MATH ECOLE

«Chaud les marrons»

7e Rallye mathématique transalpin

Le coin du net

38e année

186

février 1999

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE **186**
38e année 5 numéros par an février 99

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

A long terme !

Michel Brêchet, Delémont

"Pour résoudre les règles de trois (...), on écrira d'abord l'énoncé sur deux lignes la première contenant les valeurs correspondantes des différentes grandeurs, et la seconde contenant les valeurs nouvelles aux quelles doit correspondre l'inconnue. Celle-ci qu'on représentera par x sera placée sous la première valeur de la première grandeur. Puis on indiquera par les lettres D et I la nature de la proportionnalité: directe ou inverse; enfin on appliquera les définitions ou propriétés indiquées ci-dessus."

Comme cet extrait d'un livre d'arithmétique du début du siècle le laisse supposer, l'enseignement des mathématiques avait autrefois pour principale mission de former les élèves à des tâches bien précises, et les apprentissages scolaires répondaient à des préoccupations utilitaires évidentes : à la sortie de l'école, il fallait savoir résoudre telle ou telle catégorie de problèmes. A chaque collection de problèmes correspondait ainsi une procédure de résolution bien identifiée à laquelle on entraînait les élèves.

Toutefois, depuis quelques décennies, on s'est rendu compte que le simple apprentissage mécanique de règles comme celle de la fameuse "règle de trois", était largement insuffisant pour conduire à de bonnes connaissances : en effet, seuls quelques élèves arrivaient à se construire une représentation correcte des concepts en jeu, alors que d'autres, fort nombreux par ailleurs, ne se contentaient que de mémoriser ces règles et essayaient, souvent en vain, de les appliquer à bon escient. Que l'on se comprenne bien : il ne s'agit ici ni de critiquer les méthodes pédagogiques en vigueur dans le passé, ni de dresser un quelconque constat d'échec, mais, modestement, de remarquer que les stratégies utilitaristes s'appuyant sur des activités fermées, répétitives et engendrant des habiletés bien spécifiques, visaient la réussite à court terme, par mimétisme le plus souvent.

De ce type de pratique, l'enseignement des mathématiques a évolué et s'est attelé à développer l'esprit critique des élèves, esprit marqué de scepticisme et de rigueur. Il vise de nos jours à élargir leur regard, à aiguiser leur curiosité, à les inciter à aller plus loin; il les conduit également à côtoyer des objets insoupçonnés et à aborder des notions inattendues, surprenantes. Cependant, une telle action pédagogique, centrée avant tout sur l'enseignement par le problème, s'inscrit immanquablement dans un registre plus aléatoire et plus difficile à gérer qu'une pratique traditionnelle. Et c'est à ce stade de la réflexion qu'il ne faut pas oublier que les finalités énoncées ci-dessus nécessitent un travail sur le long terme, désécurisant parfois, et qu'elles sont absolument incompatibles avec des modèles d'enseignement fondés sur des transactions à court terme, voire sur la certitude.

Le long terme vaut également pour l'évaluation. Celle-ci n'a pas à être organisée dans la seule optique d'une corrélation obligée avec les dernières notions traitées en classe, ni d'ailleurs réduite à d'uniques contrôles des performances. Elle peut porter par exemple sur des problèmes de recherche, car ils offrent un espace de liberté pour l'exploration personnelle et se prêtent en conséquence à la différenciation pédagogique.

D'autre part, *«le produit d'une évaluation scolaire*, explique Philippe Meirieu, *n'est vraiment intéressant qu'en tant qu'il est l'indicateur d'habiletés mentales stabilisées, de compétences appropriées, utilisables dans d'autres cadres que ceux, très formels, de l'évaluation scolaire, et à l'initiative du sujet lui-même. C'est pourquoi une évaluation n'est significative que si elle (...) comporte des indicateurs permettant d'inférer l'existence d'une réalité invisible, d'un progrès dans la compréhension d'une question, d'un développement significatif des capacités de la personne, qui, au-delà de l'épreuve elle-même, lui donne tout son sens. A bien des égards d'ailleurs, les enseignants et les élèves savent bien cela : les premiers parce qu'ils mesurent le caractère provisoire et très vite caduc de toute épreuve, les seconds parce que dans bien des cas, ils estiment qu'ils ont "fait leur devoir" en rendant leur copie et ne jettent qu'un coup d'oeil distrait aux annotations, comme s'ils pressentaient qu'en fin de compte l'essentiel est ailleurs.»*[1]

Ces propos illustrent bien l'importance qu'il faut accorder tant aux contenus d'une épreuve d'évaluation qu'au moment de sa passation. Des contenus qui doivent contribuer de façon claire à la construction des mathématiques dans l'esprit des élèves, ou qui peuvent servir de point d'appui à des connaissances plus élaborées. Se centrer sur les concepts fondamentaux et les intégrer dans une large mesure dans l'évaluation, c'est inéluctablement tenir compte du temps des apprentissages, en particulier des phases de sensibilisation et de construction des nouvelles notions, et c'est surtout reléguer aux oubliettes le principe de "l'efficacité immédiate".

Ce long terme des apprentissages est à la fois connu et méconnu des enseignants. D'une part, il est pris en compte, car ceux-ci organisent répétitions et progressions au fil des jours, des mois et des années. Mais, par ailleurs, les discours des salles des maîtres fourmillent de jugements comme "cet élève n'a toujours rien compris aux équations", ou "la proportionnalité devrait maintenant être acquise". Ces propos, parfois un peu trop catégoriques, renient en quelque sorte cette prise en compte de la durée dans l'acquisition d'une nouvelle connaissance. Résoudre un problème en écrivant des tas de symboles algébriques plutôt que de s'appuyer, par exemple, sur des mesures réalisées sur une figure géométrique ou sur des opérations arithmétiques, s'approprier une situation de linéarité en établissant les liens entre les espaces de mesure en présence plutôt que de raisonner sur chacune des grandeurs prises séparément, cela demande aux élèves de changer radicalement de mode de pensée, remet en question leurs conceptions et provoque déstabilisation et régression.

Vu sous cet angle, quoi de plus normal de considérer que le court terme n'est plus d'actualité.

[1] MEIRIEU P . *La pédagogie entre le dire et le faire, ESF* éditeur, Paris, 1995.

Le calcul numérique est-il plus concret que le calcul algébrique ?

Aldo Dalla Piazza, BES, Uni Berne

En feuilletant le dernier numéro de la revue «Elemente der Mathematik» [1], je suis tombé sur un problème qui a éveillé mon intérêt.

«Aufgabe 1140 (Die einfache dritte Aufgabe) : Ist die folgende Gesetzmässigkeit auch in nicht-dezimalen Zahlsystemen gültig ?»

$$\begin{array}{rcl}
1 \times 9 + 2 & = & 11 \\
12 \times 9 + 3 & = & 111 \\
123 \times 9 + 4 & = & 1111 \\
1234 \times 9 + 5 & = & 11111 \\
12345 \times 9 + 6 & = & 111111 \\
123456 \times 9 + 7 & = & 1111111 \\
1234567 \times 9 + 8 & = & 11111111 \\
12345678 \times 9 + 9 & = & 111111111 \\
123456789 \times 9 + 10 & = & 1111111111
\end{array}$$

Peter Gallin, Bauma, CH

Je traitais en effet à ce moment-là les développements décimaux, pour illustrer les idées de convergence et de série géométrique, dans le cadre de mon cours de calcul différentiel et intégral. J'utilisais des exemples dans d'autres bases que la base dix, parce qu'on comprend souvent mieux ce qui fonde une écriture, comme celle des décimaux par exemple, en sortant du cadre habituel dans lequel **les automatismes masquent** trop facilement **les idées qui fondent** les manipulations que l'on réalise. Essayez d'écrire, $\frac{1}{3}, \frac{22}{7}, \sqrt{2}$ en développement en base trois, par exemple, puis d'effectuer quelques opérations avec ces nombres exprimés dans cette écriture symbolique inhabituelle et vous comprendrez mieux ce que je veux dire.

[1]Elemente der Mathematik, 53 (4), 1998, p. 177

Considérations philosophiques et envolée lyrique, ...

La résolution de ce problème m'a donné à réfléchir parce qu'elle a bien mis en lumière, pour moi, le fait que le calcul algébrique est plus proche des relations et des objets dont il traite que le calcul numérique direct.

Or on pense souvent plutôt le contraire : le calcul numérique serait concret, même s'il est parfois désagréable, alors que le calcul algébrique serait abstrait, mais élégant.

Dans cet exercice, on se rend compte rapidement, si l'on doit changer de base, que le calcul numérique est en réalité un calcul **très symbolique,** qui ne porte pas sur les nombres eux-mêmes, mais consiste plutôt en des manipulations appliquées aux **écritures représentant** ces nombres. La différence des sentiments que l'on a selon que l'on «calcule»

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

en base dix ou son analogue

$$1234 \times 6 + 5 = 11111$$

en base sept, montre bien à quel point l'entraînement, l'automatisation et l'appropriation profonde du calcul numérique qu'on a généralement réalisés, masquent les objets qu'on croit traiter. On en vient à identifier les écritures représentant les nombres et les nombres eux-mêmes, à penser que les symboles sont les objets et à oublier qu'on ne fait qu'appliquer des règles de manipulation à des symboles qu'on utilise **pour nommer ou pour noter** les nombres et les opérations. Calculer ne revient au fond qu'à **jouer avec des dénominations, selon des règles** bien codifiées. Où est donc dans ce cas le concret si ce n'est dans l'habitude ?

Car qu'est-ce qui fait notre assurance ou notre trouble selon que l'on écrive :

1234 x 9 + 5 = 1234 x (10 - 1) + 5 = 12340 – 1234 + 5 = 12345 – 1234 = 11111 (base dix)

ou que l'on écrive :

1234 x 6 + 5 = 1234 x (10 - 1) + 5 = 12340 – 1234 + 5 = 12345 – 1234 = 11111 (base sept)

si ce n'est l'illusion que, la première fois, on calcule bien «pour de vrai» alors que, la seconde fois, on manipule des symboles couvrant des nombres qu'on ne perçoit pas directement. Et pourtant, les deux développements sont formellement identiques. Simplement, dans le premier cas, **l'habitude** occulte le symbolisme et **donne l'illusion du concret.**

Menée sur ce même problème, la réflexion algébrique place, elle, l'accent sur le fond des choses en se libérant du caractère symbolique de la description des nombres dans une base particulière. Elle est bien sûr symbolique elle aussi, mais ouvertement. Elle nécessite un recul, un effort d'abstraction et une habitude de lecture des faits au travers d'elle. Mais elle n'a pas, je crois, tendance à nous tromper sur ce qu'elle est : elle met en évidence des relations réelles entre des objets mathématiques sans donner l'impression qu'elle est ce qu'elle décrit.

Elle est un formidable outil qui permet de relier les faits à la pensée sur les faits, sans qu'on ait à passer par un langage réducteur ou mystificateur particulier pour désigner les objets dont traitent ces faits.

Ma conclusion, suite à cette digression philosophico-mathématique, c'est qu'en mathématiques comme dans d'autres sciences, mais aussi dans les arts, il convient d'essayer de dégager le fond de la forme et de chercher à discerner les réalités, ou les sentiments, derrière les symboles ou les apparences. L'algèbre est à ce titre un langage souvent plus direct pour atteindre les nombres que l'écriture numérique.

..., puis retour au problème pratique.

Mais qu'en est-il du problème posé ?

Vérifier les relations données, en base dix, est rapidement fait et n'apporte pas grand chose, surtout si le contrôle est effectué à la machine. Si seuls les trois premiers résultats avaient été donnés, au moins aurait-on eu le plaisir, comme récompense à notre curiosité, de constater que la régularité observée se prolonge aux cas suivants. Mais la chose resterait une curiosité amusante, sans plus. On ne chercherait probablement pas à trouver une explication. C'est simplement «comme ça» :

1234 x 9 + 5 = 11106 + 5 = 11111

Poser la question de la généralisation aux autres bases mène au-delà du premier regard, qui est trivial, et pousse, par distanciation [2], à voir avec des yeux neufs ce qu'on croyait connaître et qui paraissait tout à fait banal. D'ailleurs, le fait que les résultats analogues restent vrais dans les autres bases montre qu'**on a affaire à une particularité liée au système d'écriture positionnelle des nombres et pas à une curiosité propre à quelques nombres**.

On peut effectuer les contrôles nécessaires, disons en base sept, en traduisant les relations à vérifier en base dix et en effectuant les calculs dans ce cadre usuel. On exerce alors le travail sur la signification de l'écri-

2 Voir dans *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM a.s.b.l.,1995, p. 30, la description du rapport entre distanciation, motivation et stimulation de l'esprit.

ture positionnelle et sur la traduction d'une base à l'autre. Mais on n'apprend toujours rien sur les raisons qui font que toutes ces relations sont vraies :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1234} \times 6 + 5 \underset{\text{(base 7)}}{} &\overset{*}{\underset{\text{(base 7)}\ \text{(base 10)}}{=}} (\mathbf{1} \times 7^3 + \mathbf{2} \times 7^2 + \mathbf{3} \times 7 + \mathbf{4}) \times 6 + 5 \quad [\text{cf. } (\mathbf{1} \times 10^3 + \mathbf{2} \times 10^2 + \mathbf{3} \times 10 + \mathbf{4}) \times 6 + 5]\\
&\overset{\text{(base 10)}}{=} 466 \times 6 + 5\\
&= 2801\\
&= 400 \times 7+\mathbf{1} = (57 \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1} = ((8 \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1}\\
&= (((\mathbf{1} \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1} = ((\mathbf{1} \times 7^2+\mathbf{1} \times 7 +\mathbf{1}) \times 7 +\mathbf{1}) \times 7+\mathbf{1}\\
&= (\mathbf{1} \times 7^3+ \mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{1} \times 7 +\mathbf{1}) \times 7 +\mathbf{1} = \mathbf{1} \times 7^4 + \mathbf{1} \times 7^3 + \mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{1} \times 7+\mathbf{1}\\
&\underset{\text{(base 10)}\ \text{(base 7)}}{=} \mathbf{11111}
\end{aligned}
$$

On peut aussi effectuer les contrôles nécessaires en essayant de calculer vraiment en base sept. A moins de disposer d'un programme adéquat, on est alors bien obligé de calculer «à la main». Ceci amène à repenser les algorithmes de calcul et à mieux comprendre leur fonctionnement et leur caractère universel, indépendant de la base utilisée :

$$
\begin{array}{r}
1234 \times 6\\
\hline
{}_1 33\\
{}_1 24\\
15\\
{}^1 6\\
\hline
11103
\end{array}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{array}{r}
\overset{1}{}\\
11103\\
+ \quad 5\\
\hline
11111
\end{array}
\qquad \text{donc :} \qquad 1234 \times 6 + 5 = 11111
$$

Avec un peu de recul on peut aussi travailler plus formellement, mais toujours en base sept, et mettre enfin en évidence ce qui fait que toutes ces relations sont vraies, indépendamment de la base utilisée :

$$
\begin{aligned}
1234 \times 6 + 5 &= 1234 \times (10 - 1) + 5\\
&= 12340 - 1234 + 5\\
&= 12340 + 5 - 1234\\
&= 12345 - 1234
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{array}{r}
12345\\
-1234\\
\hline
11111
\end{array}
\qquad \text{donc} \qquad 1234 \times 6 + 5 = 11111
$$

A partir de là, on a le sentiment d'avoir percé le mystère. On a dégagé **une particularité du système positionnel** et pas, simplement, une propriété amusante de quelques nombres. Un pas a été franchi, d'un cas particulier anecdotique à une caractéristique de portée générale concernant le système de notation des nombres. S'il n'y a rien à comprendre dans le fait que 1234 x 9 + 5 = 11111, il y a bien quelque chose de plus profond à tirer du fait que les énoncés analogues soient vrais dans les autres bases et le calcul effectué ci-dessus en dévoile le fonctionnement de manière exemplaire.

