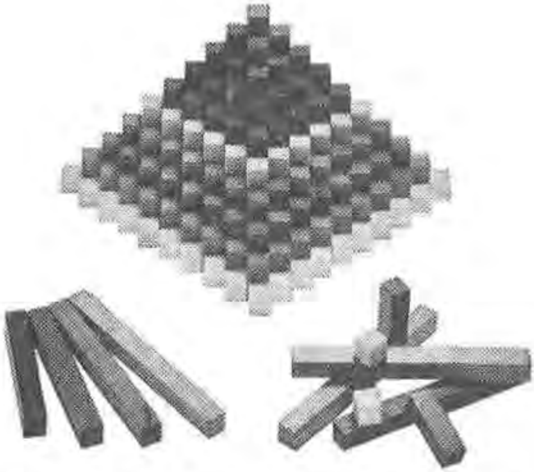
63

Mathématique 2e année

MATH
ECOLE

MAI 1974
13e ANNÉE



MATH ECOLE 63

13e ANNÉE MAI 1974

Introduction

En Suisse romande, dès l'automne 1974, tous les élèves de 2e primaire et tous les maîtres et maîtresses qui enseignent dans ce degré pourront disposer des ouvrages de mathématique qui respectent fidèlement l'esprit et le contenu du programme de CIRCE (Commission interdépartementale romande de coordination de l'enseignement) .

Pour les premiers, il s'agit d'un recueil comprenant environ 180 fiches d'exercices. Pour les seconds, c'est une méthodologie suivie de commentaires se rapportant aux fiches qui a été élaborée.

Ces nouveaux moyens d'enseignements se situent dans la suite de ceux prévus pour la première année. Ils sont conçus de la même manière. Comme ces derniers, ils sont le fruit de la collaboration de représentants de tous les cantons romands provenant de secteurs divers. Des maîtresses en activité impliquées dans l'expérience du renouvellement de la mathématique, des maîtresses d'application, des maîtresses de méthodologie, des spécialistes de la recherche pédagogique, des professeurs de mathématique, etc. ont participé à la création des documents.

On retrouve le découpage de la matière correspondant à celui du programme. Les quatre avenues sont donc:

— Ensembles et relations	(ER)
— Numération	(NU)
— Opérations	(OP)
— Découverte de l'espace	(DE)

Cette présentation n'implique nullement un cloisonnement des sujets d'étude. Les interpénétrations sont d'ailleurs fréquentes. Par exemple, plusieurs activités de l'avenue ER débouchent sur une recherche numérique correspondant à l'avenue OP.

Grâce au caractère cyclique du programme romand, il a été possible de revenir sur des activités du même type que celles poursuivies en 1re année soit pour approfondir les notions connues, soit pour en prolonger l'étude et déboucher sur des concepts plus riches et dont la portée est plus large.

Les élèves qui n'ont assimilé que partiellement certaines notions du programme de l'année précédente ont donc l'occasion de combler leurs lacunes au travers d'activités portant sur des objets nouveaux. Ceux qui ont maîtrisé toutes les notions ont la possibilité de vérifier leurs connaissances dans des recherches se rapportant à des collections présentant de nouvelles particularités ou comprenant plus d'objets. Les uns et les autres, malgré la reprise de l'étude de quelques thèmes fondamentaux n'auront donc jamais l'impression de s'en tenir uniquement à une répétition. Leur esprit pourra constamment être tenu en éveil.

Un exemple permet d'en apporter la preuve:

Les activités de classification ont été entreprises en première année déjà. Les divers modes de représentation ont été introduits: diagramme de Venn, diagramme de Carroll, diagramme en arbre. En deuxième année, ces activités sont reprises et les divers modes de représentation connus sont utilisés. Des difficultés nouvelles apparaissent par le fait que le nombre d'objets est plus grand et que les critères de classement sont plus nombreux. Par ailleurs, on ne se contente plus seulement de classer après avoir observé les attributs mais l'élève est appelé à retrouver les critères de classement et dans certains cas simples à organiser complètement un classement.

A la lecture des pages de la méthodologie et en observant les fiches destinées aux élèves, on constatera que bon nombre d'objets mathématiques ignorés dans l'enseignement traditionnel de l'arithmétique sont contenus dans les documents. Ils apparaissent dans toutes les avenues, dans la première surtout.

N'oublions pas que ces objets nouveaux ne représentent qu'une partie du renouvellement. A eux seuls, ils ne justifieraient pas le mouvement général de réforme. Le bénéfice serait nul si l'on devait remplacer un certain dogmatisme par un autre. Parfois, on entend parler de l'enseignement de la mathématique moderne: Le qualificatif «moderne» n'est pas approprié. Il fait vite vieillot! Toutefois, si l'on tient à le garder, il est préférable de dire qu'il s'agit d'un enseignement moderne de la mathématique. Le renouvellement concerne l'enseignement et pas uniquement la matière.

Sans une prise de conscience au niveau de la pédagogie, les objectifs généraux et les buts indiqués au début de chaque jeu de la méthodologie ne peuvent être atteints. La fonction magistrale de transmission autoritaire du savoir doit faire place à celle de l'enseignant qui suggère, qui propose, qui conseille, qui encourage l'élève dans la recherche, qui l'aide dans la découverte, qui tient compte de ses intérêts et de ses motivations; il lui permet ainsi d'assimiler les notions mathématiques par une construction personnelle et non par imitation ou par répétition. Dans la classe, le maître n'est pas le seul agent actif; l'enfant lui-même devient ainsi le principal agent actif de sa formation. Il acquiert ainsi des connaissances qui ont une signification pour lui. De plus, dans cette optique, il apprend à affiner son jugement, à développer son esprit critique, à devenir capable de s'adapter à de nouvelles situations.

Charles Burdet

Avertissement

Les articles ci-après ne constituent pas réellement une description de la «Méthodologie 2P» car les auteurs ont estimé qu'un résumé de leur ouvrage n'apporterait pas au lecteur de «Math-Ecole» les renseignements qu'il désire connaître, à savoir: des explications au sujet des options méthodologiques choisies et, pour certains chapitres, une esquisse de la progression adoptée depuis la première jusqu'à la quatrième année. Ils ont donc procédé au choix de quatre thèmes, un dans chacune des quatre «avenues» du programme romand: après un bref rappel de la préparation faite en classe de première, les auteurs ont tenté de montrer dans quel esprit et à quel niveau ces thèmes sont traités en classe de deuxième. Ils ont émis ensuite quelques considérations sur les prolongements et les développements que cette matière peu recevoir dans les classes suivantes. Les sujets retenus sont en outre étroitement liés à ceux qui avaient été développés lors de la présentation de «Math I P».

Mario Ferrario

AVENUE ER: ensembles et relations

Relation d'équivalence

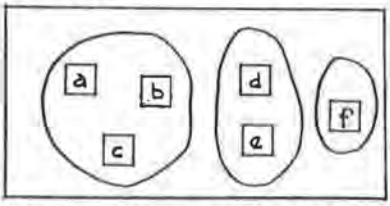
par M. Ferrario, directeur du Centre d'information mathématique, Bienne

Le professeur de mathématique qui enseigne au degré secondaire a presque toujours une réaction de surprise lorsqu'il apprend que la notion de relation d'équivalence figure dans un programme destiné à des enfants de six à dix ans. Le professeur en question ne conteste nullement l'importance de ce concept, mais il sait que son étude complète nécessite un bagage mathématique relativement important: ensemble, élément, relation, réflexivité, symétrie, transitivité, partition, réunion, intersection, ensemble vide, classe d'équivalence et ensemble-quotient, pour ne parler que des «matériaux» de première nécessité.
En réalité le programme romand est à la fois moins ambitieux et beaucoup plus prudent. Relevons tout d'abord une distinction révélatrice: on n'y mentionne pas la «relation d'équivalence», mais seulement la «notion d'équivalence»; celle-ci n'exclut d'ailleurs pas une approche de celle-là, d'où le titre du présent article! Précisons ensuite qu'il n'est nullement nécessaire de se servir de l'imposant arsenal mentionné plus haut: il est en effet parfaitement possible de se passer complètement de cette terminologie, même si les activités proposées utilisent implicitement la plupart des notions qu'elles recouvre.

Insistons finalement sur le fait que la priorité est donnée à l'action sur le formalisme: la généralisation s'opèrera plus tard, lorsque les élèves auront rencontré de nombreuses autres situations dans lesquelles intervient cet important type de relation.
La notion d'équivalence est étroitement liée à l'idée de classement; c'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle fait sa première apparition dans les activités spontanées exercées par l'enfant bien avant son entrée à l'école. Il est donc pédagogiquement naturel et logique d'y faire appel au degré primaire (voir l'article consacré aux *Classements* dans le No 55 de Math-Ecole). C'est ainsi que, en première année, les enfants ont classé des objets d'après leur nature, d'après leur forme, d'après leur couleur, etc. Ils ont ensuite classé des collections d'objets (considérées elles-mêmes comme des objets) selon leur cardinal: les nombres naturels, qui constituent incontestablement une des acquisitions les plus importantes faites à ce niveau, sont ainsi apparus comme des classes d'équivalence.
Dans le «jeu 5» de la *Méthodologie 2P* on établit un lien entre l'aspect statique des classements et celui, plus dynamique, des relations. On y fait successivement appel à des critères non numériques, puis à des propriétés numériques; on y utilise également plusieurs modes de représentation: le diagramme de Venn, le diagramme sagittal et le tableau cartésien. Pour la description des différentes phases de ce jeu, le matériel (six pantins dessinés ou découpés) est remplacé par des lettres selon le tableau ci-dessous:

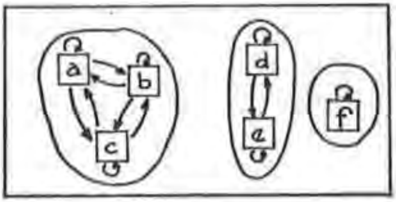
Pantin	Couleur de l'habit	Nombre de boutons	Dessin du chapeau	Lettre
Premier	vert	2	rayé	a
Deuxième	jaune	3	rayé	b
Troisième	rouge	2	rayé	c
Quatrième	vert	3	uni	d
Cinquième	rouge	1	uni	e
Sixième	rouge	2	à pois	f

Phase a): *lien entre le diagramme de Venn et le diagramme sagittal*
On observe les attributs des objets, puis on choisit un critère et on représente le classement au moyen d'un diagramme de Venn [1].



