 1996

2 MATH-JEUNES
Revue trimestrielle publiée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

3 *derechef* dans le texte original

4 "La crise de l'enseignement : un problème de qualité" Marc Legrand ALEAS Editeur, 1989

des auditeurs sont nécessaires à leurs discours, mais au fond ce sont plus des conférenciers que des professeurs, car ils n'ont aucun souci de ce qui se passe réellement dans la tête de leurs interlocuteurs. Certains d'entre eux d'ailleurs déclarent sans ambages ne pas vouloir le savoir; ils sont là, disent-ils, pour enseigner leur discipline..."

Grâce à l'horloge de la gare de Mons, l'heure à la réconciliation avec de tels énoncés a enfin sonné, si j'ose dire... Entendons-nous : il me paraît absolument évident que ce type de problème bien spécifique invite à la mise en oeuvre d'outils de résolution bien personnels, reflets de la compréhension, de la perception et de la conceptualisation ô combien différentes que chacun d'entre nous s'en fait. Il est donc illusoire de vouloir imposer un type de méthode à ses élèves. L'enseignant doit en être conscient. Les différentes productions d'élèves de degré 9, n'ayant pas les mêmes compétences mathématiques, en sont une illustration tangible.

Au fait, avez-vous trouvé l'heure de départ du train ?

Nul doute que la précision de l'énoncé du problème - c'est là aussi un de ses côtés remarquables - n'est pas étrangère à votre réussite. La seule petite ambiguïté réside éventuellement dans "l'expression" et la notation de l'heure : est-ce exact de dire que si l'on retranche trois heures à 1h de l'après-midi (13 h), il est 10 h du matin? Ceci n'a en tous les cas aucunement perturbé les élèves, bien désireux de ne pas ériger un obstacle supplémentaire. Pour eux, la condition d'infériorité d'une heure par rapport à une autre rime avec le recul des aiguilles.

Vous allez probablement retrouver votre démarche parmi celles proposées ci-dessous.[5]

Voici la plus simple, fort logique au demeurant :

<u>L'horloge de la gare de Mons</u> Julien et Sébastien

On s'est dit qu'il fallait utiliser du papier calque. C'est plus facile pour s'imaginer l'heure depuis l'intérieur du hall. On est parti dans le côté droit en haut de l'horloge.

Après quelques essais, on s'est aperçu que l'heure doit se situer entre 13h00 et 14h00.

Heure devant la gare	Départ du train	Heure hall	Différence
13h40	13h46	10h20	3h26
13h41	13h47	10h19	3h28
13h42	13h48	10h18	3h30

<u>Réponse</u> : il est 13h42; le train part à 13h48

L'emploi du papier calque prend ici une dimension non dépourvue de sens : n'est-ce pas le support inévitable de l'introduction de la symétrie axiale ?

5 les travaux présentés ont été "relookés", mais sont l'exact reflet des productions des élèves.

La démarche de Yohann et de Luc est plus détaillée...

L'horloge de la gare de Mons

Yohann et Luc

1) Nous avons cherché les zones impossibles pour la petite aiguille pour l'heure actuelle extérieure.
Nous avons découvert deux zones impossibles : 

Il faut reculer dans le temps avec la petite aiguille pour que cela soit possible.

2) Nous avons cherché les zones possibles pour la grande aiguille.
Nous avons remarqué qu'elle doit être près du quart (15) ou du trois-quart (45).
La moitié de six minutes : 3 minutes

15 - 3 = 12 ...symétrie axiale... 48
48 + 30 = 1h18
12 + 6 = 18
Cela prouve que l'aiguille des minutes peut se trouver sur 12 (heure actuelle)

45 - 3 = 42 ...symétrie d'axiale... 18
18 + 30 = 48
42 + 6 = 48
Cela prouve que la grande aiguille peut se trouver sur 42 (heure actuelle)

3)

Heure actuelle (1)	Heure par symétrie (2)	(2) + 3h30	(1) + 6 min
1h12	10h48	2h18	1h18
1h42	10h18	1h48	**1h48**
2h12	9h48	1h18	2h18
2h42	9h18	0h48	2h48
7h12	4h48	8h18	7h18
7h42	4h18	7h48	**7h48**
8h12	3h48	7h18	8h18
8h42	3h18	6h48	8h48

4) Les heures de départ du train sont : 1h48 et 7h48.

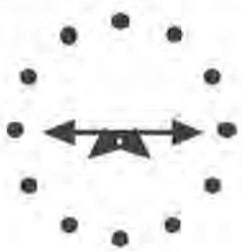
Celle de Dominik et Nicolas est très subtile. Comment ne pas la rapprocher de celle très grâcieusement présentée par un ancien membre du comité de Math-Ecole ?

L'horloge de la gare de Mons

Dominik et Nicolas

Nous avons fait un axe de symétrie d'axe 12h - 6h.

Ensuite, nous avons tracé un écart de 1h45 de chaque côté.



En enlevant 3 minutes, nous obtenons l'heure de la gare : 7h42.

Le train part à 7h48.
De l'autre côté, il est 4h18.

Quand il est 4h 05, après midi,
devant la gare

l'écart horaire est de
4h 05 + 4h 05 = 8h 10

inversément

Si l'écart constaté est de :
3h 24 = 1h 42 + 1h 42

Il "est" 4h 05, avant midi,
dans le hall

il est donc 1h 42, après midi,
devant la gare

et il "est" 1h 42, avant midi,
dans le hall

L'emploi de l'outil équation était évidemment attendu. Ici, équation à une variable...