Mais essayons de voir plus loin et de généraliser encore un peu. Il est en effet gênant que ce mécanisme s'arrête après avoir produit quelques relations, certes d'autant plus nombreuses que la base est plus grande. Il est dérangeant de devoir détailler chaque situation particulière

* Le commentaire qui encadre le signe d'égalité est sensé indiquer le passage du mode de description dans une base à celui valable dans une autre base.

et de ne pas avoir une preuve formelle générale couvrant tous les cas. C'est là que l'algèbre entre en jeu et permet de dévoiler **un fait plus profond, propre aux nombres et indépendant de leur représentation symbolique.**

Essayons d'écrire successivement:

$$\begin{aligned} 1234 \times \mathbf{9} + 5 &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0) \times \mathbf{9} + 5 \\ &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0) \times (10 - 1) + 5 \end{aligned}$$

(base dix ; 10 signifie dix)

$$\begin{aligned} 1234 \times \mathbf{6} + 5 &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0) \times \mathbf{6} + 5 \\ &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0) \times (10 - 1) + 5 \end{aligned}$$

(base sept ; 10 signifie sept)

$$\begin{aligned} a_4 \times (b - 1) + 5 &= (1 \times b^3 + 2 \times b^2 + 3 \times b^1 + 4 \times b^0) \times (b - 1) + 5 \\ &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0) \times (10 - 1) + 5 \end{aligned}$$

(base b ; en chiffres, b s'écrit 10 ; cette relation définit a_4 implicitement)

$$\begin{aligned} a_n \times (b - 1) + (n+1) &= (1 \times b^{n-1} + 2 \times b^{n-2} + \dots + n \times b^0) \times (b - 1) + (n+1)^{*} \\ &= (1 \times b^n + 2 \times b^{n-1} + \dots + n \times b^1) - (1 \times b^{n-1} + 2 \times b^{n-2} + \dots + n \times b^0) + (n+1) \\ &= (1 \times b^n + 2 \times b^{n-1} + \dots + n \times b^1 + (n+1) \times b^0) - (1 \times b^{n-1} + 2 \times b^{n-2} + \dots + n \times b^0) \end{aligned}$$

On peut alors organiser la soustraction comme dans le calcul numérique :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 \times b^n & + & 2 \times b^{n-1} & + & 3 \times b^{n-2} & + & \dots & + & (n-1) \times b^2 & + & n \times b^1 & + & (n+1) \times b^0 \\ - & & 1 \times b^{n-1} & + & 2 \times b^{n-2} & + & \dots & + & (n-2) \times b^2 & + & (n-1) \times b^1 & + & n \times b^0 \\ \hline 1 \times b^n & + & 1 \times b^{n-1} & + & 1 \times b^{n-2} & + & \dots & + & 1 \times b^2 & + & 1 \times b^1 & + & 1 \times b^0 \end{array}$$

La relation algébrique sous-jacente, non restreinte à une valeur entière pour b (qui est l'équivalent de la base) ni à une limitation des valeurs possibles pour n (qui est l'équivalent du nombre de chiffres), est donc :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k}\right) \times (b-1) + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} b^k$$

Cette relation générale se concrétise par les relations proposées dans le problème de Peter Gallin, si on l'écrit avec les valeurs b=10 et n=1, 2, ...,9 et qu'on adopte l'écriture positionnelle pour décrire les nombres entiers. Elle produit de la même façon les relations analogues qui sont valables dans les autres bases que la base dix.

Dans ce problème, il y a donc bien deux niveaux qui se combinent :

* Cette relation généralise la précédente et définit a_n implicitement ; b est un nombre réel quelconque ; n est un nombre naturel quelconque.

Le premier concerne les propriétés du système positionnel utilisé pour noter les nombres. Ce sont ces propriétés qui font apparaître le schéma proposé par Peter Gallin et c'est ce schéma qui éveille éventuellement la curiosité [3]. C'est **le niveau de la description des nombres** et du «calcul» avec ces descriptions.

Le second est algébrique et concerne la possibilité de manipuler des sommes issues de progressions géométriques et de les organiser de diverses façons. C'est **le niveau de la description des propriétés des nombres.**

On touche par la forme algébrique à quelques aspects qui fondent l'écriture positionnelle et justifient les algorithmes de calcul en colonne ainsi que le glissement des chiffres lors de la multiplication par 10 (qui représente la base et peut signifier sept aussi bien que dix).

Certes, lire la relation ci-dessus et l'interpréter n'est pas facile puisqu'elle est exprimée dans un langage symbolique. Mais elle parle bien à priori du fond des choses, des nombres, et non de la représentation des nombres, même si elle permet celle-ci dans différentes bases, dans un deuxième temps. Cette relation recouvre en fait exactement le développement et les cas particuliers qui la précèdent et c'est eux qu'il faut voir quand on la regarde.

La démontrer peut se faire dans le langage algébrique, en suivant fondamentalement le schéma utilisé précédemment pour la dégager, schéma qui incorporait des séquences de «... » qui sont dès lors simplement cachées dans des symboles de sommation [4]:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k}\right) \times (b-1) + (n+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k}\right) \times b - \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k} + (n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k+1} + (n+1) - \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-(k-1)} + (n+1) - \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \times b^{n-k} + (n+1) - \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \times b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} k \times b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1) \times b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \times b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+1-k) \times b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b^{k}
\end{aligned}
$$

Bien sûr, une telle démonstration n'apporte en soi que peu de chose ! Même si elle est formellement correcte, elle est bien moins instructive que la démarche faite précédemment

---

3 Souvent, une mise en forme adéquate fait apparaître un schéma qui est source d'étonnement, de questionnement et une motivation à se lancer dans une recherche. On trouvera un intéressant développement et quelques illustrations de ce fait dans le livre déjà cité plus haut, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans.* Les auteurs y parlent de pattern, terme repris de l'anglais par manque d'équivalent français adéquat, pour désigner «[...] toutes les symétries, les régularités, les rythmes, les formes diverses que l'on découvre dans des objets ou des événements, et qui invitent l'esprit à conjecturer des propriétés mathématiques, des lois. [...] « (p. 319).

4 La signification des «...» est très différente selon qu'on a une expression comme :

1 + 2 + 3 + ... + 20,	où l'on évite simplement de tout écrire, par paresse,
1 + 2 + 3 + ... + n,	où seul le recours à un symbole défini par induction permettrait de se libérer des petits points,
π = 3,141592653 ... ,	où les petits points sont irremplaçables et en même temps lourds de signification !

en calquant le cas algébrique, par analogie, sur le cas numérique qu'il généralise. Il en va souvent ainsi : les démarches qui nous apportent quelque chose sont généralement celles qui dépassent les schémas dont on a l'habitude, mais qui leur ressemblent encore suffisamment, celles qui ne sont pas encore totalement abouties et qui ne sont pas occultées par leur formalisation symbolique. D'ailleurs, celui qui mène cette démonstration sous cette forme se guide très probablement sur le schéma précédent, en distinguant clairement la démarche pensée de sa traduction dans le langage officiel montré... [5]

---

[5] Il est rare que les mathématiciens présentent leurs démarches. La tendance est plutôt à ne montrer que les résultats finis, soigneusement formulés selon les canons de la profession. Il existe quelques exceptions qui permettent de voir comment les «produits finis» se dégagent, par approches successives, dans un processus de résolution de problème analogue à celui qu'on espère développer dans l'enseignement avec les élèves. Un tel exemple est reproduit dans le dernier numéro de la revue *Elemente der Mathematik*, **53** (4), 1998, p. 139-148. L'excellent livre *Preuves et réfutations* (par Imre Lakatos, traduction française de 1984 parue chez Hermann, Paris) montre lui aussi comment certaines démonstrations se dégagent graduellement, par des échanges et des controverses entre mathématiciens, puis s'affinent au cours du temps pour amener, à chaque époque, une formulation satisfaisant les critères de rigueur du moment.

Plus de deux fois moins

Tiré d'un communiqué «ap» sur une enquête publiée par «Le Figaro» et repris dans «Limpartial» et la «Feuille d'Avis» du 23 novembre 1998, à propos de l'hygiène des Français :

« ...

Quant au savon, les Français en utilisent plus de deux fois moins (600g par an) que les Allemands (1300 g) et les Britanniques (1400 grammes).

... »

Trois opérations en cinq mots ! un record certes. Mais que penser d'autres expressions du même genre :

- *J'en ai deux fois plus que toi*, dans le sens *j'en ai le double de toi.*
- *J'en ai une fois plus que toi*, dans le même sens.
- *J'en ai la moitié plus que toi*, dans le sens, *j'ai les trois demis de ce que tu as.*
- *J'en ai la moitié moins que toi*, dans le sens *j'ai la moitié de ce que tu as.*

Et pourquoi pas :

- *J'en ai trois fois moins que la moitié plus que toi*, pour *la moitié* ?

Ces expressions françaises appartiennent au langage courant, on n'y peut rien, mais que de pièges et d'ambiguités recèlent-elles.

Et si on s'efforçait de les éviter en classe de mathématiques, ou mieux encore, de les collectionner et de les analyser, comme des curiosités lexicales peut être sympathiques mais à exclure d'un discours scientifique.

FJ

«Chaud les marrons»

Chantal Richter

Tel le fantôme de Halloween, l'automne a surgi, les feuilles s'intimident et se mettent à tourbillonner. Il n'en faut pas plus pour que les enfants de ma classe n'aient plus qu'un souhait : récolter tout ce qui tombe, admirer tous les trésors de Dame Nature à cette période-ci de l'année.

Pourtant ... j'aurais souhaité m'attarder plus longuement sur le thème de la courge ... eh! bien non ! Sandra-Flore est revenue des vacances avec un panier rempli de magnifiques châtaignes, de branches et de bogues. Du coup, on abandonne définitivement les cucurbitaces pour se lancer à fond dans les châtaignes.

Après les avoir observées, chassées, comparées, goûtées, écrasées ... que restait-il ? Une autre idée ? Et bien Simon et Alexandre proposent tout à coup un jeu où l'on doit lancer des châtaignes et gagner des points. Il faut trouver dans quoi les lancer. J'apporte les premiers cartons que les enfants peignent, assemblent, puis nous découpons quelques ouvertures.

Il faut ensuite savoir quel chiffre écrire sur chacune d'entre elles et comment le faire correctement. L'enfant qui sait, le note au tableau noir, un autre le recopie dans le bon sens, si possible ... sur la boîte.

Dès le lendemain, d'autres cartons arrivent et nous avons bientôt une petite muraille. Entre-temps, le jeu a déjà démarré, non sans avoir préalablement discuté le règlement. Etablir des règles pour pouvoir expliquer aux premières années comment jouer, leur est apparu essentiel.

Règle n° 1 être 4 joueurs,
n° 2 prendre 5 châtaignes par joueur,
n° 3 faire une ligne de départ,
n° 4 chacun peut tirer trois fois,
n° 5 viser les trous,
n° 6 celui qui a le plus de points gagne.

Après quelques parties, les enfants se rendirent compte que la consigne n° 4 n'était pas nécessaire et impossible à réaliser, vu que chacun avait cinq châtaignes à lancer. Ils décidèrent donc de l'abandonner. Par contre une nouvelle règle vint s'ajouter aux précédentes : Ranger les châtaignes dans la boîte à la fin de la partie, sinon il n'en restait plus assez pour les suivantes. D'autres propositions ont également été testées, comme par exemple : c'est celui qui a le moins de points qui gagne. Tout paraissait relativement simple ... le matériel était prêt, les règles établies et l'emplacement désigné. Pourtant, il fallait encore prendre le temps d'inscrire son nom au tableau noir (pas encore acquis pour tous), afin de pouvoir noter le nombre de points gagnés

après chaque lancer. Les notions de «chacun son tour», prendre 5 châtaignes devant soi et pas une de plus, ne pas dépasser la ligne semblent floues pour certains et nous passons beaucoup de temps dans la mise en place du jeu. Au fur et à mesure l'entraide apparaît entre les enfants, les interactions deviennent surprenantes. Ceux qui ont le plus de facilité à écrire les chiffres dans le bon sens vont corriger les erreurs. Nous faisons les totaux ensemble et quelques-uns essaient de compter sur leurs doigts. Il y a aussi des élèves qui réalisent très vite qu'il y a des ouvertures qui rapportent davantage de points que d'autres, qu'il faut savoir se placer au bon endroit. Le plaisir qu'ils éprouvent à faire ce jeu ne semble pas vraiment motivé par le résultat final. Je me suis rendu compte que pour la plupart d'entre eux, il résidait uniquement dans les préparatifs, la mise en place et l'affichage du nombre au tableau noir. Le jeu a évidemment suscité quelques frictions entre des enfants qui obtenaient 2 et notaient 5 ... Parfois, suivant les coéquipiers, cela passait inapeçu, mais d'autres fois par contre, les tricheurs étaient sévèrement remis à l'ordre sous peine d'être éliminés du jeu. L'élaboration de cette idée, de ce projet, parti de deux élèves fut très intéressante et permit un regain d'attention sur le thème des châtaignes. Elle fut bénéfique pour tous et établit un réseau d'échanges entre des élèves qui parlaient très peu. D'autres eurent beaucoup de plaisir à exprimer les règles du jeu ou à être l'arbitre. L'apprentissage des nombres, l'intérêt des chiffres fut présent à chaque instant. Quant à moi, je ne m'étais pas imaginée la peine et les difficultés que représenterait le respect des consignes.

Après deux semaines de succès, je pus me rendre compte que chacun était capable de compter jusqu'à cinq. La difficulté de l'enseignant restera toujours d'être ouvert et à l'écoute de propositions spontanées, d'aider à leur mise en place, afin de profiter au maximum d'un apprentissage commun, bénéfique à tous. Bref ... pourvu que «châtaigne le but !»

Sensibiliser à l'explication d'une démarche : trouver un juste milieu !

J.-A. Calame, Ecole Normale, Neuchâtel

Introduction

Lors d'une visite dans une classe de 2ème année primaire, une activité proposée par une étudiante a retenu mon attention dans le module consacré à l'approche du raisonnement logique.

«Soyons logiques»[1] demande aux élèves de placer, sur une grille de 3 lignes et 3 colonnes, 9 animaux à l'aide des renseignements suivants :

« ...

- *le zèbre n'est ni dans la colonne de droite, ni dans la colonne de gauche, ni dans la ligne du haut, ni dans la ligne du bas ;*
- *le serpent et le bison sont dans la même ligne, mais ils ne sont pas dans des cases qui se touchent ;*
- *le chat est dans la ligne du haut et à gauche de l'éléphant ;*
- *la girafe est dans la ligne du milieu et dans la case se trouvant juste en dessous de celle de l'éléphant ;*
- *l'hippopotame est dans la colonne de gauche et dans une case se trouvant juste au dessus de celle du serpent ;*
- *le bélier est dans la colonne de gauche ;*
- *le crocodile n'est ni dans la ligne du haut, ni dans la ligne du milieu.* »

Les élèves disposent de petites figurines colorées en papier fort. Ils peuvent donc procéder à des essais successifs par manipulation.

Consignes

L'enseignante annonce qu'elle a formé des tandems qui travailleront dans un premier temps chacun pour soi. Elle insiste sur l'importance de pouvoir raconter ensuite comment on a fait pour placer les animaux.

Les élèves travaillent donc d'abord en tandems, puis ils sont amenés à confronter leurs réponses par groupes de deux tandems, qui notent alors sur une grande feuille comment ils ont procédé pour en arriver à une solution commune.

Je m'empresse de dire qu'à mon sens, le déroulement global de la leçon est bon, que le rythme variable d'un groupe à un autre est pris en compte, comme l'indique d'ailleurs la gestion figurant dans le livre du maître, les confrontations s'opérant entre élèves qui ont terminé à peu près en même temps, et qui ont obtenu des solutions différentes !

Ainsi à l'aise avec le déroulement prévu par l'animatrice, je suis à même de porter mon regard sur un certain nombre d'éléments qui m'ont frappé à propos des attentes possibles de l'adulte et des réponses en situation de la part des élèves.

[1] Ging E., Sauthier M.- H., Stierli E. (1997). *Mathématiques, deuxième année.* Livre du maître. COROME. (p. 52)

Travail en tandems

Les petites cartes sur lesquelles figurent les animaux facilitent notoirement la recherche, et c'est heureux ! Les élèves semblent éprouver un certain goût pour la recherche. En revanche, pour l'observateur, impossible de suivre dans le détail le fil de l'action.

Il note au passage quelques touches...

- Souvent les deux élèves formant un tandem travaillent des deux mains, et les déplacements d'un animal de case en case vont bon train !

- Dans un tandem d'élèves, un des enfants manipule les pièces comme pour former un puzzle, l'autre suit tantôt du regard et conseille, tantôt est franchement dominé par son coéquipier.

- Ailleurs, on utilise plusieurs cartes du même animal en le posant simultanément sur trois cases... puis on le remplace par un autre animal en telle case pour voir si c'est bon !

- Lorsqu'un élève parle à mi-voix, ses propos ne permettent pas de prédire «où il en est». En revanche, le calme relatif de la classe au début de l'activité est un indice de concentration sur le sujet.

- On peut encore observer que chez certains élèves, la grille remplie est le but «en soi» (contrat alors rempli à leurs yeux !), alors que chez d'autres, il y a une amorce de vérification avec, par exemple, encore une inversion soudaine de deux animaux.