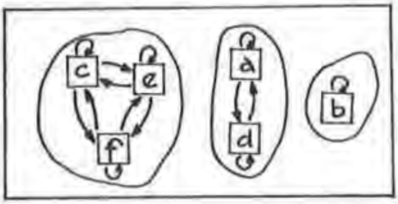
[1] Le diagramme de Carroll et le diagramme en arbre dichotomique ne conviennent pas pas lorsqu'on ne fait pas appel à la négation des attributs.

Ce n'est qu'après avoir effectué le classement que le lien verbal est recherché; les flèches et les «boucles» sont ensuite dessinées.

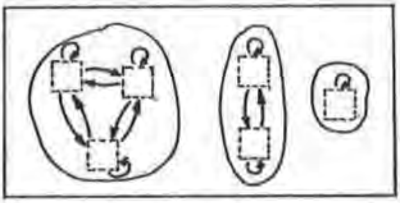


Phase b): *recherche du lien verbal*

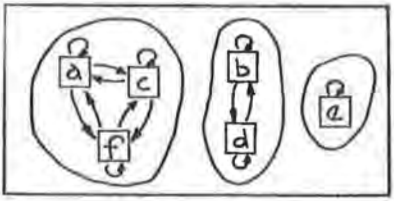
On dispose les objets différemment, mais sans indiquer aux enfants le critère choisi et sans toucher aux flèches; il s'agit de trouver le nouveau lien verbal.



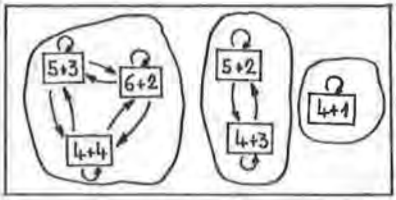
On retire les objets.



On cherche s'il existe d'autres classements sans toucher aux flèches.

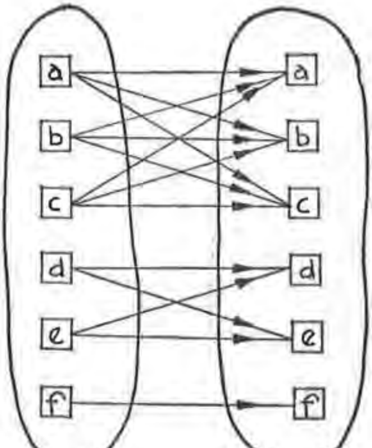


Phases c): *utilisation d'un critère numérique;*
et d): *remplacement des objets par les éléments d'un autre référentiel*



Phase e): *passage au tableau cartésien*

Ce passage est réalisé par l'intermédiaire d'un diagramme sagittal de transition dans lequel on représente deux fois la collection des objets.



	a	b	c	d	e	f
a	X	X	X			
b	X	X	X			
c	X	X	X			
d				X	X	
e				X	X	
f						X

Il est alors recommandé de comparer les deux modes de représentation: le diagramme sagittal de la phase a) et le diagramme cartésien ci-dessus; on tentera en particulier d'établir une correspondance entre les flèches (y compris les «boucles») du premier et les croix du second.

Une dizaine de fiches d'élèves se rapportent directement à la relation d'équivalence; trois d'entre elles (ER-35, ER-36 et ER-38) me paraissent particulièrement intéressantes car elles exigent de l'enfant un authentique travail de recherche susceptible de remplacer avantageusement les traditionnels «problèmes». L'une d'elles est reproduite ici à titre d'exemple: il s'agit de dégager l'information contenue dans un tableau et d'en donner une interprétation au moyen d'un coloriage.

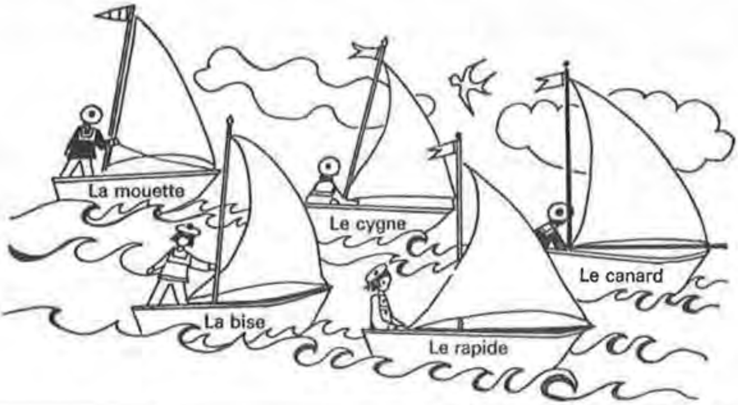
ER – 36

... a la même couleur de voile que ...

Observe.

	La mouette	Le cygne	Le canard	La bise	Le rapide
La mouette	×				×
Le cygne		×			
Le canard			×	×	
La bise			×	×	
Le rapide	×				×

Colorie les voiles.



En troisième et en quatrième années on conduira des activités permettant aux élèves de prendre conscience des propriétés (réflexivité, symétrie et transitivité) de la relation d'équivalence et les exemples numériques prendront davantage d'importance.
Pour évoquer un avenir encore plus lointain, signalons que c'est à l'aide du concept d'équivalence (chaînes de «machines» équivalentes) que seront ultérieurement introduits les entiers relatifs et les nombres rationnels; au degré secondaire, plusieurs notions fondamentales (celle de vecteur par exemple) peuvent également être abordées au moyen de la relation d'équivalence.

AVENUE NU: Numération

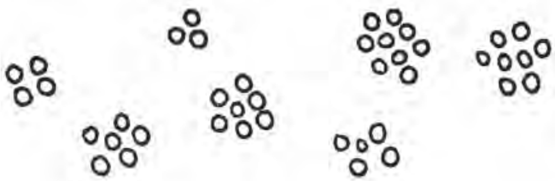
Comptage en différentes bases

par Françoise Waridel, maîtresse d'application, Yverdon

Le chapitre Numération aborde, en première année, la notion de groupements; en deuxième année, cette notion est étendue aux groupements de groupements (groupements de 2e espèce). Avec des enfants de cet âge, il est intéressant de développer ce point du programme par des exercices de comptage, comptage en base dix et aussi en d'autres bases.
Spontanément, les enfants jouent à compter «en avant», «en arrière», de deux en deux, de cinq en cinq, en faisant des sauts de dix, mais toujours en base dix. Ces exercices gardent toute leur valeur et nombreux sont les enfants qui, de cette manière, situent mieux les nombres. Le comptage en bases autres que la base dix apporte une dimension nouvelle à ce genre d'exercice; il procure aux élèves l'occasion d'effectuer une recherche et de prendre conscience du passage d'un ordre de groupements à un autre en observant ce qui se passe au niveau du code. L'élève se rend compte qu'il y a trois niveaux: le langage, par exemple «huit», le code chiffré en base dix: 8, le code chiffré en base cinq: 13. Il est évident que le comptage en différentes bases ne doit être abordé qu'avec l'aide d'un matériel et qu'en aucun cas, il ne doit être exercé systématiquement.

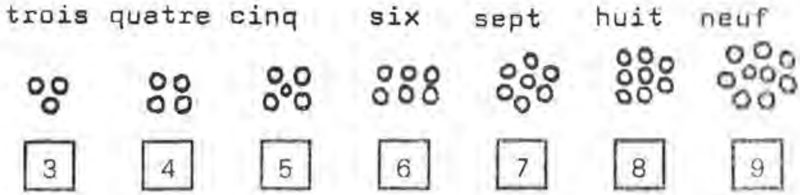
Jeu 5

Un petit groupe d'enfants est réuni autour de la maîtresse qui prépare des petits tas de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 jetons; les tas sont disposés sur la table sans aucun ordre:

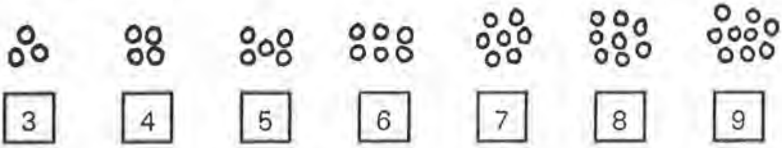


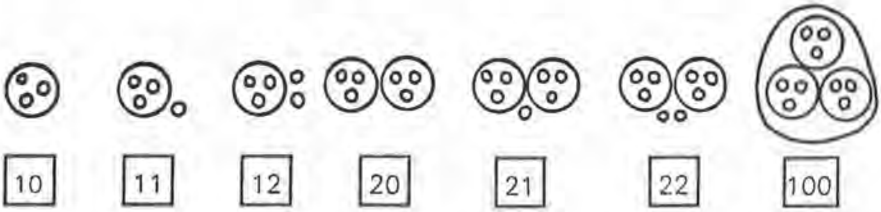
— *Combien y a-t-il de jetons dans chaque tas?*
— *Quel tas a le plus de jetons? le moins?*
— *Quel tas a un jeton de plus (de moins) que celui-ci?*
— *Quel tas a deux jetons de plus (de moins) que celui-là?*
— *Comment sérier ces tas en commençant par celui qui a le moins de jetons?*

Les enfants font le travail, puis écrivent le nombre correspondant à chaque tas:



La maîtresse demande à un enfant de prendre autant de jetons qu'il y en a dans le premier tas, à un autre enfant autant de jetons qu'il y en a dans le deuxième, etc. Chacun groupe ses jetons en base trois et note le code sur une étiquette.
Les enfants sont ensuite amenés à sérier les tas comme précédemment et à placer sous chacun d'eux le code correspondant en base trois.





