ESPACES DE LIBERTE, LIGNES DIRECTRICES ET POINTS DE CONVERGENCE

MATH ECOLE

38e année

188

Lecteurs de Math-Ecole votre avis nous intéresse

La tête et les jambes

Le carré magique pour faire 10 ...

août 1999

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément,*Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 25.- compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 30.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 6.-
anciens numéros : CHF 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 18.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E-mail : **françois.jaquet@ird.unine.ch**
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

38e année 5 numéros par an

188

août 99

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

F. Jaquet, rédacteur responsable

Math-Ecole no 188, d'août 1999 sort de presse en octobre seulement. La rédaction prie les lecteurs de bien vouloir excuser ce retard et fera tout pour que les deux numéros 189 et 190 paraissent dans des délais plus raisonnables.

Ces deux mois de retard nous ont cependant permis de constater que de nombreuses personnes se sont inquiétées de ne pas encore avoir recevoir ce numéro, habituellement distribué à la rentrée scolaire. C'est rassurant pour l'équipe de rédaction, qui y voit une marque d'intérêt et qui se dit que son travail d'écriture et de mise en page n'est peut-être pas vain. Et ceci nous amène à l'objet de cet éditorial.

Par une enquête auprès des lecteurs (pp. 23 à 26) nous allons tenter de déterminer le degré d'utilité et l'intérêt d'une revue pour ceux qui enseignent les mathématiques, en Suisse romande et au delà. Nous espérons un grand nombre de réponses; non seulement pour donner du sens et une raison d'être à notre travail, mais aussi et surtout, pour pouvoir mieux redéfinir notre action future en fonction des désirs et des intérêts des lecteurs.

Sur le cas précis de ce numéro, examinons quelques réactions de lecteurs, quelques questions, ou, pourquoi pas quelques plaintes et lamentations :

On trouvera un article sur les «lignes directrices, points de convergence et espaces de liberté» (pp 4 à 22) élaboré à la suite d'une réflexion à l'échelle nationale. Près de vingt pleines pages, avec l'introduction ! Est-ce trop long ? Des «recommandations» et des «intentions générales» ! N'est-ce pas utopique ? Est-ce bien le moment de tirer des plans sur la comète alors que l'on a déjà tant d'activités nouvelles à gérer ?

Prenons la présentation de la finale du 7e Rallye mathématique romand (pp. 35 à 40). Encore des problèmes, une bonne quinzaine, et difficiles ! N'a-t-on pas des choses plus simples à proposer ? Ne pourrait-on pas plutôt proposer des fiches faciles à corriger ou chaque élève avance à son rythme, sans intervention du maître.

Et que dire des deux présentations d'activités : «Le carré magique pour faire 10, ...» (pp. 42 à 44) et «La tête et les jambes» (pp. 45 à 47). La première, qui s'adresse à des élèves d'école primaire, peut-elle intéresser un lecteur qui enseigne à l'école secondaire ? Et réciproquement, la seconde sera-t-elle lue par des maîtres généralistes ?

La rubrique CABRidées (p. 41) a déjà suscité bien des commentaires contradictoires : «c'est génial ! – comment m'y référer, ma classe n'étant pas équipée ! – on joue aux apprentis sorciers en appuyant ses raisonnements géométriques sur la machine ! ...»

Et puis encore : la revue des revues ou les notes de lecture (p. 48) ne sont-elles pas des articles sans aucun rapport avec les préoccupation des enseignant(e)s d'école enfantine - qui, soit dit en passant - ne trouveront pas d'article spécifique à leur degré d'enseignement dans ce numéro ?

Toutes ces questions, tous ces doutes, tous ces regrets, sont régulièrement évoqués au sein de notre comité de rédaction. Nous les trouvons, parfois explicitement, dans certaines justifications des lecteurs qui renoncent à leur abonnement. Nous les recevons aussi indirectement, rapportés par ceux qui disent les avoir entendus dans les conversations de couloirs, dans les salles des maîtres.

Nous y avons toujours répondu par les actes, c'est-à-dire par notre travail de recherche ou de création d'articles. Nous avons affirmé souvent que *Math-Ecole* est destiné à tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques, à leur enseignement et leur apprentissage, et, par conséquent, les domaines traités s'étendent de la maternelle au secondaire supérieur. Nous avons répété à plusieurs reprises que *Math-Ecole* ne doit pas se limiter au prêt-à-porter, ni dans les propositions d'activités, ni dans les compte rendus de leçons, ni dans les suggestions didactiques, mais que la revue est aussi un espace de réflexion où l'on se pose des questions.

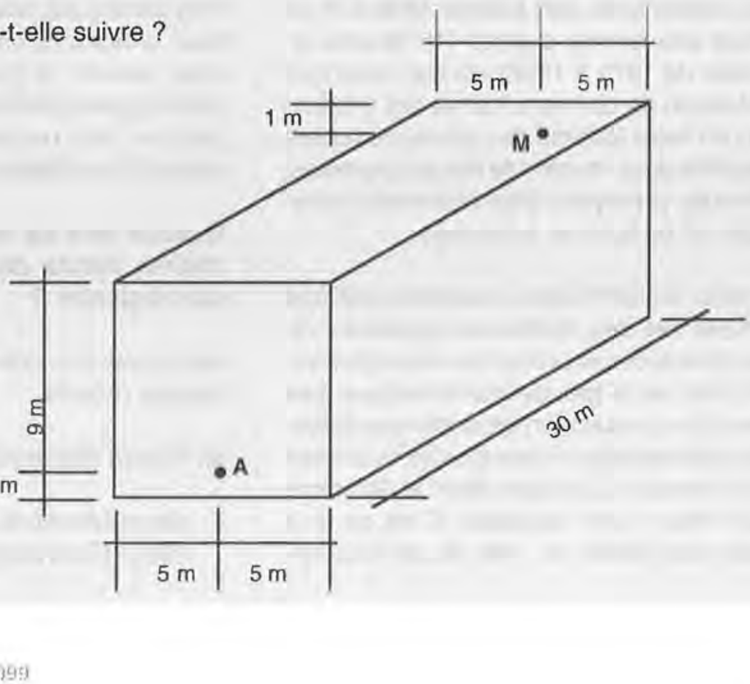
Alors, nous attendons avec impatience que les lecteurs répondent et s'associent au débat ouvert par notre enquête. Et si la rédaction recevait aussi, à cette occasion, quelques impressions, opinions ou réflexions, ou, plus généralement, des propositions d'activités des compte rendus d'expériences, des productions d'élèves ? Ne résoudrait pas du même coup le problème de l'animation d'une réflexion continue et celui du retard à combler par les deux prochains numéros ?

Tisser sa toile

Une araignée (A), qui se trouve sur une paroi de cette "salle de gymnastique" en forme de parallélépipède rectangle, se met en marche dans le dessein de croquer une mouche (M) qui se situe, elle, sur la paroi opposée.

Sans jamais quitter les parois, est-elle capable d'atteindre la mouche en ayant parcouru moins de 40 m.

Si oui, quel chemin va-t-elle suivre ?



Présentation des «Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence»

A. Scheibler, Aigle

Introduction

Qu'est-ce que les *Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence* ?

Le document que *Math-Ecole* choisit de publier aujourd'hui, et je voudrais l'en remercier, a une longue histoire. Il est la dernière production du groupe mathématique de la Commission pédagogique de la CDIP Suisse, conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique. Ce groupe mathématique, créé en 1975, a assuré discrètement mais avec beaucoup d'efficacité les échanges, la coordination et sans conteste une part du développement de l'enseignement des mathématiques en Suisse. Ses publications, son bulletin Math-CH, et surtout ses forums suisses (16 forums organisés de 1975 à 1996) ont été, sans qu'il soit besoin de donner à toutes ces productions un label fédéral, des points de repère essentiels pour l'ensemble des programmes, méthodes et moyens d'enseignement développés ici ou là dans notre pays.

En 1982, la CDIP Suisse recommandait déjà à l'ensemble des cantons un document «lignes directrices et points de convergence», concocté par le groupe mathématique. Les travaux de consultation préalablement effectués, outre le large consensus qu'ils avaient mis en évidence, avaient établi la demande d'une mise à jour régulière. C'est ce qu'a entrepris le groupe en 1995. Après une première consultation auprès d'une quarantaine de spécialistes en Suisse, une nouvelle version, intitulée «espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence» (en allemand Freiräume, Richtlinien und Treffpunkte, FRT) a été discutée lors du dernier forum suisse de mathématique à Wildhaus en novembre 1996. Il en est ressorti un très large accord et une série de propositions, que deux rédacteurs, Gregor Wieland et votre serviteur ont, sous la supervision d'un groupe d'une douzaine de consultants issus du forum, repris pour établir le texte définitif, remis à la CDIP en juillet 1997. Cette dernière, qui entre temps avait supprimé le groupe mathématique et la commission pédagogique, décida alors de soumettre le nouveau texte à une nouvelle consultation auprès de tous les cantons, consultation rentrée fin 1998...

Aux dernières nouvelles, la CDIP prépare un texte dans lequel elle va exposer aux cantons les résultats de cette consultation et ce qu'elle souhaite en faire. Ce n'est donc pas dans un avenir proche que les méthodologues, responsables des programmes, auteurs ou enseignants de mathématique verront le document *Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence*. Ma reconnaissance va donc aujourd'hui à *Math-Ecole*, qui le publie.

Quelles sont les sources de *Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence* ?

Nous pouvons citer un certain nombre de travaux récents :

en Suisse allemande :

- des publications autour du projet «mathe 2000» (Dortmund), comme «Handbücher produktiver Rechenübungen» (Klett, Stuttgart). Ce projet influence actuellement fortement l'enseignement des mathématiques en Suisse allemande. L'un de ses initiateurs, G. Krauthausen de l'Université de Dortmund, était invité au forum de Wildhaus;

- des publications de Peter Gallin/Urs Ruf, comme «Mathematik und Sprache» (LCH, Zürich) ou «ich - du - wir» (canton de Zürich), des publications autour du projet «Eigenständig Lernen» du canton de St-Gall, avec les apports spécifiquement mathématiques de P. Geering, des publications de E. Hengartner et all. «Kinder lernen auf eigenen Wegen». Ces publications suisses sont suivies avec intérêt à l'étranger et contribuent à la définition de l'enseignement des mathématiques de demain.

et en Suisse romande :

- des publications du Centre vaudois d'enseignement mathématique (CVEM), de l'IRDP de Neuchâtel, du Service de la recherche pédagogique (SRP) de Genève et du *Colloque romand Mathématiques 93* ;

- les travaux et ouvrages de référence utilisés pour l'élaboration des nouveaux moyens d'enseignement 1-4 en Suisse romande, commandés par COROME.

Qu'apportent les *Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence* aujourd'hui?

Actuellement partout dans le monde, l'enseignement des mathématiques est soumis à une réforme très profonde, dont voici quelques raisons :

- Les mathématiques elles-mêmes ne sont plus considérées maintenant comme un corps pur et formalisé, débarrassé de tout défaut. Même au niveau universitaire, il est admis que les chemins d'édification des connaissances mathématiques **sont eux-mêmes** des mathématiques. Il faut donc **également** les enseigner. C'est là certainement le fait le plus marquant de cette réforme.

- Le citoyen d'aujourd'hui vit dans un monde où les mathématiques sont archidominantes: technologie sophistiquée, automatisation, production, urbanisme, sondages, prévisions, calculs de rentes, etc. Qui peut comprendre un tant soit peu toutes ces mathématiques ? Une très petite minorité d'individus. L'objectif des mathématiques change donc considérablement: il ne s'agit plus de transmettre le plus possible de connaissances dont on sait qu'il ne restera pratiquement rien. Mais il faut permettre au plus grand nombre d'appréhender ce que sont véritablement les mathématiques, en en ayant fait un peu, d'un bout à l'autre, pour en apprécier ainsi la beauté, la rigueur, mais aussi l'humanisme et la fragilité. On peut être mélomane sans être virtuose, et rester ainsi critique sans être forcément un expert.

- La société actuelle exige de chacun une mobilité et une capacité d'adaptation considérable. Il faut être capable de repérer les variables d'une situation nouvelle, et les gérer raisonnablement. Les nouvelles méthodologies d'enseignement des mathématiques vont dans ce sens.

- Enfin, de plus en plus aujourd'hui, il faut être capable de décoder de l'information, sur sa place de travail, dans la rue, dans les médias, ou la manipuler soi-même par l'intermédiaire d'automates ou d'ordinateurs. L'école et tout particulièrement l'enseignement des mathématiques, doit en tenir compte.

Les *Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence* rassemblent ces caractéristiques sous une forme constructive et applicable à l'enseignement des mathématiques en Suisse pour la scolarité obligatoire. Il en donne les lignes conductrices pour les années à venir. Sa partie la plus novatrice s'intitule «espaces de liberté». Elle est le fruit des éléments fondamentaux établis aujourd'hui par la recherche et les expérimentations pour optimiser l'apprentissage mathématique.

Je remercie encore une fois le comité de rédaction de *Math-Ecole* de permettre à ses nombreux lecteurs l'accès à ce document qui, sans forfanterie, a déjà séduit de nombreuses personnes, autant en Suisse qu'à l'étranger.

Espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence

Recommandations relatives à l'enseignement des mathématiques en Suisse dueant la scolarité obligatoire

Conférence suisse des directeurs de l'instruction publique
Groupe mathematique de la commission pedagogique

Introduction

En 1982, la conférence des directeurs cantonaux de l'instruction publique, CDIP CH, recommandait aux cantons de se conformer au document «points de convergence et lignes directrices» pour l'actualisation des plans d'études et la création de nouveaux moyens d'enseignement en mathématiques. Ce document avait été élaboré par un des organismes de la CDIP CH, le groupe mathématique, également responsable de l'organisation des forums suisses de mathématiques.

Aujourd'hui, plusieurs raisons nous incitent à reprendre fondamentalement notre copie :

- une première consultation, auprès des cantons et des associations d'enseignants, en 1981, avait mis en évidence, à part un accueil très favorable et un large consensus, le souhait de faire apparaître d'autres points de convergence et lignes directrices. Le groupe mathématique s'était alors engagé à y répondre dans l'avenir;

- en 15 ans, la société a subi des modifications importantes sur le plan social, économique et technologique. Ces modifications ne sont pas sans influence sur l'école et sur l'enseignement des mathématiques;

- la recherche en didactique des mathématiques est active depuis plus de 20 ans. Elle propose aujourd'hui un certain nombre de travaux auxquels il est fait référence pour définir de nouvelles méthodologies. En particulier, le nouveau document tiendra compte du triangle didactique élève - professeur - savoir;

- Les forums suisses de mathématiques, organisés tous les 2 ans, ont également apportés de nombreux éléments propres à l'évolution de l'enseignement de cette branche dans notre pays.

Objectifs du document

- Contribuer à la coordination de l'enseignement des mathématiques en Suisse.

- Permettre l'établissement d'un enseignement des mathématiques qui tienne compte des résultats de la recherche et stimuler les échanges en Suisse sur le sujet.

Enseigner les mathématiques aujourd'hui

Pourquoi ?

Pour résoudre des problèmes! Cet objectif n'a pas changé. Cependant, pour que le citoyen puisse résoudre des problèmes à l'aide des mathématiques, il est indispensable que ces mathématiques lui soient proches, qu'il ait vraiment eu l'occasion de s'y confronter personnellement, et qu'il ait, dans des situations tout à fait à sa portée, vécu et construit lui-même certains concepts.