- Mais nous n'avons pas rencontré d'élèves qui, spontanément, relisent toutes les indications permettant de vérifier qu'il n'y aucune contradiction dans la présentation finale de la grille complétée.

Confrontation des résultats

Après 15-30 minutes selon les tandems, plusieurs grilles sont remplies entièrement, et permettent donc des confrontations et explications entre élèves. Et là, on réalise subitement que le matériel a ses limites : on va convaincre l'autre tandem en allant directement permuter des petits cartons sur sa grille en disant «mais non, c'est comme ça !». Si l'autre tandem se rebiffe, il obtient un nouvel argument du type: «sans ça, ça va pas !». A supposer que la réponse ne soit pas jugée convaincante, ce sera encore «parce que le zèbre y va pas là !»

Les échanges de paroles sont souvent liés à des tentatives de convaincre l'autre... plus que de l'écouter ! Le but, c'est sûr, est d'avoir convaincu l'autre que «notre grille est la bonne». On voit donc d'abord s'établir un rapport de pouvoir entre les deux tandems d'élèves.

C'est bien en cela que la gestion proposée est pertinente: demander cette étape de confrontations entre deux groupes de deux élèves, c'est les contraindre à sortir d'une démarche dont ils sont absolument sûrs (d'autant plus qu'ils l'ont établie à deux !).

Synthèse et productions d'élèves

En vue d'une synthèse de classe ensuite, lorsque les élèves sont amenés à justifier par groupe de quatre la grille finalement retenue ensemble après discussion, je trouve passionnant de voir les arguments de la démarche explicative :

Premier groupe :

On a lu les explications.

Pour chaque animal, y avait une place et on les a mis !

Deuxième groupe :

On a commencé par le bélier.

Puis on mis ....
(suit la liste complète des animaux)

Troisième groupe :

On a lu.

On a compris.

On a mis les animaux, ça va !

Finalement, même écrites de façon très simple, ces bribes de justifications nous montrent que le contrat minimal est rempli :

«On a lu» nous renseigne sur le statut de la consigne. Il faut d'abord prendre en charge l'énoncé, la question posée ; ce que le «on a compris» vient confirmer.

«On a mis les animaux». Cela, c'est la tentative de résoudre le problème avec l'attribution des bonnes cases de la grille aux neuf animaux.

«Ça va» est une façon de nous dire «on est convaincu de la réponse», de la grille terminée telle qu'on pourrait la photographier avant une synthèse des différents groupes.

Sommes-nous assez attentifs pour remarquer dans ces quelques traces la prise en compte des trois moments de la résolution de problème ?

On pourra bien sûr dire que la deuxième production consistant à relever l'ordre dans lequel les animaux ont été placés va plus loin ! Assurément pour le lecteur. En revanche, rien ne nous permet de dire que les autres groupes n'ont pas entrepris une démarche analogue sans l'avoir exprimée par écrit. Ils ont donné la démarche globale, alors que les autres ont donné une trace à l'intérieur de la résolution du problème. Ce qui compte c'est de pouvoir leur faire découvrir la complémentarité de ces deux interprétations de la consigne «expliquer ce qu'on a fait pour...»

A noter que toutes les grilles remplies étaient correctes !

C'est ici, me semble-t-il, que l'interprétation de la phrase du livre du maître «il est important que les élèves soient persuadés de la pertinence de leur solution» place l'enseignant au coeur du problème.

Comment interpréter cette affirmation ?

Un élève ou un groupe d'élèves peut fort bien être persuadé de la pertinence de sa solution... sans que l'explication fournie par écrit ou par oral en synthèse soit agréée par le maître, parce qu'il la jugerait trop vague, pas assez étayée.

Faire confronter des solutions différentes ?

Oui..., mais s'il n'y en a pas et que la réponse «juste» est admise par tous, les relances du maître peuvent mener les élèves dans un faux débat qui ne sert que le souci de l'adulte qui n'a pas reçu «les justifications qu'il attendait», les «bonnes justifications». Il risque d'oublier tout ce qui s'est passé sans lui, dans les petits groupes, et qui a mené à ces grilles correctement remplies !

Quelques prises de position personnelles

Persuadé que des problèmes comme «Soyons logiques» ont un rôle important à jouer dans l'enseignement des mathématiques, nous restons cependant très prudent sur ce que nous pouvons attendre des élèves de 7-8 ans dans l'explication de leurs démarches:

1) Le barrage linguistique n'est pas négli-

geable. Le fait qu'un élève éprouve des difficultés à retrouver un fil rouge de sa démarche ne signifie pas qu'il n'en a pas eu.

2) Les explications écrites citées dans des articles ou documents méthodologiques sont souvent produites dans le cadre de «contrats» particuliers. Elles sont choisies pour leur intérêt intrinsèque et non pour leur représentativité de pratiques quotidiennes. Par exemple, dans le «Rallye mathématique transalpin» les élèves savent que la justification des solutions d'un problème est importante pour l'attribution des points et qu'elle engage la classe entière. Même si l'explication choisie n'a pas pu être discutée par tous les groupes, elle a cependant déjà fait l'objet d'un débat et n'est donc plus une production «brute».

3) Enfin, les productions «acceptées» par l'ensemble de la classe dans une synthèse, qu'elles aient été plus ou moins téléguidées par des relances plus ou moins pertinentes du maître, ne permet pas de prédire si elles seront automatiquement utiles et mobilisables dans un nouveau contexte, dans une nouvelle situation.

En conclusion, tentons d'expliquer le titre de cet article :

Le module proposé dans les moyens 1P-4P sur l'approche du raisonnement logique a un sens indiscutable, car il favorise une démarche de type socio-constructiviste, utile dans ce domaine comme dans la résolution de problèmes en général (numération, géométrie,..).

Nous adhérons entièrement au type de mise en commun tel qu'il a été proposé par les auteurs du moyen d'enseignement, et tel qu'il a été animé par une enseignante en formation.

Il faut nous garder, nous semble-t-il, des deux extrêmes dans la mise en commun des résultats avec la classe :

- une mise en commun «trop pauvre», dans laquelle les élèves ne feraient que constater qu'ils ont rempli la grille sans erreur, sans essai d'explication de leur démarche à partager collectivement ;
- des tentatives de «récupération» trop ambitieuses de la part de l'enseignant qui voudrait privilégier des procédures «adultes» en logique, fondées sur des modèles tels que l'arbre, le tableau organisé à double entrée. Démarche qui aurait son sens en 5ème, 6ème années par exemple, mais qui passerait nettement au-dessus de la portée d'élèves de 2ème année.

L'ambition dans des classes de 1ère, 2ème années, s'il y en avait une particulière à privilégier, serait de favoriser l'écoute de l'autre, susciter l'envie de découvrir toutes sortes de procédures menant à une solution, mais en restant très attentif aux difficultés d'expression pour un enfant de 7-8 ans, en particulier s'il n'est pas de langue maternelle française !

Les jeux de Nim

Augustin Genoud, Savièse

Note : les quelques pages qui suivent ont été inspirées de l'ouvrage de Jacques Bouteloup (Les Jeux de Nim, ADCS). Notre intérêt va surtout à la pratique des jeux.

Pour des raisons typographiques, nous avons renoncé à certaines notations ensemblistes du genre f(12)={11} au lieu de f(12)=11, moins correct, mais plus pratique. Le lecteur voudra bien nous en excuser.

1. Définition : ce sont divers types de jeux qui se jouent à deux et soumis à des règles précises.

2. Remarques : nous étudierons les jeux dits finis, c'est-à-dire, ceux qui forcément aboutissent au bout d'un certain temps à la fin du jeu, car les règles ne peuvent plus être respectées. Notre intérêt va surtout à la pratique de ces jeux. Dans la suite, on utilisera souvent le mot position. Une position (ou situation) est dite perdante ou gagnante pour celui qui va jouer le prochain coup. C'est donc la position devant laquelle se trouve un joueur dont c'est le tour de jouer.

3. Exemples de jeux : dans les jeux suivants, nous allons chercher les positions perdantes par récurrence. Nous verrons plus loin, au chapitre 5, des méthodes plus complexes permettant de trouver les positions perdantes de certains types de jeux.

   a) Le pion empoisonné : on dispose d'un tas de douze jetons. A tour de rôle, deux joueurs retirent un, deux ou trois jetons du tas. Celui qui est contraint de prendre le dernier jeton a perdu la partie.

   - La position " un seul jeton en jeu " est bien sûr perdante.
   - Les positions permettant d'atteindre «un seul jeton» sont gagnantes. Ce sont les positions «2 jetons», «3 jetons», «4 jetons». Elles sont gagnantes à condition de jouer correctement.
   - La position «5 jetons» est perdante. C'est la seule qui conduit obligatoirement aux positions gagnantes précédentes.
   - Les positions «6, 7, 8 jetons» sont gagnantes car elles permettent d'atteindre la position «5 jetons» perdante, en jouant juste.

- La position «9 jetons» est perdante...
- Dans ce jeu, les positions «1, 5, 9 jetons» sont donc perdantes. On dit qu'elles appartiennent au noyau. La position " 12 jetons " est gagnante, à coup sûr. Celui qui commence gagne, en prenant trois jetons et en maintenant constamment l'adversaire dans les positions perdantes.
- Il est utile de représenter les situations perdantes schématiquement.

Dans les schémas, les flèches indiquent les chemins possibles entre les positions perdantes. S'il y a plusieurs flèches, c'est le coup joué par l'adversaire qui va indiquer le chemin à suivre.

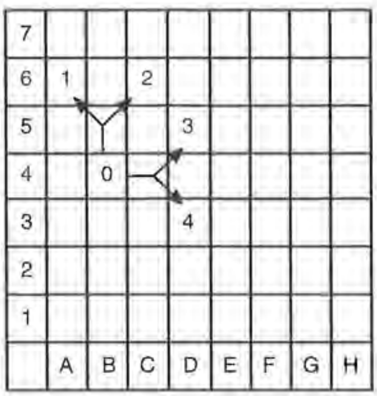
Remarques :

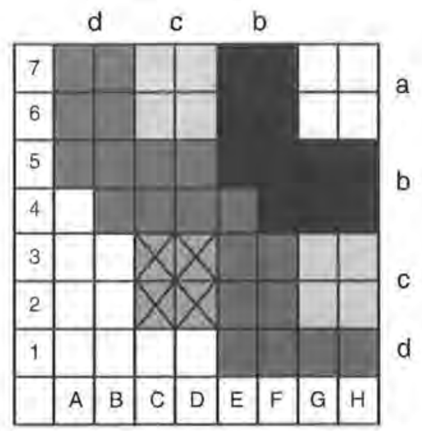
- Dans ce type de jeu, la tactique consistera toujours à rechercher les positions perdantes, ce que nous ferons systématiquement à l'aide de schémas. Si nécessaire, nous noterons P = position perdante et G = position gagnante. Nous essayerons également de trouver un moyen de retenir toutes les situations perdantes (pour le jeu du pion empoisonné avec un nombre illimité de pions, le noyau correspond à $4n + 1$, n appartenant aux nombres naturels).
- Les positions perdantes existent toujours pour les jeux finis et il suffit donc de maintenir l'adversaire dans ces positions.
- Une position perdante ne peut être suivie que d'une position gagnante. Une position gagnante doit pouvoir conduire à une position perdante, en jouant correctement. Par conséquent, il faut un minimum de deux coups pour passer d'une situation perdante à une autre situation perdante.
- Si au départ du jeu, je suis dans une position gagnante, pas de problème. Si je suis dans une position perdante, j'attends une erreur de mon adversaire pour changer ma position. Si les deux joueurs connaissent la tactique, le jeu n'a plus d'intérêt.

b) Le pion magique : comme le pion empoisonné, mais celui qui prend le dernier jeton gagne.

- Les positions «1, 2 et 3 jetons» sont gagnantes.
- La position «4 jetons» est perdante.
- Une brève analyse montre que le noyau est constitué des positions «0, 4, 8, 12 jetons».

c) Le cavalier d'échecs : un cavalier d'échecs se trouve initialement sur la case B4 d'un échiquier de 8 cases sur 7 cases. Etant sur une case quelconque, il peut effectuer l'un des quatre mouvements indiqués sur la figure (sans sortir de l'échiquier) et seulement l'un de ces quatre là. Les deux joueurs déplacent le cavalier à tour de rôle jusqu'à ce qu'un joueur ne puisse plus jouer. Le dernier joueur ayant pu jouer est alors déclaré vainqueur. En jouant le premier, quelles sont les cases correspondant au premier mouvement permettant à coup sûr de gagner ? (11e Championnat international des jeux mathématiques et logiques du 15 mars 97, 12e problème).





Il est intéressant de voir que nous retrouvons la même tactique. Il s'agit de retrouver les positions perdantes.

a Cases perdantes, car à partir de là, on ne peut plus jouer.

b Cases gagnantes. Elles permettent d'atteindre les case perdantes a (en jouant bien).

c Cases perdantes. Elles conduisent forcément aux cases gagnantes b.

d Cases gagnantes. Elles permettent d'atteindre les cases perdantes c.

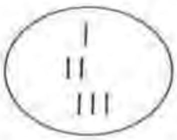
Cases perdantes. Elles conduisent forcément aux cases gagnantes d ou b.

La case B4 est gagnante et il faut jouer les cases D3 ou C6 pour mettre l'adversaire dans une position perdante.

d) Fan Tan : ce jeu est également connu sous le nom de jeu de Nim à tas ou jeu de Marienbad.

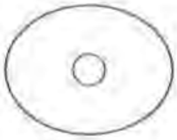
Règle : deux joueurs sont en présence de n tas d'allumettes contenant un nombre quelconque d'allumettes (au moins une). A tour de rôle, les joueurs retirent dans un des tas autant d'allumettes qu'ils le souhaitent mais au minimum une allumette. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Pour simplifier la représentation schématique, nous admettons par la suite que plusieurs tas sont représentés par des lignes différentes :



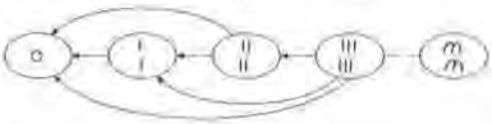
Ce schéma représente trois tas : un d'une allumette, un autre de deux allumettes et le 3ᵉ de cinq allumettes.

1° : Il y a un seul tas : toutes les positions sont gagnantes et le premier joueur prend toutes les allumettes du tas. La situation «pas d'allumettes» est perdante :



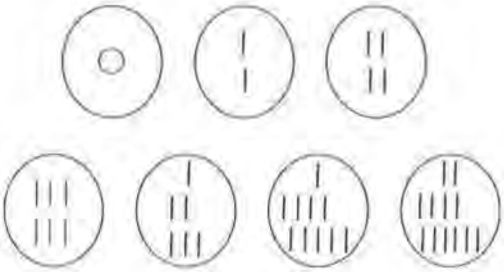
Aucune allumette dans le tas.

2° : Il y a au plus deux tas :



Situation perdante = même quantité d'allumettes dans les deux tas.

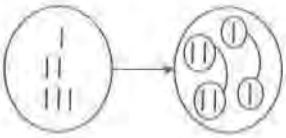
3° : Il y a au plus trois tas : voici quelques positions perdantes :



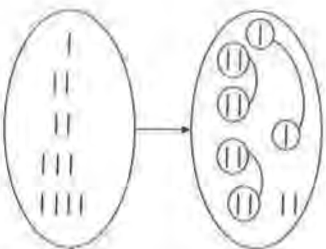
Ici, et pour la suite, nous ne mettons plus les flèches, car elles seraient trop nombreuses. Rappelons qu'il est toujours possible de passer d'une position perdante à une autre en deux coups, donc que l'on peut toujours maintenir l'adversaire en position perdante, en jouant correctement.

4°: Il y a n tas : l'étude devient de plus en plus compliquée à moins de trouver un " truc ". Ici, il consiste à décomposer le nombre d'allumettes de chaque tas en sous-tas de 1, 2, 4, 8, 16, 32 allumettes (puissances de 2). Les sous-tas doivent être le plus grand possible (5 ne peut pas être décomposé en 2, 2 et 1 mais forcément en 4 et 1 !). Si tous les sous-tas ainsi constitués peuvent être associés par paires, alors la situation appartient au noyau.

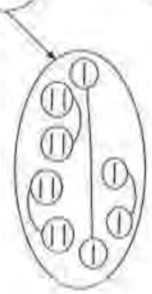
Exemples :



Cette situation appartient au noyau.



Cette situation n'appartient pas au noyau. En enlevant 2 allumettes dans le tas du bas, on obtient une position perdante, donc du noyau.



