MATH ECOLE

Quel statut pour les vecteurs

39e année
190

8e Rallye Mathématique Transalpin

Le rude passage de témoin entre deux méthodologies des mathématiques

février 2000

Math-Ecole,
pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.
Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces - bonnes - lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole* on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, etc.
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros):
Suisse: CHF 25.- compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger: CHF 30.- par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 6.-
anciens numéros : CHF 3.- / pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 18.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 17.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E–mail : **francois.jaquet@irdp.unine.ch**
ou par INTERNET : **http://www.unine.ch/irdp/math-eco/**

(Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.)

MATH-ECOLE

38e année 5 numéros par an

190

février 00

Adresse
Rédaction de "Math-Ecole"
Case postale 54
CH - 2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche
et de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél. (032) 889 8603
(de 14h à 17h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 8609
Fax (032) 889 6971

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH - 1950 Sion
Tél. (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Graphisme et mise en page
Mathieu Chastellain

Sommaire

Editorial

Moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande : défis et nécessités[1]

F. Jaquet, IRDP

Nos moyens d'enseignement sont en général gratuits pour les élèves, officiels et uniques. Cette situation paraît absolument naturelle en Suisse romande, en particulier pour les mathématiques. Au-delà de nos frontières, elle suscite de l'étonnement, de l'incrédulité, voire de la réprobation : comment peut-on imaginer que tous les maîtres utilisent le même manuel ? comment peut-on accepter un monopole de l'Etat sur les moyens d'enseignement ? n'y a-t-il pas là une atteinte aux libertés fondamentales de l'enseignant, dans le choix de ses méthodes ?

Ces questions, nous n'avons pas l'habitude de nous les poser, mais il vaut la peine d'y réfléchir car elles sont importantes et permettent de se rendre compte des défis relevés par notre système d'élaboration de moyens d'enseignement de mathématiques communs à toute la Suisse romande.

Les «maths modernes» : la nécessité d'un moyen d'enseignement pour introduire de nouveaux contenus

En 1970, la Suisse romande inaugure sa coordination intercantonale en matière d'enseignement par les mathématiques. Ce sont les nécessités et les conditions particulières du moment qui ont conduit au choix de cette discipline, car on peut imaginer qu'on aurait pu commencer par une autre dans des circonstances différentes.

Cette priorité, parmi les domaines coordonnés à l'échelle romande, a donné aux mathématiques un statut particulier, renforcé par le fait que l'innovation a concerné le curriculum entier de la discipline, des plans d'études aux moyens d'enseignement, et que l'innovation s'inscrivait dans le réforme dite des «maths modernes» au très large retentissement scientifique et social.

Les plans d'études de cette époque, CIRCE I et II, n'évoquent que les grandes lignes des contenus de ces mathématiques nouvelles. Un complément est absolument nécessaire pour les maîtres. Ce sont les moyens d'enseignement qui déterminent par le détail les nouveaux savoirs à enseigner : types de diagrammes, opérations ensemblistes, bases de numération, éléments de topologie, ... Ce sont eux aussi qui décrivent les scénarios des activités par lesquelles les élèves devront s'approprier ces connaissances.

Mais la réforme des «maths modernes» était construite sur une utopie : celle de croire que les structures de base, élaborées par les mathématiciens du siècle dernier pour relier les objets mathématiques déjà existants, pourraient être enseignées directement à de jeunes enfants, avant qu'ils aient construit eux-mêmes ces objets. Dans cette optique, les auteurs des moyens d'enseignement ont dû imaginer des activités, qualifiées aujourd'hui d'artificielles, pour illustrer des structures parfaitement abstraites pour les élèves. Par exemple : pour enseigner les relations ensemblistes, il a fallu créer des situations de classement et les représenter par des diagrammes qui sont devenus des objet d'études au lieu de res-

[1] **[ndlr]** Nous remercions le Secrétariat de la Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin de nous autoriser à reprendre cet article, publié dans le bulletin no 5 de la CIIP, (novembre 1999) Politiques de l'éducation et chemins de traverse : 125 ans de collaboration intercantonale en Suisse romande, CDIP 1974 - 1999 CIIP.

ter de simples outils ; pour enseigner les principes fondamentaux de la numération, on a imaginé de faire compter les élèves en base deux, trois, ..., avant de s'intéresser à leur expérience quotidienne du système décimal, ce qui a conduit aux plus grandes confusions.

Mais, si l'approche des contenus a dû être revue, on ne peut pas dire que le défi soutenu par les moyens d'enseignement des années 70 n'a pas été tenu. Il y a eu des éléments positifs dans la gestion de la classe, l'écoute de l'élève, la prise en compte de l'aspect cyclique du programme. L'entreprise commune a aussi permis des progrès dans la réflexion pédagogique coordonnée au plan romand, la recherche en didactique liée à l'innovation.

Le socio-constructivisme : la nécessité d'un moyen d'enseignement pour introduire de nouvelles conceptions de l'enseignement

Vingt-cinq ans plus tard, la deuxième réforme romande a remis le «sens» des activités au premier plan, sous l'effet des évaluations de l'innovation précédente et des premiers résultats de le recherche en didactique des mathématiques, contemporaine du mouvement des maths modernes.

On part de situations-problèmes au travers desquelles l'enfant se construira peu à peu les outils nécessaires. Un nouveau moyen d'enseignement est mis en oeuvre (1991). Devant l'importance des changements proposés, la nécessité de revoir également les plans d'études s'impose rapidement, pour des raisons évidentes de cohérence. Mais ces derniers, en quelques lignes et quelques tableaux, ne présentent que des finalités, des intentions, des contenus très généraux et quelques compétences attendues. Le corps de l'innovation est dans les moyens d'enseignement, dont les «fondements» illustrent bien l'ampleur :

« ...

Les finalités et les buts généraux de l'enseignement des mathématiques concernent l'acquisition de démarches de pensée et d'attitudes.

L'action finalisée est source et critère du savoir. Ce savoir est le fruit d'une adaptation provoquée par les déséquilibres, les contradictions, les interactions vécus par les élèves engagés dans une situation didactique.

Conséquence : Les moyens d'enseignement mettront l'enfant face à de véritables «situations problèmes» où il rencontrera des obstacles à sa mesure. Il pourra s'approprier l'activité proposée, en faire «son problème», savoir ce qu'il cherche et pourquoi.

... »

Tout manuel reflète les conceptions de ses auteurs. Ceux qui croient aux vertus de l'entraînement répétitif y mettent beaucoup d'exercices. Ceux qui pensent qu'on doit prendre l'élève par la main pour l'aider à franchir les obstacles découpent le cours en petites étapes selon le modèle de l'enseignement programmé. Ceux qui pensent que c'est par son action sur le milieu et par ses interactions avec d'autres, que l'homme apprend et construit ses connaissances proposeront dans leurs pages de nombreuses situations. C'est cette dernière option, celle que l'histoire retiendra peut-être sous le nom de «socio-constructivisme» qui a été choisie par la nouvelle série des ouvrages romands «Mathématiques 1P - 4P» et qui sera maintenue pour les degrés 5 à 9.

Le défi est plus grand encore qu'il y a 25 ans. Il vise les conceptions de l'apprentissage des maîtres et des élèves et, par là, engage l'individu au plan de ses croyances et convictions intimes. Seuls, les moyens d'enseignement auront beaucoup de peine à le relever; il faudra compter sur l'appui de la formation continue des maîtres et sur une réflexion permanente conduite au niveau romand, stimulée par la recherche en didactique et par une politique d'échanges.

Une oeuvre collective, la nécessité d'une concertation dynamique

Au-delà des contenus et des conceptions de l'apprentissage, un autre défi relevé par les moyens d'enseignement romand est celui de leur «universalité». Un manuel officiel doit recevoir l'accord de tous ceux qui s'engagent à le distribuer et à l'utiliser. Ce qui, dans les autres pays, est réglé par les lois de l'offre et de la demande, fait, chez nous, l'objet de nombreuses démarches institutionnelles. De la définition des lignes directrices à l'impression des ouvrages de la collection, le parcours est long et délicat, rythmé par les débats cantonaux ou romands, par des discussions animées aux plans pédagogique et didactique, par des négociations, des décisions communes.

Derrière ce défi, se profile la délicate question des compétences. Les chercheurs en didactique ont analysé avec pertinence de nombreux phénomènes liés à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques. Leurs résultats s'accumulent et constituent un champ important de connaissances, mais celles-ci ne sont que rarement transférables en vue de la gestion de la classe. On ne se bouscule pas au portillon de ce que d'aucuns appellent «l'ingénierie didactique», cette interface entre la recherche et la pratique, où les résultats de l'une devraient rencontrer l'expérience de l'autre.

La solution ne se trouverait-elle pas dans une concertation dynamique et permanente, incluant la formation d'auteurs de moyens d'enseignement de mathématiques, la valorisation de la recherche en didactique et l'étude des problèmes de gestion de la classe ?

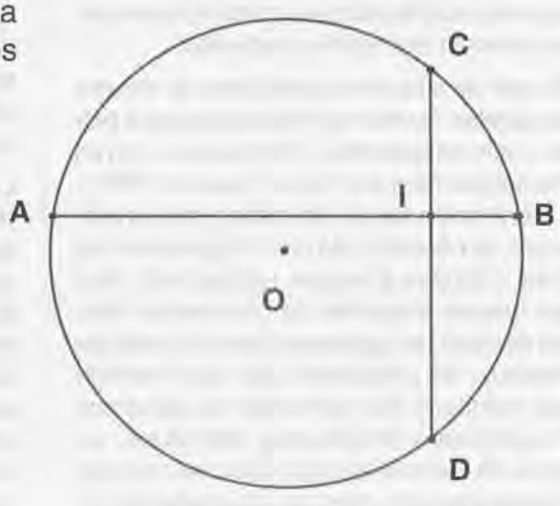
Les deux cordes

Dans ce cercle de centre **O**, on a tracé deux cordes perpendiculaires [**AB**] et [**CD**] qui se coupent en **I**.