L'objectif de l'enseignement des mathématiques n'est alors pas seulement la transmission de quelques produits finis permettant de résoudre effectivement certains problèmes; c'est surtout la volonté d'ouvrir à un plus grand nombre les mathématiques, dès leurs fondements, dans des situations qui leur donne du sens.

Comment ?

Pour son élaboration, ce document se réfère aux travaux récents de recherche dans le domaine de la transmission des connaissances mathématiques, notamment, avec le triangle didactique bien connu :

- L'élève, en étant confronté à une activité préparée par le professeur, va rencontrer le savoir;

- Le professeur est un metteur en scène de l'apprentissage du savoir; il considère avec objectivité les connaissances et les capacités des élèves;

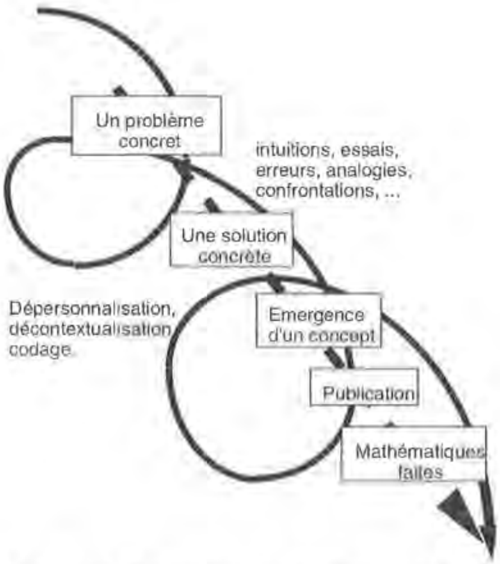
- Le savoir, dans ce contexte, nécessitait une nouvelle description; c'est ce que ce document fait essentiellement.

Si les méthodologies d'enseignement peuvent changer aujourd'hui, et probablement encore demain, le savoir mathématique tel qu'il est décrit ici est lui beaucoup plus stable. C'est pour cette raison que ce document s'attache essentiellement à sa description. Il sera question de méthodologie qu'à titre d'illustration, dans les commentaires.

Définitions

Espaces de liberté

C'est la partie totalement nouvelle du document, par rapport à celui de 1982. Nous entendons par **espaces de liberté** ce qui constitue en fait le terreau dans lequel naissent les concepts mathématiques. Il ne s'agit pas de procédures, mais bien de conditions fondamentales sans lesquelles les mathématiques n'existeraient tout simplement pas.
En ce qui concerne l'apprenant, un élève qui cherche une solution d'un problème ayant du sens pour lui, qui prend une fausse piste, échange avec son camarade, compare, argumente, corrige, FAIT des mathématiques.
De même, le mathématicien ne se contente pas de mémoriser des concepts ou des raisonnements complexes, mais fonctionne de manière plus globale, approximativement selon le schéma suivant :



Faire des mathématiques, apprendre des mathématiques sont donc ici des activités en étroite symbiose. Elles exigent toutes deux une certaine autonomie de l'acteur, une liberté d'action, en vigilance avec les autres et le savoir déjà établi.

Lignes directrices et points de convergence

Ce sont des concepts et des savoirs mathématiques privilégiés au cours de la scolarité obligatoire. Certains, omniprésents, constituent une sorte de colonne vertébrale, ce sont les **lignes directrices**. D'autres, marquant plus localement l'apprentissage et assurant ainsi une coordination dans le temps, ce sont les **points de convergence**. Chaque ligne directrice est ponctuée par un ou plusieurs points de convergence. Lignes directrices et points de convergence sont des fruits des **espaces de liberté**.

Espace de liberté 1.

Des situations pour faire des mathématiques.

L'élève apprend les mathématiques s'il est confronté à des situations qui ont du sens pour lui.

Commentaires

Les situations peuvent provenir de différentes sources :

- du vécu et des expériences quotidiennes de l'élève;
- d'une mise en scène soigneuse de l'enseignant, pour toucher un savoir mathématique déterminé;
- des mathématiques elles-mêmes, celles déjà établies (voir espace de liberté 7), ou celles en train de se faire, par exemple lorsque deux propositions contradictoires jaillissent dans la classe, ou qu'une recherche exige brusquement la connaissance d'une compétence nouvelle.

Beaucoup de situations ouvrent les mathématiques aux autres disciplines, au monde. Les espaces de liberté suivants en donnent divers éclairages.

Espace de liberté 2.

L'esthétique pour apprendre.

La nature, les arts, certaines réalisations techniques, apportent, au travers de situations concrètes, d'importantes relations avec les mathématiques.

Commentaires

Des qualités d'esthétique, de régularité, d'ordre, d'harmonie, de symétrie, touchent l'individu dès sa plus jeune enfance et le sensibilisent à des propriétés qui seront traitées en mathématiques. Ces aspects seront donc privilégiés tout au long de la scolarité.

Les situations peuvent provenir de nombreux domaines, par exemple :

- symétries dans la nature, croissance d'une plante;
- oeuvres et ouvrages d'art;
- rythmes divers, poésie et musique;
- polyèdres réguliers et semi-réguliers;
- ...

Espace de liberté 3.

Des obstacles pour apprendre.

Essayer, ne pas craindre d'affronter l'inconnu, de faire des erreurs, est un important moyen d'apprendre les mathématiques.

Commentaires

L'obstacle est un facteur essentiel d'apprentissage. L'élève apprend contre quelque chose: une ancienne connaissance qui doit s'adapter à de nouvelles contraintes, ou une ignorance patente, qui se révèle dans une situation.

D'autre part, souvent en mathématiques, l'élève ne produit rien puisqu'il ne connaît pas la solution exacte du problème. Il apprendra alors consciemment à «faire du faux pour savoir le vrai».

Sur le plan technique, un mémoire d'erreurs et de pièges classiques, constitué dans un souci de perfectionnement, permet d'améliorer les performances et de mieux cerner les concepts mathématiques.

Espace de liberté 4.

Communiquer sa pensée pour apprendre

Dans l'enseignement des mathématiques, les moyens de communiquer sa pensée font l'objet d'un apprentissage tout au long de la scolarité.

Commentaires

Les concepts mathématiques, contrairement aux objets des disciplines naturalistes, sont de purs objets de pensée. Pour les expliciter, il faut un langage symbolique souvent sophistiqué. Les élèves s'exprimeront d'abord avec leurs mots, parlés ou écrits, leurs évocations, gestes, images, dessins.

L'enseignant n'imposera pas d'emblée son formalisme lorsque de nouveaux objets mathématiques apparaissent. Il permet aux élèves d'utiliser leurs propres mots et leurs propres images. Les échanges des différents points de vue permettent alors au langage d'évoluer d'une expression personnelle vers une forme admise par le groupe de la classe, puis vers un langage plus formel.

A long terme, les élèves peuvent produire un document mathématique sous une forme adéquate, qui a du sens pour eux. L'apprentissage des mathématiques directement à partir de documents mathématiques devient possible.

Espace de liberté 5.

Apprendre ensemble.

L'apprentissage des mathématiques privilégie les confrontations d'opinions, les débats sur le vrai et le faux, l'élaboration d'une pensée logique de référence pour un groupe social donné.

Commentaires

Il y a de l'universel dans la pensée mathématique! Cela se vit d'abord dans la classe. Les démarches et les explications étant exprimées (espace de liberté 4), elles sont comparées, confrontées. Le maître évite d'être la référence du vrai et du faux dans la classe. Il donne à chaque groupe d'élèves la possibilité de défendre leur position face aux autres. Il peut laisser certaines questions en suspens.

Des règles apparaissent alors: se demander si l'on a affaire à un cas particulier, rechercher un contre-exemple, refaire la même chaîne de calculs à partir d'autres nombres, vérifier si une affirmation figure déjà dans une référence théorique, etc.

Espace de liberté 6.

L'histoire pour apprendre.

L'histoire des mathématiques, celle de ceux qui les ont faites et celle des problèmes, enrichit leur apprentissage.

Commentaires

Il existe beaucoup de situations d'apprentissage des mathématiques qui appartiennent à l'histoire. Leur présentation sensibilise les élèves à l'aspect vivant et en perpétuel mouvement des mathématiques.

Par exemple, les élèves peuvent rencontrer des problèmes résolus ou non résolus de l'histoire des mathématiques (dénombrabilité des nombres premiers, des nombres premiers jumeaux, le plus grand nombre premier connu, théorème des 4 couleurs, théorème de Fermat, dénombrement des polyminos, etc).

D'autre part, le maître donne l'occasion aux élèves de connaître d'autres méthodes de numération et d'opérations que celles utilisées aujourd'hui dans notre espace culturel. Des exemples peuvent être tirés de l'histoire (numération babylonienne ou romaine) ou provenir d'autres pays (multiplication indienne, boulier).

Espace de liberté 7.

Des mathématiques pour apprendre.

Dans l'apprentissage des mathématiques, les résultats établis permettent de poser de nouveaux problèmes, de valider des résultats, ou d'exercer la résolution systématique de problèmes classiques.

Commentaires

Des résultats mathématiques, qu'ils soient historiques, établis par les élèves ou non, procurent de bonnes situations de recherche. Par exemple :

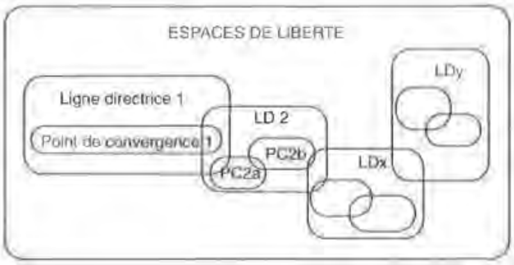
- la multiplication égyptienne est présentée aux élèves. Ils peuvent alors la tester, se demander pourquoi ça marche et si ça marche toujours, rechercher une technique de division basée sur la même méthode.
- La somme des aires des carrés construits sur les cathètes d'un triangle rectangle égale l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (théorème de Pythagore). Et si l'on construisait, à la place des carrés, des triangles équilatéraux, ou des pentagones réguliers, aurait-on toujours la même propriété sur la somme des aires ?
- Un théorème de géométrie dit que deux surfaces quelconques données dans un plan peuvent toujours être partagées chacune et simultanément en deux parties d'aires égales par la même droite. Les élèves peuvent chercher à appliquer cette propriété curieuse à partir de différentes surfaces.

La validation de résultats obtenus par les élèves peut faire appel à des connaissances préalablement rencontrées ou tirées d'ouvrages mathématiques.

Certains résultats mathématiques s'appliquent à un grand nombre de situations de la vie courante. Il y a donc du sens à automatiser leurs applications. Un travail de recherche est alors mené avec les élèves, pour déterminer l'automatisme le plus efficace.

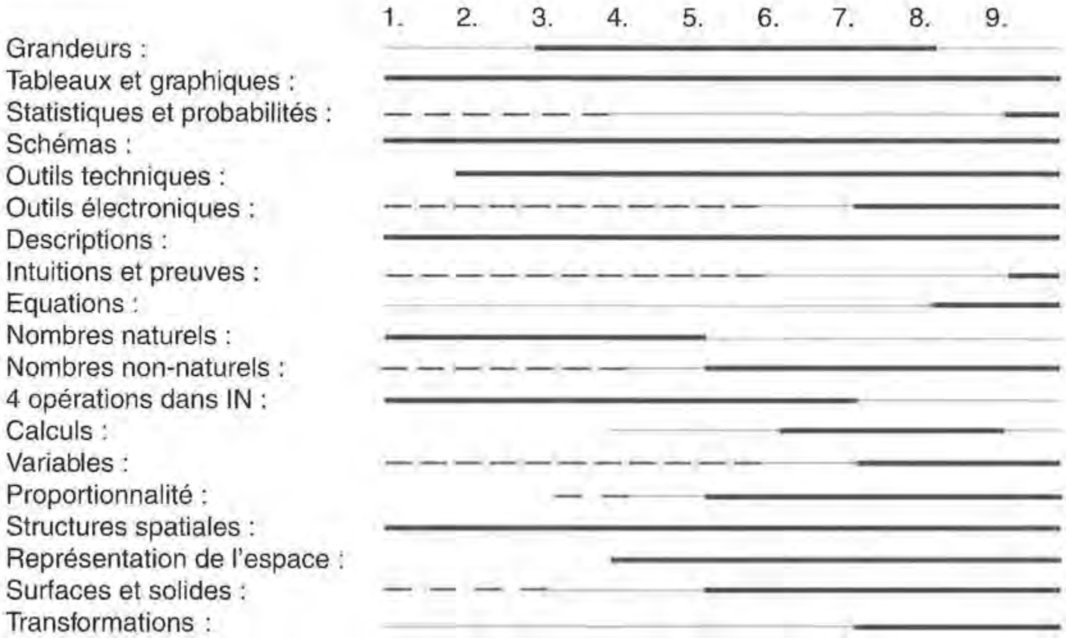
Représentation schématique des articulations entre espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence

Les espaces de liberté, lignes directrices et points de convergence sont étroitement imbriqués. Les frontières entre lignes directrices et points de convergence ne peuvent pas toujours être strictement définies, des recoupements sont inévitables, comme le suggère le schéma suivant :



Répartition des points de convergence durant la scolarité, vue d'ensemble

Sujet traité en cours d'année :
Sujet mis au point :
Sujet touché expérimentalement :



Ligne directrice 1. Mathématiques et réalité.

L'école doit initier les élèves à la manière dont les mathématiques sont présentes et s'appliquent dans la réalité.

Point de convergence 1

Grandeurs

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent utiliser différents instruments de mesure. Ils en connaissent les unités de même que les rapports entre les principales unités d'une même grandeur.

Commentaires

– Tout au long de la scolarité, les élèves rencontrent régulièrement des situations concrètes, du quotidien et de la vie professionnelle. Ils expérimentent, mesurent, comparent. Rattacher ainsi certaines activités mathématiques à la réalité quotidienne, à la multidisciplinarité, est fondamental. Cela donne du sens à la construction des connaissances tout comme à leurs applications.

– L'enseignement des mathématiques doit également prendre en compte l'apprentissage de notions tirées de l'économie (budget, salaires, ...), de la technique (engrenages, systèmes articulés, ...), de la physique (vitesse, masse, centre de gravité, ...), de la chimie (mélanges, ...), de l'astronomie, etc.

- Les élèves développent aussi le sens de l'ordre de grandeur d'un résultat, par bon sens, mesure ou calcul. Par exemple, ils seront capables de déterminer:
  - l'épaisseur d'une feuille de papier;
  - le nombre de grains dans un kilo de riz;
  - la capacité-mémoire d'un ordinateur;
  - le volume d'un dé à coudre et celui de la Terre;
  - le temps mis par la lumière pour nous parvenir du Soleil;
  - ...
- Les élèves connaissent au moins l'utilisation et les limites de précision des instruments de mesure suivants :

  longueur : calibre de précision, règle graduée, double-mètre, ruban métrique;
  temps : chronomètre et horloge;
  poids : balance;
  volume : récipients gradués;
  angle : rapporteur.

  Ils distinguent un résultat obtenu à partir d'une mesure de celui obtenu par une calculatrice.
- Les élèves sont capables d'effectuer des changements d'unités dans les cas usuels, ils connaissent les préfixes milli - centi - déci - déca - hecto - kilo, et quelques unités composées comme celles de la vitesse ou de la masse volumique.

Ligne directrice 2.
Modélisation.

Les élèves découvrent et expérimentent des modèles mathématiques, et apprennent à les distinguer de la réalité qu'ils décrivent.