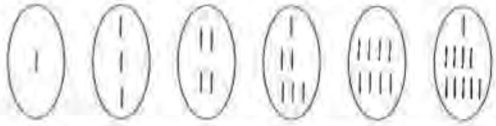
Les sous-tas sont faux, car 4 ne peut être séparé en 2, 1 et 1 !

e) Fan Tan-inverse : même jeu que le précédent mais celui qui prend la dernière allumette perd.

1°: Il y a un seul tas : 

2°: Il y a au plus deux tas :

3°: Il y a au plus trois tas :

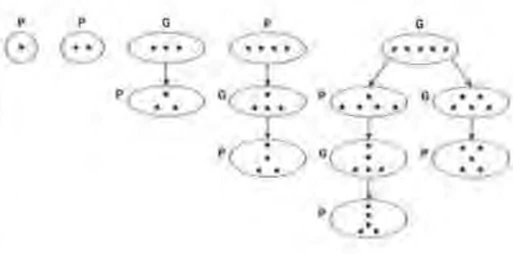


Note : les positions perdantes sont en grande partie les mêmes qu'au Fan Tan. Le " truc " du Fan Tan fonctionne encore ici sauf pour les cas où tous les tas ont une seule allumette. Dans ce cas, il est facile de se rappeler les positions perdantes : une seule allumette, trois tas d'une allumette, cinq tas d'une allumette, etc.

f) Jeu de Grundy : on dispose d'un ou de plusieurs tas de pions comprenant chacun un nombre arbitraire de pions. Le jeu consiste à partager un seul tas existant en deux tas comprenant un nombre différent de pions. Celui qui ne peut plus jouer perd.

Etudions les premiers cas (un seul tas au départ) en appelant P = position perdante et G = position gagnante.

Avec cinq pions, la position est gagnante car on peut mettre l'adversaire en situation perdante, en prenant la voie de gauche.



Nous verrons plus loin (chap. 5, d, 3°) comment généraliser les positions perdantes pour un ou plusieurs tas.

g) Jeu de Grundy-inverse : comme le précédent mais celui qui ne peut plus jouer gagne.

Les schémas précédents nous montrent que la situation est gagnante pour un pion, gagnante pour deux pions, perdante pour trois pions, gagnante pour quatre pions et gagnante pour cinq pions en prenant la voie de droite.

h) Jeu de Wythoff : on dispose de deux tas contenant un nombre quelconque d'allumettes. A tour de rôle, les joueurs retirent autant d'allumettes qu'ils le veulent d'un seul tas ou le même nombre d'allumettes de chacun des tas. Celui qui retire la dernière allumette gagne.

Ce jeu étudié par le mathématicien Wythoff en 1907 est également connu sous le nom de «Jeu des 2 tas d'or» ou «Coincez la reine» ou encore «Dornim».

Les positions perdantes de ce jeu sont données dans le tableau suivant :

tas 1	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
tas 2	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Dans le tas 1, on met le plus petit nombre entier n'apparaissant pas dans les colonnes de gauches. Dans le tas 2, depuis la gauche, on ajoute 1 au nombre du tas 1, puis 2, puis 3, puis 4, etc.

i) Jeu de Wythoff-inverse : comme le précédent mais celui qui retire la dernière allumette perd.

Là aussi, le tableau suivant donne les positions perdantes :

tas 1	1	2	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
tas 2	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Les positions perdantes sont en grande partie les mêmes qu'au jeu de Wythoff (on avait constaté la même chose pour le Fan Tan et le Fan Tan-inverse)

4. Jeux directs et indirects :

a) Introduction : dans les jeux de Nim, nous pouvons définir une relation appelée f où les éléments de départ sont donnés par la position devant laquelle se trouve le joueur qui doit jouer et les éléments d'arrivée par la position laissée à l'adversaire lorsque le joueur a joué.

Exemples : Pion empoisonné :

f (12) = 11 ou f (12) = 10 ou f (12) = 9
Cavalier d'échecs : f (B4) = A6 ou f (B4) = C6... f (G7) = ϕ, la position G7 est bloquée. Une position bloquée est donc une position sans image, notée ϕ.

b) Un jeu est qualifié de direct si celui qui est placé devant un position bloquée est perdant. Dans le cas contraire, le jeu est qualifié d'inverse. Exemples :

- Pion empoisonné : f (1) = 0, perdu ; f (0) = ϕ, gagné, donc jeu inverse.
- Pion magique : f (1) = 0, gagné ; f (0) = ϕ, perdu, donc jeu direct.
- Fan Tan : f (0) = ϕ, perdu, donc jeu direct.
- Fan Tan-inverse : f (0) = ϕ, gagné, donc jeu inverse.
- Jeu de Grundy : f (1) = f (2)= ϕ, perdu, donc jeu direct.
- Jeu de Wythoff : f (0) = ϕ, perdu, donc jeu direct.

5. Recherche du noyau dans les jeux directs :

a) Introduction : la recherche du noyau par tâtonnement convient parfaitement pour bon nombre de jeux directs ou inverses et suffit généralement pour gagner contre un adversaire non au courant de la tactique. Pour tous les jeux directs, il existe une méthode (plus longue mais plus précise) permettant de savoir si une position appartient au noyau. Pour cela, il faut d'abord introduire les notions de somme digitale et de fonction de Grundy.

b) Somme digitale :

La recherche de la somme digitale de deux nombres suffit ici.

Méthode : transformer les 2 nombres de base 10 en base 2, puis additionner, sans retenue, les valeurs en base 2 et transformer le résultat en base 10 :

base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
base 2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	

D'où 6 + 7 = 110 + 111 = 001 = 1 (voir tableau de la somme digitale)

Remarques :

1°: pour transformer un nombre en base deux, une méthode consiste à effectuer des divisions successives par 2 :

11 = 2 x 5 + **1**

5 = 2 x 2 + **1**

2 = 2 x 1 + **0**

1 = 2 x 0 + **1**

Donc 11 = 1011 en base 2 (en gras, de bas en haut)

2°: l'opération somme digitale sera notée *.

3°: la somme digitale est associative et commutative. Etant donné une somme digitale non nulle, il est toujours possible de remplacer l'un des entiers intervenant par un entier plus petit de façon à obtenir une somme digitale égale à 0.

Exemple :

8 * 9 * 13 = 1 * 13 = 12. Or 8 * 9 * 1 = 0 ou 8 * 5 * 13 = 0 ou encore 4 * 9 * 13 = 0. Dans cet exemple, il y a même trois manières de le faire. Cette propriété sera fort utile par la suite.

Voici le début de la table de la somme digitale de deux nombres :

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2			0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3				0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4					0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5						0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6							0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7								0	15	14	13	12	11	10	9	8
8									0	1	2	3	4	5	6	7
9										0	3	2	5	4	7	6
10											0	1	6	7	4	5
11												0	7	6	5	4
12													0	1	2	3
13														0	3	2
14															0	1
15																0

c) Fonction de Grundy : c'est une fonction qui va nous permettre de déterminer le noyau des jeux directs. La fonction de Grundy notée g(x) dépend de f(x) vue dans le chapitre 4.

g(x) = 0 sera une position du noyau, donc en particulier des positions bloquées. g(x) est un nombre naturel (appelé nombre de Grundy), le plus petit n'apparaissant pas dans les images de g des images de f.

d) Exemples

1°: Pion magique : f (0) = ϕ, position bloquée, donc g (0) = 0 f(1) = 0 et g(0) = 0, donc g(1) = 1

f(2) = 0 ou 1 et g(0) = 0, g(1) = 1, donc g(2) = 2

f(3) = 0 ou 1 ou 2 et g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, donc g(3) = 3

f(4) = 1 ou 2 ou 3 et g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, donc g(4) = 0

f(5) = 2 ou 3 ou 4 et g(2) = 2, g(3) = 3 , g(4) = 0, donc g(5) = 1

Il est important pour la suite de bien comprendre ce premier exemple. Dans le pion magique, on peut retirer un, deux ou trois jetons, d'où f(5) = 2 ou 3 ou 4. Puis on cherche la fonction g de chacune des images de f. Les images de g sont 2, 3 et 0. Le plus petit entier naturel n'apparaissant pas parmi ces trois nombres vaut 1. Alors, g(5) = 1.

Il est aussi pratique de chercher g(x) à l'aide du tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	etc.
f(x)	∅	0	0 ou 1	0 ou 1 ou 2	1 ou 2 ou 3	2 ou 3 ou 4	
		g(0) = 0	g(0) = 0 ou g(1) = 1	g(0) = 0 ou g(1) = 1 ou g(2) = 2	g(1) = 1 ou g(2) = 2 ou g(3) = 3	g(2) = 2 ou g(3) = 3 ou g(4) = 0	
g(x)	0	1	2	3	0	1	

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g(x)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

où g(x) = 0, position du noyau, soit : 0, 4, 8, 12.

2°: Fan Tan : cherchons la fonction de Grundy dans le cas d'un seul tas d'allumettes. Nous retrouvons «le pion magique» avec un nombre illimité d'allumettes pouvant être pris par les joueurs.

La même recherche que pour le pion magique nous conduit au tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
g(x)	0	1	1	3	4	5	6	7	8	9	n

IMPORTANT : la fonction de Grundy d'un seul tas permet de trouver la fonction de Grundy pour un nombre illimité de tas, car g(a o b o… z) = g(a) * g(b) *… g (z). C'est ici que se lient les notions de fonction de Grundy et de somme digitale et c'est là le principal intérêt de ces notions qui, rappelons-le, doivent nous permettre de trouver le noyau des jeux directs.

Exemples :

- Soit des tas de 1, 2 et 3 allumettes :

Nombre d'allumettes	1	2	3
Nombre de Grundy	1	2	3
Somme digitale	1 ✻ 2 ✻ 3 = 3 ✻ 3 = 0, donc position du noyau		

- Soit des tas de 1, 3, 5 et 7 allumettes (position initiale du jeu de Marienbad).

Nombre d'allumettes	1	3	5	7
Nombre de Grundy	1	3	5	7
Somme digitale	1 ✻ 3 ✻ 5 ✻ 7 = 2 ✻ 2 = 0, donc position du noyau			

- Soit des tas de 1, 2, 2, 3, 4 allumettes (voir chap. 3, d, 4°).

Nombre d'allumettes	1	2	2	3	4
Nombre de Grundy	1	2	2	3	4
Somme digitale	1 * 2 * 2 * 3 * 4 = [illegible] donc position gagnante				

Comment jouer pour donner une position perdante ? Il faut observer la table de la somme digitale et se rappeler que seul a * a = 0. Ici, il faut absolument agir sur le tas de quatre allumettes et quelques essais montrent qu'il faut prendre 2 allumettes dans ce tas. Nous vérifions que

$$1 * 2 * 2 * 3 * 2 = 0.$$

- Soit des tas de 8, 9, 13 allumettes. 8 * 9 * 13 = 12, position gagnante.

  Comme 8 * 9 = 1, en enlevant 12 allumettes au tas de 13, on obtient une position perdante (1 * 1= 0).

  Comme 8 * 13 = 5, en prenant 4 allumettes au tas de 9, on a une position perdante.

  Comme 9 * 13 = 4, en ôtant 4 allumettes au tas de 8, on passe à une position perdante.

  Nous avons ici 3 possibilités de passer d'une position gagnante à une position perdante.

3°: Jeu de Grundy

x	1	2	3	4	5
f(x)	∅	∅	1 et 2	1 et 3	1 et 4 ou 2 et 3
			g(1) = 0 et g(2) = 0	g(1) = 0 et g(3) = 1	g(1) = 0 et g(4) = 0 alors 0 * 0 = 0 ou g(2) = 0 et g(3) = 1 alors 0 * 1 = 1
g(x)	0	0	1	0	2

On voit ici l'importance du "et" et du "ou" (1 et 3 = deux tas de 1 et 3 pions)

De proche en proche, on obtient le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(x)	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2

Des recherches par ordinateur pour x inférieur à 10000 ont montré qu'il n'existe pas de périodicité ! Grâce au tableau précédent, nous sommes en mesure de déterminer les positions perdantes pour un ou plusieurs tas d'au plus 17 pions.

Exemples :

- Soit un tas de 5 pions, position gagnante selon le tableau précédent. Le jeu permet deux possibilités : 1 et 4 ou 2 et 3. Il faut choisir 1 et 4.

Nombre de pions	1	4
Nombre de Grundy	0	0
Somme digitale	0 * 0 = 0, donc position du noyau	

Nombre de pions	2	3
Nombre de Grundy	0	1
Somme digitale	0 * 1 = 1, donc position gagnante	

- Soit des tas de 3, 4 et 5 pions.

Nombre de pions	3	4	5
Nombre de Grundy	1	0	2
Somme digitale	1 * 0 * 2 = 1 * 2 = 3, donc position gagnante		

Le jeu permet de faire des tas de 1, 2, 4, 5 ou 3, 1, 4, 5 ou 3, 4, 1, 4 ou 3, 4, 2, 3 pions. L'étude de chaque cas montre que seul le dernier choix donne une position perdante qui conduira forcément à une position gagnante à partir de laquelle il faudra à nouveau rechercher les nombres de Grundy et la somme digitale pour redonner une position perdante, etc.

6. Conclusion : les jeux de Nim sont passionnants. La recherche du noyau par les nombres de Grundy et la somme digitale est complexe mais terriblement efficace lorsque les jeux deviennent plus compliqués. Dans la majorité des cas, heureusement, la recherche du noyau par " tâtonnement " est suffisante. Les passionnés trouveront encore de nombreux sujets dans le livre de Bouteloup cité au début (notamment la recherche du noyau dans les jeux indirects).

Additions suisses

Raymond Bloch, le Vesinet

[ndlr] *M. Raymond Bloch est un collectionneur, inventeur de récréations mathématiques, ne nécessitant le plus souvent aucune connaissance supérieure à celles de l'enseignement primaire ou secondaire au plus. Sa collection contient aujourd'hui plus de 6000 énigmes, dont 1000 additions alpha-numériques, ou cryptarithmes*[1] *sur les thèmes les plus divers.*

Il nous fait le plaisir et l'amitié de nous en adresser 5, pour permettre à nos lecteurs de revoir leurs connaissances géographiques sur les Grisons et la Suisse centrale.

Selon lui toutes ces additions ont une solution unique (et, en effet, nous n'en avons pas trouvé d'autres) ce qui fait précisément leur intérêt.

La durée de résolution qu'il note entre parenthèses n'est qu'une indication pour quelqu'un de très entraîné, et à son avis, il n'y a aucune honte à mettre plus longtemps.

Les voici. Bon amusement, la rédaction attend les solutions complètes des lecteurs.

			1	8	2	0	M
			S	A	I	N	T
+		M	O	R	I	T	Z
	G	R	I	S	O	N	S

(3 minutes)

				1	6	8	0	M
		S	A	M	E	D	A	N
+		G	R	I	S	O	N	S
	E	N	G	A	D	I	N	E

(6 minutes)

		A	R	O	S	A
		D	A	V	O	S
+					O	U
	G	S	T	A	A	D

(40 minutes)

		T	A	R	A	S	P
+		T	A	R	A	S	P
	V	U	L	P	E	R	A

(10 minutes)

		C	R	E	D	I	T
+		S	U	I	S	S	E
	L	U	C	E	R	N	E

(6 minutes)

Et pour terminer, longue vie et bonne année ...

						A
			M	A	T	H
+		E	C	O	L	E
	H	O	U	R	R	A

(3 minutes)

1 Un cryptarithme est une opération arithmétique à reconstituer qui obéit aux règles suivantes :
- chaque chiffre est représenté par une même lettre;
- deux lettres différentes représentent deux chiffres différents;
- aucun nombre ne commence par le chiffre 0.

CABRidées :

On en «Mongerait»

Michel Chastellain, SPES (VD)

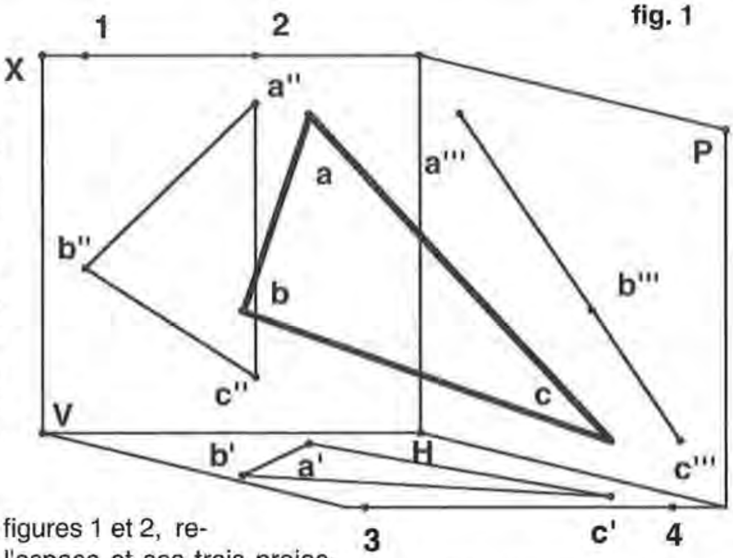


fig. 1

Voici deux propositions dans lesquelles «Cabri-Géomètre» s'avère un outil pédagogique et didactique particulièrement efficace, lorsque l'ordinateur «du maître» est couplé à une tablette rétroprojective lui permettant alors de concrétiser, visuellement, ses explications par des images dynamiques.