On sait que :

- [**AI**] = 6,
- [**CI**] = 2,
- [**DI**] = 3.

Quel est le rayon du cercle ?



Quel statut pour les vecteurs ?

André Calame, Saint-Aubin-Sauges

1) Les questions du secondaire I

Quelle place convient-il de réserver ou non aux vecteurs dans les dernières années de la scolarité obligatoire ? Qu'il s'agisse d'aménager les programmes ou de les appliquer en classe, des maîtres s'interrogent : Est-il si indispensable d'introduire les opérations sur les vecteurs ? Ne laisse-t-on pas ensuite ces notions mariner dans l'esprit des élèves jusqu'à ce que le secondaire II en tire profit ? Toujours à l'affût d'un éventuel gain de temps, on se demande si l'étude des translations ne suffirait pas dans le cadre des transformations du plan.

Il est vrai que lorsqu'on aborde les vecteurs, c'est souvent comme une sorte d'appendice aux translations et peut-être sans grande motivation. A cela rien d'étonnant : translations et vecteurs sont deux aspects d'une même réalité. Dit en langage mathématique, la composition des translations est isomorphe à l'addition des vecteurs. Ce sont deux exemples d'une même structure de groupe commutatif.

On ne peut tenter de répondre raisonnablement à ces questions sans évoquer le développement historique de la géométrie élémentaire et ses conséquences pour l'enseignement.

2) Le poids de la géométrie euclidienne

On ne dit rien de très nouveau en rappelant que la géométrie tire son origine des «Eléments» d'Euclide qui datent d'environ trois cents ans avant Jésus-Christ. En revanche, il peut paraître surprenant que cette influence ait perduré jusqu'au XX ème siècle, sinon dans sa forme, tout au moins dans son esprit. En voici un exemple : A la fin du XIXème siècle, Jacques HADAMARD (1865 - 1963) publie ses «Leçons de géométrie élémentaire». Cet ouvrage de plus de mille pages réparties en deux volumes sera la référence de l'enseignement français pendant un demi-siècle au moins puisque la treizième édition paraît en 1947 !

Les intentions d'Hadamard sont claires; il les exprime dans l'»Avertissement à la deuxième édition» :

«Depuis l'apparition de cet ouvrage, l'enseignement des mathématiques et, particulièrement, de la géométrie, a subi non seulement dans ses détails, mais dans tout son esprit, des modifications profondes depuis longtemps attendues et universellement réclamées. On tend à le faire reposer, pour les commençants, sur la pratique et l'intuition, et non plus sur la méthode euclidienne dont ils sont incapables de comprendre l'utilité.

Par contre, il est bien entendu qu'on revient à cette méthode lorsqu'il s'agit de revoir ces premiers débuts et de les compléter. *C'est à ce stade de l'enseignement que correspond notre livre et nous n'avions pas, par conséquent, à en changer le caractère.*» (c'est nous qui soulignons)

On ne trouve aucune trace dans ce traité de la notion de vecteur, aucun recours à la géométrie analytique et aux coordonnées. Il s'agit donc bien de «géométrie pure». Il vaut la peine de citer l'introduction de la translation, placée dans le chapitre des parallélogrammes et avant l'étude des droites concourantes dans le triangle (op.cit. p. 50-51) :

«Si, par tous les points d'une figure, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, les extrémités de ces droites forment une figure égale à la première.(...) L'opération par laquelle on passe de la première figure à la seconde a reçu le nom de *translation*. On voit qu'une translation est déterminée quand on se donne en grandeur, direction et sens le segment tel que AA', qui va d'un point à son homologue.»

La position d'Hadamard pourrait servir la cause de ceux qui prétendent que les vecteurs n'apportent rien de plus que les translations. Notons qu'Hadamard en reste là et ne s'intéresse pas pour autant à la composition des translations.

3) D'où viennent les vecteurs ?

Les vecteurs ne jouissent pas d'une lointaine origine comme la géométrie euclidienne. Bien au contraire. Il semble que c'est à WESSEL (1745-1818) que l'on doit un mémoire de 1799 où l'on trouve pour la première fois une addition de segments, analogue à ce que nous appelons aujourd'hui l'addition des vecteurs. Cette addition, conçue par analogie avec la composition des forces en physique, était destinée à légitimer l'addition des nombres complexes.

Mais ce n'est que plus tard qu'on a mis en évidence la structure de groupe de cette addition vectorielle. Il faut souligner à ce propos que jusque vers 1860, on ne s'intéressait qu'aux groupes de permutations d'un ensemble fini d'objets. C'est avec les travaux de Félix KLEIN (1849-1925) vers 1870 que naissent les groupes de transformations. Dès lors, c'est dans les traités classiques d'analyse qu'il faut aller chercher la théorie des vecteurs.

Compte tenu du décalage entre l'apparition d'une notion nouvelle en mathématiques et son enseignement dans les écoles, il n'y a pas lieu de s'étonner de l'absence des vecteurs dans les programmes scolaires jusqu'à la moitié du XX ème siècle. De même, les idées de Klein, exprimées dans le «Programme d'Erlangen» (1872) ont mis près d'un siècle pour atteindre l'enseignement élémentaire avec les transformations du plan : symétries, translations, rotations, homothéties et similitudes.

4) Triangle ou parallélogramme ?

On ne peut pas refaire l'histoire. Mais on peut imaginer ce qui serait advenu si les Grecs n'avaient pas privilégié le triangle en repoussant le plus tard possible ce qui touche au parallélisme. A ce propos, citons deux auteurs. D'abord Gustave CHOQUET dans son introduction à «L'enseignement de la géométrie» (1964) :

«On sait qu'Hilbert a élagué et complété l'axiomatique d'Euclide, pour en faire un système logiquement satisfaisant (...). L'axiomatique d'Hilbert-Euclide est basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs.»

On retrouve les mêmes considérations dans un langage plus poétique sous la plume de Michel SERRES dans «Les origines de la géométrie» (1993) :

«Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié d'un carré ou mieux d'un parallélogramme, ils auraient été immédiatement conduits à la structure de l'espace des vecteurs.

Nous voici donc de nouveau, à l'origine, où nous reprenons un autre bon bout de l'histoire : le point, le segment, l'angle, puis le triangle ouvert, trois segments à sommet commun, partie de parallélogramme, et non le triangle fermé que nous nommons triangle, improprement; d'où l'on tire l'addition vectorielle, par composantes et résultante, ce qui, en retour, fait rejaillir, sur le segment, la notion à son tour principielle de vecteur, et, sur le point, celle du vecteur nul et ainsi de suite : la structure d'espace vectoriel se dévoile peu à peu, dans une simplicité première.» (p. 20)

5) Proposition

Nous en arrivons au point central de ce texte : la structure d'espace vectoriel devrait être une notion fondamentale de l'enseignement élémentaire au même titre que la notion de fonction.

En ce qui concerne les fonctions, le pas est déjà fait et avec profit. Il pourrait en être de même pour les vecteurs qui deviendraient un fil conducteur à travers tout l'enseignement secondaire (I et II). Bien sûr, cela demanderait un changement radical par rapport à la situation que nous connaissons. Il conviendrait de faire des vecteurs une notion de base, indépendante de la géométrie euclidienne. Expliquons-nous.

Un vecteur ne se réduit pas à la seule représentation initiale qu'on en donne sous forme de flèche ayant une direction, une longueur et un sens. *Un vecteur, c'est un élément d'un espace vectoriel.* Cette formulation n'a rien d'une lapalissade : Un espace vectoriel est un ensemble dont on peut additionner les éléments (avec les propriétés d'un groupe commutatif) et dont on peut multiplier les éléments par des nombres (avec des propriétés naturelles). Soit dit en passant, ces propriétés sont si naturelles que les élèves les utilisent avec habileté et fort peu d'erreurs. Un exemple vaut mieux qu'un long développement :

Les carrés magiques d'ordre 3 forment un espace vectoriel :

(Rappelons qu'un carré est magique si la somme des termes est la même en lignes,en colonnes et dans les diagonales.)

L'addition de deux carrés magiques donne encore un carré magique :

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|ccc|}\hline 7 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & -3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ \hline\end{array}$$

s=9 s'=6 s+s'=15

La multiplication d'un carré magique par un nombre donne encore un carré magique :

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{array}{|ccc|}\hline 7 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & -3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ \hline\end{array}$$

s'=6 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot s' = -3$

Serait-il abusif de voir une situation-problème dans l'énoncé suivant à proposer à des lycéens ?

N'importe quel carré magique C d'ordre 3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de 3 carrés magiques bien choisis C_1, C_2, C_3 :

Supposons :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Même si le maître de mathématiques introduit les vecteurs dans le cas particulier du plan, il doit se souvenir des nombreux exemples d'espaces vectoriels que sont les fonctions continues, les fonctions dérivables, les solutions d'équations linéaires, etc.

En faisant des vecteurs une notion fondamentale, il y aurait à éviter certains écueils qui pourraient faire échouer le projet. Nous en citons trois :

a) **Vouloir «démontrer» les propriétés des vecteurs via la géométrie élémentaire**. Le premier manuel paru en Suisse romande traitant des vecteurs est sans doute la «Trigonométrie» de PAULI et POST (1946). Destiné aux gymnasiens, il fait reposer les propriétés des vecteurs sur les connaissances de géométrie élémentaire acquises par les élèves dans la scolarité obligatoire. Ainsi, pour prouver que «deux vecteurs égaux ont des projections égales suivant un même axe», on fait intervenir des parallélogrammes et des trapèzes égaux. Cette méthodologie, légitime à l'époque pour le secondaire II, n'aurait pas sa place au secondaire I dans la perspective que nous envisageons.