Point de convergence 2a

Tableaux et graphiques.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves décrivent la réalité avec des modèles simples, tels que des tableaux et des représentations graphiques. Ils peuvent lire ceux de la vie quotidienne, et dans certains cas, en produire eux-mêmes.

Point de convergence 2b

Statistiques et probabilités.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves interprètent des résultats statistiques tirés de la vie quotidienne et déterminent, dans des cas simples, la probabilité d'événements aléatoires.

Commentaires

- Les élèves expérimentent le fait qu'un modèle mathématique est un substitut de la réalité, et non la réalité elle-même. Un modèle permet, dans certaines limites, d'obtenir des résultats exploitables avec une précision suffisante. Si ce n'est plus le cas, il faut changer le modèle. Par exemple, le prix d'une marchandise est directement proportionnelle à son poids. Mais dans la réalité, il peut être arrondi, ou limité par un minimum, ou subir des rabais.
- Certaines situations se résoudraient difficilement sans modèle. Par exemple déterminer les probabilités liées au jet de deux dés.
- Statistiques et probabilités sont abordées

par le biais de situations que les élèves peuvent expérimenter. Par exemple :

- jeux de hasard, jet de dés ou loterie à numéros;
- enquêtes dans l'école, dates ou jours d'anniversaires;
- ...

– L'opinion publique, dans toutes sortes de domaines, politique, social, économique, commercial, sportif, etc. est régulièrement influencée par divers résultats statistiques. Les élèves apprennent à se poser des questions: que signifient-ils? comment sont-ils obtenus? peut-on les considérer comme fiables ? L'actualité fournit une matière abondante.

Ligne directrice 3.

Outils.

Les élèves ont régulièrement l'occasion de se familiariser à l'usage d'outils techniques et électroniques.

Point de convergence 3a

Schémas.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent interpréter des représentations dans lesquelles nombres et grandeurs sont schématisés.

Point de convergence 3b

Outils techniques

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent l'utilisation d'outils techniques tels que les instruments de mesure courants, la règle, l'équerre, le compas.

Point de convergence 3c

Outils électroniques

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves savent utiliser la calculatrice à bon escient et rencontrent tout au long de la scolarité des expériences avec l'ordinateur.

Commentaires

– Aujourd'hui, les enfants vivent entourés d'instruments, de calculatrices, d'ordinateurs et de toutes sortes d'outils d'usage courant. Il serait dommage qu'ils utilisent les moyens électroniques comme des gadgets, qui calculent automatiquement ce que l'on apprenait longuement à faire à la main. Ils doivent les exploiter pour une plus grande efficacité de calcul et de recherche dans le quotidien. Dans ce sens, un usage judicieux de la calculatrice s'associe à une compréhension plus approfondie du concept de nombre.

– En résolvant des problèmes, les élèves apprennent à choisir les bons outils et comment les utiliser. Dans une situation numérique, ils savent distinguer données et résultats, identifier les opérations qui les lient et la nature des nombres utilisés, contrôler par estimation ou bon sens les résultats de la calculatrice.

– Les élèves sont familiarisés à l'usage de tabelles numériques et schémas graphiques, tels que tarifs, horaires, tables diverses, graphiques statistiques, etc. Dans des situations simples, ils sont capables d'en établir eux-mêmes et de les utiliser.

– L'utilisation d'outils électroniques permet également d'effectuer en classe certaines recherches, comme par exemple :

- résoudre des problèmes réels, en particulier lorsqu'ils contiennent de très petits ou de très grands nombres;

- faire varier la valeur d'une variable pour en étudier l'effet, en particulier dans une fonction exponentielle;

- rechercher des valeurs limites, comme les racines successives d'un nombre donné;

- étudier des problèmes de géométrie d'un point de vue dynamique ; etc.

Ligne directrice 4.

Mathématiques et langage.

Les élèves apprennent à exprimer leur démarches pour résoudre des problèmes, et pour apprendre.

Point de convergence 4

Descriptions

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves développent des techniques pour décrire leurs actions et pour les soutenir. Ils savent tirer profit des erreurs repérées.

Commentaires

- Dans l'enseignement des mathématiques, les élèves n'apprennent pas seulement des concepts. Ils apprennent aussi à s'exprimer de manière toujours plus précise, dans un processus qui ne sera pas achevé à la fin de la scolarité obligatoire. Les mathématiques s'expriment dans un formalisme spécifique, qui n'est pas simple à comprendre pour tous les élèves, parce que souvent très peu de signes expriment beaucoup. Il est donc très important de toujours veiller à la compréhension de ce formalisme, en le traduisant systématiquement en langage courant, et réciproquement.

- Les élèves s'initieront à traduire en langage mathématique des textes courants qui s'y prêtent, résoudre le problème posé, puis transposer et interpréter les résultats dans la réalité. Cela peut se faire déjà en 1ère année de scolarité lorsque par exemple on demande aux élèves d'imaginer des histoires avec des nombres et des opérations.

- Les élèves apprennent à rédiger des textes à contenus mathématiques, en décrivant leurs propres activités mathématiques. Ainsi décriront-ils avec leurs propres mots comment ils ont résolu un problème, qu'est-ce qui leur a causé des difficultés, les a induit en erreur, leur a manqué. Ils apprendront ainsi, en plus des connaissances mathématiques, à s'organiser pour affronter un problème.

Ligne directrice 5.

Justifier et prouver.

En résolvant des problèmes, les élèves présentent et justifient les hypothèses faites, les chemins suivis et les résultats obtenus. Dans des cas simples, ils les prouvent.

Point de convergence 5a

Intuitions et preuves

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

En géométrie, les élèves distinguent, par des expériences concrètes, intuition, conjecture, et preuve.

Point de convergence 5b

Equations

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables de décrire leurs conjectures avec leurs mots, puis de manière plus formelle. Ils apprendront à établir et résoudre une équation, en particulier du 1er degré à une variable, pour résoudre des problèmes ou justifier certains résultats.

Commentaires

- Durant toute la scolarité, les élèves explorent le monde des nombres, des figures géométriques, des solides. Ils y découvrent des relations et des propriétés. Ils apprennent alors que ces observations sont d'abord des conjectures, qu'on les invite à formuler, à questionner, à argumenter, à justifier, et dans certains cas à prouver. Entre autres, ils apprennent à distinguer un résultat expérimental, obtenus par hasard, d'un autre plus général, ou d'un résultat prouvé.

Exemple en arithmétique-algèbre

Observation et formulation :

si j'additionne deux nombres pairs, le résultat est pair.

Argumentation et justification :

je peux partager en deux un nombre pair. Si j'additionne deux nombres pairs, je peux aussi additionner les quatre demi-nombres. Donc je peux partager en deux le résultat.

Preuve en écrivant une équation :

$$\left.\begin{array}{l} a = 2n \\ b = 2m \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 2n + 2m = 2(n + m)$$

Exemple en géométrie

Observation et formulation :

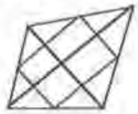
dans un quadrilatère quelconque, on joint les milieux des côtés. Le quadrilatère obtenu semble être un parallélogramme. Est-ce un hasard ou toujours le cas ?

Argumentation :

j'essaie avec beaucoup de quadrilatères différents. Je mesure soigneusement les quadrilatères moyens. Ca marche toujours, ce n'est pas du hasard.

Justification et preuve :

les côtés du quadrilatère moyen sont les segments moyens d'un triangle, donc ils sont parallèles aux diagonales du quadrilatère, donc parallèles entre eux, donc le quadrilatère moyen est un parallélogramme.



- Justifier et prouver sont des exigences élevées. Elles peuvent s'alléger dans des situations déjà traitées que l'on modifie un peu. Par exemple, demander aux élèves ce qu'il en est de la somme de nombres impairs, ou quelle est l'aire du quadrilatère moyen.

- La résolution d'équations du 1er degré à une variable peut être effectuée par essais successifs, par voie graphique ou algébrique.

Ligne directrice 6.

Nombres.

Les élèves rencontrent de multiples occasions d'explorer le monde des nombres.

Point de convergence 6a

Nombres naturels

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent la construction et la structure des nombres naturels.

Point de convergence 6b

Nombres non-naturels

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent différentes écritures de nombres: nombres décimaux, fractionnaires, pourcentages, affichage d'une calculatrice, valeurs exactes, puissances et racines.

Commentaires

- Très tôt, les élèves utilisent toutes sortes de nombres de leur environnement. Par curiosité et par jeu, ils complètent petit à petit leurs connaissances des nombres sous leurs aspects cardinaux et ordinaux, multiples et diviseurs, décimaux et fractionnaires, etc. Ils les décrivent, les comparent, les ordonnent. Cette compréhension des nombres s'étend sur toute la scolarité. Régulièrement, les nombres sont reconsidérés, réarrangés.

- D'innombrables situations, puisées dans toutes les disciplines, alimentent cette étude :

  - le point le plus haut et le plus bas de la Terre;
  - la température de mon corps;
  - l'année «zéro» a-t-elle existé ?
  - que signifie des expressions comme «2 élèves sur 5», «les deux-tiers des arbres», «une population double tous les 10 ans», «il fait moins trente degrés» ?

- Dans le système décimal, les connaissances minimales suivantes sont maîtrisées :

  - différencier 10'203 et 10'302;
  - ordonner $153 < 162 < 2817$;
  - placer des nombres sur un axe gradué;
  - comprendre la numération des chapitres et paragraphes d'un livre;
  - connaître l'écriture scientifique des nombres $3'200'000 = 3{,}2 \cdot 10^6$; $0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$;
  - interpréter et formaliser des expressions du type «un quart de 600 m», «deux tiers de 27», «80% de 24'000 fr.».

- Dans les cas usuels, savoir passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire d'un nombre, et réciproquement :
  $5\% = 5/100 = 1/20 = 0{,}05$
  $0{,}75 = 75/100 = 3/4 = 75\%$

- Déterminer l'ordre de grandeur d'une racine carrée : $13 < \sqrt{175} < 14$.

Ligne directrice 7.

Opérations.

Tout au long de la scolarité, les élèves développent leurs propres capacités de calcul.

Point de convergence 7a

4 opérations dans IN

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent des procédures d'exécution des 4 opérations, addition, soustraction, multiplication, division, avec des nombres naturels.

Point de convergence 7b

Calculs

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves maîtrisent les 4 opérations avec des nombres décimaux, par association avec leurs connaissances des nombres naturels, par l'estimation de l'ordre de grandeur du résultat, par des méthodes de déplacement de la virgule, et par l'utilisation de la calculatrice.

Commentaires

- Les élèves sont incités à développer leurs propres capacités de calcul. Ils s'exercent à concurrencer efficacement la calculatrice et sans elle sont capables de résoudre les petits problèmes numériques du quotidien. Ils recherchent quelles sont les opérations et les nombres pour lesquels ils peuvent fournir très vite le résultat ou une bonne approximation. Ils recherchent également comment transformer une opération en une chaîne d'opérations faciles. Ils découvrent ainsi différentes structures des nombres.

- Les élèves doivent être conscients de l'avantage qu'ils ont à connaître par coeur certains résultats d'opérations, comme les livrets, les compléments d'un entier à la dizaine supérieure, les valeurs arrondies aux différentes puissances de 10 d'un nombre, par excès et par défaut.

- Calculer de tête ne signifie pas que les élèves calculent sans papier ni crayon. Il est quelquefois utile d'écrire un résultat intermédiaire.

- La difficulté des opérations qui devraient être réussies sans calculatrice à la fin de la 6e année peut être décrite par les exemples suivants :

  $3782 + 421 + 17854 + 15 =$

  $128'400 - 12'303 =$

  $28 \cdot 495 =$

  $29'610 : 63 =$

- Les algorithmes classiques ne constituent pas la panacée. Les opérations peuvent également être effectuées par calcul semi-écrit. D'autre part, l'histoire des mathématiques fournit de nombreux autres algorithmes pour les 4 opérations.

- Pour les calculs avec des nombres non-entiers, l'accent est mis plus sur la compréhension que sur la dextérité. Deux aspects jouent alors un rôle important:

  - les nombres ou leurs écritures se transforment :

    $1/2+ 2/3 = 3/6 + 4/6 = 3+4/6 =$
    $7/6 = 1\ 1/6 \approx 1,17$

    ou

    $0,11 : 0,03 = 11 : 3 = 11/3 =$
    $3\ 2/3 \approx 3,67$

  - l'ordre de grandeur d'un résultat est estimé :

    24% de 4800 fr., c'est environ le quart de 4800 fr., soit environ 1200 fr.

    $3,45 \cdot 268,5$ se situe entre
    $3 \cdot 260 = 780$ et $4 \cdot 270 = 1080$.

Ligne directrice 8.

Fonctions.

Les élèves développent la notion de fonction.

Point de convergence 8a

Variables

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont accoutumés à utiliser des variables.

Point de convergence 8b

Proportionnalité

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves reconnaissent et savent traiter des relations de proportionnalité et de proportionnalité inverse. Ils peuvent leur associer des situations du quotidien.

Commentaires

– Les concepts de fonction et de variable peuvent être introduits très tôt, sans formalisme, par exemple sous forme de devinettes :

«je pense à un nombre, je le double et ajoute 10, j'obtiens 50. Quel nombre ai-je pensé ?»

Le concept formel de fonction se développe alors lentement, avec son langage spécifique.

– Des situations du quotidien servent la construction du concept de fonction:

– poids, prix, rabais;
– objet réel et maquette (échelle);
– relations entre diverses variables, par exemple volume, rayon et hauteur d'un cylindre;
– courbe de température;
– courbe de croissance d'une population;
– ...

– Fonctions et variables apparaissent régulièrement sous forme de tableaux de nombres ou de graphiques. Le concept de fonction permet d'introduire ceux d'équations, d'inéquations, de systèmes, et leurs résolutions.

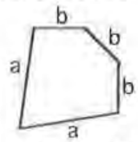
– Les élèves comprennent la signification des expressions littérales rencontrées, le rôle des lettres, des parenthèses et l'ordre des opérations. Ils savent remplacer les lettres par les nombres correspondants, calculer la valeur d'une lettre si l'on connaît celles des autres. Dans les formules simples et souvent utilisées, ils savent exprimer la valeur d'une lettre en fonction des autres.

– Ils sont capables de reconnaître l'équivalence de différentes expressions littérales. Par exemple en recherchant la somme des n premiers nombres entiers, deux résultats ont été trouvé :

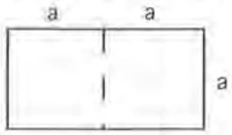
$(n^2 + n) : 2$ et $n/2 \bullet n + n/2$

sont-elles équivalentes ?

– Dans des cas simples, ils savent réduire une expression. Le calcul littéral sera évidemment un peu plus poussé pour les élèves qui doivent maîtriser les algorithmes de résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes. Mais tous les élèves devraient au moins pouvoir maîtriser les exemples suivants :



Aire $= (a + a) \cdot a = 2a \cdot a = 2a^2$



Périmètre $= a + a + b + b + b = 2a + 3b$

- Les élèves connaissent les fonctions associées à des relations de proportionnalité et de proportionnalité inverse. Ils en connaissent diverses propriétés et applications par exemple dans les cas suivants: vitesse, pente, densité, rendement, rabais, etc.

- L'étude de la proportionnalité peut se faire sous différents aspects :

  - tableaux de nombres;
  - représentations graphiques;
  - formules : $y = f(x) = k \cdot x$

Ligne directrice 9.