La première[1], illustrée par les figures 1 et 2, représente un triangle **abc** de l'espace et ses trois projections orthogonales, dans un trièdre trirectangle. Ici, la construction élaborée vise, plus spécifiquement, à faciliter la compréhension de «ce qui se passe» lorsque le triangle **abc** se situe dans un plan perpendiculaire au troisième plan de projection (**P**). En modifiant alternativement les points **2/4**, d'une part et **1/3**, d'autre part – qui déterminent deux segment sur lesquels se situent, respectivement, les sommets **a**, **c** et **b** du triangle **abc** – ou en déplaçant la position de ces trois sommets, sur les segments auxquels ils appartiennent, l'enseignant peut représenter, en temps réel, une multitude de situations entièrement différentes.

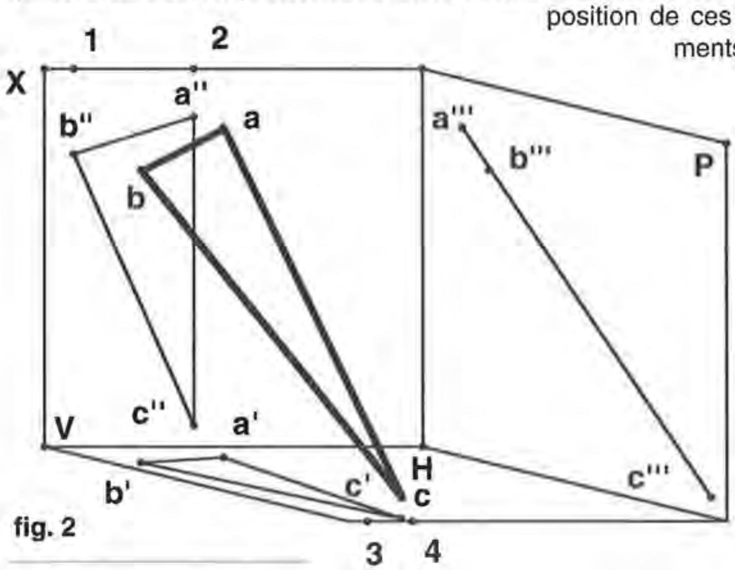


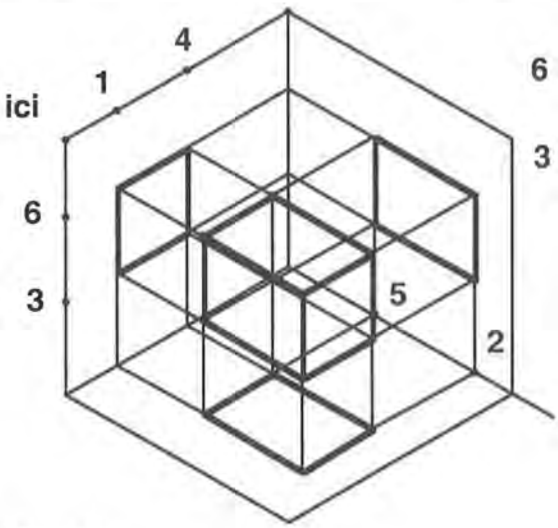
fig. 2

Bien évidemment, on aurait pu envisager n'importe quel autre cas, par exemple lorsque le triangle **abc** n'occupe aucune position particulière de l'espace, ou lorsqu'il se situe dans un plan perpendiculaire à l'un des autres plans de projection (**H** ou **V**).

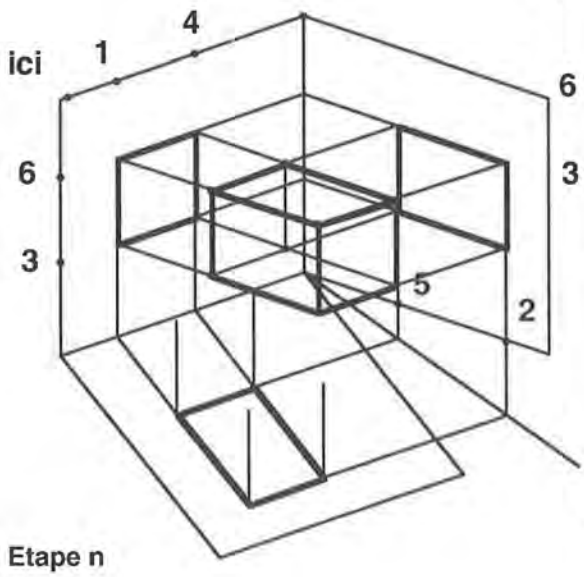
[1] M. Chastellain, S. Lugon, *Cabricolages*, Ed. LEP, Lausanne, 1992, p. 112.

La seconde proposition, fondée sur la première et offerte à nouveau par notre collègue P.-A. Glauser[2], se passe de commentaires ...

Etape 1



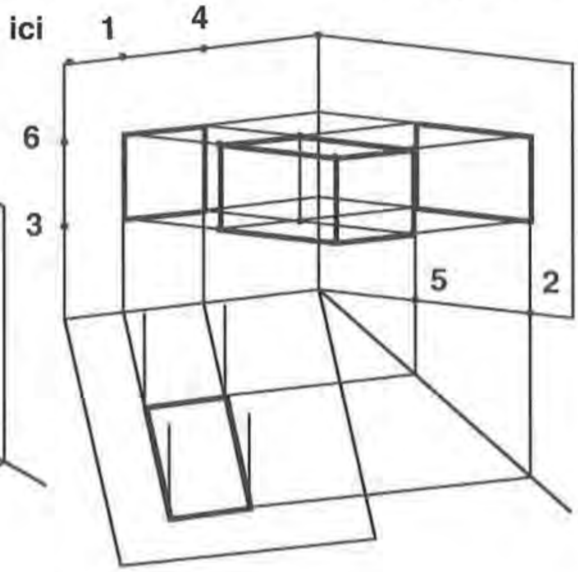
Etape 2



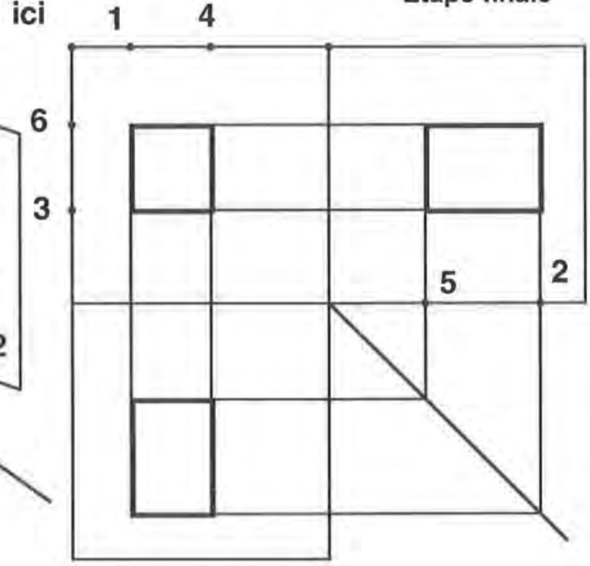
Etape n

...

Etape n + ...



Etape finale



... , elle est tout simplement «mongique» !

[2] Math-Ecole 185, *Du cube à l'octaèdre.*

7e Rallye mathématique transalpin, première épreuve

[ndlr] Une fois de plus, tous les records de participation sont battus pour le 7e Rallye mathématique transalpin. A la fin de janvier, près de 170 classes de Suisse romande, des degrés 3 à 8, ont résolu une série de problèmes bien consistants. A la même période, des centaines d'autres classes du Tessin, d'Italie, du Luxembourg, du département de l'Ain en France voisine et de la République Tchèque résolvaient les mêmes problèmes, dans les mêmes conditions :

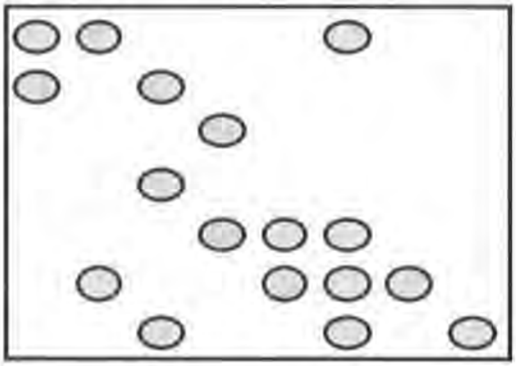
C'est le groupe classe qui a la charge de l'activité, de A à Z. En l'absence du maître, les élèves ont 50 minutes pour fournir une solution justifiée, pour la classe, de chaque problème de leur catégorie. C'est ce qui constitue, avec la résolution de problème, l'un des aspects les plus intéressants du Rallye : il faut se répartir les tâches, confronter les solutions des différents groupes engagés sur le même problème, coopérer, débattre, rédiger des justifications dont il est largement tenu compte dans l'évaluation.

Le maître, s'il est tenu éloigné de sa classe, peut tout de même tirer un grand profit de la confrontation : observer les élèves d'une autre classe où il fonctionne généralement comme «surveillant», examiner les réponses et explications de ses propres élèves, en parler avec eux, les exploiter.

Voici les problèmes de cette première épreuve du 7e RMT. Les résultats et analyses paraîtront dans un prochain numéro.

1. CHOCOLATS (Cat 3)

Dans cette boîte, les chocolats étaient bien alignés et disposés régulièrement. Mais il n'en reste plus que 17.



Combien de chocolats de cette boîte ont déjà été mangés ?

Expliquez votre raisonnement.

2. LA TIRELIRE (Cat 3)

Dans cette tirelire, il y a 57 francs et il n'y a que des pièces de 2 francs et des pièces de 5 francs.

Combien peut-il y avoir de pièces de 2 francs et de pièces de 5 francs ?

Expliquez toutes vos solutions, en détail.

3. LES ÎLES (Cat 3, 4)

Un explorateur a découvert trois îles. Il a partagé la carte de ces îles en plusieurs régions, qu'il colorie ainsi :

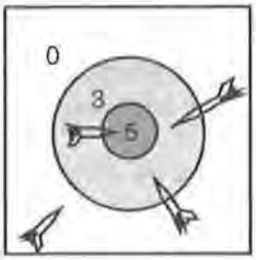
- chaque région est coloriée d'une seule couleur,
- deux régions qui ont une partie de frontière commune sont de couleurs différentes,
- une couleur utilisée sur une île n'est pas utilisée sur une autre île.

Comment l'explorateur peut-il colorier la carte des trois îles, en utilisant le moins de couleurs possible ?

Coloriez votre meilleure solution et indiquez le nombre de couleurs utilisées.

4. LA CIBLE (Cat 3, 4)

Xavier a obtenu un total de 11 points en lançant ses quatre fléchettes sur cette cible : Il dit que, avec quatre fléchettes, il peut obtenir tous les autres totaux de 3 à 20.



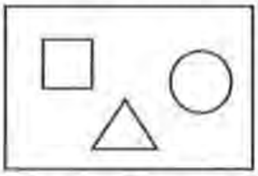
Qu'en pensez-vous ?
Indiquez vos calculs pour chaque total que vous avez trouvé.

5. COLORIAGES (Cat 3, 4)

Les 25 élèves d'une classe reçoivent chacun une feuille sur laquelle sont dessinés un carré, un cercle et un triangle.

Ils doivent colorier chaque figure d'une couleur différente.

Ils peuvent choisir parmi quatre couleurs : rouge, jaune, vert ou bleu.



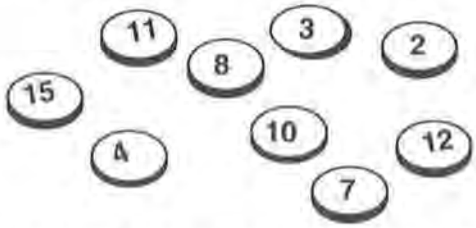
Est-il possible que chaque enfant colorie ses trois figures d'une manière différente de tous ses autres camarades ?

Indiquez toutes les manières différentes que vous avez trouvées pour colorier ces figures.

6. PILES DE JETONS (Cat 3, 4)

Faites trois piles avec ces neuf jetons, telles que :

- dans chaque pile il y a le même nombre de jetons.
- dans chaque pile, le jeton du dessus vaut la somme des autres jetons de la pile.



Quels sont les jetons qui seront sur chacune des piles ?

Expliquez comment vous avez trouvé et comment on peut faire les piles.

7. TOURNOI DE PING PONG (Cat 4, 5)

Il y a 64 inscrits pour le tournoi de ping pong de l'école.

Au premier tour, tous les joueurs, jouent une partie contre un adversaire. Les perdants sont éliminés et les gagnants sont qualifiés pour le tour suivant.

Les règles sont les mêmes pour les tours suivants, jusqu'à la finale où il ne reste plus que deux joueurs.

Dans l'une des demi-finale, Julie a battu Roland et dans l'autre demi-finale, André a battu Martina.

C'est une fille qui a remporté le tournoi. Quel est son nom ?

Combien Roland a-t-il joué de parties ?

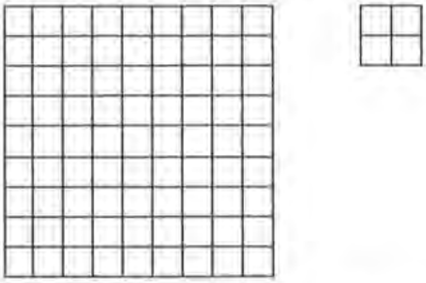
Combien de parties ont été jouées en tout dans ce tournoi ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses. ⇨

8. CARRELAGES (Cat 4, 5)

Jules, Jacques et John ont chacun le même nombre de carreaux.

- Jules a pu construire ces deux carrés en utilisant tous ses carreaux.



- John a pu former deux autres carrés, en utilisant aussi tous ses carreaux.

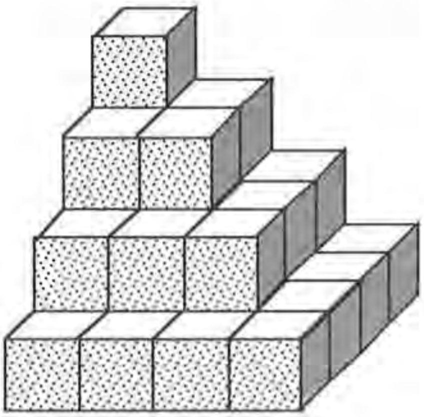
Quels carrés John a-t-il construits?

- Jacques essaie de former trois carrés avec tous ses carreaux.

Jacques arrivera-t-il à former trois carrés ?

Expliquez vos réponses.

9. JEU DE CONSTRUCTION (Cat 4, 5)



Voici un empilement de cubes.

Il comporte quatre étages de cubes et chaque étage est de forme carrée.

Combien faut-il de cubes pour construire, sur le même modèle, un empilement de 10 étages ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

10. COLORIAGES (Cat 5, 6)

Même problème que le no 5, avec modifications des variables «nombre d'élèves» : 65 et «nombre de couleurs» : 5 (rouge, jaune, vert, orange ou bleu).

11. PILES DE JETONS (Cat 5, 6)

Même problème que le no 6, avec modifications des variables «nombre de jetons» : 12 et «valeurs des jetons» : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 17, 18, 19, 22.

12. LA CIBLE (Cat 5, 6)

Même problème que le no 4, avec modifications des variables «nombre de fléchettes» : 7 et «total des points» : 19.

13. QUI MENT ? (Cat 5, 6, 7, 8)

Paul, André et Luc habitent dans ces trois maisons de la même rue.

André dit : «ma maison est plus haute que celle de Paul».

Luc dit : «la façade de ma maison a plus de fenêtres que celle de Paul».

Sachant qu'un seul des deux a dit la vérité, quelle est la maison de Paul ?

Peut-on dire qui a menti ?

Justifiez votre réponse.