— *Observons les tas dans lesquels les jetons sont groupés. Quel est celui qui a le moins de jetons?*
— *Quel est son code? (un — zéro).*
— *Que peut-on dire du tas qui suit? (Il compte un jeton de plus).*
— *Quel(s) chiffre(s) du code est(sont) modifié(s) par ce jeton «en plus»?*
On passe ainsi en revue chaque tas et son code. Puis on demande à un enfant de lire à haute voix toute la série des codes en base trois.

— *Qui peut écrire le code du tas qui viendrait se placer juste après le plus grand?*
(C'est le code 101).

On vérifie par la manipulation et l'on continue de la sorte jusqu'au tas de douze jetons.

On demande également aux enfants de compléter la sériation dans l'autre sens, on obtient ainsi la sériation complète des nombres de un à douze en base trois. On constate, comme dans les jeux précédents, que le chiffre 3 n'apparaît jamais.

Un éventail d'une quizaine de fiches permet aux enfants de conduire des activités individuelles de comptage. Nous en présentons ici quatre.

(Suite p. 11)

Le rapport entre mathématiques traditionnelles et mathématiques modernes n'est pas celui qui peut exister entre l'histoire de l'Antiquité et l'histoire contemporaine. Il n'y a pas deux types de mathématiques, différant par leur objet et constituant deux systèmes distincts de connaissances. Mais il y a deux façons de concevoir et d'enseigner les mathématiques. La conception traditionnelle des mathématiques a été fortement influencée par les idées platoniciennes et cartésiennes. D'une part, les mathématiques sont la science des êtres mathématiques — quel que soit leur statut ontologique — et des relations qu'ils soutiennent entre eux: influence platonicienne. D'autre part, les mathématiques sont par excellence le domaine de la vérité, l'idéalité des êtres mathématiques fondant l'évidence des relations mathématiques, évidence première (axiomes) ou dérivée (théorèmes): influence cartésienne. Or, la conception moderne des mathématiques repose sur la négation de ces deux a priori épistémologiques: il n'y a pas d'être mathématique, il n'y a pas de Vérité mathématique et l'on peut même dire que nulle science n'est plus éloignée de la Vérité que la mathématique. Comme l'écrit Bourbaki, l'essence des mathématiques «apparait comme l'étude des *relations* entre des objets qui ne sont plus (volontairement) connus et décrits que par *quelques-unes* de leurs propriétés, celles précisément que l'on met comme axiomes à la base de leur théorie». Les êtres mathématiques n'existent donc pas en soi; les mathématiques ne traitent que d'objets qu'elles se sont préalablement donnés dans des axiomes. Dans ces conditions, la notion de vérité mathématique devient tout à fait relative, aussi relative que peut l'être la notion de vérité: un énoncé mathématique n'est vrai que dans le cadre d'un système adopté au départ.

Extrait de «Pourquoi cette querelle»,
de Bernard Charlot, in «Educateur», No 15, 10.5.1974.

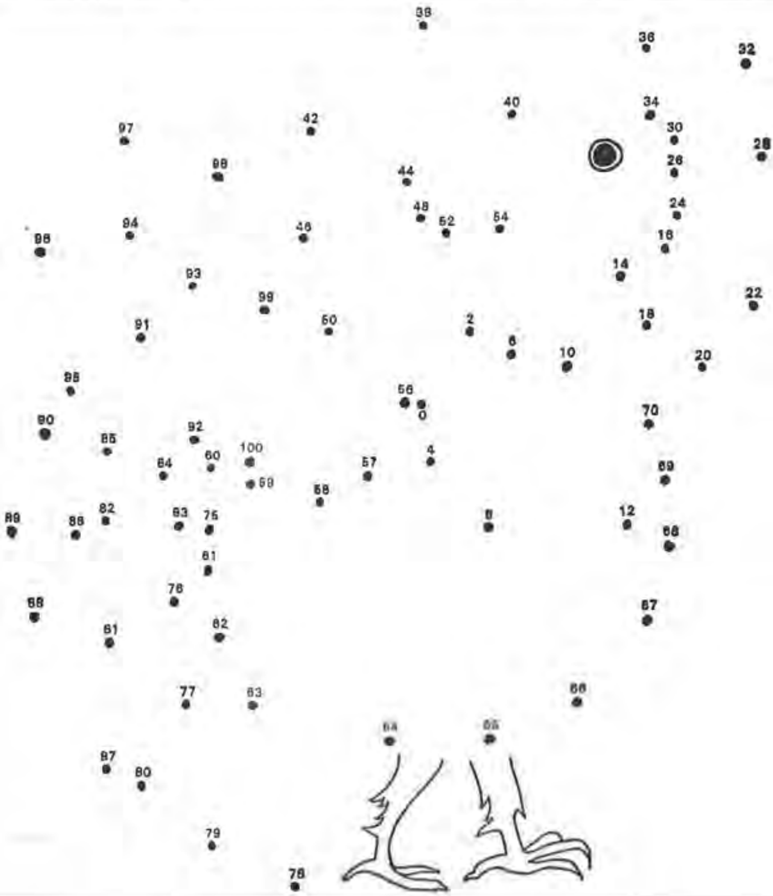
Comptage de cinq en cinq en base dix et transposition en base cinq en passant éventuellement par le dessin des objets.

	base dix			base cinq		
	O	×	Dessine des croix.	O	O	×
zéro						
cinq						
dix						
quinze						
vingt						
vingt-cinq						
trente						

Triple activité de comptage, en base dix: de deux en deux et de un en un en suites ascendantes, de un en un en suite descendante.

NU – 22

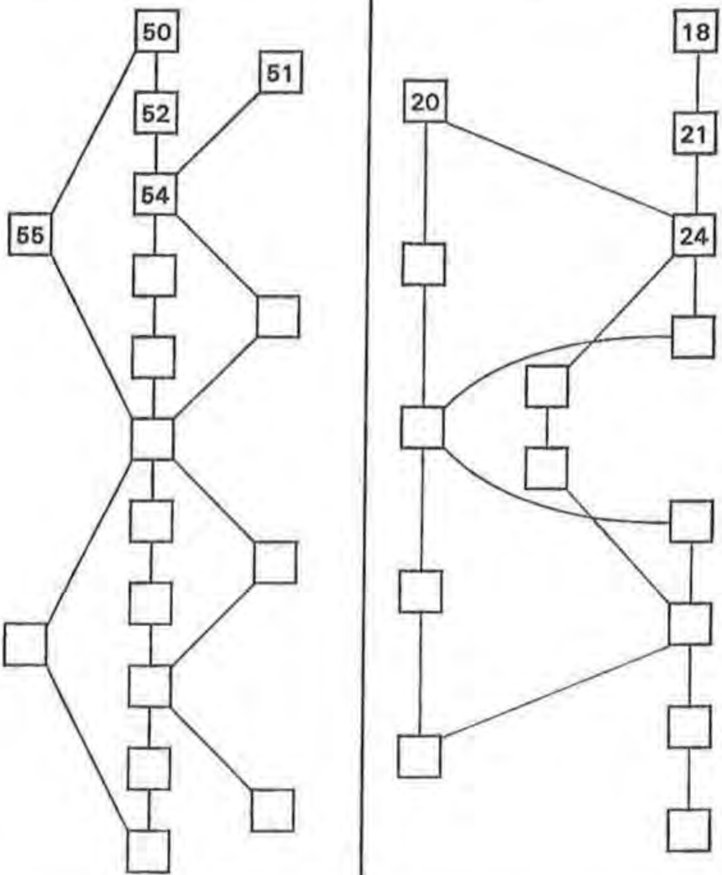
Relie les points 0, 2, 4,...,56 en rouge,
de 56 à 70 en bleu,
de 100 à 75 en vert,



Exercices de comptage et de sériation en base dix.

NU – 26

Observe et complète les □



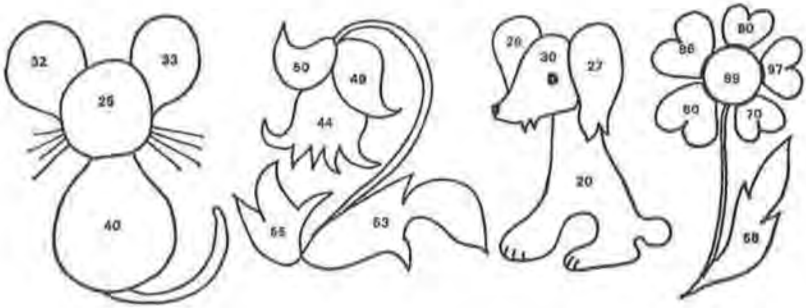
La comparaison entre nombres fait intervenir à la fois le comptage et la valeur positionnelle de chaque chiffre.