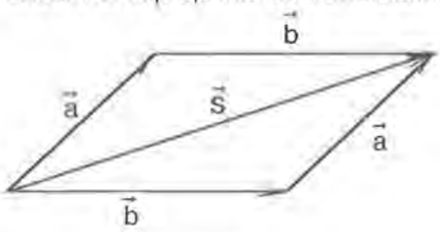
b) **Vouloir dès le début associer de trop près vecteurs et points du plan**. On risque de masquer la vraie nature des vecteurs. Un vecteur n'est pas simplement assimilable à un couple de points, voire à un point unique après choix d'une origine. Le calcul vectoriel ne saurait se ramener uniquement à des opérations sur des bipoints telles qu'on les trouve dans les fascicules no 17 et no 23 de la CRM (Commission romande de mathématique). Nous reviendrons sur cette question à propos de la relation de Chasles.

c) **Vouloir gagner du temps en laissant de côté des exercices pour se contenter d'écrire proprement des relations découlant des définitions.** On doit proposer des situations qui aient du sens et montrent l'utilité et l'avantage du calcul vectoriel. Il serait précieux d'étudier comment articuler ce projet avec les tendances actuelles de la didactique, en particulier avec les problèmes ouverts et les situations-problèmes.

6) Suggestions

On ne peut suggérer dans le cadre de ce texte que les pistes principales pour un cheminement souhaitable dans l'introduction des vecteurs. L'articulation avec le reste du programme serait du ressort des maîtres qui voudraient bien en tenter l'expérience.

Première étape : L'addition vectorielle présentée comme la mise bout à bout de segments orientés ou «flèches». Des flèches parallèles, de même longueur et de même sens représentent le même vecteur. La figure ci-dessous illustre l'addition de deux vecteurs et la propriété de commutativité.



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Deuxième étape : Présentation intuitive de la multiplication d'un vecteur par un nombre et ses propriétés naturelles.

On pourrait, par exemple, aborder la propriété de distributivité :

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

par le biais d'un exercice :

On envisage deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de directions différentes.

Construire : $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

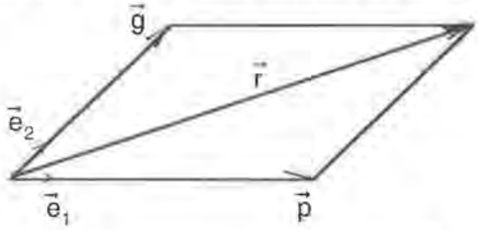
$\vec{t} = 2.5\vec{s}$

$\vec{u} = 2.5\vec{a}$

Est-il exact que $\vec{t} = \vec{u}$?

Insistons-y. Il n'y a pas à justifier une telle propriété par un recours quelconque au théorème de Thalès ou à des similitudes. Il s'agit d'une propriété admise au départ; admise en raison d'une certaine évidence et de son efficacité. Pour le mathématicien, c'est un axiome.

Troisième étape : Deux vecteurs quelconques du plan, de directions différentes, suffisent pour exprimer tous les autres vecteurs. C'est la décomposition d'un vecteur quelconque par rapport à deux vecteurs de base :

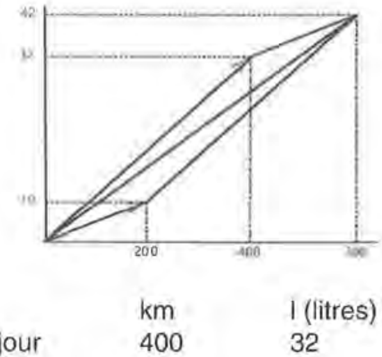


Or : $\vec{p} = x\vec{e}_1$ et $\vec{g} = y\vec{e}_2$

d'où : $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

7) Exploitations possibles

La structure d'espace vectoriel à deux dimensions étant ainsi présentée, il ne manque pas d'exercices pleins de sens. On a l'embarras du choix; il suffit d'adapter la difficulté au niveau de la classe. Exemple : consommation d'une auto sur deux jours

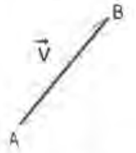


	km	l (litres)
1er jour	400	32
2ème jour	200	10
total	600	42

8) La relation de Chasles

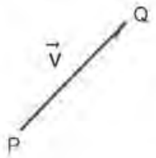
Enfin, et seulement en fin, on introduira la relation de Chasles qui établit le lien entre vecteurs et points du plan. Pour en bien comprendre l'enjeu, il faut entrer dans quelques détails (à l'usage des maîtres). L'association entre vecteurs et points se présente en trois temps :

1) A tout couple de points du plan A et B, on associe un vecteur unique $\vec{v}$ d'origine A et d'extrémité B. On note



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

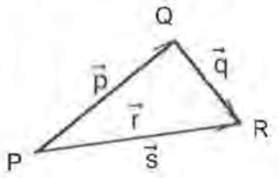
2) Inversement, étant donné un point P et un vecteur $\vec{v}$, il existe un point unique Q tel que



$$\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

3) Considérons un point P et deux vecteurs p et q. D'après 2, il existe Q tel que

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{p}$$



De même, il existe R tel que $\overrightarrow{QR} = \vec{q}$

Soit : $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$

D'après 1) il existe un vecteur unique $\vec{s}$ tel que

$$\vec{s} = \overrightarrow{PR}$$

La relation de Chasles affirme que $\vec{s} = \vec{r}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

Cette relation exprime le fait que l'association points-vecteurs est compatible avec l'addition vectorielle. Si l'on choisit un point 0 du plan comme origine et deux vecteurs comme base, on obtient un repère affine du plan (voir sous 6).

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

x et y sont les coordonnées de P dans ce repère.

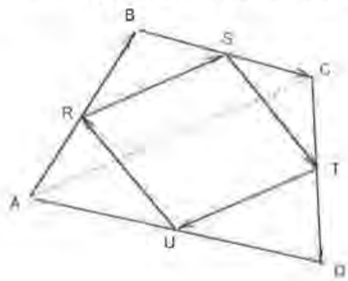
Le vecteur d'origine A et d'extrémité B s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

La relation de Chasles ouvre le champ à toute la géométrie analytique.

En voici une utilisation classique:

«Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme». (Voir *Math-Ecole* 188, p. 16)



ABCD est un quadrilatère fermé implique:

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

Un parallélogramme RSTU est aussi un quadrilatère fermé:

(1') $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{UR} = 0$

De plus, deux côtés opposés sont parallèles et égaux:

$\vec{RS} = \vec{UT}$ ou

(2) $\vec{RS} + \vec{TU} = 0$

En tenant compte de (1'), on a aussi

(2') $\vec{ST} + \vec{UR} = 0$

Etablissons la démonstration:

$\vec{RS} = \vec{RB} + \vec{BS} = 1/2\ \vec{AB} + 1/2\ \vec{BC}$

$= 1/2\ (\vec{AB} + \vec{BC}) = 1/2\ \vec{AC}$

$\vec{TU} = \vec{TD} + \vec{DU} = 1/2\ \vec{CD} + 1/2\ \vec{DA}$

$= 1/2\ (\vec{CD} + \vec{DA}) = 1/2\ \vec{CA}$

d'où : $\vec{RS} + \vec{TU} = 1/2\ \vec{AC} + 1/2\ \vec{CA} = 0$

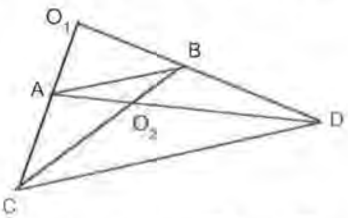
9) Les dilatations (homothéties et translations)

Une fois établi le calcul vectoriel et la relation de Chasles pour le plan, on peut aborder des transformations du plan avec un outil efficace. Cette étude commencée intuitivement au secondaire I avec les homothéties trouverait son accomplissement au lycée. Ce thème serait ainsi repris, consolidé, approfondi.

Nous nous en tenons à deux exemples.

a) Un problème

On donne deux segments parallèles AB et CD. Quelles sont les homothéties qui permettent de passer d'un segment à l'autre ?



Soit k le nombre tel que $\vec{CD} = k\ \vec{AB}$

En général, il y a quatre solutions

2 homothéties de centre O_1 :

h :	$A \longrightarrow C$	facteur k
h^{-1} :	$C \longrightarrow A$	facteur 1/k

2 homothéties de centre O_2 :

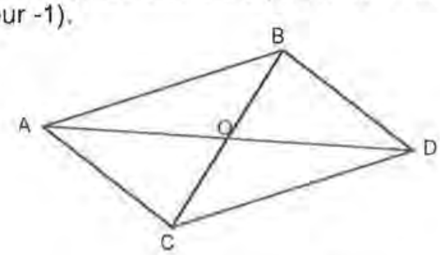
h' :	$A \longrightarrow D$	facteur -k
h'^{-1} :	$D \longrightarrow A$	facteur - 1/k

Au niveau supérieur, il est possible de préciser la position des centres O_1 et O_2 à l'aide des données.