Se repérer dans l'espace.

Les élèves apprennent à s'orienter et à se mouvoir dans l'espace. Ils peuvent décrire orientations et mouvements.

Point de convergence 9a

Structures spatiales

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves construisent à l'aide de divers matériaux des solides élémentaires. Ils saisissent, au propre comme au figuré, les structures spatiales de ces objets.

Point de convergence 9b

Représentation de l'espace

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves connaissent des méthodes de représentation en deux dimensions d'objets de l'espace, dont au moins le dessin schématique, le plan coté, et une représentation en perspective.

Point de convergence 9c

Surfaces et solides

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables d'analyser les figures élémentaires du plan et les objets élémentaires de l'espace par des mesures et calculs.

Point de convergence 9d

Transformations

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les élèves sont capables de transformer, de manière contrôlée, des figures du plan, en grandeur et en position. En particulier, ils connaissent les isométries et les similitudes de figures.

Commentaires

- Dans les premières années de la scolarité, l'élève apprend à se situer lui-même dans l'espace, à décrire ses propres mouvements, pour ensuite le faire pour d'autres objets. Il s'imprègne petit à petit des concepts de repère et d'orientation d'objets.

  Il peut alors décrire la position et le mouvement d'objets de l'espace du point de vue de l'objet en mouvement (point de vue du pilote) ou de celui de l'observateur (point de vue de la tour de contrôle).

- Les représentations graphiques telles que esquisses, plans, diagrammes, cartes, etc. jouent aujourd'hui un grand rôle. L'entraînement de l'intuition géométrique doit aider l'élève à comprendre de telles représentations et en réaliser lui-même.

- Les élèves rencontrent des propriétés

d'objets géométriques, en particulier de ceux qu'ils ont construit. Il existe beaucoup de matériaux pour cela : carton, polydrons, pailles avec noeuds de connexion, collection de développements, lego, etc.

- Les élèves apprennent à observer leur environnement immédiat, à le décrire et le représenter. Ils développent alors des compétences telles que: vérifier, associer, classer, décrire des figures avec précision, formuler, expliquer et utiliser des propriétés.

- Les élèves sont capables de transformer de manière contrôlée une figure géométrique en grandeur et position. Ils découvrent l'existence de transformations qui conservent certaines propriétés (conservation des distances, des angles, des rapports, etc.). De telles recherches se déroulent de manière concrète, par exemple à l'aide de miroirs, de pliages, d'étirements de surfaces, etc.

  La description formelle des transformations géométriques n'apparaîtra qu'en fin de scolarité et de manière différenciée. De même, les rapports entre transformations géométriques et fonctions numériques pourraient être abordés.

- Certaines propriétés des objets de l'espace sont difficilement exprimables sous forme d'objectifs opérationnalisables au niveau de l'école obligatoire: propriétés topologiques, dimensions, sens d'un objet, etc. Ces propriétés peuvent cependant parfaitement être perçues et décrites par les élèves, à propos d'objets qu'ils manipulent.

- Les élèves maîtrisent une méthode de représentation plane des objets de l'espace. Réciproquement, ils peuvent construire ces objets à partir de projections, de développements ou, dans des cas simples, de représentations en coupe.

- Les élèves maîtrisent les constructions suivantes: construction de parallèles, de perpendiculaires, médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle, symétrie axiale et centrale, figures isométriques et semblables.

- Les élèves savent utiliser le théorème de Pythagore et les propriétés de la similitude pour résoudre des problèmes.

- Les élèves savent déterminer:

  a) l'aire d'un rectangle, d'un parallélogramme, d'un triangle, ainsi que des surfaces décomposables en ces éléments;

  b) la longueur du cercle et l'aire du disque;

  c) les aires et volumes du prisme, de la pyramide, du cône, du cylindre et de la sphère.

Conclusions

Conséquences

Ce document, élaboré par le groupe mathématique de la CDIP, a été soumis à un important travail critique lors du forum suisse de mathématiques qui s'est déroulé à Wildhaus du 25 au 27 novembre 1996. Sa rédaction finale reflète donc un fort consensus. Les conséquences de son acceptation sont multiples :

- **sur les méthodologies :**

  il implique une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques, donc une révision des méthodologies. Cette opération est déjà en cours dans certaines régions.

- **sur l'évaluation :**

  une évaluation traditionnelle, soit essentiellement sommative, va à l'encontre des idées fondamentales développées dans ce document, en particulier en ce qui concerne les espaces de liberté. Là aussi, une nouvelle conception de l'évaluation doit être envisagée, ce qui est également déjà le cas dans certains cantons.

- **sur la formation des enseignants :**

  comme dans toutes les réformes, il faut toujours gérer une période particulière de transition, dans laquelle les nouveaux enseignants ont vécu eux-mêmes un enseignement basé sur une méthodologie ancienne. Ce document est donc une référence essentielle pour la formation initiale et continue des enseignants.

- **sur les échanges en Suisse :**

  Ce document engage une nécessité, celle d'échanger régulièrement des informations entre toutes les régions et cantons de notre pays. Il faut en effet poursuivre la réflexion engagée, suivre ses effets sur les curriculum et les méthodologies, et plus généralement continuer d'étudier les incidences de la recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement.

  Il serait également judicieux de constituer rapidement une banque de situations mathématiques, dans l'esprit de ce document, avec des comptes-rendus d'expérimentations en classe.

  Plus particulièrement, des questions comme la gestion du cahier de l'élève, l'usage d'un dictionnaire de mathématiques, l'exploitation de la calculatrice ou d'autres moyens électroniques dans l'enseignement, doivent faire l'objet de recherches et d'échanges permanents.

Diffusion

Ce document mérite une large diffusion, pour le faire connaître bien sûr, mais surtout pour lui donner vie. Cela concerne donc:

- les responsables régionaux et cantonaux de l'enseignement;
- les formateurs d'enseignants;
- les auteurs de moyens d'enseignement;
- les enseignants de tous les niveaux;
- les enseignants des écoles professionnelles;
- les correspondants à l'étranger;
- les revues d'enseignement mathématique;
- les bibliothèques et centres de documentation pédagogiques.

Lecteurs de *Math-Ecole*, votre avis nous intéresse !

[ndlr] Il y a longtemps que le Comité de rédaction de *Math-Ecole* se soucie de savoir si les articles qu'il propose répondent aux intérêts et aux besoins des lecteurs. C'est même une préoccupation permanente, qui est celle de tous les respnsables de revues spécialisées.

Nous recevons bien, très rarement, un petit mot d'un lecteur pour nous dire son avis sur tel et tel article. On nous envoie aussi, parfois, des réponses aux problèmes publiés, comme en témoigne notre chronique - irrégulière - de *réponses aux problèmes*. Nous recevons aussi, régulièrement, des commandes pour les publications que nous diffusons, des demandes d'abonnement et des résiliations au moment de l'envoi des factures de renouvellement; ce sont là des correspondances administratives qui nous donnent peu d'information sur l'adéquation de la revue aux besoins des abonnés. Alors, pourquoi pas s'adresser directement aux lecteurs ?

Pour répondre aux questions de l'enquête qui suit, il ne vous faudra pas beaucoup plus d'un quart d'heure. C'est peu pour vous, c'est beaucoup pour le Comité de rédaction qui a vraiment besoin de votre avis pour définir sa politique d'édition.

Alors, consacrez dix à vingt minutes à *Math-Ecole*, votre revue préférée, et retournez-nous ce questionnaire au plus vite. Nous vous en remercions par avance.

Un beau livre de problèmes sera offert à chacune des 20 premières personnes qui nous auront renvoyé leur questionnaire, et à 20 autres qui seront tirées au sort.

QUESTIONNAIRE

Pour chaque question, ***cochez la case qui convient*** *Dans certains cas, signalés, vous pouvez cocher plusieurs cases.*

1. Identification

1.1	Sexe	❑	masculin	❑	féminin
1.2	Age	❑	18 - 35 ans	❑	36 - 50 ans
		❑	51 - 65 ans	❑	plus de 65 ans

1.3 J'enseigne (plusieurs réponses possibles) :

- ❑ en classe enfantine
- ❑ à l'école primaire
- ❑ à l'école secondaire I, cycle d'orientation

- ❑ à l'école secondaire II (collège, lycée, gymnase, école de commerce, école professionnelle)
- ❑ à l'école normale, séminaire pédagogique
- ❑ à l'université, école polytechnique
- ❑ à l'institut pédagogique, institut de recherche
- ❑ autre, à préciser :

1.4 Je peux consulter la revue *Math-Ecole* dans l'établissement où j'enseigne

oui ❑ non ❑

1.5 L'établissement est abonné depuis .... année(s).

1.6 Je suis personnellement abonné(e) à *Math-Ecole*

oui ❑ non ❑

1.7 Je suis abonné(e) depuis .... année(s).

2. Autour du contenu de la revue *Math-Ecole*

Pour chacune des rubriques, donnez votre sentiment de satisfaction en entourant le nombre qui convient, assorti si possible de vos remarques (questions 2.11 et 2.12)

4 = correspond pleinement à mes attentes
3 = me satisfait généralement
2 = m'intéresse, mais mériterait quelques modifications
1 = ne correspond pas du tout à mes attentes
0 = je ne me prononce pas, car je ne le lis pas / sans opinion

		4	3	2	1	0
2.1	Editorial	❑	❑	❑	❑	❑
2.2	Echos d'expériences faites en classe	❑	❑	❑	❑	❑
2.3	Articles didactiques	❑	❑	❑	❑	❑
2.4	Présentation de moyens d'enseignement	❑	❑	❑	❑	❑
2.5	Présentation de jeux, rallyes, concours	❑	❑	❑	❑	❑
2.6	Présentation d'activités liées à l'informatique	❑	❑	❑	❑	❑
2.7	Notes de lecture	❑	❑	❑	❑	❑
2.8	Courrier des lecteurs	❑	❑	❑	❑	❑
2.9	Publicité	❑	❑	❑	❑	❑
2.10	Equilibre théorie - pratique	❑	❑	❑	❑	❑

2.11 Ce qui devrait être développé, créé à l'avenir :

2.12 Ce qui me dérange vraiment :

3. AUTOUR DE LA FORME ET DU RYTHME DE PARUTION

3.1 *Math-Ecole* paraît 5 fois l'an; ce rythme vous paraît-il :

- ❑ bon
- ❑ trop élevé
- ❑ pas assez élevé

3.2 *Math-Ecole* est actuellement destiné aux enseignants de Suisse romande. Devrait-il être aussi plus ouvert à des rubriques venant :

- ❑ Suisse alémanique et du Tessin
- ❑ de France et d'autres pays
- ❑ d'écoles alternatives
- ❑ de parents d'élèves
- ❑ d'élèves et d'étudiants
- ❑ d'autres sources :

3.3 A votre avis, Math-Ecole est attendu dans une école :

- ❑ un peu
- ❑ beaucoup
- ❑ passionnément
- ❑ à la folie
- ❑ pas du tout ?

3.4 Combien de temps consacrez-vous à la lecture d'un numéro de Math-Ecole ?

- ❑ moins d'une heure
- ❑ entre une heure et quatre heures
- ❑ plus de quatre heures

3.5 L'équilibre entre textes, photos, schémas, reproductions de travaux d'élèves est-il :

- ❑ bon
- ❑ à améliorer
  si oui, en quoi :

3.6 Vous utilisez *Math-Ecole* dans votre pratique :

- ❑ jamais
- ❑ quelquefois
- ❑ souvent
- ❑ très souvent

Citez des domaines d'utilisation régulière (cf. points 2.1 à 2.8 ou autres)

3.7 Vous consultez d'anciens numéros de *Math-Ecole* :

- ❑ jamais
- ❑ quelquefois
- ❑ souvent
- ❑ très souvent

Citez des domaines de consultation régulière (cf. points 2.1 à 2.8 ou autres)

4. Autres remarques a propos de *Math-Ecole*

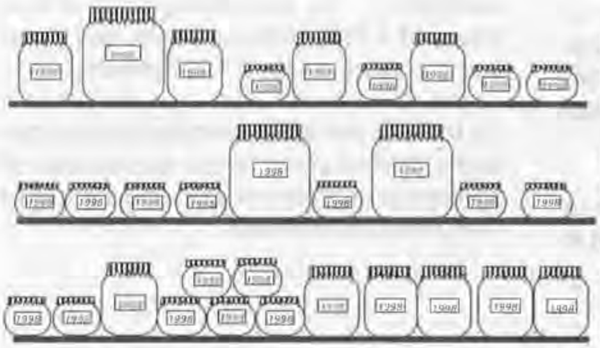
Nous vous remercions chaleureusement d'avoir répondu à ce questionnaire.

A photocopier ou détacher et renvoyer à l'adresse suivante :

Math-Ecole
IRDP / C.P. 54
2007 Neuchâtel 7

Un problème et son analyse didactique : les pots de confiture[1]

C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone
Département de mathématiques, Siena



Maria a fait des confitures et a placé les pots,petits, moyens et grands, sur trois rayons :

Il y a exactement 5 kg de confiture sur chaque rayon.

Combien pèsent un grand pot, un moyen et un petit ?

Expliquez votre raisonnement.

Analyse a priori

Domaine mathématique

- Arithmétique: égalités à compléter
- Algèbre: «systèmes d'équations»

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois types différents de pots jouent un rôle fondamental
- Comparer les pots des deuxième et troisième rayons et comprendre que, les nombres de petits pots étant égaux, les deux grands du deuxième rayon sont de même masse que les six moyens du troisième rayon : 2 grands = 6 moyens ou 1 grand = 3 moyens
- Comparer les pots des rayons 1 et 2 et en déduire que : 1 moyen = 3 petits.
- Procéder à la détermination des masses, en prenant comme *unité de mesure un petit pot* : sur chaque rayon, on a l'équivalent de 25 petits pots, et donc, chacun d'entre eux a une masse de 0,2 kg, chaque pot moyen 0,6 kg et chaque grand 1,8 kg.

Évaluation

4 Réponse correcte et complète : 0,2 kg; 0,6 kg; 1,8 kg avec explications cohérentes.

3 Réponse correcte et complète sans explications ou résolution partielle arrivant à la deuxième équivalence, avec explications.

2 Réponse avec une seule erreur de calcul et explications.

1 Début de recherche valable.

0 Incompréhension du problème.

Niveau : 6 - 7 - 8.

Origine : Pavia.

[1] Cet article est tiré des actes des rencontres inter nationales de Brigue sur le Rallye Mathématique Transalpin qui viennent de sortir de presse. Traduction française : F. Jaquet

Analyse des productions des groupes d'élèves

Ce problème a été proposé, par la deuxième épreuve du 6e RMT (en avril 1998), aux classes de première à troisième secondaire (I à III Media, catégories 6, 7, 8).

127 productions de groupes d'élèves ont été examinées (66 de catégorie 6, 40 de catégorie 7 et 21 de catégorie 6), provenant des régions de Siena, Emilia Romagna et Suisse romande.

Ce problème s'est avéré plutôt difficile pour les classes de catégorie 6 surtout, dont le 70% (46 sur 66) ont été évaluées par 0 et seulement 4 (6%) ont obtenu le maximum de 4 points.

A l'examen des productions des classes de catégorie 8, on note en revanche une inversion notable de tendance, déjà amorcée en catégorie 7 : le pourcentage des échecs descend à 19% alors que celui des réponses correctes monte à 43% environ.

Le tableau suivant rassemble les pourcentages obtenus pour chaque appréciation (le nombre de productions correspondantes est noté entre parenthèses.