Dans chaque case, entoure
- d'un ◯ le plus petit nombre,
- d'un ☐ le plus grand nombre.

NU – 27

base cinq	base dix	base trois	base dix
10 13 4 100 22 104 231	96 27 42 25 99 61 32	222 22 10 111 21 11 100	21 49 50 20 18 19 51

Dans chaque dessin, colorie
- en rouge, les deux régions où se trouvent des nombres qui se suivent immédiatement ;
- en bleu, la région où se trouve le plus petit nombre ;
- en jaune, la région où se trouve le plus grand nombre.



Propriétés des opérations: «machines»

par François Brunelli, professeur de mathématique, Sion

L'usage des «machines», qui pourrait être considéré comme un prétexte à l'entraînement au calcul, se révèle inefficace dans ce domaine. En revanche, l'emploi des «machines» s'avère utile à la découverte des propriétés des opérations et permet d'illustrer la notion d'application.
(Méthodologie, 2e année, p. 46)

Opérer constitue certainement une facette essentielle de l'activité mathématique [1].
Chacun sait, ou croit savoir, ce qu'est une opération. A y voir de plus près, il n'est pas certain que les expressions: «les quatre opérations», «les opérations de bourse», «l'opération chirurgicale», «l'opération du Saint-Esprit», décrivent des démarches comparables.

Essayons néanmoins une formule lapidaire: Opérer, c'est structurer le réel.
Un ensemble d'objets étant donné — l'ensemble **N** des entiers naturels, un ensemble de blocs logiques, l'ensemble des transactions commerciales, l'ensemble des actes conduits par une équipe chirurgicale, etc. —, tant que l'on se borne à énumérer les éléments qui constituent cet ensemble, on est placé devant quelque chose d'amorphe.
Par contre, dès que l'on s'attache à observer les propriétés des objets qui constituent cet ensemble, on peut découvrir par exemple:

- des classes d'équivalence: certains objets sont caractérisés par une propriété commune, alors que d'autres objets ne la possèdent pas;
- un ordre: tel objet précède — ou suit — tel autre objet;
- la possibilité d'obtenir un élément de l'ensemble considéré en partant d'un couple d'éléments de ce même ensemble: à partir du couple (3 ; 5), par exemple, on peut obtenir le nombre 8 par l'addition, le nombre 15 par la multiplication; en notant **E** le référentiel, on fait alors une *application* de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans **E**.

Ces découvertes structurent l'ensemble amorphe de départ; elles sont le témoignage d'une activité mathématique. Dans un sens très général, on peut dire que l'observation de propriétés des objets conduit à *opérer* sur ces objets.

Dans un sens plus restreint, on réserve le terme d'*opération* à la composition de deux éléments. Plusieurs situations peuvent se présenter:

[1] Voir Math-Ecole No 61/62.

— Soit un ensemble **E** et une opération notée ☆ ; si à tout couple (a ; b) de **E** × **E**, l'opération ☆ fait correspondre un et un seul élément c de **E** tel que a ☆ b = c, alors l'opération ☆ est *interne* dans **E**.
Par exemple l'addition et la multiplication sont des opérations internes dans **N**; par ces opérations, on définit des applications de **N** × **N** dans **N**.

— La soustraction, par contre, n'est pas une opération interne dans **N**: il existe des couples de **N** × **N** auxquels correspond par la soustraction un nombre de **N**; mais il en existe aussi, (3 ; 8) par exemple, auxquels ne correspond aucun nombre de **N**; on sait que la soustraction est interne dans **Z**... Au niveau qui nous occupe, soit la 2e année primaire, le mathématicien se demande si l'occasion ne serait pas à saisir d'amener les enfants à la découverte de **Z**, plutôt que de s'achopper à une «opération parfois impossible»; pour l'heure, «*Mathématique 2e année*» en reste à constater cette impossibilité dans certains cas.

— On peut aussi imaginer — mais ceci est étranger aux programmes du niveau primaire — des opérations où intervient la composition de deux éléments pris dans des ensembles différents. On peut par exemple composer, par multiplication, un nombre et un vecteur.

Une fois découverte une opération, il est tout aussi important, sinon plus, de découvrir les *propriétés* de cette opération que d'appliquer des techniques conduisant à l'habileté au calcul. D'ailleurs ces techniques ont varié dans le temps et surtout elles découlent des propriétés.
Cette option prise, reste à choisir une stratégie, ou plusieurs, qui permette à l'enfant une «découverte». (Nous écrivons «découverte», car nous savons bien que, quelle que soit la ligne pédagogique adoptée, il y a et il y aura toujours une alternance de moments non directifs et des moments plus ou moins directifs où la «découverte» est sollicitée par des situations judicieusement choisies par l'enseignant: celui-ci est, quoi qu'on fasse, celui qui sait...).

Une représentation commode et, semble-t-il, fructueuse, consiste à illustrer les propriétés des opérations au moyen de «machines».
Il faut ici lever une équivoque; le terme «machine» a probablement été choisi en raison du fait que, dans notre monde technicisé, les machines font partie de l'environnement immédiat de la plupart des enfants. Il y a des machines qui transforment, telle une installation de craquage de produits pétroliers, et il y a des machines qui ne transforment rien, telle une installation automatisée de stockage.
On a peut-être, dans un premier temps d'utilisation des «machines» dans l'enseignement de la mathématique élémentaire, trop mis l'accent sur l'idée de transformation, et pas assez sur l'idée d'application: à un élément pris dans un ensemble de départ, une «machine» fait correspondre un élément — ou aucun — d'un ensemble d'arrivée. On a donc le schéma:

ensemble de départ ---- «machine» ---- ensemble d'arrivée,

sans qu'il y ait en réalité une modification quelconque effectuée par la «machine» sur les objets de l'ensemble de départ; il n'y a pas de mystérieuse alchi-

mie et il ne faut pas leurrer l'enfant; d'ailleurs, durant le fonctionnement de la «machine», les éléments «à transformer» ne sont pas destinés à disparaître et à être remplacés par des éléments «transformés»: l'enfant a constamment sous les yeux aussi bien l'ensemble de départ que celui d'arrivée, ces deux ensembles étant souvent constitués des mêmes objets.
Pour initier l'enfant au fonctionnement des «machines», ou opérateurs si l'on veut employer un terme de la terminologie mathématique, il est profitable de considérer d'abord des ensembles d'objets «concrets» en nombre restreint.
Chacun connaît par exemple les *blocs logiques*, sur lesquels on peut faire agir les opérateurs notés **C** (change la couleur), **F** (change la forme), **I** (change la taille) **E** (change l'épaisseur), **R** (ne change rien). On évitera cependant de n'utiliser systématiquement que ce matériel: On sait que tout concept ne peut être intériorisé qu'à partir de matériels variés concrétisant une structure à découvrir.
D'autre part, et ici intervient la notion d'application, il est important de faire agir un opérateur sur *tous* les éléments de l'ensemble considéré: on conduit ainsi l'enfant à découvrir lui-même si l'opération est interne ou non et si telle propriété des opérateurs est vérifiée quel que soit l'élément choisi à l'entrée d'une série de «machines».

Schématiquement, les *propriétés* de la composition des «machines» se présentent ainsi:

— lorsque la séquence $M_1 \star M_2$ peut être remplacée par une unique «machine» M_3, on dit qu'on a *composé* les «machines» M_1 et M_2;
— lorsque la séquence $(M_1 \star M_2) \star M_3$ est équivalente à la séquence $M_1 \star (M_2 \star M_3)$, il y a *associativité* de la composition des «machines» considérées;
— lorsque la séquence $M_1 \star M_2$ est équivalente à la séquence $M_2 \star M_1$, il y a *commutativité* de la composition des deux «machines»;
— des séquences de «machines» sont dites *équivalentes* lorsque, quel que soit l'élément introduit à l'entrée de chaque séquence, on obtient chaque fois le même élément à leur sortie;
— on découvre la «machine» *neutre* M_0 — la «machine» qui ne change rien — en constatant que, pour certaines séquences $M_1 \star M_2$, tout élément introduit à l'entrée a pour image, à la sortie, le même élément; dans ce cas, M_1 est la «machine» *inverse* de M_2 et vice-versa; la «machine» neutre peut aussi être la composée de plus de deux autres «machines».

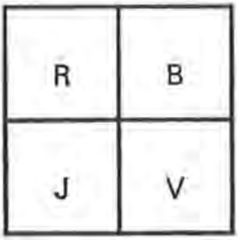
Pour illustrer nos dires, citons quelques exemples tirés de «*Mathématique, 2e année*».

«Machines» non numériques

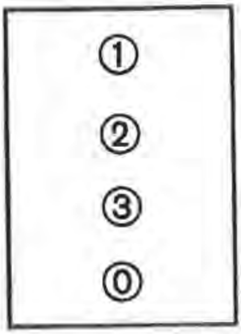
(Méthodologie OP, JEU 7, pp. 68 à 71)

On dispose du matériel suivant:

— un grand carré représentant un tourniquet, chacun des quarts ayant une couleur différente:



— un carton représentant un tableau de commande avec quatre boutons numérotés:



— des cartes ou des rubans portant une des couleurs du carré: R, B, J, V.