14. TRANSPORTS (Cat 6, 7, 8)

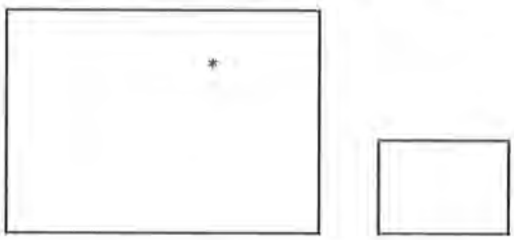
Lundi, l'entreprise SAVONEX a produit 291 caisses de bulles de savon. Pour les transporter, le camion de l'usine a fait plusieurs voyages, toujours entièrement rempli. Comme il ne restait que trois caisses, le chauffeur a décidé de ne pas faire un nouveau voyage et de les prendre le lendemain. Le mardi, avec la nouvelle production, il y avait 229 caisses à transporter en tout. Le camion a fait deux voyages de moins que le jour précédent, tous pleins, sauf le dernier où il restait encore de la place pour 11 caisses.

Combien le camion a-t-il fait de voyages le deuxième jour et combien transporte-t-il de caisses lorsqu'il est plein ?

Justifiez votre solution.

15. OÙ IL FAUT FAIRE MOUCHE (Cat 6, 7, 8)

Le petit rectangle de droite, est une photographie du grand rectangle de gauche.



Au moment où la photographie a été prise, une mouche s'était posée sur le grand rectangle.

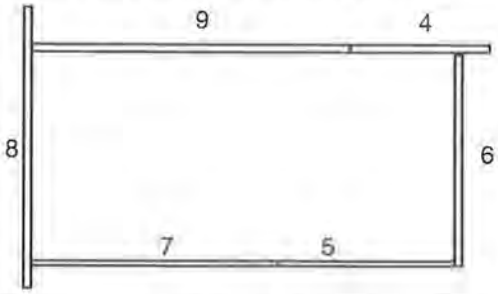
Le photographe a pris soin de l'effacer lors du développement de la photographie.

Replacez la mouche sur la photographie.

Expliquez comment vous avez procédé.

16. L'ENCLOS DE LA CHÈVRE (Cat 6, 7, 8)

Monsieur Seguin a construit, pour sa nouvelle chèvre, un enclos avec des barrières de 4m, 5m, 6m, 7m, 8m et 9m de long :



Sa chèvre n'est pas contente du tout. Elle pense que, avec les mêmes barrières, on peut lui offrir un espace rectangulaire plus grand, où il y a plus d'herbe à brouter.

Quel est le plus grand enclos possible, de forme rectangulaire, que peut construire M. Seguin avec ses six barrières, pour satisfaire sa chèvre ?

Justifiez votre solution.

17. LES LACS (Cat 7, 8)

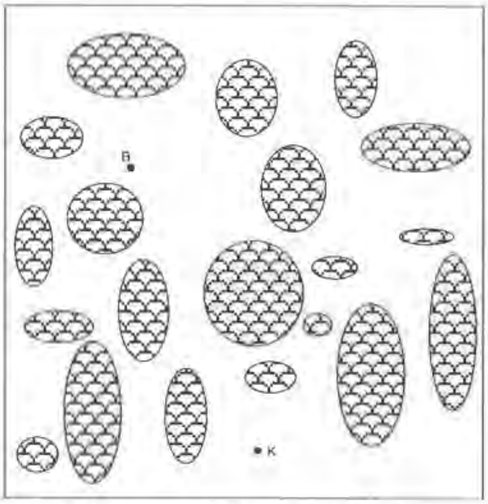
Björn vit dans une région de lacs. Chaque jour, il quitte sa cabane pour visiter ses trois amis : tout d'abord Karl, puis Youri et enfin Olaf, d'où il rentre directement chez lui.

Il se déplace toujours en ligne droite en évitant, bien sûr, les lacs. Son trajet est un quadrilatère qui a un seul axe de symétrie et à l'intérieur duquel il y a au moins un lac.

Sur cette carte, les cabanes de Björn et de Karl sont notées par les points B et K.

Trouvez les emplacements (approximatifs) des cabanes de Youri et Olaf.

Y a-t-il plusieurs solutions ?



Deux trajets sont différents si les deux ensembles de lacs qu'ils entourent sont différents.

Dessinez les emplacements trouvés et justifiez votre réponse.

18. LES BOITES DE MARTHE (Cat 7, 8)

Marthe rangeait les cubes de son jeu de construction dans une boîte en carton, de base carrée. En les empilant bien, la boîte était entièrement remplie et il ne restait plus aucun espace vide.

Avec le temps, la boîte s'est déchirée et Marthe l'a remplacée par une autre, de même hauteur, mais de base rectangulaire.

Dans sa nouvelle boîte, elle peut aligner exactement un tiers de cubes en plus dans la longueur et un tiers de cubes en moins dans la largeur que ce qu'elle pouvait arranger dans l'ancienne boîte. A la fin, lorsque la nouvelle boîte est pleine, il reste 12 cubes à ranger.

Pouvez-vous dire combien Marthe a de cubes en tout ?

Expliquez votre raisonnement.

19. LE SERPENT QUI SE MORD LA QUEUE (Cat 7, 8)

Je pense à un nombre entier, je le multiplie par 3, je soustrais 11, je divise par 4, j'ajoute 7 et je retrouve le nombre de départ !

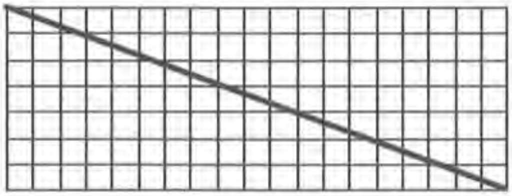
A quel nombre ai-je pensé ?

Expliquez votre raisonnement.

20. LA DIAGONALE (Cat 8)

André prétend que la diagonale de ce rectangle traverse 25 petits carrés.

Françoise dit que ce n'est pas exact et que la diagonale ne traverse que 23 carrés.



Et vous, qu'en pensez-vous ?

Justifiez votre réponse, de façon à convaincre vos camarades.

Réponse aux problèmes des numéros précédents.

Nous avons reçu plusieurs réponses au problème *Miam-miam* du numéro 185 (p. 17). La cohabitation est possible entre les cinq loups et les trois agneaux, comme le montre la solution de la figure 1, trouvée, à une isométrie près, par Jacqueline Nicolet, Vevey, Denis Odiet, Porentruy, Mathias Venzi, Lausanne et Renato Pellegrini, Quinto (TI).

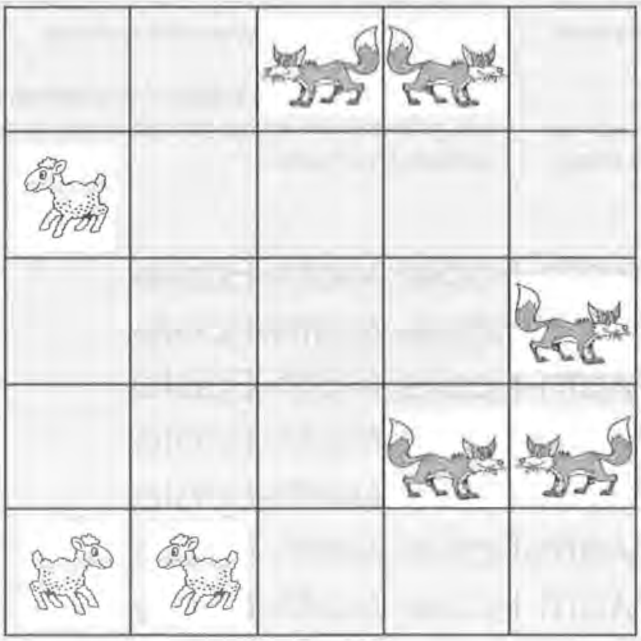


Fig. 1

Quatre lecteurs(trices) ont encore trouvé la solution du *Tapis du Sarconistan* figurant dans le numéro 184 (p. 5) avant sa publication : Fausta Tonolli, Valeggio/Verona (I), Claude Danallet, Ecublens, Augustin Genoud, Savièse.

Merci à tous ces amis de notre revue pour leurs beaux dessins et découpages. Chacun d'entre eux recevra le livre cadeau qui lui est dû.

Le coin du net

L.-O. Pochon, IRDP

Good design is not just about making beautiful images. There actually are design constraints and limits specific to the medium.

Lynda Weinman (1997) <*designing web graphics.2*>. Indianapolis: New Riders Pub.

Histoire de pavages

Il y a mille et trois manières d'aborder le rapport entre informatique (ou technologie de l'information) et école. Des enseignants peuvent privilégier une approche sociale et préparer les élèves à vivre dans une société de l'information. D'autres tentent d'intégrer ces «nouveaux» outils dans des projets pédagogiques globaux ou encore, intéressés par la didactique d'une discipline, exploitent des outils dédiés (Cabri-géomètre), etc.

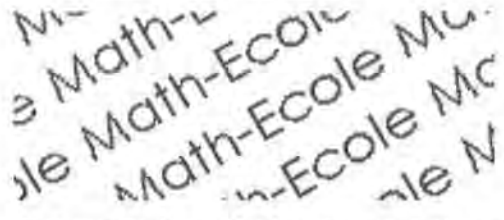
On peut aussi, tout en se focalisant sur un usage, exploiter des retombées dans divers domaines. Il en va ainsi de l'Internet. La correspondance scolaire ou la recherche documentaire figurent parmi les premiers usages identifiés du réseau des réseaux (des exemples de ces diverses approches sont visibles sur www.edunet.ch). Mais on trouve également des enseignants qui mettent leurs élèves en situation de produire des documents. A partir de là, un champ très large s'ouvre. En particulier, la réalisation de pages pour le web peut introduire des problèmes de mathématiques qui, s'ils prennent sens dans ce cadre bien précis, font intervenir des notions très «classiques».

Pour comprendre la situation proposée, il faut savoir que lors de la réalisation de documents pour le web, il est possible de «décorer» les pages à l'aide d'images de fond. Une telle image peut être de grandeur quelconque. Si elle est plus petite que la zone d'affichage de l'ordinateur, le «navigateur» va procéder à un pavage (rectangulaire) en utilisant l'image comme motif de base.

La situation est la suivante. On commence par prendre une image constituée de la répétition d'un texte ...

Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole
Math-Ecole Math-Ecole Math-Ecole

... On fait pivoter cette image et on en découpe une portion rectangulaire que l'on va utiliser comme motif du pavage ...

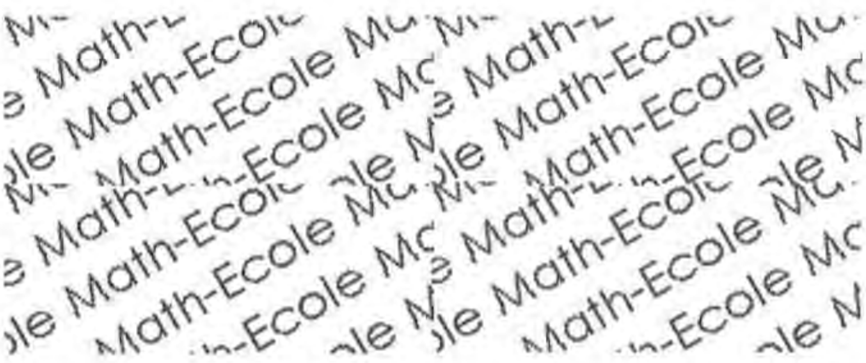


.. Et l'on regarde le résultat obtenu par juxtaposition. Le but est évidemment de reconstituer le texte. Dans l'exemple qui suit, c'est loupé !

A partir de là, de nombreuses questions peuvent se poser. Le problème a-t-il toujours une solution ? Quel est la dimension minimale du motif ? Comment procéder pratiquement avec du papier et des ciseaux ? Par calcul ? Avec un éditeur graphique?

Math-Ecole se fera un plaisir de publier les solutions qui lui seront transmises.

Cette situation peut se prolonger sur d'autres problèmes de pavage, nous aurons l'occasion d'y revenir.



CIEAEM 51 du 21 au 26 juillet 1999, à Chichester (Angleterre)

La prochaine rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques se tiendra à Chichester, ville ancienne du sud de l'Angleterre, sur le thème de *la diversité culturelle à l'égard de l'enseignement des mathématiques.*

Lors de la rencontre CIEAEM 50 de Neuchâtel, en 1998, de nombreux lecteurs de *Math-Ecole* ont apprécié de se retrouver entre maîtres, chercheurs, mathématiciens pour échanger leurs expériences et points de vue dans un domaine qui leur tient à coeur. Nul doute qu'ils seront nombreux à poursuivre ces échanges, dans le cadre accueillant du Centre de mathématiques du Chichester Institute of Higher Education.

Au programme de CIEAEM 51, comme à celui des rencontres précédentes, on trouvera des conférences plénières, des travaux de groupes, des présentations orales, des ateliers, un forum d'idées, des expositions de posters et de matériel didactique. Tous les participants intéressés sont invités à présenter des contributions, sous l'une ou l'autre de ces formes. Un programme social est organisé pour les accompagnants et les participants : visites, concert, excursion à l'île de Wight, réceptions diverses. Les langues officielles de la rencontre sont l'anglais et le français.

Renseignements et inscriptions :
CIEAEM 51, The Mathematics Center, Chichester Institute of Higher Education, Upper Bognor Road, Bognor Regis, West Sussex. PO21 1HR, Angleterre – Tél: 0044 1243 816 378 – Fax 0044 1243 816362 –
E-mail : maths@chihe.ac.uk – Internet: http://www.chihe.ac.uk/conferences/CIEAEM51

La **deuxième annonce** de la rencontre, avec programme détaillé et toutes les informations pratiques pour le logement et l'inscription, peut être obtenue à la rédaction de Math-Ecole, IRDP CP 54 2007 Neuchâtel, tél 032 889 8609.

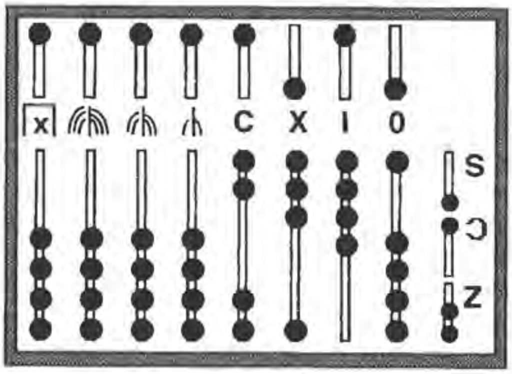
Au temps des Romains

Michel Bréchet, Delémont

Le problème[1]...

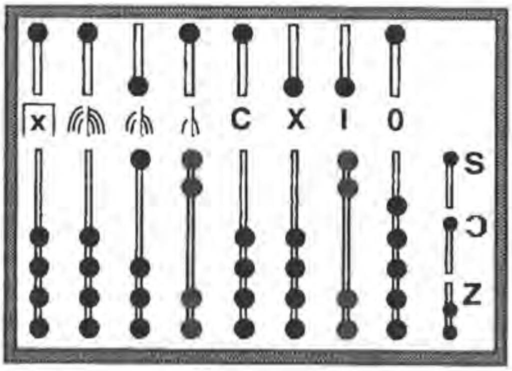
Calculatrice romaine

Voici une représentation d'une "calculatrice" de poche, dont l'invention est sans doute antérieure à l'ère chrétienne. Elle consiste en une petite plaquette métallique munie de rainures parallèles, le long desquelles glissent des boutons mobiles de même taille. Cet instrument de calcul, ingénieux et très performant, permettait d'effectuer rapidement et simplement diverses opérations arithmétiques. Malheureusement, il a disparu en même temps que la chute de l'Empire romain.

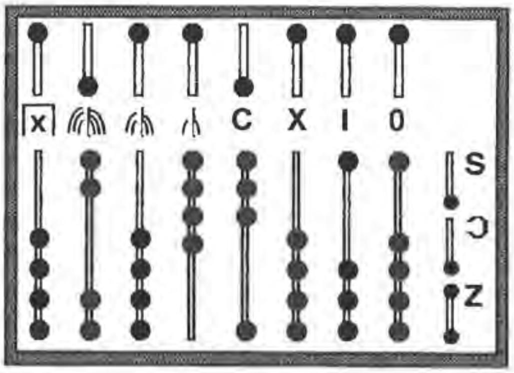


Si l'on considère un compte en deniers, la somme représentée sur cette abaque corres pond à 284 deniers et 7 onces 1/4 (le denier, unité monétaire romaine, était subdivisé en 12 parties égales appelées *onces).*

De même :



62'057 deniers et 3/4 de l'once



704'801 deniers et 1 once 1/3

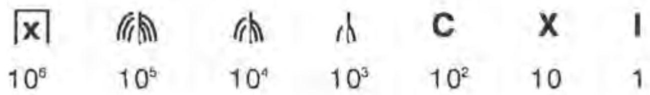
Et vous, arriverez-vous à dessiner une abaque représentant la somme de 7'326'029 deniers et 3 onces 1/2 ?