Par exemple pour h, de $\overrightarrow{O_1C} = k\ \overrightarrow{O_1A}$

on tire : $\overrightarrow{AO_1} = \dfrac{k}{1-k}\ \overrightarrow{AC}$

A ne pas oublier le cas particulier où AB et CD sont de même longueur. Il n'y a plus que 3 solutions: 2 translations (les voilà, enfin!) et une symétrie centrale (homothétie de facteur -1).



t :	A ——> C
t^{-1} :	C ——> A
c :	A ——> D
	D ——> A
	B ——> C
	C ——> B

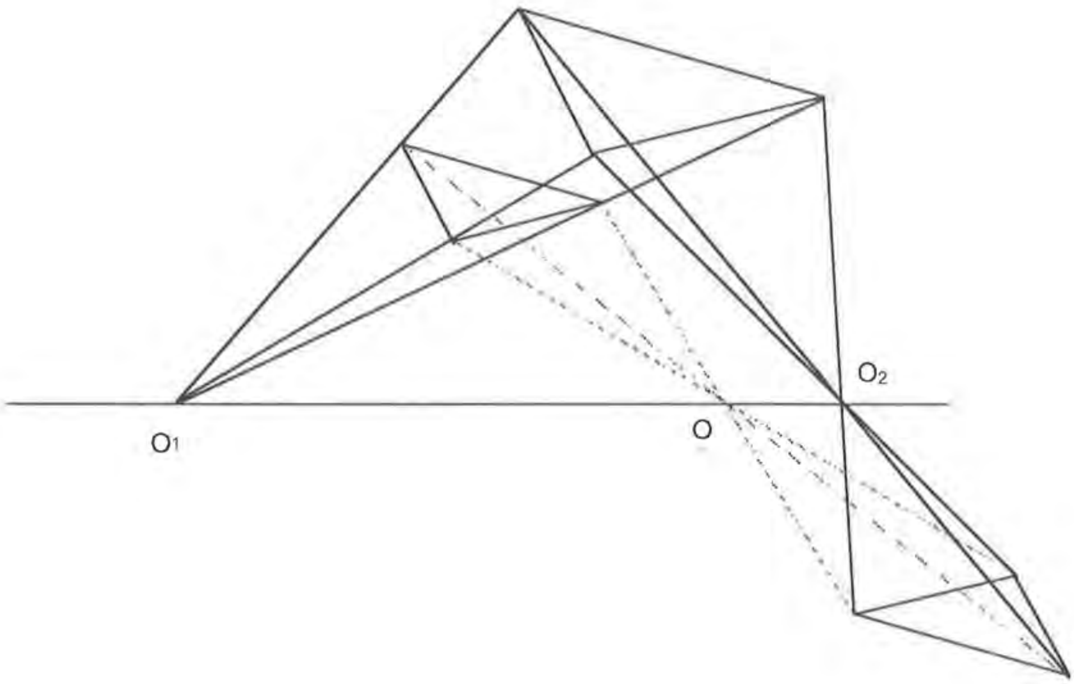
Le terme de dilatation recouvre l'ensemble des homothéties et des translations.

b) Composition de deux homothéties

Si on compose deux homothéties h_1 de centre O_1 et h_2 de centre O_2, les facteurs d'homothéties étant k_1 et k_2, il n'est pas évident pour des débutants que le résultat fasse intervenir le produit k_1k_2. Il ne va pas de soi, non plus, que le centre de l'homothétie composée se trouve sur la droite O_1O_2 (pour autant que la composition ne soit pas une translation).

Là encore, on réservera au lycée le calcul de la position du centre O sur la droite O_1O_2 :

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\,\overrightarrow{O_1O_2}$$



***Math-Ecole* n° 190, de décembre 1999, sort de presse en février 2000 seulement.**

La rédaction prie les lecteurs de bien vouloir excuser ce retard qui s'est accumulé progressivement au cours de l'année scolaire écoulée.

La rédaction s'engage à faire le maximum pour que tous les numéros de cette année paraissent dans des délais plus raisonnables.

Regard sur la spirale de l'ammonite

Michel Brêchet

A l'image des escargots, des nautiles cloisonnés et des fleurs de tournesol, mais aussi des galaxies spirales, des cornes de certaines chèvres, des valvules de l'appareil digestif du requin ou encore du vol majestueux des graines de frêne, l'ammonite illustre admirablement la forme spiralée (Fig. 1). A ce titre, elle est un bon exemple des liens étroits qui existent entre les formes naturelles et les formes idéales de la géométrie. L'édification de la coquille de ce mollusque fossile, datant de l'ère secondaire, a-t-elle été gouvernée par une loi de croissance géométrique ? La question reste ouverte à l'heure actuelle (pour en savoir plus sur ce passionnant sujet, on pourra consulter le N° 305 de La Recherche, de janvier 1998, consacrée à l'origine des formes).

Fig. 1 : Vue en coupe de la coquille d'une ammonite.

Le mystère de l'aspect mathématique de l'ammonite n'ayant toujours pas été élucidé, nous nous contenterons dans cet article de présenter deux manières de modéliser sa spirale : par une construction géométrique tout d'abord, puis par le tracé d'une fonction.

Avec une règle et un rapporteur

Si vous dessinez 24 demi-droites d'origine O (Fig. 2) formant deux à deux des angles de 15° (360 : 24), que vous tracez ensuite des segments AB, BC, CD, ..., de sorte que chacun d'eux soit perpendiculaire à l'une de ces demi-droites, vous obtiendrez, certes avec un peu de persévérance, une magnifique figure qui évoque la continuité et la similitude. Et si, par superposition, vous la comparez à la spirale de notre fossile, vous constaterez que ces deux courbes sont quasiment identiques. Etonnant, non ?

Eclaircissons la situation.

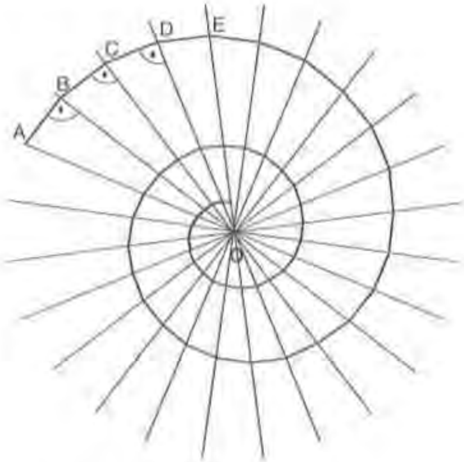


Fig. 2 : Modèle de spirale logarithmique

Du côté de l'ammonite : par mesurage et par calcul, on peut déterminer que l'accroissement de l'amplitude de sa coquille est un nombre constant proche de 2,3 (Fig. 3) :

$OA_3 \approx 2{,}3 \cdot OA_2$

$OB_2 \approx 2{,}3 \cdot OB_1$

$OC_2 \approx 2{,}3 \cdot OC_1$

...

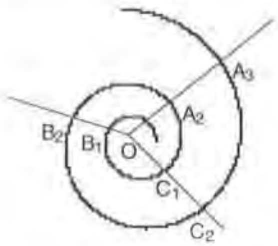


Fig. 3 : Un accroissement fixe de l'amplitude

Du côté de la figure géométrique : tous les triangles en présence sont semblables (leurs angles ont pour mesures 90°, 15° et 75°). En outre, les longueurs des côtés supportés par une même demi-droite forment une suite géométrique dont la raison est proche de 2,3. D'où la similitude entre les deux courbes. Par calcul, montrons comment mettre en évidence ce facteur 2,3 (Fig. 4) :

$OB_1 = 1/\cos 15^\circ \cdot OA_1 \approx 1{,}04 \cdot OA_1$

$OC_1 \approx 1{,}04 \cdot OB_1 \approx 1{,}04^2 \cdot OA_1$

$OD_1 \approx 1{,}04 \cdot OC_1 \approx 1{,}04^3 \cdot OA_1$

...

Le plan étant partagé en 24 secteurs angulaires, il s'en suit que :

$OA_2 \approx 1{,}04^{24} \cdot OA_1 \approx 2{,}3 \cdot OA_1$

$OA_3 \approx 1{,}04^{24} \cdot OA_2 \approx 2{,}3 \cdot OA_2 \approx 2{,}3^2 \cdot OA_1$

$OA_4 \approx 1{,}04^{24} \cdot OA_3 \approx 2{,}3 \cdot OA_3 \approx 2{,}3^3 \cdot OA_1$

...

De même : $OB_2 \approx 2{,}3 \cdot OB_1$

$OB_3 \approx 2{,}3 \cdot OB_2 \approx 2{,}3^2 \cdot OB_1$

$OB_4 \approx 2{,}3 \cdot OB_3 \approx 2{,}3^3 \cdot OB_1$

...

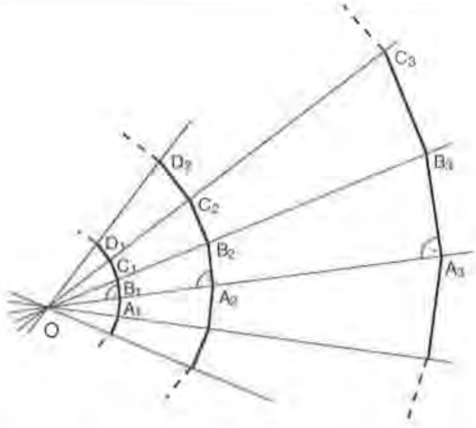


Fig. 4 : Des segments en progression géométrique

Avec un logiciel de représentations graphiques

Considérons la courbe d'équation polaire

$$r(\Omega) = 2{,}3^{\frac{1}{360}\Omega}$$

et calculons quelques valeurs de r en fonction de Ω :

Coordonnées polaires

Soit une demi-droite Ox (Fig. 5). Un point P du plan est complètement défini par le rayon OP et par l'angle POx de ce rayon avec la demi-droite.

r, mesure du rayon OP, et Ω, mesure de l'angle POx, sont les coordonnées polaires du point P.