L'ensemble de départ, comme l'ensemble d'arrivée, est ici constitué des quatre boutons du tableau de commande.

Au début du jeu, chaque case du carré est occupée par un enfant muni d'une carte de même couleur que la case où il se trouve. Un meneur de jeu tient le tableau de commande. Les autres enfants sont assis en cercle autour du carré.

Quand le meneur de jeu appuie sur les boutons du tableau, le tourniquet fonctionne:

le bouton **1** permet d'avancer à la case suivante;
le bouton **2** permet d'avancer de deux cases;
le bouton **3** permet d'avancer de trois cases;
le bouton **0** donne l'ordre de rester à sa place (ou d'avancer de 4 cases).

On choisit encore un sens de rotation.

a) Le meneur du jeu dit:
— J'appuie sur le bouton **1**.
Les quatre enfants se déplacent d'une case sur le carré.
— J'appuie sur le bouton **2**. (Les élèves partent d'où ils sont arrivés après le premier déplacement.)
Les quatre enfants se déplacent de deux cases sur le carré.
On passe en revue toutes les possibilités du tableau de commande; le rôle particulier joué par le bouton **0** est discuté.
On demande de temps en temps de prévoir le point d'arrivée des joueurs avant qu'ils ne se déplacent. On renouvelle fréquemment le groupe d'enfants sur le carré.

b) *Composition de deux déplacements; déplacements symétriques.*
Les enfants sont sur leur case de départ. Le meneur de jeu:
— J'appuie sur le bouton **1**.
Les élèves se déplacent.
— J'appuie sur le bouton **2**.
Les élèves se déplacent. La maîtresse:
— Aurait-on pu appuyer sur un seul bouton au lieu de deux pour arriver au même endroit? (sur le bouton **3**).
— Sur quel bouton doit-on appuyer pour se retrouver sur la case de départ? (sur le bouton **1**).
On reprend le même processus en utilisant successivement d'autres boutons:

2 puis **2**, remplacé par **0** (et non par **4**, car ce bouton n'existe pas!);
3 puis **2**, remplacé par **1**;
1 puis **0**, remplacé par **1**; etc.
Et chaque fois, on cherche sur quel bouton il faut appuyer pour se retrouver au point de départ.

c) *Composition de deux déplacements: commutativité.*
J'appuie sur le bouton **2**.
Les élèves se déplacent.
J'appuie sur le bouton **3**.

Les enfants effectuent le mouvement et restent sur les cases d'arrivée, tandis que la maîtresse place quatre nouveaux élèves (munis de leur carte de couleur) sur les cases de départ.

Elle dit ensuite à l'ensemble de la classe (ou écrit éventuellement au tableau noir):

— Pour le premier groupe, on a appuyé sur **2**, puis sur **3**; pensez-vous que le deuxième groupe arrivera sur les mêmes cases si on appuie d'abord sur **3** et ensuite sur **2**?

Les élèves s'expriment et la deuxième équipe effectue les déplacements commandés par **3**, puis **2**.

Il est évident qu'on vérifie la commutativité dans d'autres cas.

d) *Simplification de chaînes: associativité.*

Récapitulation de deux points importants:

— deux déplacements peuvent toujours être remplacés par un seul;

— deux déplacements peuvent être commutés.

La maîtresse distribue une feuille et un crayon à chaque élève-spectateur. Une suite de déplacement est notée sur la feuille:

1 3 2 2 1 , par exemple.

Il s'agit pour les enfants de trouver s'il est possible de parvenir au même résultat en appuyant sur un plus petit nombre de boutons. Chaque élève utilise la méthode qui lui convient. Après quelques instants, on passe en revue les propositions des enfants: quatre pressions, trois pressions, peut-être deux ou même une seule. On demande aux joueurs d'effectuer tout d'abord les cinq déplacements primitifs, puis de vérifier les propositions de leur camarades.

Dans un stade ultérieur, bien au-delà du programme de deuxième année, on pourra reprendre ce même jeu et achever l'étude de la composition des quatre opérateurs **1**, **2**, **3**, et **0** par le tableau:

☆	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

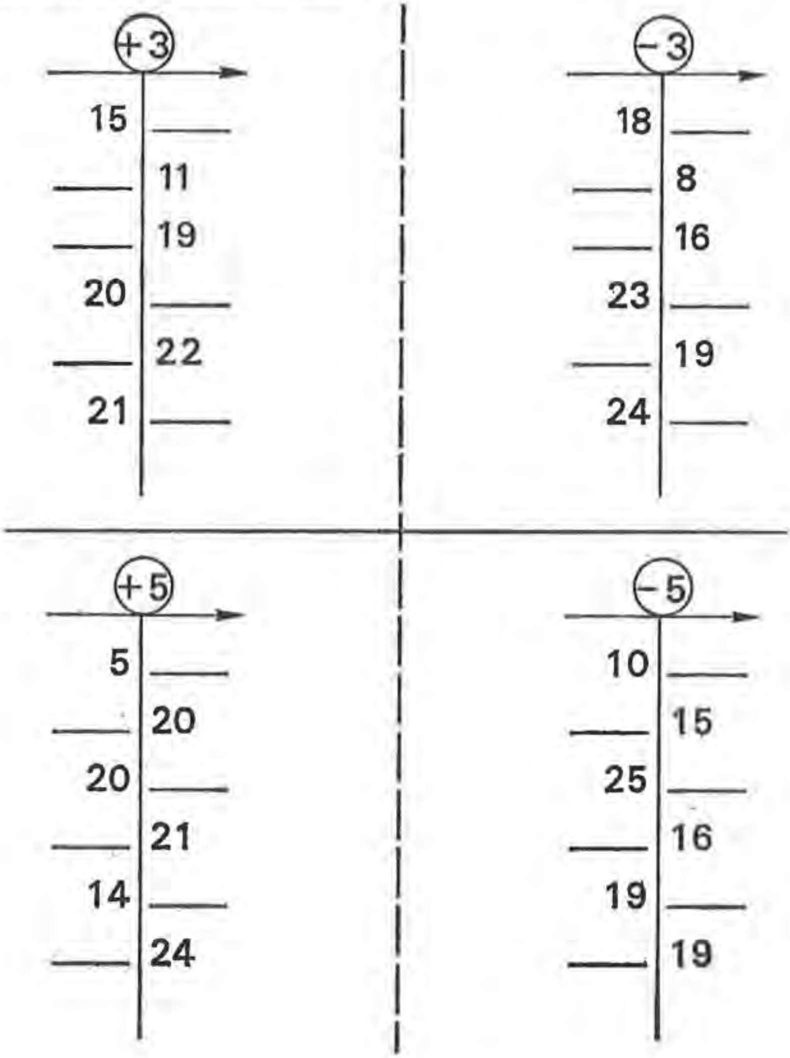
On reconnaîtra un groupe commutatif, isomorphe à celui des classes de reste, modulo 4, pour l'addition.

«Machines» numériques

Le JEU 8 de la Méthodologie conduit les enfants à compléter par eux-mêmes des fiches dont nous présentons ici quelques extraits.

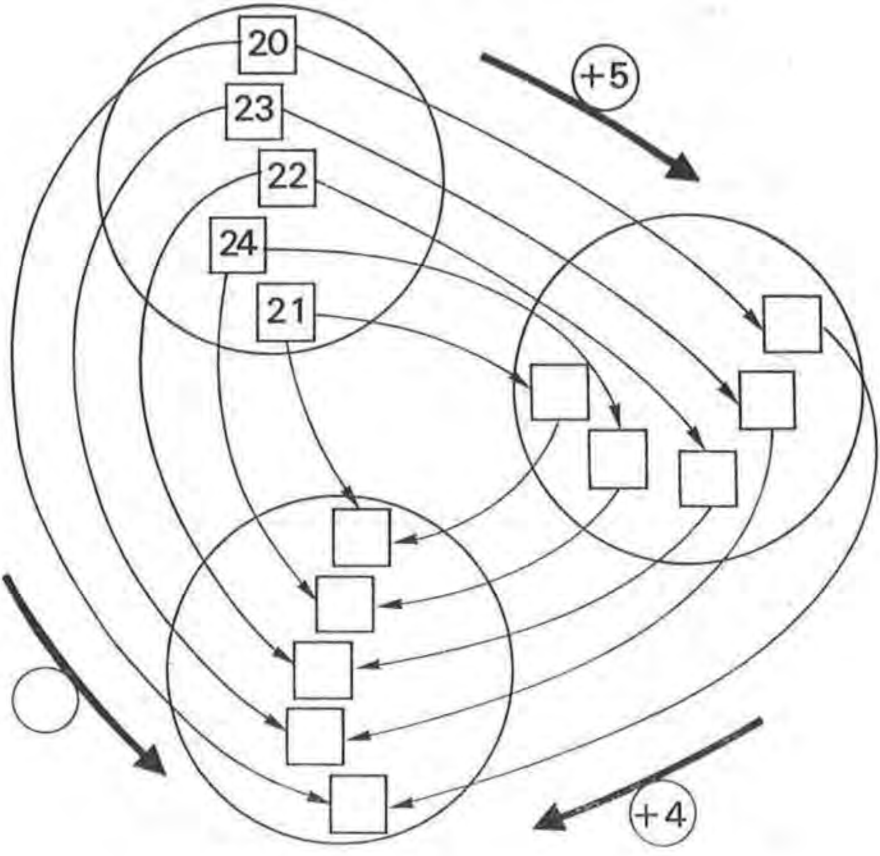
Fiche OP-9

Une fois complétée, cette fiche fait apparaître à la fois l'idée d'application d'un ensemble de nombres vers un autre ensemble de nombres et l'effet contraire de deux «machines» inverses.