	0 point	1 point	2 points	3 points	4 points
I Media (cat.6 (66)	70% (46)	7,5% (5)	1,5 % (1)	15 % (10)	6 % (4)
II Media (cat. 8) (40)	50 % (20)	5 % (2)	0 % (0)	27,5 % (11)	17,5 % (7)
III Media (cat. 9) (21)	19 % (4)	9,5 % (2)	4,8 % (1)	23,8 % (5)	42,9 % (9)

La difficulté du problème réside dans la nécessité de tenir sous contrôle plusieurs informations et à les utiliser simultanément : les différentes grandeurs de pots, la diversité de leurs disposition sur les trois rayons, l'invariance de la quantité de confiture sur chaque rayon.

Le pourcentage élevé (22%) des classes qui n'ont pas donné de réponse est dû aux obstacles rencontrés dans la gestion de toutes les variables en jeu, qui ont été indubitablement plus élevés pour les élèves de 11 à 12 ans. (Sur 28 classes qui ont rendu une feuille blanche, il y en a 21 de catégorie 6.)

L'examen des productions des groupes a permis de les classer selon les stratégies utilisées. On a dénombré cinq catégories de réponses, dont chacune présente des subdivisions ultérieures selon la rigueur et la complétude des raisonnements suivis. Mais parfois, le type de réponse formulée de manière très synthétique n'a pas permis de retrouver le raisonnement suivi :

"Grand pot: 1,66 kg, pot moyen : 0,5 kg, petit pot : 0,27 kg"

"Impossible : nous ne l'avons pas trouvé»

1. Réponses obtenues par essais

a) On s'intéresse au premier rayon et on ignore les autres. On procède par essais successifs en ajustant à chaque fois la masse des trois récipients, jusqu'à déterminer des valeurs compatibles avec la quantité de confiture présente sur ce rayon :

«Le grand pèse 1450 gr. Le moyen pèse 587,5 gr. Le petit pèse 300 gr. Nous avons additionné et multiplié des nombres possibles jusqu'à ce que nous arrivions au résultat final.

Les grands pots pèsent 7,5 hg, les moyens 5,75 hg, les petits 5 hg. J'ai essayé en disant que les grands pesaient 1 kg, et les petits seulement 5 hg et en additionnant ça n'allait pas, alors j'ai commencé à enlever des hg aux grands jusqu'à ce que ce soit juste. J'ai fait la même chose avec les moyens.»

Dans quelques cas, la masse d'un pot est fixée, celle du grand en général, et la masse des deux autres est déterminée en se référant à la décomposition de 5 comme somme de nombres naturels (2+2+1, 2+3, 4+1) :

«Grand pot 2 kg, moyen 500 g, petit 250 g ... On a trouvé cette solution en décomposant le nombre 5 :

[5 kg = 2 kg + (500 x 4)g + (250 x 4)g]

"Le petit pot pèse 0,15 kg, le pot moyen pèse 0,60 kg, le grand pot pèse 2 kg . Pourquoi? Parce que la somme des pots sur le premier rayon fait 5 kg [5 kg = 2 kg + 3 kg = 2 kg + (600 x 4) g + (150 x 4) g]»

Le petit pot : 50 g; le moyen : 200 g; le grand :

4 kg [5 kg = 4 kg + 1 kg =

= 4 kg + (200 x 4) g + (50 x 4) g]»

On observe que le contrôle sur les autres rayons est absolument ignoré, comme si les informations qu'on pourrait en retirer étaient des données inutiles ou surabondantes. On se contente de la première réponse, influencé par le fait que, d'habitude, une fois qu'on a trouvé une solution «acceptable», le problème est résolu.

b) On procède, comme dans le cas précédent, par essais sur un rayon, mais cette fois, on effectue aussi un contrôle sur les deux autres, mais en oubliant une des variables en jeu.

On admet que la masse totale de 5 kg sur chaque rayon peut varier :

«Le grand pot pèse 1,5 kg, le pot moyen pèse 0,5 kg et le petit pot pèse 0,375 kg.

Sur le premier rayon : 1,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,375 + 0,375 + 0,375 + 0,375 = 5 kg

Sur le deuxième rayon: 0,375 + 0,375 + 0,375 + 0,375 + 0,375 + 0,375 + 0,375 + 1,5 + 1,5 = 5,625 kg

Sur le troisième: Tot. 5,625 kg»

On sent la nécessité d'une hypothèse selon laquelle la masse des pots varierait d'un rayon à l'autre :

«HYPOTHÈSE : Sur chaque rayon, les pots pourraient être différents ...»

c) La solution correcte se détermine en procédant par tentatives plus ou moins organisées, en ajustant les masses et en contrôlant toutes les variables :

«Au début, nous avons supposé que le grand vaut 2 kg, le moyen 0,500 kg et le petit 0,200. En modifiant le grand, chaque fois de 0,1, on a trouvé 1,8. Puisque le grand est 1,8, nous avons augmenté le moyen de 0,050 gr et ainsi, on a obtenu 0,600 gr»

«On a fait des essais. Grand : 1 kg; moyen : 500 gr; petit : 250 gr et ceci n'allait pas bien; puis avec le grand : 1,88 kg; moyen : 460 gr; petit : 320 gr et encore beaucoup d'autres. Et par hasard, le grand : 1800 g; moyen : 600 gr; petit : 200 gr...»

Quelquefois, le rappel de l'expérience concrète peut aider ...

«J'ai vu qu'il y avait 7 petits pots sur le

deuxième et sur le troisième rayon, ce qui a permis plusieurs essais, et quand j'ai compris, par la proportionnalité, que les petits pesaient 200 g ...»

...et, d'autres fois, c'est le hasard qui a un rôle déterminant :

«*Nous sommes partis de la deuxième colonne et par un pur hasard, nous avons remarqué que la date des grands pots est 1998 et nous avons pris le premier et le dernier chiffre pour dire que la masse des pots est 1,8.*»

2. Réponses fondées sur l'hypothèse que la masse du grand pot soit le double de celle du moyen et que cette dernière soit le double de celle du petit

Ceux qui ont donné ce type de réponse se sont probablement laissés fourvoyer par le dessin, sur lequel le rapport entre les capacités des pots grand-moyen et moyen-petit semble être vraiment de 2 à 1 :

«*... sachant que deux petits vases valent un moyen et que deux moyens valent un grand ...*»

Cette proportion semble parfois si évidente que le besoin de l'expliciter n'est plus présent :

«*En additionnant les pots moyens et petits, nous avons 4 grands pots sur le premier rayon, ...*»

Dans la majorité des cas, la réponse est donnée en ne considérant que le premier rayon, le seul qui contient les trois types de pots (fig. 1). Dans les rares occasions où un contrôle est effectué sur tous les rayons, on accepte que la masse des pots varie d'un rayon à l'autre.

3. Réponses obtenues par confrontations et essais

Le raisonnement débute par une confrontation des deuxième et troisième rayons puis par le premier avec l'un des deux autres. L'un des rapports, ou les deux, entre les capacités des pots est alors déterminé par essais :

«*En comparant les rayons , nous avons remarqué que le deuxième et le troisième ont le même nombre de petits pots. En comparant ceux qui restent (les grands) du deuxième rayon et ceux qui restent (les moyens) du troisième, on trouve que les moyens sont le 1/3 des grands. Pour les grands, nous avons essayé toutes les mesures qui étaient divisibles en tiers, puis nous avons vu que ça allait avec 1,8, qui est le triple de 0,6. Puis nous avons trouvé le 0,2*»

«*...nous savions donc que :*

3 petits = 1 moyen, 3 moyens = 1 grand, 9 petits = 1 grand. Pour les poids, nous avons essayé : 1 petit = 0,1 kg, donc 1 moyen = 0,3 kg, donc 1 grand = 0,9 kg. Ce n'était pas suffisant. Alors, nous avons essayé avec plus: 1 petit = 0,2 kg, donc 1 moyen = 0,6 kg, donc 1 grand = 1,8 kg et ceci était la bonne solution. Sur les trois rayons on trouvait 5 kg.»

Dans une production, après avoir trouvé la relation entre le grand et le moyen, l'attention est portée sur le premier rayon (le seul sur lequel on trouve les trois types de pots) et la masse du pot moyen est identifié comme la «masse moyenne» de la confiture par pot :

«*En moyenne = 5 kg : 9 ≈ 0,6*»

4. Réponses obtenues par confrontations et substitutions

Comme le prévoyait l'analyse a priori, on procède à la confrontation des pots disposés sur les trois rayons de manière à déterminer le rapport existant entre leurs masses, ce qui permet de travailler sur un seul rayon et avec un seul type de pot (en général le petit) :

«*Le petit pot pèse 0,2 kg; le pot moyen pèse 0,6 kg; le grand pot pèse 1,8 kg.*

Nous sommes arrivés à cette solution en observant les deux dernières rangées de pots, nous avons remarqué qu'elles avaient le même nombre de petits pots. L'avant dernière rangée avait deux grand pots et la dernière avait six pots moyens, c'est pour cela que nous avons compris que trois pots moyens étaient équivalents à un grand pot. En comparant la première et la deuxième rangée, nous avons remarqué que trois petits pots étaient équivalents à un pot moyen.

En transformant tous les pots moyens et grands d'un rayon en petits pots et en les divisant par le poids de chaque rayon, nous avons trouvé le résultat.»

En théorie, le choix du type de pot à considérer comme unité est évidemment indifférent. En pratique, pourtant, si on travaille sur un rayon, le choix d'un grand pot ou d'un moyen contraint à utiliser des fractions et aux difficultés à opérer avec elles qui en découlent.

La seule production où le pot moyen a été pris comme unité de mesure, conduit à une erreur, précisément pour éviter l'usage des fractions : on a ajouté sur le deuxième rayon deux petits pots de manière à y obtenir, après la substitution, un multiple entier de l'unité de mesure, mais on a considéré que la masse totale de ce même rayon était restée invariante. (fig. 2).

5. Réponses obtenues par l'algèbre

Une seule production d'une classe de catégorie 8 (III Media) pose et résout un système utilisant de manière appropriée le calcul algébrique (fig. 3).

Dans d'autres productions, toujours en catégorie 8, on observe un début d'utilisation du langage et des instruments algébriques : même si le langage n'est pas entièrement formalisé, les trois équations sont posées et on opère sur elles en utilisant en fait les principes de réduction et de substitution des systèmes d'équations (fig. 4).

Quelques observations ultérieures

Il paraît opportun de signaler encore quelques observations, en marge de l'analyse précédente.

Plus d'une fois, on a relevé les difficultés liés au concept de division. Chez certains élèves, c'est le modèle primitif de cette opération sur les nombres naturels, qui contraint en particulier le dividende à être toujours supérieur au diviseur, qui paraît encore bien enraciné : devant la nécessité d'exécuter une division dans laquelle le dividende et le diviseur sont dans la «bonne» relation, les deux nombres sont intervertis avec désinvolture.

Dans certains cas, on a pensé à faire les calculs sans s'en préoccuper puis à interpréter les résultats de manière réaliste («*le grand pot = 3333,3333333 g, le petit pot = 166, 6666665 g*») : il s'agit de cette aptitude, assez répandue et à ne pas ignorer d'un point de vue didactique, qui consiste à accepter sans critique, pour un problème «scolaire», des résultats qui seraient considérés comme impossibles dans une situation réelle.

Commentaire final

De notre expérience directe et des avis des enseignants, nous pouvons retenir que, compte tenu de ses difficultés, le problème a suscité un intérêt remarquable : il a plu par la manière dont il a été présenté, il a stimulé la curiosité des élèves et leur engagement dans la recherche de la solution.
Des problèmes de ce genre pourraient se révéler utiles, dans la pratique didactique, pour introduire et étudier les systèmes d'équations : ils offrent l'occasion de voir concrètement le rôle des inconnues comme celui des constantes numériques et de se rendre compte de la validité des principes qui sont à la base du calcul algébrique.

RISOLVIAMO

VASETTO PICCOLO = 312,5 g
VASETTO MEDIO = 625 g
VASETTO GRANDE = 1.250 g.

In ogni ripiano ci sono 5.000 g di marmellata.

Dividendo e moltiplicando i vasetti abbiamo scoperto che:

2 piccoli = 1 medio
2 medi = 1 grande

Sapendo che in un ripiano ci sono 8 vasetti medi abbiamo diviso 5.000 g. per 8 trovando 625 g. (vasetto medio).
Infine moltiplicando 625 g. per 2 abbiamo trovato 1.250 g. (vaso grosso); dividendo 625 g. per 2 abbiamo trovato 312,5 g. (vasetto piccolo).

Figure 1

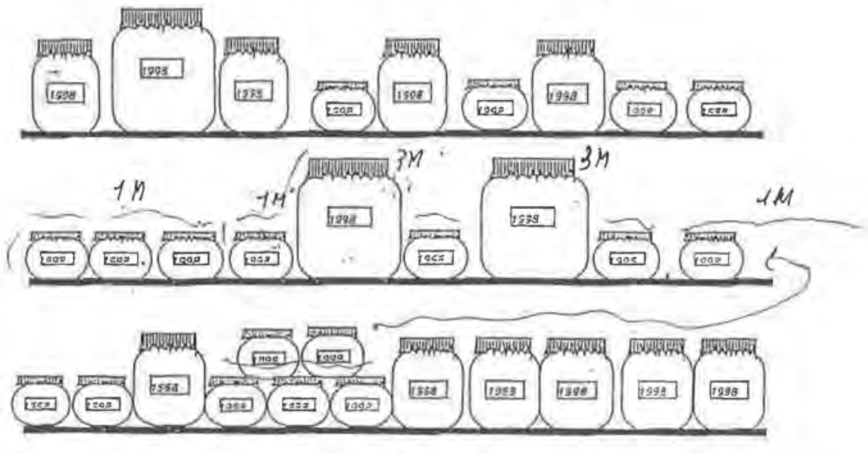


Figure 2

(11)

I vasi grandi contengono 1,8 kg di marmellata.

" " medi " 0,6 " " " .

" " piccoli " 0,2 " " " .

Ragionamento

x = vasi grandi

y = " medi

z = " piccoli

$$2x + 7z = 6y + 7z$$

$$2x = 6y$$

$$x = 3y$$

da ciò si deduce che a un vaso grande ne corrispondono 3 medi

$$7z = 4y + 4z - x$$

$$3z = 4y - x$$

$$x + 3z = 4y$$

$$x - 3y + 3z = 4y - 3y$$

$$3z = y$$

da ciò si deduce che a un medio corrispondono 3 piccoli.

da ciò si deduce che

$$x = 9z$$

$$z = \frac{1}{9}x$$

e che

$$5 = 1x + 1x + \frac{7}{9}x$$

$$5 = 2x + \frac{7}{9}x$$

$$5x = \frac{25}{9}x$$

$$\frac{25}{9}x = 5$$

$$-25x = -45$$

$$x = 1,8$$

primo vaso: 1,8 kg; (2°) 1,8 : 3 = 0,6 kg (3°) 0,6 : 3 = 0,2 kg

Figure 3

1° PIANO : 1 GRANDE + 4 MEDI + 4 PICCOLI = 5 Kg.
2° PIANO : 2 GRANDI + 0 MEDI + 7 piccoli = 5 Kg
Lo vuol dire che i 4 MEDI sono stati sostituiti da 1 GRANDE + 3 P.
3° PIANO : 0 GRANDI + 6 MEDI + 7 PICCOLI = 5 Kg
Lo vuol dire che i due grandi sono stati sostituiti da 2 Medi + 3 P.
Dopo questo abbiamo collegato i barattoli fra loro con le corrispondenze sopra citate. Alla fine ci sono rimasti 2 MEDI sul primo ripiano e 6 piccoli sul secondo quindi vuol dire che 3 piccoli = 1 medio. Quindi 1 grande = 3 medi
Trasformiamo tutto in barattoli piccoli e dividiamo i Kg per il n° barattoli

Traduction française :

Rayon 1 : 1 grand + 4 moyens + 4 petits = 5 Kg

Rayon 2 : 2 grands + 0 moyens + 7 petits = 5Kg
ce qui veut dire que les 4 moyens ont été substitués par 1 grand + 3 petits

Rayon 3 : 0 grand + 6 moyens + 7 petits = 5 Kg
ce qui veut dire que les deux grands ont été substitués par 2 moyens + 3 petits

Après ceci, nous avons relié entre eux les pots selon les correspondances données ci-dessus. A la fin, il nous est resté 2 moyens sur le premier rayon et 6 petits sur le deuxième rayon. Ceci signifie donc que 3 petits = 1 moyen : par conséquent 1 grand = 3 moyens. Nous avons tout transformé en petits pots et avons divisé les Kg par le nombre de petits pots.