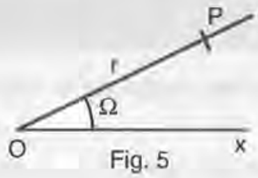


Fig. 5

				(1 tour)	(2 tours)	(3 tours)	(4 tours)	
Ω (en degrés)	0	90	180	360	720	1080	1440	...
r	1	1,23	1,52	2,3	5,29	12,17	27,98	...
					x 2,3	x 2,3	x 2,3	

Si l'on représente graphiquement cette situation, on obtient une spirale logarithmique (Fig. 6) qui «colle» parfaitement à celle de l'ammonite. Cette courbe, découverte par Descartes en 1638, possède de très jolies propriétés :

- A chaque tour, son rayon (la distance à son centre) est multipliée par 2,3. Deux conséquences : d'une part, elle s'élargit très vite, et d'autre part, elle n'atteint jamais son centre O.
- Ses points d'intersection avec une même demi-droite sont répartis selon une progression géométrique :

$OA_1 \cdot 2{,}3 = OA_2$

$OA_2 \cdot 2{,}3 = OA_3 = OA_1 \cdot 2{,}3^2$

$OA3 \cdot 2{,}3 = OA_4 = OA_1 \cdot 2{,}3^3$

...

- Tous les rayons coupent la spirale sous le même angle, d'où son autre nom de spirale équiangle.

Décidément, Dame Nature n'a pas fini de nous surprendre !

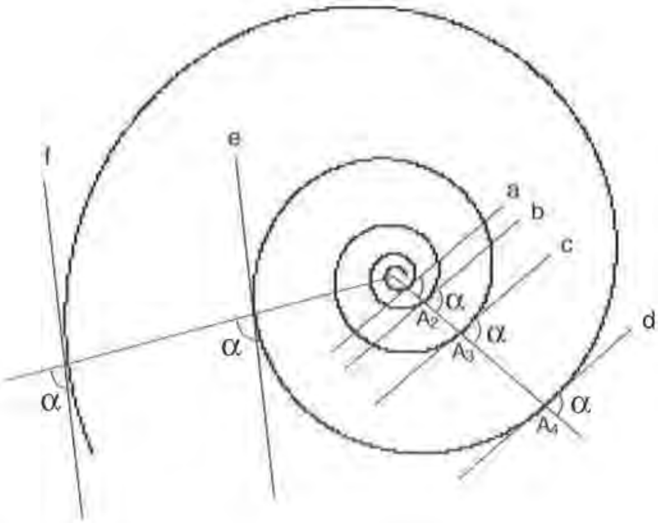


Fig. 6 : Spirales logarithmique.
Les droites a, b, c, d, e et f sont des tangentes à la spirale. Par souci de lisibilité, les points O et A1 ne sont pas désignés sur cette représentation.

14ème Championnat international des Jeux mathématiques et Logiques

Quarts de finales individuels 2000

[ndrl] Au moment où paraîtront ces lignes, il sera malheureusement trop tard pour s'inscrire au 14e Championnat international des jeux mathématiques et logiques. Les accrocs l'auront fait par l'intermédiaire de *Tangente*, d'*Hypercube* ou d'un autre journal. Mais les problèmes sont toujours là, originaux, intéressants, résistants parfois. Il y en a pour tous les niveaux :

- de 1 à 6, catégorie CM (élèves de 4e et 5e, selon les degrés de la scolarité en Suisse romande)
- de 3 à 9, catégorie C1 (élèves de 6e et 7e)
- de 5 à 11, catégorie C2 (élèves de 8e et 9e)
- de 5 à 14, catégorie L1 et GP(lycéens et «grand public»)
- de 5 à 16, catégorie L2 et HC (étudiants en mathématiques et «haute compétition»)

Pour chaque problème, une simple réponse ne suffit pas, sauf indication contraire. Chaque fois qu'il y a plusieurs solutions, il faut en indiquer le nombre.

Les réponses paraîtront dans le prochain numéro.

1 - LE X IEME X
(coefficient 1)

Mathias écrit les nombres entiers en toutes lettres, dans l'ordre, à partir de un :

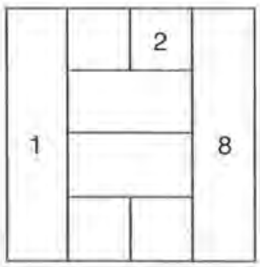
UN DEUX TROIS QUATRE CINQ SIX SEPT HUIT ...

Le dixième «E» écrit apparaît dans «QUINZE» et le dixième «U» dans «DIX-NEUF».

Mais dans l'écriture de quel nombre le dixième «X» apparaît-il ?

2 - LES 8 NOMBRES
(coefficient 2)

Mathilde prétend qu'il est possible de placer les nombres de 1 à 8 dans les cases du tableau ci-contre de façon que deux nombres qui se suivent (comme 3 et 4 par exemple) ne soient jamais situés dans deux cases qui se touchent. Mathias a déjà placé les nombres 1, 2 et 8.

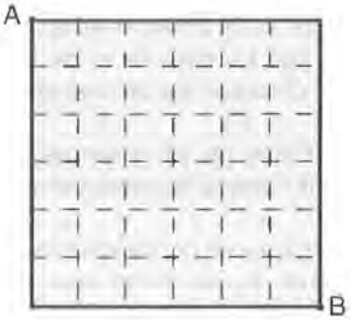


A vous de placer les 5 autres !

3 - LA TARTE CARREE
(coefficient 3)

C'est aujourd'hui l'anniversaire de Mathias. Sur la table, il y a une superbe tarte carrée. Il faut la partager en trois parts de même poids, en donnant deux coups de couteau rectilignes passant l'un par le point A et l'autre par le point B.

Faites le partage.



4 - LA VIEILLE CALCULATRICE
(coefficient 4)

Ma vieille calculatrice ne peut plus faire que deux opérations : ajouter 12 au nombre affiché, ou bien lui soustraire 7. Aujourd'hui, elle affiche 1999.

En combien d'opérations, au minimum, pourrais-je faire apparaître le nombre 2000 sur l'écran ?

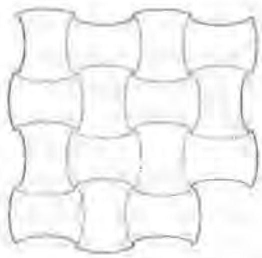
5 - HISTOIRE DE BILLES
(coefficient 5)

Mathilde a deux billes de plus que Mathias. Le nombre de billes de Mathias est le double du nombre de billes de Matthieu. Matthieu a sept billes de moins que Mathilde.

Combien ont-ils de billes à eux trois ?

6 - LE CARRELEUR AMERICAIN
(coefficient 6)

Tom, carreleur, originaire des Amériques, fabrique lui-même les «carreaux» qu'il utilise. Aujourd'hui, il a fabriqué cinq «carreaux» identiques pour «carreler» la forme ci-contre. Les bords des carreaux, qui ne peuvent être retournés, suivent les lignes du «quadrillage».



Retrouvez la position des cinq carreaux.

7 - AUTOREFERENCE
(coefficient 7)

> Dans ce cadre, il y a .... consonnes de plus que de voyelles.

Complétez le cadre ci-contre à l'aide d'un nombre écrit en toutes lettres, de telle sorte que la phrase qu'il contient soit vraie.

8 - LA FURIBARDE
(coefficient 8)

Le «lapgourou» est un animal qui court en ligne droite de la manière suivante : il met 2 secondes pour faire un saut de 4 m, il se repose une seconde et il recommence à sauter.

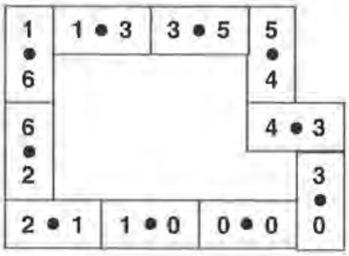
La «furibarde» est un animal qui saute moins loin ; elle met une seconde pour faire un bond de 3 m, mais elle ne s'arrête pas entre les bonds.

La furibarde est à 32 m du lapgourou qu'elle décide de poursuivre. Elle ne peut capturer le lapgourou que lorsqu'il est arrêté.

Dans combien de secondes, au maximum, pourra-t-elle le faire ?

9 - CHAINE DE DOMINOS
(coefficient 9)

Philippe possède un jeu complet de 28 dominos (du 0-0 au 6-6). Sa sœur Sophie lui a subtilisé les 7 dominos comportant un 6 (de 0-6 à 6-6). Qu'à cela ne tienne ! Philippe décide de former une chaîne fermée avec les dominos restants, en respectant la règle du jeu de dominos. On rappelle que deux dominos ne peuvent être mis en contact que par un côté portant le même nombre de points (voir l'exemple donné ci-après avec 10 dominos).



Quelle sera le nombre maximum de dominos utilisés par Philippe pour former une chaîne fermée ?

10 - TELEPHONE (coefficient 10)

Lorsque Pierre demande à Marie son numéro de téléphone pour pouvoir l'appeler, celle-ci répond :

«Comme tous les numéros de téléphone français, il est formé de 10 chiffres que l'on a l'habitude de grouper par deux. Les dix chiffres sont tous différents, et chaque groupe de deux chiffres est supérieur à la somme de tous les groupes précédents. De plus, si l'on considère le nombre que forme ce numéro, c'est le plus petit possible.»

Quel est le numéro de téléphone de Marie ?

11 - LE MASQUE INCA
(coefficient 11)

Des recherches archéologiques viennent de révéler à nos yeux émerveillés un masque inca en or pur. Le plan de ce masque est représenté ci-contre sur un plan quadrillé.

Calculez l'aire de ce masque, l'unité d'aire étant l'aire d'un petit carreau.

On n'oubliera pas de déduire l'aire des yeux, de la bouche, du nez et des sourcils. Pour d'éventuels calculs, on prendra 355/113 pour π.