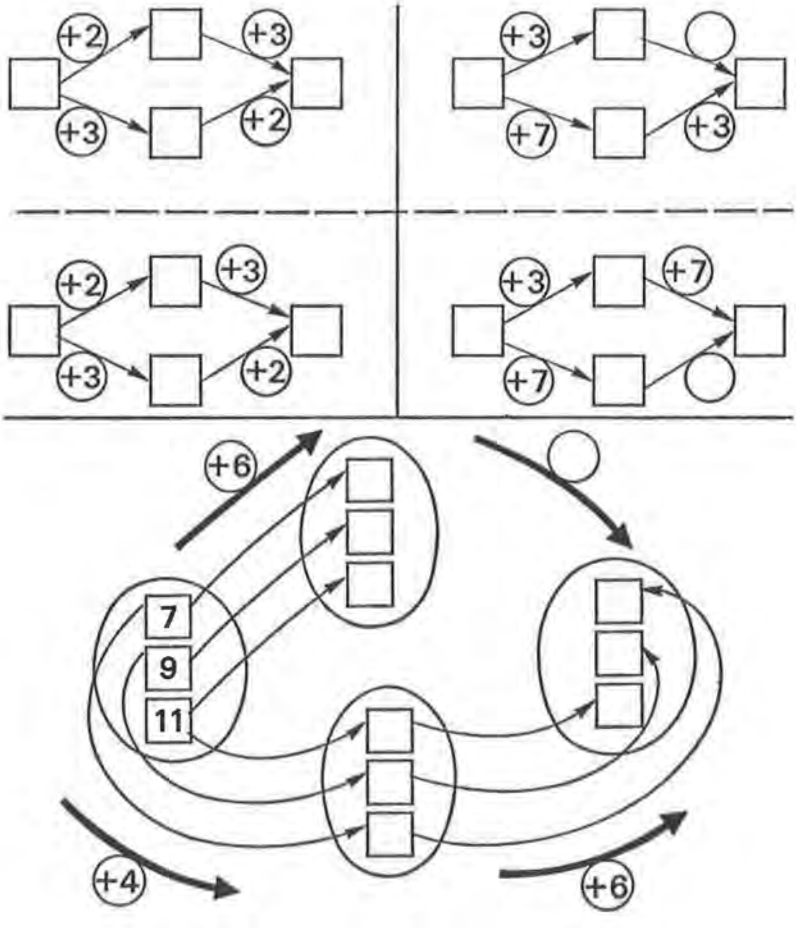
Fiche OP-10

L'idée d'application est toujours sous-jacente; on demande à l'enfant de remplacer une séquence de deux «machines» par une seule «machine» équivalente.



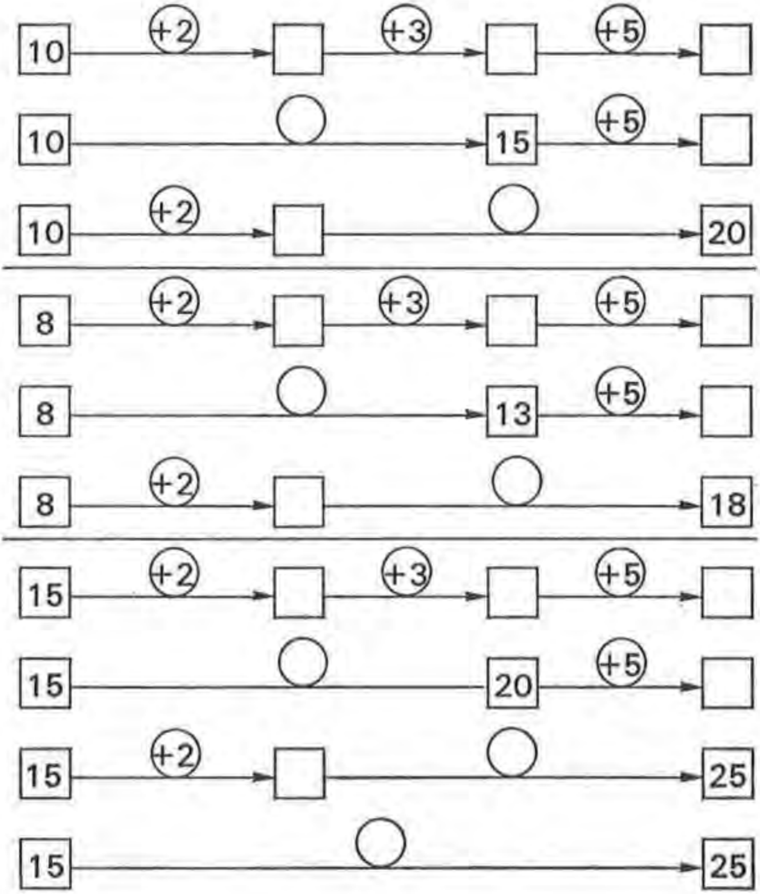
Fiche OP-11

La disposition des «machines» fait apparaître la commutativité de la composition des opérateurs additifs.



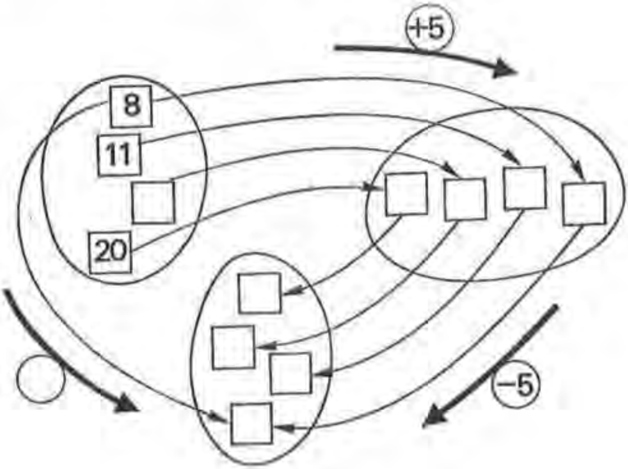
Fiche OP-12

Le calcul joue ici un rôle secondaire; l'objectif est de porter l'attention sur l'associativité de la composition des opérateurs additifs.



Fiche OP-13

L'accent est porté ici sur la «machine» neutre.



AVENUE DE: Découverte de l'espace

Codage et décodage de déplacements

par Josée Wetzler, maîtresse d'application, Fleurier

En deuxième année, les exercices portant sur les déplacements dans des réseaux sont développés et étendus à des situations nécessitant l'emploi d'un code pour transmettre une information.
(Méthodologie, 2e année, p. IV)

Proposons à un enfant de 7-8 ans d'effectuer un déplacement dans la salle de classe. Demandons-lui ensuite de décrire son déplacement. On obtiendra peut-être une réponse comme: «J'ai été de là à là», cette affirmation étant accompagnée de gestes suggestifs. Cependant, plus le déplacement a été long, tortueux entre les pupitres de la classe, plus l'enfant aura de peine à refaire le même parcours sans se tromper. Apparaît alors l'utilité, voire la nécessité de noter d'une façon ou d'une autre les différentes étapes du parcours.
Pour que tous les élèves puissent comprendre une notation, un *code*, il y faut un accord unanime: c'est la condition première de la communicabilité. L'avantage d'un code simple, le plus suggestif possible, le plus court possible aussi,

est vite reconnu par les enfants. Mais proposer un code, c'est faire appel à un symbolisme; un symbolisme «lisible» par l'adulte n'est pas toujours compris ou accepté par l'enfant: il est donc nécessaire de laisser à l'élève la liberté de choisir son propre code, voire d'en changer. On lui permettra ainsi de découvrir:
— qu'un même symbole ne peut avoir plusieurs significations différentes au cours d'une activité, sous peine de confusion;
— qu'il est parfois utile d'utiliser des signes conventionnels pour se faire comprendre, par exemple, par des personnes extérieures à la classe.

Revenons à nos déplacements. Une proposition familière aux enfants est l'utilisation des expressions: «à gauche», «à droite», «en avant», «en arrière». Des discussions surgissent alors; l'accord n'est pas toujours unanime: suivant les positions respectives des élèves, ces expressions ne correspondent pas aux mêmes déplacements. On constate que la position est une notion relative et qu'il est nécessaire que tous adoptent le même système de référence.

Après avoir effectué, codé et décodé des itinéraires dans un modèle physique, la salle de classe par exemple, on passe à un plan réduit de ce modèle physique, ou du moins à un croquis dans lequel seront respectées les positions relatives des objets matériels: cette activité — les enfants réalisent eux-mêmes le croquis — est un précieux moyen de maîtrise des difficultés éventuelles de latéralisation.

La méthodologie (JEUX 6, 7 et 8) et les fiches (une dizaine) de l'avenue DE proposent les codages et décodages de différents parcours: chemins d'un point à un autre, chemin plus courts et plus longs, chemins les plus courts, chemins inverses. Les codes apparaissent sous divers aspects: lettres, formes, couleurs, flèches; on présente ainsi un éventail de choix possibles et on évite tout automatisme.