7e Rallye mathématique transalpin

Finale Romande

Mercredi après-midi 5 mai 1999, 23 classes de Suisse romande, de la troisième à la huitième années scolaire, s'affrontaient pour la finale du *7e Rallye mathématique transalpin*. Venus des cantons de Berne, Valais, Fribourg, Vaud, Neuchâtel et Genève, ils étaient environ 500 élèves - accompagné de leurs maîtres et parfois de leurs parents - à avoir fait le déplacement à Neuchâtel, où ils ont été chaleureusement accueillis au Collège des Terreaux.

Au même instant, une finale était organisée au Tessin. D'autres ont eu lieu entre le 9 mai et le 11 juin à Sienne, Parme, Cagliari, Pesaro, Pavie, Aoste, Bourg-en-Bresse, Luxembourg et Prague. Car, depuis que le Rallye mathématique romand est devenu «transalpin», il ne cesse de s'étendre et de voir le nombre des classes inscrites augmenter dans des proportions considérables. Il y avait, pour cette septième édition près de 1000 classes inscrites, en Europe, dont 170 en Suisse romande.

D'une région à l'autre, les finales du Rallye se déroulent selon le même scénario et avec les mêmes problèmes, qu'ils soient rédigés en français, en italien, en allemand ou en tchèque :

A leur arrivée, les élèves s'installent dans la salle qui leur est attribuée, préparent papier, crayons, ciseaux, colle, calculatrices, etc. Puis leurs maîtres qui les avaient conduits jusque là quittent leur classe. A l'heure H, un organisateur distribue les sujets. C'est, pour les heureux participants à la finale, le début de la dernière confrontation, qui met un terme à une série d'essais et d'épreuves passées les mois précédents.

Les règles du jeu, déjà appliquées lors des phases précédentes, sont bien connues des élèves: résoudre de six à huit problèmes, inédits et bien résistants, en 50 minutes, et rédiger pour chacun d'eux une seule solution solidement argumentée, en l'absence du maître et sans aucune aide extérieure.

Mais qu'est-ce qui pousse ces élèves à s'inscrire, à se donner à fond, à se confronter sur des problèmes de mathématiques ? Et un jour de congé en plus ! N'en ont-ils pas assez en classe ?

Le public et les accompagnants, qui ont le droit d'accéder aux salles de travail, saisissent immédiatement les raisons de cet engouement. La résolution de vrais problèmes, par équipes, en toute autonomie, n'est pas une tâche rébarbative. C'est un plaisir, un défi, un jeu passionnant.

Il n'y a aucun problème d'ordre ou de discipline. Les classes se prennent en charge naturellement, se répartissent les tâches, organisent les contrôles, discutent des solutions. Puis, au moment du goûter, en attendant la proclamation des résultats, c'est encore les solutions et les vérifications qui sont au centre de l'intérêt.

Maîtres, élèves, organisateurs, parents auront pris un bon bain de mathématiques vivante cet après-midi.

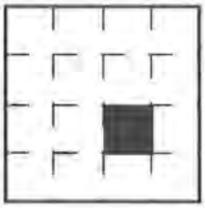
Les pages suivantes présentent les sujets sur lesquels se sont affrontés les classes candidates. Les résultats figurent en fin d'article.

1 - LE PARC DU CHÂTEAU - *Catégorie 3*

Ce dessin représente un château, en gris, entouré de son parc. Le seigneur du château a décidé de partager le parc entre ses 5 fils. Pour ne pas faire de jaloux, il veut que toutes les parts soient égales et qu'elles aient la même forme. Les petits carrés ne peuvent pas être partagés.

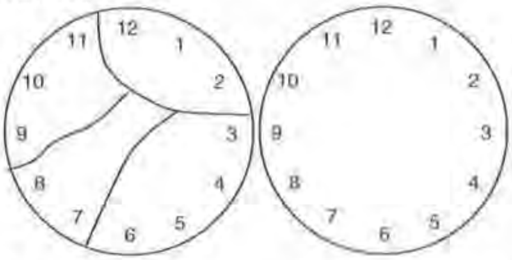
Comment faire ?

Coloriez les différentes parts sur la figure.



2 - DÉCOUPAGE DU TEMPS - *Catégorie 3*

Sur le cadran de montre de gauche, on a découpé quatre parties. Pour chaque partie on peut calculer la somme des nombres qu'elle contient : on trouve 15, 18, 15, et 30.



Découpez maintenant le cadran de montre de droite en 6 parties, de n'importe quelle forme, de façon que la somme des nombres de chaque partie soit la même.

Expliquez comment vous avez fait pour trouver.

3. BOUQUETS - *Catégories 3 et 4*

Marguerite, la fleuriste, a 55 roses et 70 tulipes. Avec ces fleurs, elle prépare des bouquets composés chacun de 3 roses et 4 tulipes.

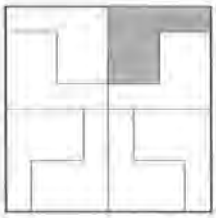
Combien peut-elle préparer de bouquets au maximum ?Combien lui restera-t-il de fleurs de chaque sorte ?

Expliquez vos réponses.

4. UN PUZZLE À COLORIER - *Catégories 3 et 4*

Il faut recouvrir ce carré, avec huit pièces, toutes identiques, découpées dans du papier bicolore, gris d'un côté, rouge de l'autre. On a posé la première des pièces. Sa face visible est grise. On doit poser les 7 autres pièces sur les emplacements dessinés.

Coloriez le puzzle entièrement terminé.



5. LES COUSSINS DE LA PRINCESSE - *Catégories 3 et 4*

La princesse Zoubéida est alitée. Il y a 7 coussins carrés identiques sur son lit. Elle a mal ici, elle a mal là. Pour se soulager, elle change ses coussins de place. Quand ils sont les uns à côtés des autres, il en faut 5 pour occuper toute la longueur du lit. Mais il suffit de 4 coussins pour la largeur.

La princesse voudrait recouvrir toute la surface du lit avec des coussins. Elle les demande à sa servante.

Combien d'autres coussins, de mêmes dimensions, la servante doit-elle apporter pour que la princesse puisse recouvrir toute la surface du lit ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

6. LA CONFÉRENCE INTERNATIONALE - *Catégories 3, 4 et 5*

Une conférence internationale réunit 15 délégués d'Afrique, d'Asie, d'Amérique et d'Europe. Chaque continent a envoyé un nombre différent de délégués, mais chacun est représenté par au moins un délégué.

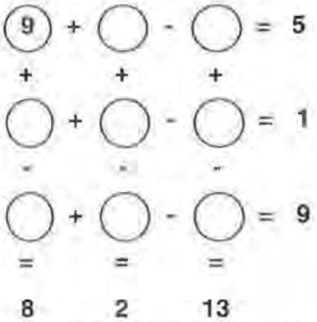
L'Amérique et l'Asie ont envoyé au total 6 délégués. L'Asie et l'Europe ont envoyé au total 7 délégués.

Quel continent a envoyé 4 délégués ?

Justifiez votre réponse.

7. PÊLE-MÊLE - *Catégories 4 et 5*

Remplissez chaque disque en utilisant une seule fois chacun des nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de façon à ce que les calculs sur chaque ligne et sur chaque colonne soient exacts.



8. PIÈCES D'OR - *Catégories 4 et 5*

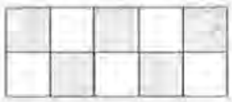
En partant de chez lui, Oncle Picsou a un certain nombre de pièces d'or. Dans un premier magasin, il dépense la moitié de ses pièces et encore deux autres pièces. Dans un deuxième magasin, il dépense la moitié des pièces qui lui restent et encore deux autres pièces.
Il ne lui reste alors plus aucune pièce.

Combien Oncle Picsou avait-il de pièces en partant ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

9. VOISINS ADDITIFS - *Catégories 4, 5 et 6*

Placez les dix nombres de 1 à 10 dans les cases de ce tableau, un par case, de manière que les nombres des cases grises soient la somme des nombres des cases blanches voisines.

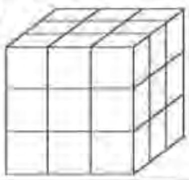


Notez les solutions que vous avez trouvées et expliquez comment vous avez procédé.

10. JEU DE CONSTRUCTION - *Catégories 5 et 6*

Pour faire ce cube, il a fallu assembler 27 petits cubes identiques. On a 2500 petits cubes. Avec ces petits cubes, on fait le plus gros cube possible.

Combien restera-t-il de petits cubes quand le gros cube sera terminé ?



Justifiez votre réponse.

11. LA PROMENADE EN VOITURE - *Catégories 5, 6 et 7*

Françoise décide de faire une promenade avec sa voiture presque neuve. Elle roule très régulièrement : pendant chaque heure, elle parcourt la même distance.

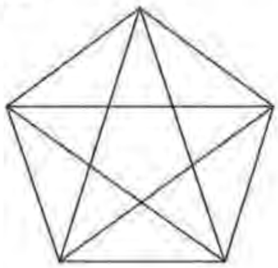
Au départ, le compteur affiche un nombre de deux chiffres. Une heure plus tard, Françoise regarde le compteur; ce sont les deux mêmes chiffres, mais inversés. Une heure plus tard encore, le compteur affiche les mêmes chiffres séparés par un zéro

Quel nombre marquait le compteur au départ ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

12. COMBIEN DE TRIANGLES ? - *Catégories 5, 6, 7 et 8*

Combien peut-on voir de triangles dans cette figure?



Donnez le détail de votre réponse.

13. LUNA PARC - *Catégories 6, 7 et 8*

Au Luna Parc, avec un jeton rouge on peut faire un tour sur l'astronave, avec un jeton bleu sur les auto tamponneuses et avec un jeton vert sur le grand huit.

Carlo a payé 16 Euros pour un jeton rouge, deux bleus et un vert. Luca, qui a payé un Euro de moins, a en mains deux jetons rouges, un bleu et un vert. En revanche, Sandro a un jeton bleu, un rouge et deux verts, mais il a payé un Euro de plus que Carlo.

Combien coûte un tour sur le grand huit ?

Expliquez votre raisonnement.

14. MON NOMBRE - *Catégories 6, 7 et 8*

J'ai écrit un nombre. Lorsque je le divise par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10, le reste est toujours le même : 1 !

Pourtant mon nombre ne dépasse pas 4000.

Quel est mon nombre ?

Justifiez votre réponse.

15. DEVINE À QUOI JE PENSE - *Catégories 6, 7 et 8*

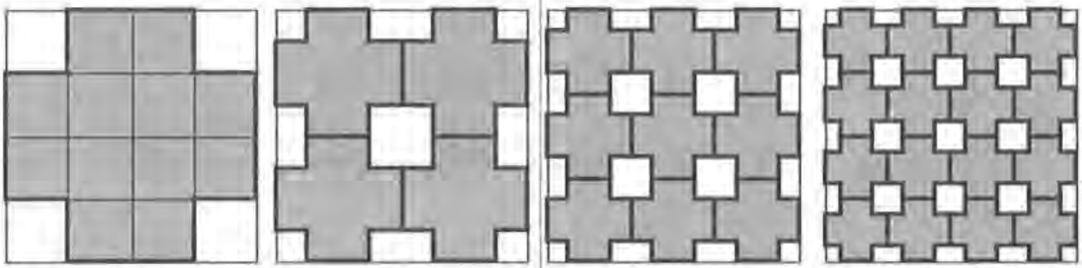
Je pense à un nombre. Si je le soustrais de 4 ou si je le multiplie par 4, je trouve le même résultat.

Pouvez-vous trouver le nombre auquel j'ai pensé ?

Justifiez votre solution

16 INSIGNES - *Catégories 7 et 8*

M. Pin's a reçu une commande d'insignes en forme de croix, de quatre tailles différents «géant», «grand», «normal» et «minus» à découper dans des plaques métalliques carrées de 48 cm de côté, selon ces quatre modèles :



géant *grand* *normal* *minus*

a) **Pour quel(s) modèle(s) la partie de la plaque non utilisée est-elle la plus grande ?**

Justifiez votre réponse.

Pour éviter les gaspillages, M. Pin's aimerait découper plus d'insignes dans chaque plaque, soit en les disposant différemment soit en utilisant les parties blanches pour d'autres insignes d'une des tailles plus petite.

b) **Pour lesquels des modèles de plaques ci-dessus est-ce possible, sans créer de nouvelles tailles ?**

Dessinez précisément les modèles de plaques modifiées.

17. LA VAISSELLE - *Catégories 7 et 8*

Chaque jour, Jean et sa soeur Doris tirent au sort pour savoir qui lavera la vaisselle. Ils procèdent de la façon suivante :

Ils mettent dans un sac des billes de tailles identiques mais de deux couleurs différentes, des blanches et des noires. Puis ils en tirent deux au hasard.

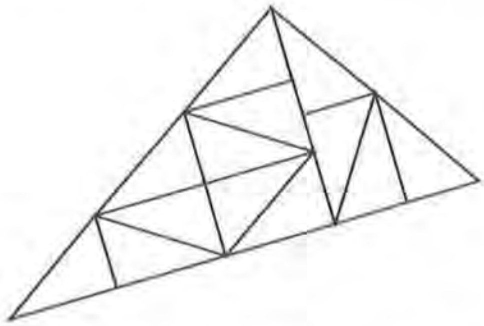
Si ces deux billes sont de même couleur, c'est Jean qui fait la vaisselle, si elles sont de couleurs différentes, c'est Doris.

Aujourd'hui, Doris a mis 1 boule blanche dans le sac. Combien de boules noires faut-il ajouter pour que le tirage soit équitable (pour qu'il y ait autant de chances de tirer 2 boules de même couleur que de tirer 2 boules de couleurs différentes) **?**

Expliquez votre raisonnement.

18 PAVAGE - *Catégorie 8*

Caroline a découpé un carré de 52 cm^2 en 17 pièces : 16 triangles rectangles égaux de 3 cm^2 chacun et un petit carré. Avec 13 des triangles obtenus, Caroline a formé cette figure (dessinée à l'échelle).



Reconstituez le carré d'origine de Caroline, avec les 16 triangles et le petit carré et calculez les mesures des côtés des triangles.

Donnez le détail de vos calculs.