12 - LA FRACTION
(coefficient 12)

On choisit le numérateur et le dénominateur, qui peuvent être égaux ou différents, de la fraction ci-contre dans l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5; 6 }.

$$\frac{?}{?}$$

Combien de valeurs différentes la fraction peut-elle prendre ?

Remarque : 2/1 est une fraction.

13 - LE COUPLE PARFAIT
(coefficient 13)

Deux nombres se marient pour former un nouveau nombre. Un couple de nombres entiers plus grands que 0 est dit parfait si chacun des nombres est un carré parfait ainsi que le nombre obtenu en les juxtaposant. Ainsi, (324 ; 9) est le plus petit couple parfait supérieur à 1999, car 324 , 9 et 3249 sont des carrés.

Combien y a-t-il de couples parfaits inférieurs à 1999 ? Donnez-en deux.

14 - LE CARRE ET LE RECTANGLE
(coefficient 14)

Un rectangle dit à un carré : «Tiens, nous avons des diagonales égales».

- Certes, répond le carré, mais j'ai une aire de 144 cm^2 , tout le monde ne peut pas en dire autant !

- Voyons cela, rétorque le rectangle, en appliquant une de ses diagonales sur une diagonale du carré.

Tous deux constatent alors que leur partie commune a une aire de 96 cm^2.

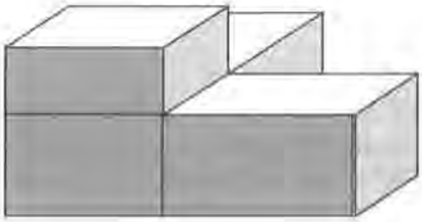
Quelle est l'aire du rectangle ?

15 - LES BRIQUES DE MARK OV
(coefficient 15)

Les briques de Mark Ov sont des parallélépipèdes rectangles ne possédant aucune face carrée.

Les dimensions de chaque brique sont entières, dans une certaine unité. De plus, ces briques présentent la particularité que la somme des carrés de leurs trois dimensions est égale au triple de leur produit, à l'instar du cube de côté unité. Un exemple d'une telle brique est (2 ; 5 ; 29), puisque :

$$2^2 + 5^2 + 29^2 = 3 \times (2\times5\times29) = 870.$$



La figure ci-dessus, qui ne respecte pas les proportions, montre quatre briques de Mark Ov assemblées en coin. Pour chacune des trois surfaces de contact, les deux dimensions de chacune des deux briques correspondent exactement.

Si les quatre briques sont toutes différentes les une des autres, quel est le volume minimum de la plus volumineuse d'entre elles.

16 - LE CARRE DANS LA PETITE LARME
(coefficient 16)

La «petite larme» représentée ci-dessous est formée de deux demi-cercles de rayon 5 cm et d'un demi-cercle de rayon 10 cm. On place 4 points A, B, C, D sur le pourtour de cette petite larme de telle sorte que ABCD soit un carré.

Quelle est l'aire de ce carré ?

8e Rallye Mathématique Transalpin

Epreuve I

[ndlr] Une fois encore, tous les records de participation sont battus pour le 8e Rallye mathématique transalpin : En Suisse romande, le seuil des 200 classes est largement franchi, avec 270 inscriptions, et l'augmentation est du même ordre dans les autres pays et régions. La participation s'étend maintenant jusqu'au Néguev, en Israël, où un nouveau groupe se lance dans l'aventure, avec déjà plus de 40 classes.
Il faudra revoir le terme «transalpin» de notre appellation ou .... prolonger les Alpes !

Les principes de la confrontation ne changent pas : l'activité, de A à Z, est à la charge du groupe classe. En l'absence du maître, les élèves ont 50 minutes pour fournir une (seule) solution, justifiée, de chaque problème de leur catégorie. C'est ce qui constitue, avec la résolution de problème, l'un des aspects les plus intéressants du Rallye : il faut se répartir les tâches, confronter les solutions des différents groupes engagés sur le même problème, coopérer, débattre, rédiger des justifications dont il est largement tenu compte dans l'évaluation.

Le maître, s'il est tenu éloigné de sa classe, peut tout de même tirer un grand profit de la confrontation : observer les élèves d'une autre classe où il fonctionne généralement comme «surveillant», examiner les réponses et explications de ses propres élèves, en parler avec eux, les exploiter.

La plupart des problèmes de cette première épreuve du 8e RMT ont fait l'objet d'analyses «a priori», de discussions et d'échanges fructueux lors de la troisième rencontre internationale des animateurs, tenue à Siena, en octobre dernier.

Avec une préparation aussi minutieuse et un tel nombre de solutions attendues, les résultats vont permettre de connaître toujours mieux les procédures de résolution mises en oeuvre par les groupes d'élèves et les obstacles rencontrés. Donnée réjouissante aussi : une soixantaine de maîtres des classes participantes ont accepté de s'associer aux évaluations des épreuves et aux analyses des résultats.

Voici donc les problèmes de la première épreuve, de janvier/février 2000. Les lecteurs intéressés peuvent les résoudre, les proposer à leurs élèves (s'ils ne sont pas déjà inscrits) et envoyer leurs commentaires ou résultats à la rédaction de *Math-Ecole*. Ils participeront ainsi à l'imposant recueil de données constitué par le Rallye mathématique transalpin sur la résolution de problèmes.

1. LA RONDE (Cat 3)

24 enfants sont debout et forment un cercle pour jouer.

Un élève commence en disant «un», son voisin de droite dit «deux», le suivant dit «trois», et ainsi de suite.

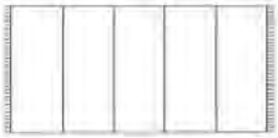
Dès qu'un joueur dit un nombre pair, il est éliminé et doit s'asseoir. Les joueurs qui disent des nombres impairs restent debout et continuent à compter chacun à leur tour.
Le jeu s'arrête quand il n'y a plus qu'un seul joueur debout.

Quel est le dernier nombre prononcé par le dernier joueur qui s'est assis.

Montrez comment vous avez fait pour trouver.

2. LA COUVERTURE D'ANNA (Cat. 3, 4)

Grand-mère a tricoté une belle couverture pour le lit d'Anna.



Les bandes rectangulaires sont de couleur orange, jaune, brune, rouge et verte.

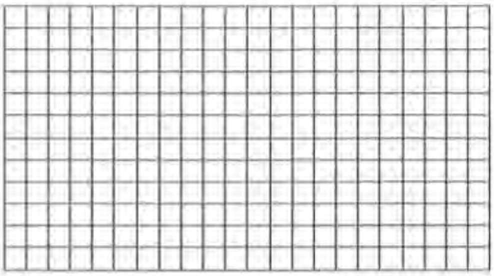
Grand-mère les a cousues ensemble ainsi :

- la bande verte n'est pas à côté de la bande brune,
- il y a deux bandes entre la jaune et la brune,
- la rouge n'est pas à une des extrémités,
- l'orange est au centre.

Coloriez la couverture d'Anna.

3. TAPIS CARRES (Cat. 3, 4)

Grand-mère n'aime plus le carrelage de son salon, qui est fait ainsi :

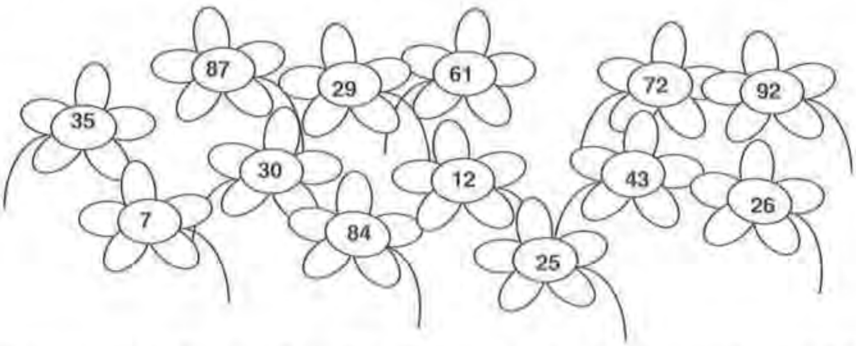


Elle décide de le recouvrir entièrement et exactement par des tapis carrés (sans laisser d'espaces vides et sans que deux parties de tapis soient l'une sur l'autre).

De combien de tapis carrés aura-t-elle besoin si elle veut en utiliser le moins possible ?

Dessinez les tapis de Grand-mère.

4. L'ABEILLE MATHÉMATIQUE (Cat. 3, 4)



L'abeille Maté, passe de fleur en fleur. Elle doit apporter à sa ruche exactement 94 grains de pollen en un seul voyage. Sur chaque fleur on a écrit le nombre de grains de pollen qu'elle contient. Quand Maté se pose sur une fleur, elle en prend tous les grains.

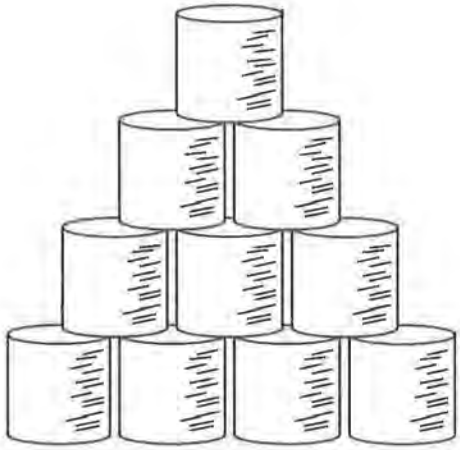
Quelles sont les fleurs sur lesquelles Maté peut se poser pour réussir à apporter à la ruche 94 grains en un seul voyage ?

Ecrivez toutes les solutions que vous avez trouvées.

5. COLLECTION DE BOÎTES (Cat. 3, 4)

Giulia désire empiler en pyramides les boîtes de sa collection.