Déplacements sur un plan

On propose le plan d'une ville ou d'un quartier de ville; les rues n'y sont pas nécessairement parallèles, ni perpendiculaires ni équidistantes. Pour s'y repérer et pouvoir décrire un parcours sur ce plan, on peut par exemple donner un nom à chaque carrefour.
Un point de départ et un point d'arrivée étant fixés, on demande à l'enfant:
— de tracer un itinéraire, codé au moyen des noms de carrefours successifs;
— de coder un itinéraire;
— de trouver un chemin plus court ou plus long;
— de coder un chemin inverse d'un itinéraire connu.

DE – 26

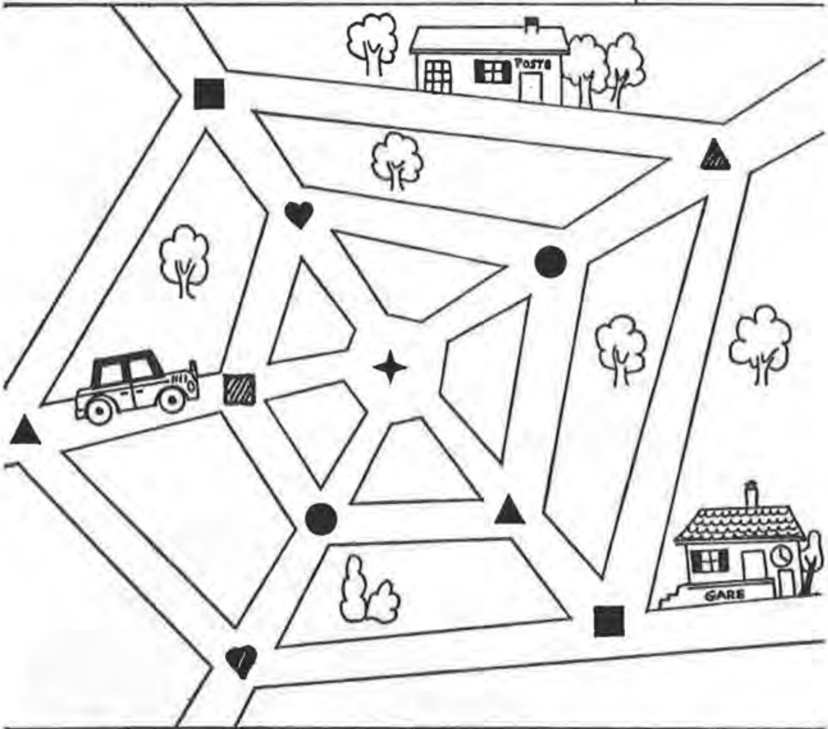
Le marin doit aller au port;
dessine en vert le chemin: k g i s j q.

Dessine en rouge un trajet plus court.
Dessine en bleu un trajet plus long.

Code.

Le taxi va à la gare;
dessine en vert le chemin: ▨ ✦ ● ♥ ■

DE – 27



Le taxi revient par le chemin vert; code ce retour:

____

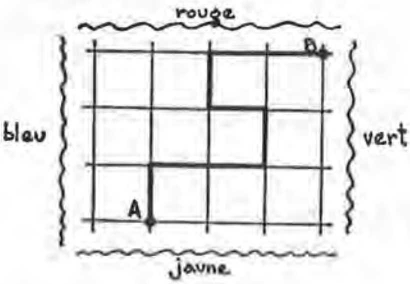
Dessine en rouge un autre trajet de retour qui passe devant la poste; code ce trajet:

____

Déplacements sur les lignes d'un quadrillage

On adopte ici deux conventions particulières:
— on ne se déplace que *sur* les lignes du réseau (on peut suggérer que ces lignes représentent les rues d'un plan de ville);
— chaque symbole utilisé pour le codage indique un déplacement (élémentaire) d'un nœud du réseau à un nœud *immédiatement* voisin (quatre symboles seront donc nécessaires).

— Comment indiquer au conducteur de la voiture un trajet possible pour aller jusqu'au drapeau?
Certains élèves se souviendront d'un jeu conduit en première année et proposeront peut-être des cartes colorées. On se met d'accord pour différencier les côtés du quadrillage. Exemple:



Le chemin de A à B est alors codé:

$\boxed{r}\ \boxed{v}\ \boxed{v}\ \boxed{r}\ \boxed{b}\ \boxed{r}\ \boxed{v}\ \boxed{v}$

D'autres propositions sont acceptables:

Les codes s'écrivent alors:
— chemin CD: table, table, tableau, tableau, table, tableau;

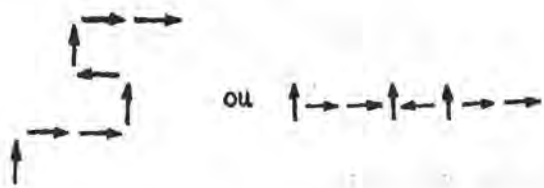
— chemin EF: ●, ▮, ●, ▮, ▮, ●;

— chemin GH: ouest, nord, nord, est, est, nord, est est (O, N, N, E, E, N, E, E).

Il va de soi que l'on exerce aussi l'activité inverse: un élève reçoit au départ les directives mentionnant un trajet complet; en regardant les codes, il parcourt le chemin indiqué.

Dans la partie c) du jeu 7 de DE, on décrit l'utilisation d'un code fléché; l'enfant dispose de flèches mobiles et prépare son parcours:
— directement sur les lignes du quadrillage;
— hors du quadrillage (sur la table).

Dans ce dernier cas deux présentations sont possibles:

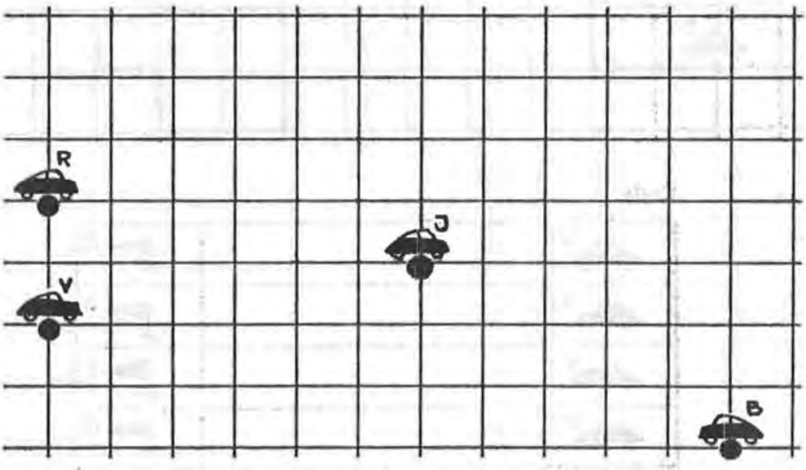


La seconde variante présente évidemment un degré d'abstraction plus élevé que la première. Voici deux fiches où les enfants doivent utiliser un code fléché pour tracer l'itinéraire, puis coder des itinéraires donnés.

Dessine les parcours et place les drapeaux qui marquent les arrivées.

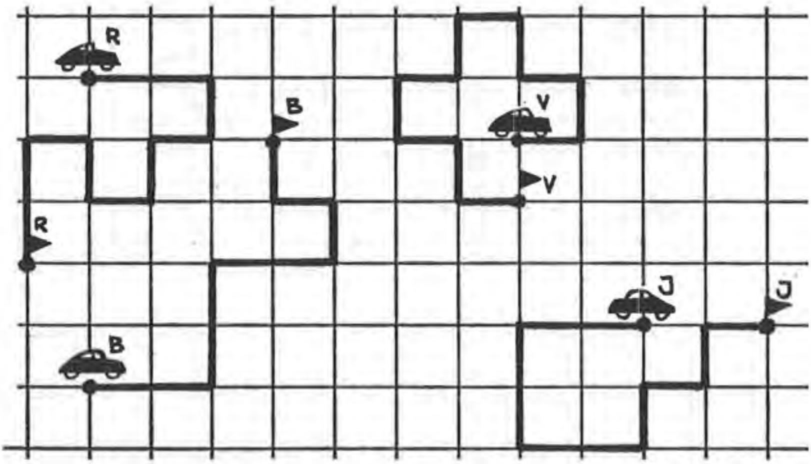
DE – 33

R	→ → ↑↑ → → → ↓ ←	R
V	→ ↑ → ↓↓ → → ↑ → ↓	V
B	← ← ↑↑ → → ↑↑ ← ↑	B
J	→ → ↑ → ↑ ← ↑ ← ← ↑	J



DE – 34

Observe les parcours.

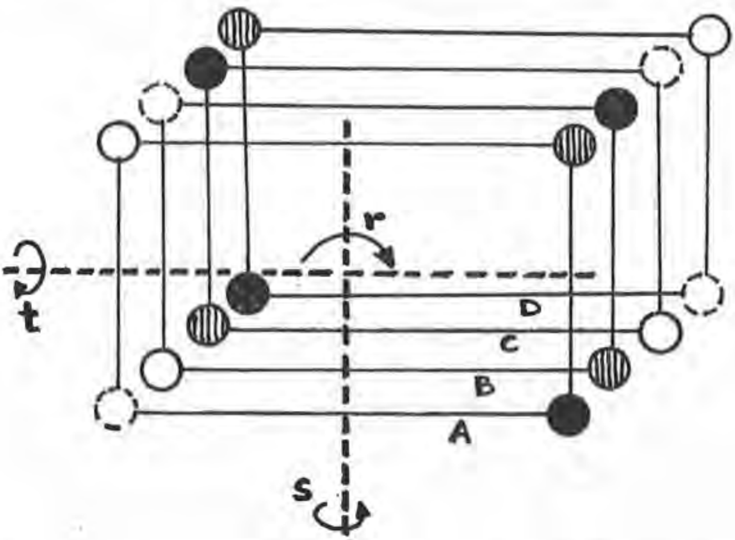


Code.