SEPTIEME RALLYE MATHEMATIQUE TRANSALPIN

Finale romande du 5 mai 1999, le classement

Catégories	Classes de :	points	rang
3	Mme Nadine Paquier, Gland (VD)	18	1
	Mme Irène Cattin, Lamboing (BE)	13	2
4	M. Gérard Uldry, Bulle (FR)	19	1
	Mme Françoise Roth, la Chaux-de-Fonds (NE)	17	2
	M. Jean-Marc Delacombaz, Farvagny (FR)	16	3
	M. Michel Schenk, Le Valanvron (NE)	13	4
	Mme Corinne Marchand, Ecole française de Berne (BE)	11	5
	M. Alexandre Caillet, Fully (VS)	6	6
5	Mme Elisabeth Dubuis, Bramois (VS)	23	1
	M. Dominique Favre, Genthod (GE)	16	2
	M. Stéphane Moulin, Veyras (VS)	15	3
	M. Albert Bornet, Bramois (VS)	14	4
	M. Denis Mesot, Cernier (NE)	12	5
6	M. Michel Pascal, La Tour-de-Peilz (VD)	19	1
	Mme Nadia Bechtel, Nyon (VD)	12	2
	M. Francis Marro, Vuisternens-en-Ogoz (FR)	11	3
	Mme Cathy Müller, Cossonay (VD)	9	4
	M. Pierre Deschenaux, Vuadens (FR)	9	4
7	Mme Sandrine Resin, Coppet (VD)	27	1
	Mme Sandrine Resin, Coppet (VD)	15	2
	Mme Brigitte Roh, Conthey (VS) invitée de «Espace mathématique»[1]	13	3
8	M. Christian Masserey, Conthey (VS) invitée de «Espace mathématique»	21	1
	M. Philippe Dony, Prilly (VD)	17	2

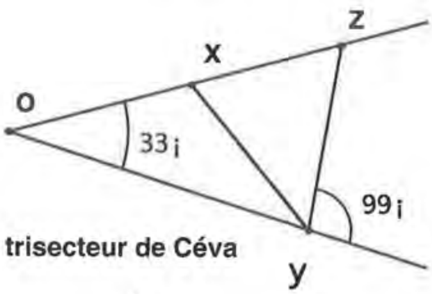
[1] «Espace mathématique» est une compétition valaisanne, réservée aux classes des degrés 7 et 8.»

CABRidées :

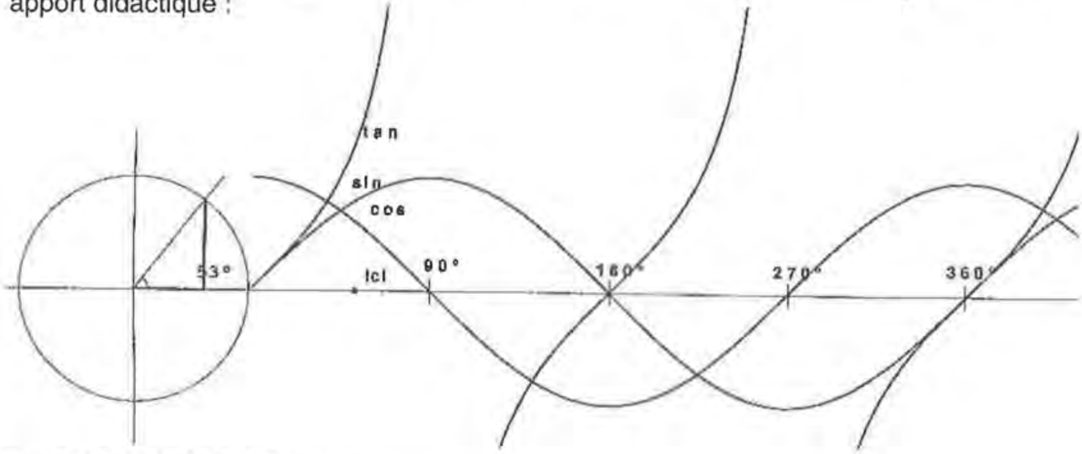
«Pêle-mêle»

Michel Chastellain, SPES (VD)

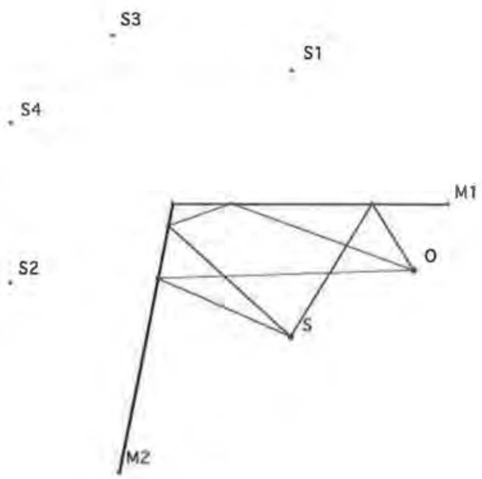
Aujourd'hui, plutôt que des mots, voici quelques figures suffisamment explicites qui devraient susciter, chez le lecteur, l'envie de recourir à l'outil «Cabri-géomètre» comme apport didactique :



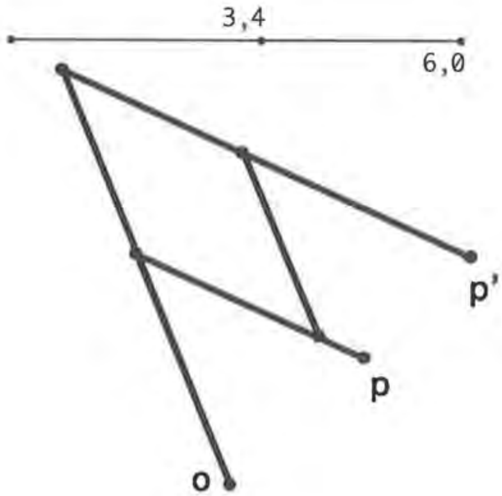
Le trisecteur de Céva



Le cercle trigonométrique



Réflexion avec deux miroirs



Le pantographe

Le carré magique pour faire 10 ou comment faire évoluer une activité mathématique tout au long du cycle 5/8 ?

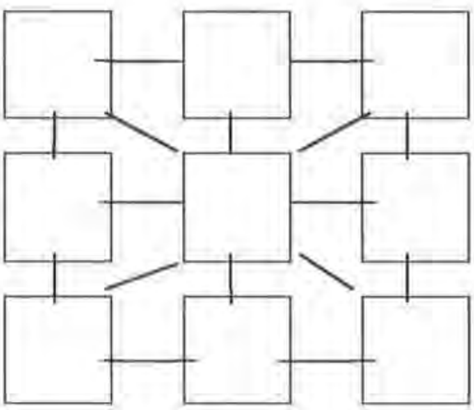
A. Sacré, Service de pédagogie expérimentale et P. Stegen, Service de didactique générale, Université de Liège

L'activité présentée ici a été construite lors d'un module de formation continuée " Agir avec le nombre au cycle 5/8 " . Elle permet d'aborder les structures additives et plus précisément la décomposition de nombres en 3 termes. Dans un premier temps, nous détaillerons l'activité dans sa forme originale (c.à.d ciblée pour des élèves de première primaire) puis nous verrons comment tirer parti des commentaires *a posteriori* d'élèves pour proposer des variantes qui permettront de la faire évoluer. Enfin, nous analyserons à quelles conditions ce jeu peut être mis en place en 3e maternelle.

But de l'activité

En alignant trois nombres (horizontalement, verticalement ou en diagonale), obtenir un nombre donné (par exemple 10).

Le matériel nécessaire



- Un plan de jeu constitué de 9 cases, réparties en trois rangées de trois cases reliées entre elles deux à deux.
- Des cartons à placer sur le plan de jeu. Pour déterminer le nombre de cartons nécessaires au jeu, il suffit de mettre sur papier toutes les décompositions en trois termes du nombre sur lequel on jouera. Dans le cas du nombre 10, cela donne :

  0-1-9, 0-2-8, 0-3-7, 0-4-6, 0-5-5, 1-1-8, 1-2-7, 1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4.
- On a donc besoin de 5 cartes de valeur 0, de 6 cartes de valeur 1, de 6 cartes de valeur 2, de 5 cartes de valeur 3, de 5 cartes de valeur 4, de 4 cartes de valeur 5, de 3 cartes de valeur 6, de 2 cartes de valeur 7, de 2 cartes de valeur 8 et de 1 carte de valeur 9.

Déroulement

Chacun des 4 joueurs reçoit trois cartes. Le premier dépose une de ses cartes sur une des cases du plan de jeu et prend une carte dans la pioche, de manière à en avoir toujours trois en main. Les joueurs suivants font de même. Lorsqu'un des joueurs a la possibilité, en déposant sa carte, de terminer l'alignement de trois cartes dont la somme vaut 10 (à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale), il empoche ces trois cartes et a gagné un pli. Il met celui-ci de côté, ces cartes ne peuvent être remises en jeu par la suite. Le jeu se poursuit jusqu'à épuisement de la pioche et jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de remporter de pli. Le gagnant est celui qui a réussi à former le plus de plis. Si, à un moment, les neuf cases du plan de jeu sont recouvertes et qu'il est impossible de vider une des lignes de ses cartes, on enlève les 9 cartes et on les replace dans la pioche.

Un temps de synthèse et de structuration des apprentissages

Comme nous le disons souvent lorsque nous présentons cette activité, amener les élèves à construire les décompositions additives au travers de ces seules manipulations n'est pas suffisant. Il importe de prévoir des moments de synthèse et de réflexion au cours desquels l'élève s'interroge, d'une part, sur les contenus mathématiques en jeu et, d'autre part, sur les démarches et stratégies qu'il a utilisées.

Cela peut se faire, sous forme de débat, au départ des deux questions suivantes :

- **Qu'avez-vous appris lors de cette activité ?**

  Cette question est très importante car elle va permettre aux élèves de donner un sens à l'activité qu'ils viennent de réaliser et surtout de la relier à leurs compétences numériques. Il est vraisemblable que dans le feu de l'action, ils manipulent les nombres sans prendre réellement conscience des compétences numériques qu'ils font intervenir. Avec cette question, l'enfant va pouvoir en quelque sorte identifier le savoir en jeu mais aussi amorcer le passage de cette activité vers des apprentissages formalisés. Pour favoriser ce passage, l'enseignant peut, par exemple, demander aux élèves d'écrire les décompositions utilisées lors de leur activité ... et donc entamer avec eux l'apprentissage de l'écriture des décompositions additives.

- **Comment s'est déroulée cette activité ?**

  En demandant aux élèves d'expliciter leurs stratégies de jeu, l'enseignant les contraint à prendre du recul par rapport à leurs démarches. Ils ont ainsi l'opportunité de confronter leur démarche avec celle d'autrui et de s'apercevoir qu'elle est plus ou moins efficace, ou plus ou moins pertinente que celle de leurs condisciples. L'enseignant peut aussi profiter de cette phase pour faire prendre conscience à certains élèves de l'intérêt d'abandonner une stratégie peu pertinente ou trop lourde à mettre en oeuvre.

D'une phase de synthèse vers l'adoption d'une variante plus complexe

La phase de réflexion sur les stratégies privilégiées peu permettre à l'activité de rebondir et d'évoluer de manière plus complexe. A titre d'exemple, la variante proposée ici a été élaborée sur base de la suggestion d'un élève.

Lors de la phase d'expérimentation de cette activité, il est apparu qu'un certain nombre d'élèves adoptent une position que l'on peut qualifier de " négative " par rapport au jeu. Leur seul souci est de bloquer leurs adversaires en plaçant sur le plateau de jeu un carton-nombre qui, ajouté au carton déjà placé, donne une somme qui dépasse le nombre à atteindre pour emporter le pli. Par exemple, imaginons que le carton " 4 " soit déjà placé sur un axe. Lorsque vient le tour d'un élève privilégiant une stratégie négative, ce dernier place sur le même axe un carton " 8 ". De cette manière, il empêche les autres d'arriver à 10 et d'emporter le pli.

Lors de la phase de réflexion *a posteriori*, un élève, critiquant cette attitude a proposé de combiner addition et soustraction. Ainsi, si une carte de valeur 4 et une carte de valeur 8 sont déjà alignées, le joueur suivant peut déposer une carte de valeur 2, pour compléter l'alignement. Il doit, pour emporter le pli, exprimer l'opération effectuée pour obtenir 10, «(4 + 8) - 2 = 10».

Cette variante trouve sa place en fin de première primaire, mais de façon encore plus certaine en deuxième. Elle permet également d'introduire l'apprentissage de l'écriture des parenthèses.

Une variante en amont : le carré magique en 3e maternelle

On peut déjà proposer ce jeu à des enfants de troisième maternelle, pour peu que l'on représente les nombres sur les cartes au moyen de schèmes. Ceux-ci peuvent être figurés soit de manière conventionnelle soit de manière éclatée (possibilité de différenciation selon le degré de maîtrise des compétences numériques des élèves). Avec des enfants de cet âge, on jouera d'abord sur le nombre 6 ou sur le nombre 7, avant d'aborder les décompositions du nombre 10 avec ceux qui en sont capables (autre possibilité de différenciation).

En conclusion

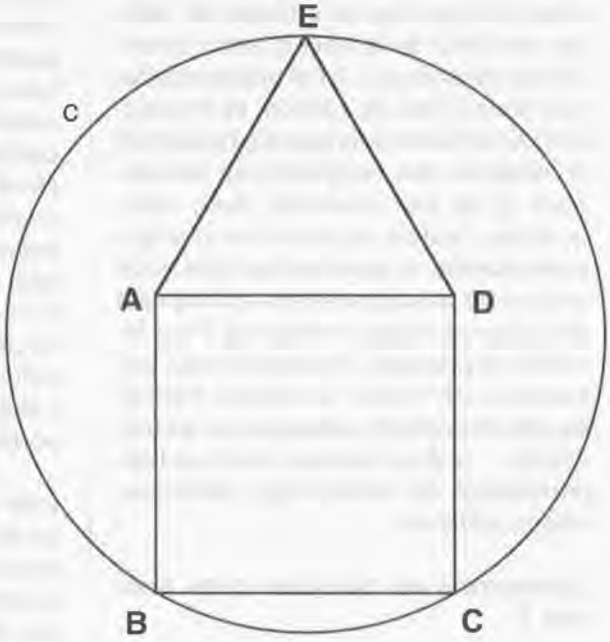
L'activité décrite permet de développer une forme de continuité dans l'apprentissage des décompositions additives d'un nombre. Les élèves travaillent sur un même support de la 3e maternelle à la 2e primaire. Au vu du degré de maîtrise manifesté par ses élèves et en fonction des phases de synthèse, l'enseignant aménage les contraintes de la situation et complexifie graduellement l'activité.

Voici donc une manière d'opérationnaliser l'existence d'un cycle d'apprentissage sans nécessairement bousculer de fond en comble l'organisation traditionnelle des classes.

Quel rayon ?

- **ABCD** est un carré.
- **ADE** est un triangle équilatéral.
- Le cercle **c** passe par les points **B**, **C** et **E**.

Quelle est la mesure de son rayon ?