MC   <u>L'horloge de la gare de Mons</u>   Brice et Raphaël

Heure lue depuis l'extérieur	Heure lue depuis l'intérieur
1	11
2	10
3	9
...	
x ⟶	-1(x - 12)

Nous avons trouvé une équation.

	unité heure	unité minute
heure lue depuis l'extérieur	x	x
heure lue depuis l'intérieur	-1(x - 12)	-1(x -720)
heure de départ du train	x + 0,1	x + 6

unité heure	unité minute
x + 0,1 = -1(x - 12) + 3,5	x + 6 = -1(x - 720) + 210
x + 0,1 = -x + 12 + 3,5	x + 6 = -x + 720 + 210
2x = 15,4	2x = 924
x = 7,7	x = 462

7,7 h = 7h 42 min = 462 min   <u>Réponse</u> : il est 7h 42 min et le train part à 7h 48 min

... ici, à deux variables :

<u>L'horloge de la gare de Mons</u> — Tarik et Ignac

Quand on regarde l'horloge par transparence, c'est en fait une symétrie axiale. Si l'aiguille des heures est placée sur "h", elle sera par transparence sur "11 - h" et l'aiguille des minutes "m" sera placée sur "60 - m".

$h; m \longrightarrow 11 - h ; 60 - m$

Ensuite, l'heure indiquée sur la 1ère montre doit donner la même heure moins 3h24 par transparence.

$h; m \longrightarrow h - 3 ; m - 24$

On peut en déduire les deux équations suivantes :

$11 - h = h - 3$ et $60 - m = m - 24$

$7 = h$ $42 = m$

7h + 42m = 7h 42 min

Il est 7h42, le train part à 7h 48. De l'autre côté, il semble être 4h18.

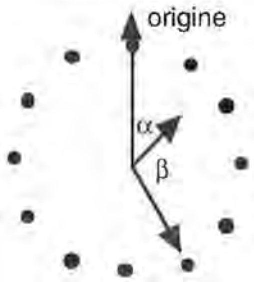
Le travail de Pauline et Lorraine est vraiment surprenant et bien révélateur de ce qui peut se passer dans la tête de certains de nos élèves.

<u>L'horloge de la gare de Mons</u> — Pauline et Lorraine

En 1 heure, la petite aiguille avance de 30°;
En 1 minute, " " " " de 0,5° (30 : 60).

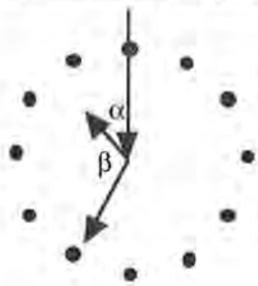
En 1 heure, la grande aiguille avance de 360°;
En 1 minute, " " " " de 6°.

<u>A l'extérieur de la gare</u>



<u>Heure lue</u> : (α ; β)

<u>A l'intérieur de la gare</u>



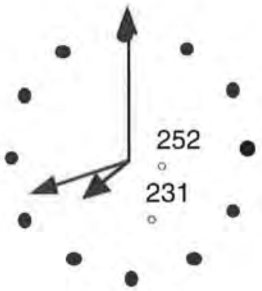
<u>Heure lue</u> : (360° -α ; 360° -β)

Heure de départ du train : $(\alpha ; \beta)$ + 6 min $(\alpha + 6 \cdot 0{,}5° ; \beta + 6 \cdot 6°)$
$(\alpha + 3° ; \beta + 36°)$

Heure lue de l'intérieur + 3h30 = heure de départ

1) Petite aiguille : $(360° - \alpha) + 3{,}5\text{ h} \cdot 30° = \alpha + 3°$
$360° - \alpha + 105° = \alpha + 3°$
$\alpha = 231°$

2) Grande aiguille : $(360° - \beta) + 180° = \beta + 36°$
(en 3h 30, la grande aiguille parcourt 1260°, elle se déplace donc de 180°.) $\beta = 252°$



Petite aiguille (231°) : il est entre 7h et 8 h

Grande aiguille (252°) : en 1 min $\longrightarrow$ 6°
en ? min $\longrightarrow$ 252°

252 : 6 = 42

Vérification : en 42 min, la petite aiguille parcourt 21° $7 \cdot 30° + 21° = 231°$

Conclusion : il est 7h42, Maxime doit prendre son train à 7h48.

Ah oui, j'allais oublier ... L'horloge de la gare de Mons, la voici !

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Enseigner la géométrie dans l'espace, APMEP	......	(ex. à Fr. 32.-)
Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	......	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Les maths & la plume, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Pliages mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	......	(ex. à Fr. 25.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	......	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres.	......	(ex. à Fr. 6.-)
Maths en vacances. Hypercube.	......	(ex. à Fr. 15.-)

Les anciens numéros de ***Math-Ecole*** (prix en page 2 de couverture)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	......	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	......	(ex. à Fr. 20.-)
Panoramaths 96, APMEP	......	(ex. à Fr. 15.-)*
Problemi, che passione, Ed. Capitello.	......	(ex. à Fr. 9.-)
Récrémaths	......	(ex. à Fr. 13.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	......	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	......	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	......	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	......	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Singe et la Calculatrice (n° 14)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
La Biroulette russe (n° 9)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Roi des Nuls (n°13)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Sabre d'Aladin (n° 15)	......	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.
Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7