J		J
B		B
V		V
R		R

● Le dessin de la couverture

Le numéro 53 de «Math-Ecole» était presque entièrement consacré à une excellente présentation, par Charles Burdet, de la *structure de groupe* qui est une des notions fondamentales de la mathématique. Parmi la douzaine d'exemples cités ou analysés, on trouve (pages 18 et 19) le groupe du *rectangle:* c'est le thème que veut illustrer le dessin de la couverture.
Pour la clarté d'une brève explication, nous reproduisons ce dessin muni d'un symbolisme complémentaire.



Considérons l'axe de symétrie parallèle au grand côté du rectangle A, l'axe de symétrie parallèle au petit côté du rectangle A ainsi que la rotation de 180° autour de l'intersection de ces deux axes.

A une translation près:

— par la symétrie **t**, A devient B;
— par la symétrie **s**, A devient D;
— par la rotation **r**, A devient C;
— par l'identité **u**, A devient A;
— par la symétrie **t**, C devient D; etc.

Nous renvoyons le lecteur au numéro cité de «Math-Ecole» pour l'étude plus complète de ce groupe de Klein.

F. Brunelli

● Au Comité de rédaction

Mademoiselle **Arlette Grin**, qui vient de prendre sa retraite, a désiré être déchargée de ses fonctions de membre du Comité de rédaction de «Math-Ecole». Nous tenons, aujourd'hui, à lui témoigner notre reconnaissance pour son activité au Comité et, aussi, pour toute celle qu'elle a déployée au cours des quinze dernières années en faveur du renouvellement de l'enseignement de la mathématique. Militante «Cuisenaire» dans les cours de la Société suisse de travail manuel et de réforme scolaire, au cours de la Société pédagogique vaudoise à Crêt-Bérard, elle a, ensuite, avec Berthold Beauverd et Théo Bernet notamment, contribué, pour une large part au recyclage des enseignants du canton de Vaud dans le secteur de la mathématique. A Arlette Grim, nos vœux affectueux pour de nouvelles années heureuses et pleines de toutes les satisfactions qu'elle mérite.

Deux nouveaux membres ont accepté de collaborer à la rédaction de «Math-Ecole». Ce sont **Françoise Waridel** et **Jean-Jacques Walder.**

Françoise Waridel est maîtresse d'application à l'Ecole normale d'Yverdon. Sans vouloir se donner pour une «spécialiste», elle a néanmoins manifesté un intérêt particulièrement vif à l'égard de l'enseignement nouveau de la mathématique. Elle a ainsi collaboré aux cours de la Société suisse de travail manuel et de réforme scolaire; elle a fait partie de la Commission vaudoise pour l'enseignement de la mathématique à l'école primaire; elle a enfin été une des co-rédactrices des ouvrages de méthodologie et des fiches pour les élèves destinés aux écoles de la Suisse romande (Math-1re année et Math-2e année). Françoise Waridel se veut enseignante, femme «du métier», heureuse de «faire l'école», estimant que c'est ainsi, avec de vrais élèves auxquels il faut enseigner les notions du programme avec toutes les difficultés que cela comporte, qu'on fait en définitive le travail le plus efficace, celui qui procure les plus grandes satisfactions.

Jean-Jacques Walder, instituteur à Hermance (Genève), dirige depuis quinze ans bientôt une classe à plusieurs degrés. Depuis un lustre, il participe avec le Service de la recherche pédagogique de Genève, aux travaux qui portent sur l'introduction du nouvel enseignement de la mathématique. Il prend part, de ce fait, à l'activité d'un séminaire qui réunit spécialement, sous l'égide de Raymond Hutin, quelques maîtres de classes à plusieurs degrés. Il conduit enfin, avec Gérard Charrière (voir Math-Ecole 58, mai 1973), une recherche sur les *ateliers mathématiques:* échecs, dominos, le Quadrata, le Reversi, plusieurs jeux (style ARP) et thèmes plus scientifiques (balances, eau, etc.). Le groupe des maîtres de campagne (car il y en a aussi dans le canton de Genève), animé par J.-J. Walder, publiera, en septembre 1974, une brochure destinée aux classes à degrés multiples.

- A Montréal, l'«Association pour l'avancement des mathématiques à l'élémentaire» (APAME) fait paraître depuis quelques années la revue «Instantanés Mathématiques». Au nombre des collaborateurs nous trouvons Madeleine Goutard bien connue des lecteurs de «Math-Ecole» et le professeur Fernand Lemay, de l'Université Laval à Québec. Voir entre autre, l'article de lui intitulé: *L'anneau des entiers rationnels* (Volume X, No 1, octobre 1973).

  Adresse de l'APAME: case postale 433, succursale Westmount. Montréal 215. P.Q. Canada.

- **La pratique de la mathématique**

La Coopérative de l'enseignement laïc (CEL) de Cannes (Freinet) publie depuis 1968 des livraisons sous le titre général «Libres recherches et créations mathématiques». Il s'agit là de travaux à proposer directement aux enfants (fiches ou exercices programmés).
A paraître en 1973-1974:

21. Avec un jeu de cartes (vers la combinatoire IV).
22. Avec un jeu de dominos (Relations, classes d'équivalence, structure de groupe...).
23. Puissance d'un naturel, multiples et diviseurs (livret autocorrectif).
24. Naturels premiers. Ecriture primaire d'un naturel (livret autocorrectif).
25. Addition et soustraction dans **Z** (livret autocorrectif).
26. Ajouter ou soustraire des sommes ou des différences (livret autocorrectif).
27. Multiplication dans **Z**. Puissances (livret autocorrectif).
28. Polyèdres.
29. Pistes de recherche mathématique (16 fiches).
30. Constructions géométriques.

Chaque série de 10 numéros: 20.— francs français.

- **Rappel**

La revue «ARP» (Activités Recherches Pédagogiques), continue à publier des articles très riches sur l'enseignement de la mathématique. Ces articles sont, le plus souvent, des exposés de travaux réalisés dans la pratique quotidienne de la classe.

Au sommaire du numéro 14 (mars 1974):

Les jeux du samedi:

1. Volumes à reconstituer.
2. Le jeu de l'épidémie.
3. Le jeu des alignements.
4. Patterns.

A vous de jouer:
1. Combinatoire binaire.
2. Cordes et régions dans un cercle.
3. Images pour la récurrence.

Exercices écrits et oraux en classe de C.M. 2: «Cadavres exquis et imprégnation».
Que contient ce cône? (probabilités et proportions avec des enfants de 10 ans).
La réforme de l'enseignement des mathématiques au Danemark.
Adresse: «ARP». avenue du 11-Novembre, F - 92190 *Meudon*.
Abonnement d'un an: 30 francs français.

● Journées d'études de l'Association Cuisenaire, Belgique

Les cinquièmes journées d'études auront lieu les 26, 27, 28 et 29 août 1974. Elles sont destinées aux maîtres du primaire et porteront sur l'application des nouveaux programmes.
Thème: Nombres, Géométrie.
Au nombre des maîtres de cours: le professeur Louis Jeronnez bien connu des lecteurs de «Math-Ecole».
Adresse: Secrétariat des journées d'études du Roeulx, rue Obecq 5 B - 1410 *Waterloo*.

● Lu pour vous

La mathématique à l'école élémentaire
Ouvrage collectif publié par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (A.P.M.E.P.), Paris, 1972, 504 p., fig.

Fruit des travaux de 40 collègues français de l'école primaire, de l'enseignement secondaire et supérieur qui depuis des années ont participé à une recherche fondamentale sur l'enseignement de la mathématique à l'école élémentaire, ce livre a pour but de contribuer à la formation permanente des maîtres, à qui il s'adresse en particulier.
Après lecture rapide de l'introduction et de quelques réflexions sur le programme rénové — intermédiaire entre les mathématiques traditionnelles et la mathématique de demain — (textes pleins d'humour aidant le lecteur même le moins averti à se situer dans cette science), nous participons aux différentes expériences de collègues de plusieurs niveaux du degré élémentaire.
Au travers de ces relations d'expériences vécues au niveau des enfants et des enseignants, nous abordons:
— la formation des maîtres;
— quelques thèmes du programme renové (agir, prévoir, mathématiser; le codage au C.P.; le nombre cardinal; la division euclidienne; ...);
— quelques thèmes au-delà du programme rénové (la logique; activités non-numériques; langages et ensembles; le groupe; la géométrie; la combinatoire; les applications linéaires...).

En conclusion, nous trouvons le rapport Beulaygue, pour la mise en place de la Réforme de l'Enseignement Elémentaire en France.
Au moment où la Suisse romande adopte un nouveau programme élémentaire de mathémathique, ce livre qui se lit avec plaisir et sans grand effort cérébral, tout en apportant une grande quantité de conseils et suggestions pratiques, devrait se trouver, d'une part, chez tous les enseignants primaires, et d'autre part, chez tous ceux qui pensent, organisent et dirigent la réforme de la mathématique.
Document IRDP/3611.

M. Coulet

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

SOMMAIRE

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311