La figure montre la pyramide de quatre étages. Il a fallu dix boîtes pour la construire :



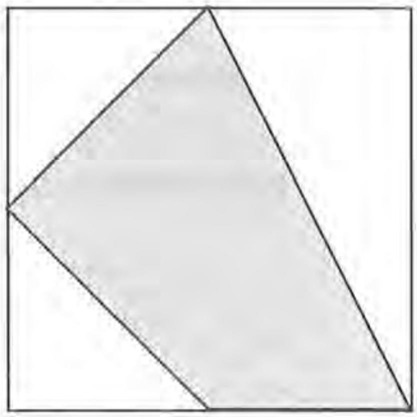
Mais Giulia a 27 boîtes et désire construire deux pyramides en utilisant toutes ses boîtes.

Comment doit faire Giulia pour construire ses deux pyramides ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

6. LE JARDIN DE MONSIEUR TORDU (Cat. 3, 4)

Voici le jardin de Monsieur Tordu.



Il a planté des fleurs dans la partie grise. Il a semé du gazon dans la parte blanche.

Monsieur Tordu observe son jardin et se demande : «Quelle est la plus grande partie de mon jardin, celle avec les fleurs ou celle avec le gazon ?»

Et vous, qu'en pensez-vous ?

Expliquez votre réponse.

7. LA FAMILLE (Cat. 4, 5, 6)

Pierre qui a 30 ans est marié avec Agnès qui a 28 ans. Ils ont trois enfants : Béatrice qui a 7 ans, Laurent qui a 6 ans et Anaïs qui a 4 ans.

Dans combien d'années la somme des âges des parents sera-t-elle égale à la somme des âges de leurs trois enfants ?

Justifiez votre réponse.

8. LE MARCHAND DE SOIE (Cat. 4, 5, 6)

Un marchand de soie descend de son navire. Il doit parcourir 120 lieues pour se rendre au château du roi.

Il commence le voyage à pied et le termine dans un carrosse que le roi a envoyé à sa rencontre. Le marchand et le carrosse partent au même moment.

A pied, le marchand parcourt 10 lieues par jour. Le carrosse parcourt 20 lieues par jour.

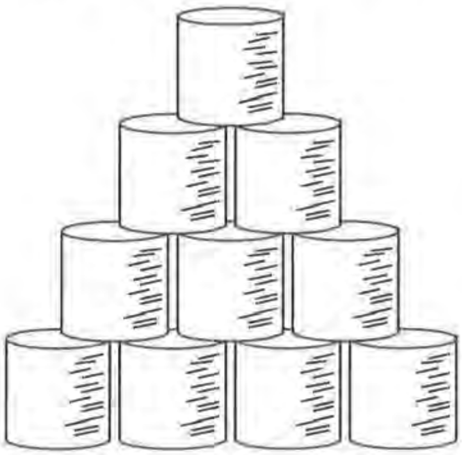
Au bout de combien de jours le marchand arrivera-t-il au château ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

9. COLLECTION DE BOÎTES (Cat. 5, 6)

Giulia désire empiler en pyramides les boîtes de sa collection.

La figure montre la pyramide de quatre étages. Il a fallu dix boîtes pour la construire :



Mais Giulia a 64 boîtes et elle aimerait construire la pyramide la plus haute possible avec elles.

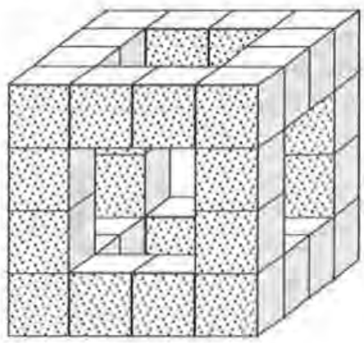
1) **Combien Giulia doit-elle mettre de boîtes à la base de sa pyramide pour être sûre qu'elle soit la plus haute possible, même si elle n'utilise pas toutes ses boîtes**

2) **Si Giulia désirait construire deux pyramides en utilisant toutes ses boîtes, comment devrait-elle faire ?**

Justifiez vos réponses.

10. LE CUBE PERCÉ (Cat. 5, 6)

Durant le week-end, Rubik a construit un cube percé comme celui-ci :



Fier de son travail, il le montre à son ami Kubi et lui demande de trouver combien il faudrait ajouter de petits cubes pour compléter son cube.

Selon vous combien faudra-t-il de petits cubes ?

Justifiez votre réponse.

11. LABYRINTHE NUMÉRIQUE (Cat. 5, 6)

Cette figure est un exemple de labyrinthe numérique. En entrant dans la case du bas à gauche, on peut atteindre la case de sortie en haut à droite selon les règles suivantes :

1. On se déplace d'une case à la fois, horizontalement ou verticalement,
2. Le chemin à suivre (noté par les flèches) pour atteindre la case de sortie est déterminé par une loi bien précise, en deux pas, qui se répète :

Premier pas : multiplier par 2 et se déplacer
Deuxième pas : enlever 1 et se déplacer.

7	6 →	5
1	3 ↑	8
2 →	4 ↑	9

Dans ce deuxième labyrinthe numérique le chemin à suivre est déterminé par une autre loi, qui se répète aussi chaque deux pas.

13	11	8	3
9	10	12	1
13	15	7	6
18	16	9	4

Trouvez cette loi, écrivez-la et indiquez le parcours correct.

12. LE DÉFI (Cat. 5, 6, 7, 8)

Renzo effectue des calculs sur sa calculatrice de poche. Voici comment s'écrivent les dix chiffres sur sa calculatrice :

Son amie Lucia, assise en face, lui lance un défi : «Écris un nombre de deux chiffres, qui, lorsque je le lis de ma place, vaut 54 de plus que celui que tu as écrit.»

Quel nombre Renzo doit-il écrire ?

Mintenant c'est Renzo qui, ayant répondu correctement, défie Lucia : "Devine quel nombre de deux chiffres je dois écrire afin que tu lises un nombre qui vaut 25 de plus que le mien".

Le nombre demandé par Renzo existe-t-il ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

13. LE CAHIER DE QUINZE (Cat. 6, 7, 8)

Monsieur Quinze est né le 15 décembre 1915, il habite au numéro 15 de la rue des Chiffres, il a 15 petits enfants et il ne lui reste plus que 15 dents.

M. Quinze est aussi un grand collectionneur de nombres. Dans son grand cahier, il est en train d'écrire tous les nombres naturels dont la somme des chiffres est 15. Il a commencé par le plus petit, et chaque jour, il en écrit quelques-uns, dans l'ordre croissant, sans jamais en oublier.

Sur la première page, par exemple, on peut lire 366, un peu plus loin on trouve 9015. Le dernier nombre qu'il a écrit a 10 chiffres : 1200304041.

1) Quel est le plus petit nombre écrit dans le cahier de M. Quinze ?

2) Combien y a-t-il de nombres plus petits que 1000 dans son cahier ?

Donnez les détails de votre recherche ?

14. REPÊCHAGE (Cat. 7, 8)

Il y a 259 élèves inscrits pour l'épreuve du 100 mètres des joutes sportives de l'école. La piste d'athlétisme a 8 couloirs. Les règles de qualification et de repêchage sont les suivantes :

- Au premier tour, tous les participants courent par groupes de 8 ou de 7, (ils occupent 8 ou 7 couloirs pour chaque série) mais il faut qu'il y ait le moins possible de séries avec 7 concurrents.
- A chaque tour, les trois premiers de chaque série sont qualifiés automatiquement.
- Dès le deuxième tour, les huit couloirs doivent être entièrement occupés pour chaque série. S'il n'y a pas assez de coureurs, on repêche alors de 1 à 7 concurrents qui avaient les meilleurs temps parmi les non qualifiés du tour précédent.

Combien y aura-t-il de tours et combien de séries au total dans cette épreuve du 100 mètres ?

Écrivez les détails de votre recherche.

15. UNE QUESTION D'ÂGE (Cat. 7, 8)

Un groupe d'amis tente de déterminer qui est le plus jeune et qui est le plus vieux parmi eux.

On vous donne une information fausse et trois vraies:

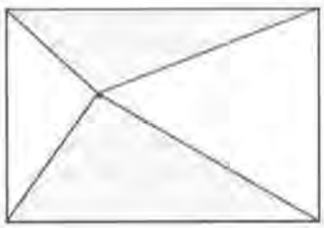
1) Charles est plus vieux que Michèle.
2) Joseph est plus jeune que Michèle.
3) Si on additionne les âges de Michèle et de Joseph, on obtient un nombre qui est le double de l'âge de Charles.
4) Joseph est plus vieux que Charles.

Qui est le plus vieux et qui est le plus jeune?

Expliquez votre raisonnement.

16. L'HÉRITAGE (Cat. 7, 8)

Deux frères héritent d'un terrain de forme rectangulaire. Pour le diviser en deux parties de même aire, un voisin leur suggère de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de le relier avec des piquets plantés aux quatre sommets du terrain.



Un des frères prendra la partie en gris sur la figure, l'autre la partie restante.

Les deux parties seront-elles vraiment égales?

Justifiez votre raisonnement.

17. LA PLUS LONGUE SUITE (Cat. 7, 8)

Formez une suite de nombres naturels décroissants (chaque nombre de la suite est plus petit que le nombre qui le précède) selon les règles suivantes :

- le premier nombre est 2000,
- vous choisissez le deuxième nombre,
- le 3e est la différence entre le premier et le deuxième
- le 4e est la différence entre le 2e et le 3e,
- le 5e est la différence entre le 3e et le 4e,
- le 6e est la différence entre le 4e et le 5e,
- et ainsi de suite.

Choisissez le deuxième nombre pour que la suite soit la plus longue possible.