---

[1] Source: IFRAH G. , *Histoire universelle des chiffres,* Robert Laffont, Paris, 1994 (tome 1, pages 506 à 510)

.. et sa solution !

Les chiffres romains, comme les signes des numérations précèdentes, ne permettaient pas de faire des calculs. C'est pourquoi les comptables de cette époque faisaient appel à des abaques à jetons pour effectuer des opérations arithmétiques. Sur ces instruments de calculs, plusieurs signes exprimaient des puissances de dix :



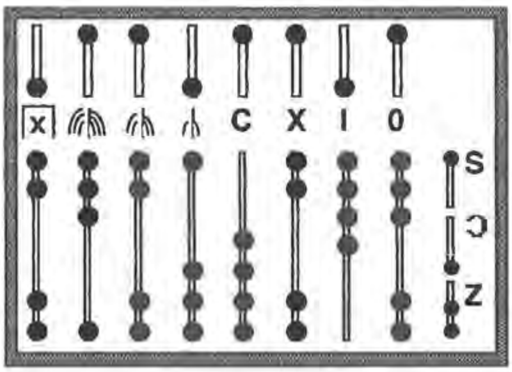
Les unités d'un certain ordre d'entiers, lorsqu'elles ne dépassaient pas le nombre 4, s'indiquaient dans la rainure inférieure correspondante en poussant vers le haut autant de boutons que nécessaire.

Lorsque ces unités atteignaient ou dépassaient le nombre 5, on commençait d'abord par rapprocher du centre le bouton de la rainure supérieure (celui-ci valant alors 5 unités de l'ordre correspondant), puis on représentait comme précédemment le complément dans la rainure inférieure.

Les deux rainures associées au symbole **0** servaient à marquer les multiples de l'once, chaque bouton inférieur valant une once et le bouton supérieur 6 onces.

Quant aux trois petites rainures de droite, elles permettaient de considérer la demi-once, le quart d'once et le tiers d'once (ou les deux-tiers si l'on plaçait les deux boutons à la hauteur du sigle **Z**).

Pour représenter une somme de 7'326'029 deniers et 3 onces 1/2, il faut donc disposer les jetons de la manière suivante :



Jeux interdits

Dans une sombre taverne, Coriane et Mathias ont misé chacun 12 deniers au jeu de «pile ou face». Ils lancent une pièce de monnaie à tour de rôle; si elle retombe sur «face» Coriane marque un point, si elle retombe sur «pile» c'est Mathias qui marque le point. Ils ont convenu que le premier qui atteindra 6 points emportera les 24 deniers en jeu.

La partie avance; à un certain moment Mathias a 5 points, contre 3 à Coriane. La tension monte, chacun retient son souffle, lorsque deux gendarmes entrent dans la taverne. La partie s'arrête subitement car chacun sait que, dans ce pays, les jeux de hasard son strictement interdits et ceux qui s'y livrent sont jetés au cachot. On dissimule les 24 deniers et la pièce de monnaie et chacun, joueur et spectateur, fait semblant de rien.

Mais l'auberge va fermer et, vu le regard inquisiteur des pandores, il n'est pas question de continuer la partie ailleurs. Comment Coriane et Mathias vont-ils se partager les 24 deniers en jeu ?

D'après un problème proposé par Luca Pacioli (1445-1510)

Regard sur une activité de 2e année

L.-O. Pochon, IRDP

En parcourant les activités proposées pour apprendre à conduire un raisonnement dans les nouveaux moyens d'enseignement de 2e année, mon attention a été attirée par une activité liée à «Une aventure de pirates», intitulée «le code secret»[1].

Voici son énoncé:

> Barbenoire place un chiffre dans chaque case en respectant les égalités. Il utilise une seule fois chaque chiffre de 0 à 9. Il fabrique le code secret en additionnant les 3 nombres qui se trouvent dans les cases rouges (en grisé ici).
>
> $$\square + \square = \square\square$$
> $$\square + \square = \square$$
> $$\square + \square = \square$$
>
> Quel est le code secret?

Dans le livre du maître[2], il est précisé que l'activité concerne la recherche d'un nombre à partir d'additions à trous. Par ailleurs, la fiche INFO PLUS propose 10 petites cartes, portant chacune un des chiffres de 0 à 9. Selon les définitions données dans les «Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire»[3], on peut classer cette activité dans les situations «ouvertes» qui offrent, de plus, une opportunité d'exercer le calcul. Il s'agit donc principalement pour les élèves de s'organiser et de trouver une systématique dans leurs essais. Les élèves vont certainement rapidement découvrir où placer le chiffre 1. Effet de groupe aidant, ils arriveront peut-être également à justifier la place du 0 après avoir éliminé quelques solutions.

En cours de route, d'autres découvertes intéressantes seront certainement faites; mais se trouvera-t-on une fois en face d'un petit Gauss[4], observant que la somme des 9 nombres étant 2+3+..+9+10 = 54, le code secret en vaut la moitié, donc 27 ? Cet élève échapperait ainsi à une longue et fastidieuse recherche, ce qui, du point de vue mathémati-

[1] Ging, E., Sauthier, M.-H., Stierli, E. (1997). Mathématiques, 2e année, fichier de l'élève. Neuchâtel: COROME. (p. 82)

[2] Ging, E., Sauthier, M.-H., Stierli, E. (1997). Livre du maître, méthodologie 2P. Neuchâtel: COROME. (p. 47)

[3] Gagnebin, A., Guignard, N., Jaquet, F. (1998). Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire. Neuchâtel: COROME.

[4] Un instituteur de Gauss avait l'habitude de donner à ses élèves de longues suites de nombres à additionner. Ces suites étant des progressions arithmétiques (par exemple les cent nombres: 81297 + 81495 + 81693 + ... 100889), il ne fallait que «quelques» instants pour le maître pour obtenir le résultat alors que les élèves en avaient pour des heures ... sauf le jeune Gauss qui montrait ainsi, du même coup, qu'une activité de type «occupez-vous et fichez-moi la paix» peut se transformer en une situation problème. Le lecteur intéressé par les détails historiques pourra consulter l'ouvrage: Bell, E.T. (1961). Les grands mathématiciens. Paris: Payot. Cette anecdote, m'en rappelle une autre, pour, avec

que, est un objectif souvent recherché (ou du moins, après-coup, constater qu'on aurait pu s'éviter quelques efforts).

L'évocation de ce cas historique donne un certain sel à cette activité et conduit à faire quelques réflexions sur l'enseignement par problèmes.

Une première remarque concerne l'exploitation des activités. Une phrase clé du nouveau programme romand de mathématiques pour les degrés 1 à 6[5] est: «faire des mathématiques c'est d'abord résoudre des problèmes». Qui dit «d'abord», pense à un «ensuite»! Le même document, sous la rubrique, les trois moments dans la résolution de problème, propose quelques pistes à ce propos à travers la phase de communication des démarches et des résultats.

Dans le cas du «code secret», on peut ressentir le regret de ne pas pouvoir exploiter cette activité jusqu'à la solution «à la Gauss» car cet objectif, la recherche d'une solution «optimale», semble en dehors du champ des préoccupations (sociales, cognitives) des enfants[6]. On peut toutefois se demander si une phase d'exploitation de l'activité ne manque pas «formellement» dans le plan d'étude: analyse a posteriori, comparaison des solutions, classification de l'activité.

Cela nous amène à une proposition qui serait d'identifier des «filières» de problèmes similaires où certaines activités seraient reprises de façon cyclique? Les problèmes proposés dans le Rallye mathématique transalpin et leur analyse montrent l'évolution des procédures en fonction de l'âge des enfants et l'intérêt qu'il y aurait à mettre en relation les auteurs des solutions proposées. Des fiches éditées pour les classes à degrés multiples proposaient également des activités utilisables de façon verticale et exploitaient la variété des procédures utilisées en fonction de l'âge (ou du degré de maturité) des enfants.

Certes, outre une difficulté de gestion, cette proposition présente plusieurs défauts. D'une part la reprise textuelle d'une activité tuerait vraisemblablement la motivation des enfants. D'autre part, elle pourrait promouvoir un enseignement de types d'activités, ce qui n'est pas le but recherché. Un autre danger serait de privilégier l'aspect technique à l'ambiance que les auteurs ont su donner à ces familles d'activités qui, selon quelques échos recueillis, captivent les enfants.

Néanmoins, avec l'inflation qui caractérise les plans d'études, il serait intéressant de mieux savoir quand les situations ouvertes participent du «regard» et de «l'orient» spécifiques des mathématiques ou quand il s'agit d'assurer des «réflexes» d'analyse inductive (curiosité, ...) qui peuvent s'exercer également dans d'autres domaines. Toutefois le problème de l'indépendance entre les opérations de type logique mise en œuvre et les «objets» (nombres, vocabulaires, ...) manipulés reste largement ouvert.

---

4 (suite) la permission du lecteur, poursuivre cette digression concernant les divers statuts que peut prendre une même activité: ayant demandé à des élèves (niveau secondaire) d'effectuer la somme de puissances de 2 (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...), avec pour référence le problème posé par la récompense demandée par «l'inventeur» du jeu d'échec et pour but l'expression de la loi gouvernant les sommes successives, ceux-ci m'ont fait remarquer qu'ils avaient déjà traité la question comme punition !

5 Plan d'études romand de mathématiques, degrés 1à 6. COROME, 1997

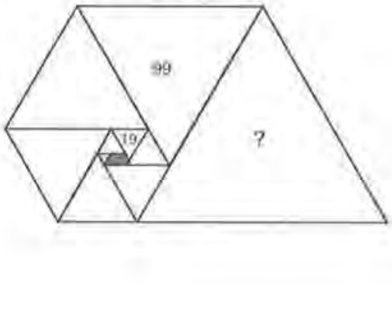
6 Dans d'autres situations, notamment avec quelques jeux, il semble toutefois possible de trouver un terrain d'entente avec les enfants (l'idée de gagner à coup sûr) pour exprimer ce type d'objectif.

Un concours pour dérouiller les méninges

*[**ndlr**] C'est sous ce titre que LE TEMPS a présenté à ses lecteurs, dans son édition du 22 décembre, les énoncés des problèmes des quarts de finale du treizième Championnat international de jeux mathématiques et logiques. Un bien joli cadeau de Noël !*
.A chaque édition de ce concours, on est émerveillé par la créativité de ses auteurs. Certains sujets, en particulier ceux des catégories «lycéens» et «adultes», conduisent à des recherches passionnantes. Et toujours, sans faire appel à d'autres connaissances mathématiques que celles que l'on acquiert en scolarité obligatoire : de la logique, quelques éléments de géométrie jusqu'à la longueur du cercle et à Pythagore, des rudiments d'algèbre permettant de résoudre des systèmes d'équations du premier degré.

Nous ne résistons pas au plaisir de présenter quelques-uns de ces beaux problèmes à nos lecteurs, en espérant recevoir non seulement les solutions (parues dans LE TEMPS du 16 février), mais surtout les procédures de résolution qui y ont conduit et les exploitations possibles en classe, au niveaux secondaire.

LE FOSSILE DE L'ANNEE

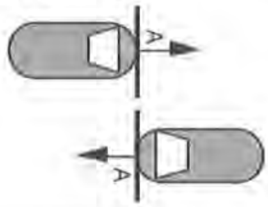


Le fossile de l'année est composé de dix triangles équilatéraux disposés comme sur le dessin. Le côté de chaque triangle mesure un nombre entier de millimètres. Deux de ces triangles, signalés sur le dessin, ont des côtés mesurant respectivement 19 et 99 mm.

Donnez la mesure, exprimée en mm, du côté du plus grand triangle du fossile de l'année.

LE JOUET DE FRANCIS

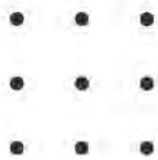
Francis vient de recevoir un modèle réduit de voiture télécommandé. Celui-ci ne peut se déplacer qu'en marche avant, soit en ligne droite, soit sur des arcs de cercle de rayon 63 cm. Francis essaye son jouet au milieu d'un immense parking désert. Sa voiture se trouve en A, orientée vers le Nord. **Quelle distance minimale Francis doit-il faire parcourir à son jouet pour qu'il se retrouve en A, orienté vers le Sud ?** Prendre 22/7 pour π.



LES QUADRILATERES

Combien de quadrilatères différents, non superposables, même avec retournement, peut-on tracer en utilisant quatre points de ce réseau ?

Tous les types de quadrilatères, croisés ou non, sont envisagés à l'exception des quadrilatères aplatis.



Expo - atelier pour des classes de degrés 7 à 9 (élèves de 12 à 15 ans)

Corome

Dossier de présentation

Conception et rédaction : Pierre-Alain Flumet et Jean-Marc Louis, Genève, appuyés par : Michel Brêchet, François Jaquet, et Hervé Schild.

Autonomie, sens, différenciation, de la manipulation à la construction des concepts ...

Des propositions d'activités mathématiques qui s'inscrivent dans les programmes en vigueur, notamment CIRCE III, et dans les conceptions actuelles de l'apprentissage.

L'expo-atelier est un ensemble de ressources pour mettre l'élève en situation de réfléchir, de se poser des problèmes, de chercher à les résoudre, seul ou en groupes. Les thèmes sont bien connus, mais c'est la mise en oeuvre qui est nouvelle. Tout est mis à disposition : les panneaux de consignes et leurs supports, le matériel de manipulation, le fascicule pour l'enseignant. Il ne reste plus qu'à installer les postes de travail dans une classe, dans un centre de documentation, dans un hall d'exposition et à inviter les élèves ou les visiteurs à entrer en activité mathématique.

Contenu de l'expo - atelier

- Les problèmes et les consignes figurent sur 30 panneaux A3, en couleur, laminés.
- La présentation des activités, problèmes et consignes, à l'intention des enseignant-e-s figure dans un dossier de 30 fiches d'accompagnement, relié. Pour plusieurs de ces activités, il existe des compléments didactiques sous forme d'articles, compte rendus et extraits du livre du maître, qui peuvent être obtenus à l'IRDP.
- 20 supports en plexiglas, permettent d'exposer simultanément une vingtaine de panneaux d'activités choisies selon l'intérêt du moment.
- le matériel de manipulation :
  - une douzaine de panneaux de jeu d'exécution solide,
  - des formes en bois,
  - des multicubes,
  - des polydrons,
  - des jeux du commerce.

L'ensemble prend facilement place dans un coffre de voiture.

L'exposition-atelier est en prêt dans la plupart des centres de documentation cantonaux de la Suisse romande.

La liste des activités, avec les notions spécifiques correspondantes et les références, figure à la page suivante.

No Titre	Notions spécifiques	Références[1]
1. Autoréférence	Logique du raisonnement	FFJM
2. La carte du magicien	Probabilités	Math 9
3. Damier morcelé	Multiples et diviseurs	Maths en jeux
4. Découpage du cube	Propriétés et développement de polyèdres	
5. Dés intransitifs	Statistiques et probabilités	Cpl. Math 5-6
6. Un contre deux	Probabilités	
7. Enclos des chevaux	Lignes et surfaces polygonales, homothéties	
8. Hexaminos	Surfaces, isométries, développements du cube	Math 5
9. Hexatriangles	Surfaces, isométries, développements d'un solide	Math 6
10. L'Hôtel Ubus	Logique et raisonnement	FFJM
11. L'aireur	Aires, pentes et théorème de Pythagore	M. Gardner
12. L'autruche	Combinatoire (arrangements et dénombrements)	
13. L'escalier des différences	Logique et raisonnement	Math-Ecole 165
14. Hôtel Blanche-Neige	Logique et raisonnement	Educateur
15. La grenouille sauteuse	Division euclidienne	Math 6
16. La phrase magique	Combinatoire, dénombrement	R. Queneau
17. La tour infernale	Puissances, numération en base deux, fonctions	Math 6
18. Le puzzle carré	Surfaces, nombres rationnels et irrationnels	Math-Ecole 177
19. Les habitations sauvages	Logique et raisonnement	
20. Les neuf facteurs	Multiples et diviseurs, factorisation d'un nombre	Educateur
21. Les neuf polynômes	Factorisation des polynômes	
22. Pentocubes	Solides, symétrie, rotation	Math-Ecole 161
23.Périaire	Périmètre et aire, calcul littéral, fonctions	
24. La quadrichromie nette	Volume	FFJM
25. Formule d'Euler	Polyèdres	
26. Prison centrale de Sikinia	Diviseurs, multiples, carrés parfaits	
27. Le puzzle rectangulaire	Aire, diviseurs et factorisation d'un nombre	Tangente n° 3
28. Six Pyramides pour un parallélépipède	Solides, volumes, fonctions	Math-Ecole 164
29. Taquins de pions	Dénombrements et fonctions	Math-Ecole 161
30. Volume en morceaux	Volume, aire, longueur	

[1] FFJM *: 50 énigmes mathématiques pour tous (Paris* : Editions Pole, 1997) et autres *Annales du championnat de jeux mathématiques et logique*
L'Educateur : Chronique *Pour une pratique autonome de la mathématique* (1990 - 1993)
Martin Gardner : *Mathématiques, magie et mystères.* Ed. Dunod, (1966)
Cpl. Math 5-6 : *Mathématiques 5-6 Compléments.* Office romand des éditions scolaires (1970)
Math 5 : *Mathématiques 5e année.* Office romand des éditions scolaires (1984)
Math 6 : *Mathématiques 6e année.* Office romand des éditions scolaires (1985)
Math 9 : *Mathématiques 9e année.* D.I.P. Neuchâtel (1989)
Maths en jeu. Editions Joker Bordas
Raymond Queneau : *Cent mille milliards de poèmes*

Jeux : La Loterie

Martine Simonet

Compétences développées

- passer du mot-nombre oral à son écriture chiffrée et inversement.
- dénombrer une collection.