La tête et les jambes

Denis Odiet, Porrentruy

Le football présente entre autres l'avantage d'offrir aux entraîneurs un large éventail de répartitions possibles de leurs joueurs sur le terrain. Si certaines favorisent un jeu offensif et aéré, d'autres, privilégiant la défense, provoquent parfois des matchs peu spectaculaires et ennuyeux. On donne le plus souvent le nom de dispositif tactique à ces répartitions. Certains modèles sont restés célèbres : qui dit Italie par exemple pense inévitablement au catenaccio; je me rappelle le 4-2-4 du merveilleux Real Madrid de Gento et Di Stefano, mais aussi l'immuable 4-3-3 prôné par presque tous les entraîneurs côtoyés dans les ligues inférieures, dans lequel le poste d'ailier droit m'était généralement dévolu.

Mais connaissez-vous la tactique «Observe, fonce, et tire au but» ? Grâce à elle, plus besoin de longues, répétitives et très souvent rébarbatives théories avant d'entrer sur le terrain.

La voici, assortie d'un problème présenté à des élèves de degré 9 et de niveau pré-gymnasial. Leur pratique de Cabri-Géomètre se limite à quatre périodes; les notions d'angle inscrit, d'arc capable, de similitude et des théorèmes* en découlant ont été abordées.

Jean-Marc **BOKOU**, l'avant-centre du Rapid de Ouagadougou, est un redoutable attaquant. Sa tactique est simple mais efficace: lorsqu'il récupère le ballon, il repère une direction dégagée sur le terrain, court droit devant lui et ne manque jamais de décocher son tir au moment où, sur la trajectoire choisie, l'angle du but est le plus ouvert.

Ce dimanche, le ballon lui parvient en un point A qui se trouve sur l'axe central du terrain. Il fonce vers un piquet B situé sur la ligne des buts, à 12 m du poteau D de la cage défendue par son ami Jean KESBOKOU, le piètre gardien de l'Eclair de Bobodioulasso.

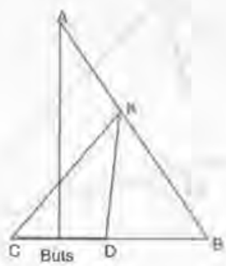
On donne: mes [CD] = 8 m mes [DB] = 12 m mes [AB] = 32 m

Il s'agit, en reprenant la figure ci-contre, de construire, en l'expliquant, le point K d'où Jean-Marc adresse son tir.

$\widehat{CKD}$ est l'angle de tir au but au point K sur la trajectoire [AB]. (Sur cette figure, le point K dessiné n'est pas la solution)

Organisation du travail :

- Travail par groupes de deux élèves
- Recherche de K sur Cabri-Géomètre
- Que peut m'apporter Cabri-Géomètre quant à l'emplacement de K et sa construction ?



– Construction géométrique de K

Tous les groupes ont aisément déteminé la position de K et la mesure de l'angle de tir au but. L'outil «Mesurer...» se révèle ici particulièrement performant.

La plupart ont également remarqué que le point K correspondait au point de tangence à la droite [AB] du cercle passant par C et D. J'insiste sur le mot «remarqué», car aucune démonstration n'est venue étoffer cette constatation. On retrouve bien ici l'ambivalence de l'utilisation de Cabri-Géomètre : d'une part, sa force et son efficacité qui permettent aux élèves, constatations à l'appui, d'avancer dans la résolution d'un problème et, d'autre part, sa relative faiblesse, car il est bien connu qu'une simple constatation sur un schéma n'est pas une preuve.

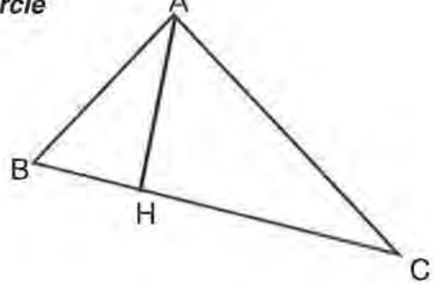
La construction d'un cercle passant par deux points et tangent à une droite est nettement plus complexe. Heureusement, la simplicité de l'énoncé du problème n'a pas rebuté les élèves. Un seul pourtant est arrivé à ses fins. Voici sa solution.

Théorème d'Euclide

Le triangle ABC est rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A.

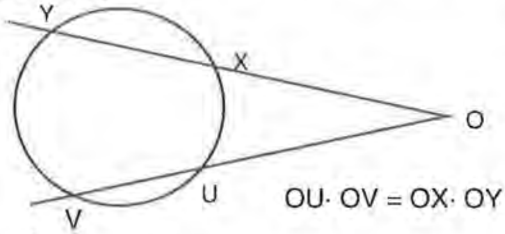
$AB^2 = BH \cdot BC$

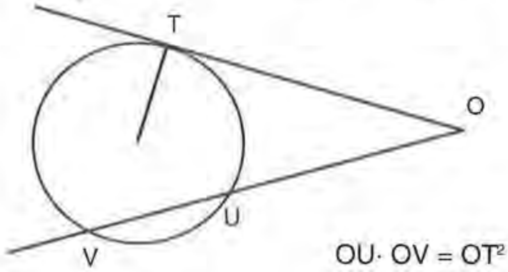
Puissance d'un point par rapport à un cercle

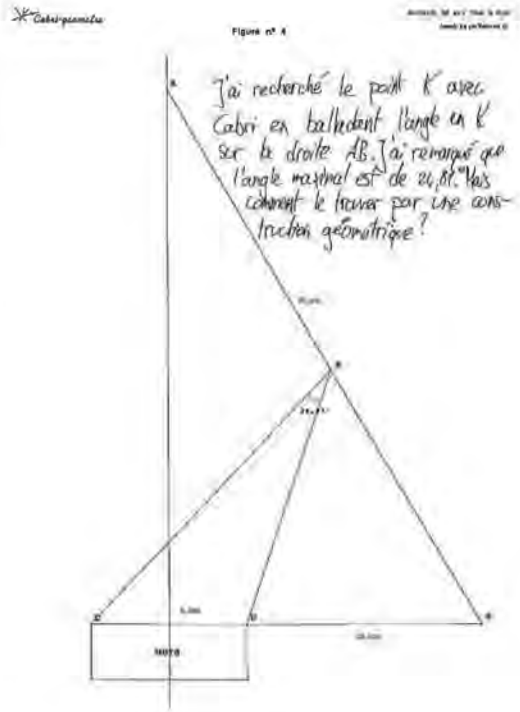


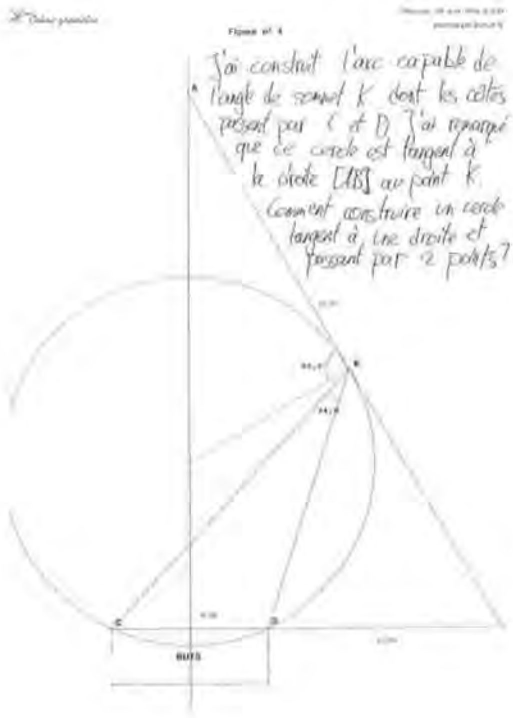
Cas particulier

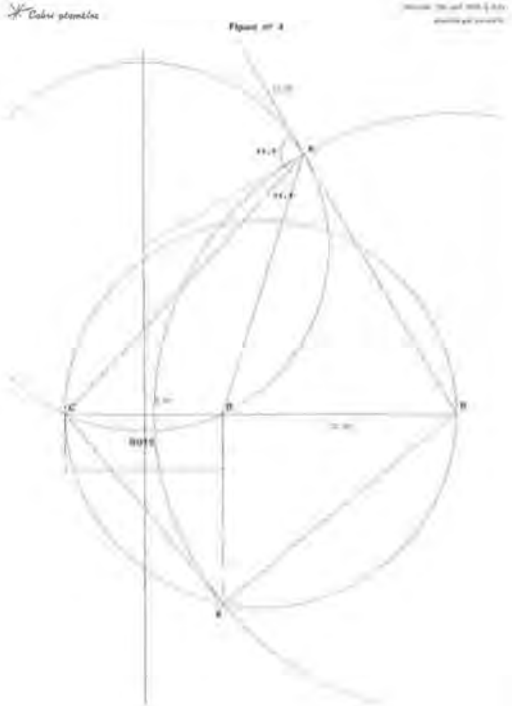
La droite portant [OT] est tangente au cercle, T est le point de tangence de la droite au cercle.







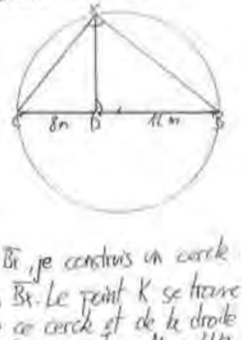




<u>Explication de la résolution</u>

Pour construire ce cercle, je me sers de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Elle dit dans ce cas de figure que $\overline{BD} \cdot \overline{BC} = \overline{BK}^2$. L'outil "mesurer" me permetterait de calculer $\overline{BK}$, mais il s'agit de le construire géométriquement. Pour ceci, je vais me servir du théorème d'Euclide.

<u>Euclide</u>



$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{Bx}^2$

mais

$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BK}^2$

donc

$\overline{Bx}^2 = \overline{BK}^2$

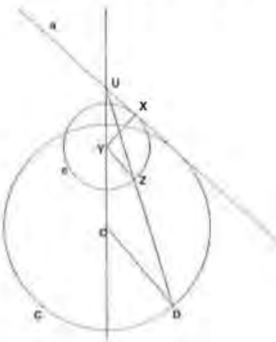
donc

$\overline{Bx} = \overline{BK}$

Pour reporter $\overline{Bx}$, je construis un cercle de centre B et de rayon $\overline{Bx}$. Le point K se trouve donc à l'intersection de ce cercle et de la droite [AB].

Quel fin mathématicien, ce Jean-Marc ! Même en football, la tête fait parfois plus que les jambes.

Le futé Ahmed ben Brehet (cf Math-Ecole no 185 p.30) propose la jolie solution suivante, basée sur les propriétés de l'homothétie : Il s'agit de construire le cercle passant par C et D et tangent à la droite a.



1. médiatrice de [CD], intersection U avec la droite a;
2. point X quelconque sur a;
3. perpendiculaire à a passant par X, intersection Y avec la médiatrice;
4. cercle c de centre Y tangent à a en X;
5. segment [UD], intersection Z avec c;
6. segment [YZ];
7. homothétie de centre U : [YZ] a pour image [OD];

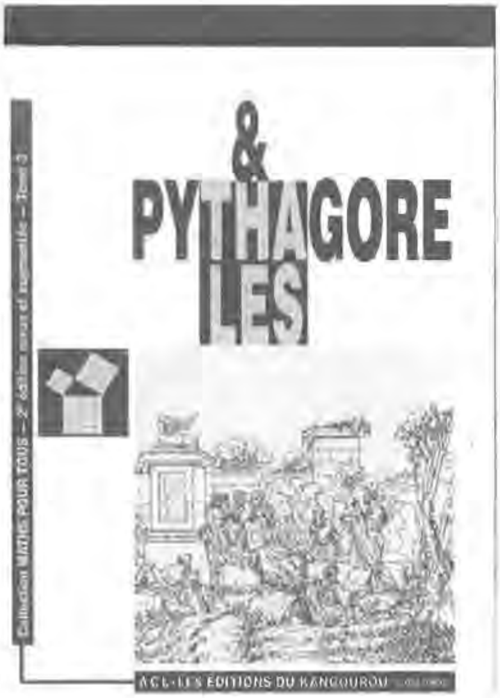
O est le centre du cercle recherché.

HISTOIRES DE MATHS

A. Deledicq, D. Izoard, ACL - Les éditions du Kangourou[1], 64 p. Quadrichr., 21x27 cm

Ce que disait Euclide, il y a près de 2500 ans, peut être répété aujourd'hui. C'est toujours vrai et intéressant ! Et les mathématiques sont la science pour laquelle il en est ainsi. Parce que le matériel sur lequel travaille le mathématicien ne change pas : il se trouve dans sa tête et il est le même dans toutes les têtes. Bien sûr, les sujets traités, les centres d'intérêts, dépendent de la société dans laquelle vit le mathématicien, et d'ailleurs cette mise en perspective est passionnante. Mais surtout, les progrès sont toujours beaux et étonnants, parce que les outils de pensée qui sont imaginés aux cours des siècles s'articulent pour former un fabuleux réseau en éternelle construction.

Ce petit livre présente quelques tranches de vie d'une quinzaine de mathématiciens. Ce ne sont pas forcément les plus importants (il manque Thalès, Euclide, Fermat, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, pour ne citer que quelques-uns des grands anciens). En fait, ce sont ceux qui ont illustrés les pages d'histoire de la revue *Math & Malices* de 1991 à 1997 (n°1 à 26). Ces « histoires » sont complétées par un rapide survol de l'aventure mathématique (pages 61 à 64). Nous espérons que le lecteur (jeune ou plus âgé) prendra à leur lecture suffisamment de plaisir pour vouloir en savoir plus, et se penchera alors sur des livres plus complets avec



lesquels il pourra approfondir cette merveilleuse histoire des idées et des concepts mathématiques. Dix-sept bandes dessinées accompagnées de commentaires racontent quelques épisodes de la vie de seize grands mathématiciens : ARCHIMEDE, Omar KHAYYAM, Giordano BRUNO, François VIETE, Evangelista TORICELLI, Galileo GALILEE, René DESCARTES, Maria AGNESI, Jean le rond D'ALEMBERT, Sophie GERMAIN, Karl Friedrich GAUSS, Louis POINSOT, Evariste GALOIS, Srivanasa RAMANUJAN, Elie CARTAN, Nicolas BOURBAKI. Avec un rapide survol de l'histoire des mathématiques pour mieux comprendre l'évolution des idées et des concepts.

Destinataires : toute personne intéressée par l'histoire des maths, en particulier maîtres et élèves des premiers degrés de l'école secondaire

Mots-clés : mathématiques et histoire

[1] Commandes, v. p. 3 de couverture

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole* - CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	.....	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	.....	(ex. à Fr. 29.-)
Histoire des Maths, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
La magie du calcul, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	.....	(ex. à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques pour tous, ACL	.....	(ex. à Fr. 14.-)
Pliages mathématiques, ACL	.....	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	.....	(ex. à Fr. 25.-)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	.....	(ex. à Fr. 38.-)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	.....	(ex. à Fr. 38.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	.....	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres	.....	(ex. à Fr. 6.-)
Actes de la CIEAEM 50	.....	(ex. à Fr. 35.-)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT	.....	(ex. à Fr. 18.-)
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye , APMEP	.....	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	.....	(ex. à Fr. 25.-)
Panoramath 96, APMEP	.....	(ex. à Fr. 12.-)*
Panoramath 2, CIJM, APMEP, ACL	.....	(ex. à Fr. 18.-)*
Panoramath 96, Panoramath 2,	.....	(ens. à Fr. 25.-)
Problemi, che passione, Ed. Capitello	.....	(ex. à Fr. 9.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	.....	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	.....	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles, *POLE*	.....	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	....	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous, *POLE*	...	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	.....	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	...	(ex. à Fr. 5.-)*
La Biroulette russe (n° 9)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Roi des Nuls (n°13)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Sabre d'Aladin (n° 15)	.....	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock. Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7