Âge

6 / 7 ans

Nombre de joueurs

5 dont un meneur

Matériel

- 2 jeux de 20 cartes numérotées de 1 à 20 (si possible de deux couleurs distinctes pour éviter la confusion);
- des jetons

Début de la partie

Le meneur ne participe pas au jeu. C'est lui qui distribue les cartes en nombre égal (cinq) à chaque joueur en se servant du premier jeu.

Puis il prend le second jeu en main et prélève au hasard 3 cartes qu'il place **faces cachées** sur la table.

Sur chacune de ces cartes, il pose respectivement un, deux et trois jetons.

Cette préparation terminée, le meneur annonce l'une après l'autre les 17 cartes qu'il tient encore en main.

Dès qu'un joueur entend prononcer une carte qu'il a dans son jeu, il la dépose sur la table. Le meneur abat à sa suite la carte annoncée pour permettre la validation.

Fin de la partie

Lorsque le meneur a épuisé son jeu, certains joueurs n'ont plus de cartes; ceux qui en ont encore en main possèdent bien évidemment les mêmes que celles qui sont cachées. Ils recoivent alors les jetons correspondants à leur(s) carte(s) gagnante(s).

Les cartes sont battues à nouveau, en prenant soin de ne pas mélanger les deux jeux entre eux, et un autre joueur devient le meneur.

Fin du jeu

Le jeu s'arrête lorsque chaque joueur a tenu une fois le rôle du meneur.

Chacun compte alors ses gains. Celui dont le total est le plus élevé est déclaré le gagnant.

Variables

- augmenter ou réduire le nombre de joueurs (vérifier que le nombre de cartes en jeu soit un multiple du nombre de joueurs),
- modifier le nombre de cartes en jeu,
- choisir les cartes en fonction des nombres que l'on souhaite exercer (de 6 à 25, de 11 à 30, ...).

MATHÉMATIQUES DE BASE, POUR TOUS ?

Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en mathématiques, en début de scolarité ?

ALEAS EDITEUR, octobre 1997, 15 Quai Lassagne - F - 69001 Lyon.

«Cet ouvrage s'adresse à vous, si vous n'êtes pas résignés et si vous souhaitez une diminution rapide des échecs en début de scolarité.

L'Association Pour Favoriser une École Efficace (APFÉE) a interrogé les chercheurs qui s'expriment dans cet ouvrage : «On disait jadis que lire, écrire, et compter étaient des savoirs de base : peut-on encore dire que compter est un savoir de base, indispensable à l'homme de l'an 2000 ? Quels sont, en mathématiques, les savoirs de base que devraient acquérir les enfants au cours des trois années de cycle 2 (Grande Section de Maternelle, CP, CEI) ? Tous les enfants peuvent-ils connaître la joie de la réussite, en Mathématiques, au début de leur scolarité ?»

C'est ainsi que l'éditeur présente ce petit ouvrage, sur sa dernière page de couverture. La «joie de la réussite», la «diminution rapide des échecs» ! Voeu pieu ? Personne n'est dupe, certes, mais c'est toujours intéressant de lire comment les didacticiens très connus se prononcent sur le sujet.

L'ouvrage comprend six textes, précédés d'un avant propos et suivis d'une courte conclusion. Il constitue les actes d'un colloque tenu à Lyon en 1996, pour répondre aux questions citées précédemment. Voici les thèmes et les auteurs de ces six interventions :

1. Interaction enseignement / apprentissage.
   Que faire ? Comment ?
   par Régine Douady

2. Pour la réussite de tous en mathématiques :
   des Coups de Pouce ?
   par Florence Genestoux

3. Éviter les échecs prématurés :
   quelles conditions ? quelles actions ? quelles limite ?
   par Guy Brousseau

4. Variété et importance des premiers apprentissages.
   Que faire ? Qu'attendre ?
   par Gérard Vergnaud

5. Construire du sens : comment ?
   par Roland Charnay

6. Les enfants et les nombres
   par Dominique Valentin

Destinataires : tous les maîtres et parents

Mots-clés : mathématiques, échec, réussite, didactique

FJ

RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES, vol 18/2.

1998. Grenoble : La Pensée sauvage.

Le dernier volume de la revue «Recherches en didactique des mathématiques» présente trois cours de la 9e Ecole d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue l'an denier à Houlgate (France), sur le thème des recherches développées depuis plusieurs années au niveau du Lycée (secondaire II) et des premières années d'université. Il nous paraît très intéressant de connaître les questionnements et les approches ainsi que les outils d'analyse développés par les chercheurs en didactique des mathématiques pour aborder les problèmes spécifiques qui se posent à ces niveaux d'étude.

Les problématiques de l'enseignement des mathématiques à de jeunes adultes sont, en effet, bien différentes de celles, plus familières, de l'école primaire et des premiers degrés du secondaire.

Les trois articles qui constituent ce numéro de la revue sont issus des trois cours donnés sur ce thème à l'Ecole d'été. Celui d'Aline Robert fait un point très fouillé sur ces nouveaux outils d'analyse didactique, épistémologique et cognitive, complété en ce qui concerne le rôle de l'analyse historique par celui de Jean-Luc Dorier, et en ce qui concerne les analyses curriculaires par celui de Michèle Artigue. L'article de J.-L. Dorier est centré sur les problèmes d'enseignement de l'algèbre, surtout d'ailleurs de l'algèbre linéaire, et fait le point de dix ans de travaux didactiques en France et à l'étranger sur ce thème. L'article de M. Artigue se penche sur l'évolution des analyses didactiques utilisées dans l'étude des problèmes d'enseignement de l'analyse mathématique et montre que les questionnements qui ont pu ainsi être développés sont en rapport étroit avec l'apparition et l'essor de différentes problématiques didactiques.
Voici les résumés de ces trois articles :

A. Robert. - *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université* (pp. 139-189).

Dans cet article, nous proposons des outils d'analyse des notions mathématiques à enseigner au lycée et à l'université prenant en compte leur spécificité et leur complexité, compte tenu des programmes d'enseignement, des attentes institutionnelles, et des hypothèses sur l'enseignement et l'apprentissage que nous admettons et/ou que nous voulons mettre en jeu.

Dans la première partie, nous précisons ainsi ce sur quoi nous nous sommes appuyée : des caractéristiques des pratiques des mathématiciens professionnels, des éléments sur les pratiques attendues de la part des élèves, des résultats intermédiaires sur les acquisitions (résultats de recherches sur des «conditions suffisantes» d'apprentissage et éléments inspirés de théories de Vygotski). Dans la deuxième partie nous exposons les quatre dimensions retenues. Les trois premières apparaissent dans les programmes (notamment quant à l'insertion dans le paysage mathématique des élèves). La dernière dimension, en revanche, repère différentes mises en fonctionnement possibles des notions dans les activités des élèves. La troisième partie est consacrée à l'illustration d'une utilisation de nos dimensions pour élaborer certains scénarios (sur le plan des contenus). Dans la dernière partie, nous indiquons une application méthodologique de ce qui précède aux analyses de tâches et d'activités à ces niveaux de scolarité.

J.-L. Dorier. - *Etat de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire* (pp. 191-229).

Cet article fait une synthèse de différents travaux portant sur des recherches de didactique des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université scientifique. Nous présenterons d'abord brièvement un travail au coeur d'une vase réforme de cet enseignement aux USA. Ensuite à travers quatre travaux menés au Canada, au Brésil ou en France, nous examinerons la question des changements de registres, de cadres, de niveaux de description, de points de vue et de modes de raisonnement dans une perspective de «flexibilité cognitive». Enfin, nous présenterons les principaux résultats d'une équipe française, dont les travaux didactiques s'appuient à la fois sur une analyse historique et épistémologique et sur l'expérimentation sur plusieurs années d'un projet long d'enseignement.

M. Artigue - *L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse* (pp. 231-261).

Cet article est issu d'un cours sur la didactique de l'analyse donné à la dernière Ecole d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue en France en août 1997. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous y présentons un certain nombre de problématiques qui jouent ou ont joué un rôle important dans le développement de ce secteur de recherche.Nous illustrons chacune d'elles par quelques travaux typiques et essayons d'en préciser les potentialités et les limites. Nous essayons, parallèlement, de montrer comment le développement de ce secteur est dépendant de l'évolution globale du champ didactique ainsi que de celle des conditions culturelles et sociales dans lesquelles s'inscrivent l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse.

Mots clés : didactique des mathématiques, enseignement secondaire II

Destinataires : professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, chercheurs en didactique, formateurs

LE SYSTEME METRIQUE HIER ET AUJOURD'HUI

Par Louis Marquet, Albert Le Bouch, Yves Roussel, Editions A.D.C.S. Co-diffusion par l'APMEP. Brochure A5, de 132 pages, avec, en plus, 11 iconographies, dont 9 en quadrichromie

Après quatre pages d'Introduction, par P. Giacomo, Louis Marquet conte superbement, en 66 pages, **la création du systeme métrique décimal** avec les diverses tentatives, dès 167O, et, pour les longueurs, *un fréquent va et vient entre deux références: au méridien ou à la longueur d'un pendule simple*. De plus en plus affinées, tentatives et références bénéficient de l'élan *Turgot-Condorcet* (1775) -hélas vite stoppé par Necker - *des Cahiers de doléances de 1789*. Louis Marquet cite un apport mal connu: une très documentée, motivée, étoffée *proposition de Talleyrand* (mars 1790) relative aux longueurs (avec les deux références mais en penchant pour le pendule) et aux poids (avec Lavoisier pour caution). Le 8 mai 179O, le pendule à secondes est choisi...pour être mis au placard en février 1791.

Le méridien alors pris en référence, on sait les calculs de triangulation entrepris par les équipes de Delambre et Méchain. Mais imagine-t-on les difficultés de tous ordres rencontrées ? Louis Marquet nous fait revivre tout cela, avec, aussi, 5 planches de chaînes de triangles. Les opérations, souvent interrompues, dureront, pour l'arc de méridien initialement retenu, jusqu'à octobre 1798.

Louis Marquet nous captive aussi par *les avatars successifs des choix gouvernementaux jusqu'à ceux de 1799 dédiés " à tous les temps, à tous les peuples " et par les tentatives, dès 179O, pour répandre le système hors de France...* .

Albert Le Bouch précise, en 20 pages, **la diffusion du système métrique décimal**, à partir de 1800 en France, puis à l'étranger (Hollande: 1820; Grèce : 1836), avec un effort méthodique à partir de 1837, effort valorisé par les expositions universelles de 1851, 1855, 1867,... peu à peu récompensé, notamment lors d'une conférence de 1872 regroupant 30 états et de la conférence de 1875 fondant les instances internationales. Le lecteur suivra cela avec passion, *ainsi que les renouvellements successifs de la définition du mètre...* .

Yves Roussel traite, en 24 pages, de «**jeunesse et permanence du système international**» (SI), *des choix fondamentaux, des unités de base* : m, kg, s, A, K, mole, candela, radian, stéradian, des unités dérivées, des multiples et sous-multiples, des conventions d'écriture et des symboles. Il faut disposer de ces tableaux, de ces commentaires, tous éclairants et complets. Chemin faisant, il est d'ailleurs question du calendrier républicain, d'une proposition anti chômage de «pentades» (trois jours de travail puis week-end de deux jours), ... et d'unités surgies, codifiées, puis abandonnées, ces dernières décennies (dyne, rötgen, angström,...) tandis que d'autres émergent en informatique (bit, baud, pixel,...).

La brochure fournit ensuite 18 pages de documents et une bibliographie. Cette brochure est riche, bien écrite, avec pas mal d'encarts («cercle répétiteur» de Bordas, "Pile de Charlemagne", notions de triangulation, année tropique, les cinq définitions du mètre,...) toujours bienvenus.

Henri BAREIL

Mots-clés : mesure, unités, système métrique

Destinataires : maîtres de tous les degrés, tout public

[ndlr] *Cette présentation est extraite du bulletin " APMEP " Avril-Mai 1997 N• 409. Nous remercions son auteur et l'APMEP de nous permettre de la publier ici. L'ouvrage est diffusé en Suisse par Math Ecole (v. p. 43 de couverture)*

THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

(didactique des mathématiques 1970-1990)
Par Guy Brousseau. Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield
Éditions LA PENSÉE SAUVAGE (1999)12 place Notre-Dame - B.P. 141 38002 - Grenoble cedex
Format 140 x 220, 396 pages, relié, 300F

Chercheur en Didactique des mathématiques, Guy Brousseau a, dès le début des années 70, initié puis développé un courant de recherche original sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dont l'influence très grande en France a largement aujourd'hui dépassé nos frontières. Riche en résultats, tout particulièrement pour ce qui concerne les mathématiques de l'enseignement obligatoire, le travail théorique de Guy Brousseau est aussi riche en retombées sur le terrain de l'enseignement. L'influence de la théorie des situations didactiques dans les classes est perceptible dans la façon dont ont évolué les pratiques de classe ainsi que dans la façon dont ces pratiques sont décrites. Le contrat didactique, par exemple, d'abord concept de la théorie, est aujourd'hui un moyen de comprendre et de décrire des aspects essentiels de la relation entre l'enseignant et ses élèves lorsque l'enjeu est un savoir déterminé

L'ouvrage présenté montre comment les interactions incessantes entre théorisation et expérimentation ont permis la construction d'une théorie significative pour comprendre les phénomènes d'enseignement.

Il rassemble les textes fondateurs de la théorie des situations didactiques. Le lecteur y trouvera une présentation détaillée des concepts clés, notamment ceux de contrat didactique, obstacle épistémologique et variable didactique. Au coeur de l'ouvrage se trouve l'étude exemplaire sur la didactique des nombres décimaux, réunissant enfin en un même lieu la présentation complète de l'étude épistémologique et de l'étude didactique.

Des textes de liaison entre chaque chapitre ont été introduits pour donner au lecteur des repères historiques ou problématiques pour mieux situer les textes réunis dans le développement de la théorie.

Enfin, l'ouvrage présente une biographie de Guy Brousseau qui est un peu, aussi, une histoire de la genèse de la didactique des mathématiques en France. Cette biographie précise le contexte de l'oeuvre scientifique de Guy Brousseau et de ses publications de 1970 à 1990.

Cet ouvrage intéressera particulièrement les chercheurs en didactique des mathématiques et en science de l'éducation, les formateurs et les élèves des Instituts de Formation des Maîtres, ainsi que tous les enseignants et les mathématiciens intéressés à prolonger une réflexion sur l'enseignement de leur discipline.

En bref, un document de référence bienvenu, qu'on devrait trouver bientôt dans toute bonne bibliothèque, au rayon «didactique des mathématiques».

Mots-clés : didactique des mathématiques

Destinataires : maîtres de mathématiques de tous les degrés, formateurs, chercheurs en didactique des mathématiques

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole*** **- CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à** ***Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	......	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Histoires de Maths, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
La magie du calcul, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Pliages mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	......	(ex. à Fr. 25.-)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Jeux mathématiques du "Scientific American", ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	......	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres.	......	(ex. à Fr. 6.-)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	......	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	......	(ex. à Fr. 20.-)
Panoramaths 96, APMEP	......	(ex. à Fr. 15.-)*
Problemi, che passione, Ed. Capitello.	......	(ex. à Fr. 9.-)
Récrémaths	.....	(ex. à Fr. 13.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	.....	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Singe et la Calculatrice (n° 14)	....	(ex. à Fr. 5.-)*
La Biroulette russe (n° 9)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Roi des Nuls (n°13)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Sabre d'Aladin (n° 15)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M..

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7