Notez tous vos essais.

Exemple :
en choisissant 1800 comme 2e nombre, on obtient une suite de 3 nombres seulement : 2000, 1800, 200, (la suite se termine là, car le 4e nombre, 1800 - 200 = 1600, serait plus grand que le précédent).

18. VOISIN - VOISINE (Cat. 8)

Lors d'un dîner, toutes les places d'une grande table circulaire sont occupées.
7 femmes ont une femme à leur droite.
12 femmes ont un homme à leur droite.
3 hommes sur 4 ont une femme à leur droite.

Combien sont-ils ?

Justifiez votre réponse.

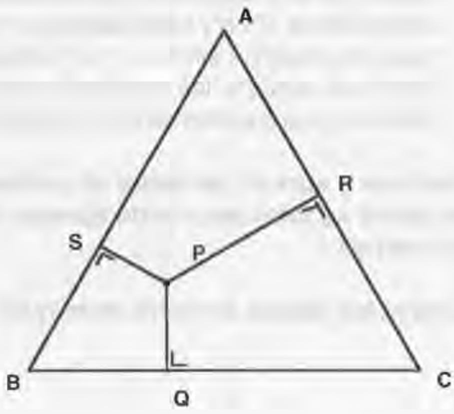
Pâturages

Aloys possède un vaste champ herbeux ayant la forme d'un triangle équilatéral.

Il l'a entouré d'une barrière électrifiée fixée sur trois poteaux situés aux sommets du triangle.

Dans cet enclos, Aloys ne souhaite planter qu'un seul piquet, duquel il fera partir trois fils rejoignant la barrière électrifiée, quelque part entre les poteaux. Ainsi, il aura partager son champ en trois zones à pâturer : une pour son canasson, une autre pour Marguerite sa tendre vache et la dernière pour la chèvre de son vieux copain Seguin.

Où doit-il placer ce piquet, pour que la somme des longueurs des trois fils électriques soit minimale ?



Le rude passage de témoin entre deux méthodologies des mathématiques ...

Aline Gerber, étudiante

Nous sommes en pleine période de transition entre deux méthodologies des mathématiques à l'école primaire. Dans ce contexte-là, que faut-il exiger des étudiantes et étudiants de l'Ecole normale qui débarquent dans des classes où la méthodologie en vigueur des mathématiques ne correspond pas aux principes socio-constructivistes d'apprentissage prônés à l'Ecole normale?

Priorité à la continuité du programme mathématique suivi par le maître de stage ou priorité aux principes d'apprentissage de l'Ecole normale, ce qui signifie concrètement, l'emploi de la nouvelle méthodologie (mais celle-ci n'est pas encore entièrement à disposition des normaliennes et normaliens) ou la création d'une " méthodologie personnelle " avec les objectifs de l'actuelle et l'esprit de la future méthodologie... en admettant que cela soit compatible...

L'article qui suit s'inscrit dans une démarche proposée aux étudiants de 2ème et 3ème année à l'Ecole normale de Neuchâtel en mathématiques : saisir une situation (leçon, réflexion, ...), lors d'un stage, pour en donner une trace sous une forme d'article allant au-delà du journal personnel et offrant si possible un sujet de réflexion pour d'autres personnes liées à l'enseignement des mathématiques dans le contexte actuel.

Nous espérons que les lecteurs de *Math-Ecole* y trouveront de quoi réfléchir à l'articulation subtile, délicate, à inscrire toujours et nécessairement dans un dialogue entre théoriciens et praticiens et entre tous les partenaires de la formation. Nous remercions, à titre personnel, Aline Gerber pour sa lucidité et sa franchise garantes d'une saine et utile interpellation au milieu de sa formation initiale.

[ndlr], Jacques-André Calame, Ecole normale, Neuchâtel

Etudiante à l'école normale, je viens de vivre un stage en 4ème primaire, où j'ai été confrontée à un dilemme réel... qui devint une sorte de poids que je traînai jusqu'à la visite de mon professeur de méthodologie de l'Ecole normale, vous savez, ces visites si formatrices mais, en même temps, mêlées d'un peu d'appréhension, car touchant le savoir-faire et le savoir-être de " l'expertisé ", à savoir l'institutrice ou l'instituteur en devenir...

J'avais comme objectif, pour cette visite de mon professeur de mathématiques, de montrer mes capacités à gérer une activité conçue dans l'esprit du type d'apprentissage dit " socio - constructiviste ", type d'apprentissage " enseigné " à l'Ecole normale.

Jusque là, aucun problème, si ce n'est l'obligation de prendre du temps pour préparer une activité " gérable ", et, surtout, variée (c'est-à-dire où je peux montrer un maximum de mes différentes " possibilités pédagogiques ") pour la durée de la visite (3/4 d'heure). Voilà pour le volet plutôt théorique et normalien de cette future activité...

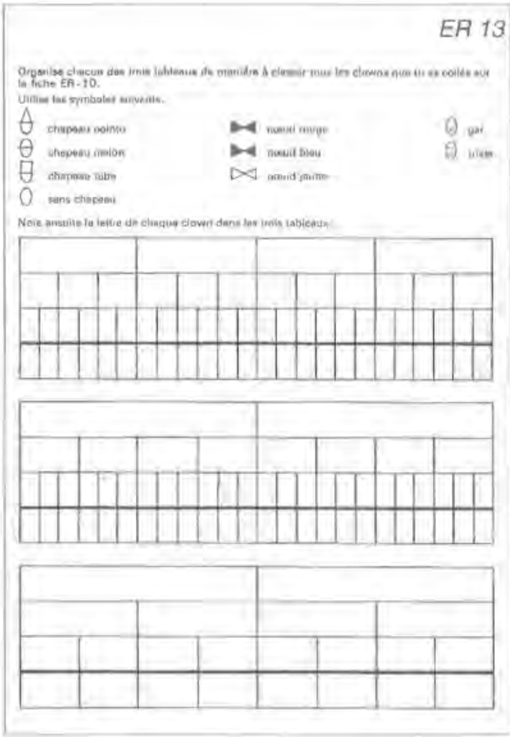
Côté pratique, j'ai comme mandat d'inscrire mon activité dans la continuité du travail de la classe en mathématiques... ce qui signifie: tenir compte des acquis des élèves, des chapitres qu'ils sont en train de découvrir, consolider ou exercer...

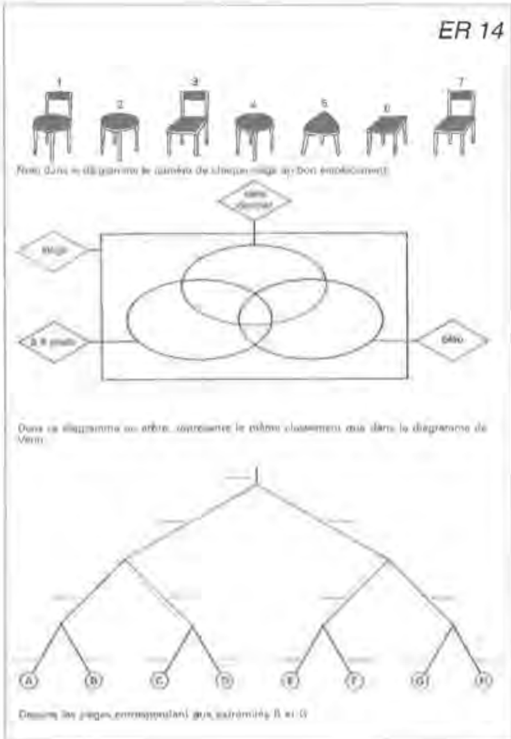
Dans cet esprit-là, nous nous mettons d'accord, mon professeur de stage et moi-même, et déterminons le contenu de cette future leçon : la consolidation du classement à trois critères, qui prolonge le thème dans lequel je me suis " plongée " en début de stage avec la classe : le dénombrement, à l'aide d'un diagramme en arbre, des différentes possibilités de tenues vestimentaires d'une personne en connaissant le nombre d'habits qui sont à sa disposition..., du genre de l'activité suivante, adaptée d'un problème des nouveaux moyens d'enseignement de 4P (Module 4. *Des problèmes pour connaître la multiplication*)

> *«Top model»*
> *Olivia a décidé de s'habiller d'un pantalon, d'une chemise et d'une paire de chaussures.*
>
> *Elle dispose de 4 chemises (une verte, une jaune, une noire et une orange), de 3 pantalons (un blanc, un noir et un rouge) et de 2 paires de chaussure (une marron et une beige).*
>
> *De combien de façons différentes Olivia pourra-t-elle s'habiller ?*

Un problème se pose alors à moi : impossible d'utiliser les activités proposées dans les moyens d'enseignement de mathématiques de 4ème primaire actuellement en vigueur dans les classes sous peine de ne pas plonger l'enfant dans une démarche de recherche mais de lui rappeler purement et simplement la procédure à suivre pour trouver les résultats qu'on lui demande et auxquels on aspire...

Deux exemples : ER 13 et ER 14, où les trois critères et le diagramme sont donnés directement à l'élève qui doit réécrire les critères aux bons endroits et remplir les diagrammes par des lettres ou des numéros :





Eh bien, profitons du privilège de l'école normale côté nouvelles méthodologies et empruntons à la future " méthode" de mathématique une activité qui convienne à la situation...

J'ai trouvé deux fiches sur le même genre de dénombrement déjà travaillé avec les élèves et aucun document sur les différents diagrammes possibles en tenant compte de trois critères.

Je ne doute pas que l'absence de ce sujet dans la méthodologie (ou, du moins, dans le fichier de l'élève) soit entièrement justifiée... , mais cela ne m'autorise pas à aller contre la planification de mon professeur de stage qui travaille, par la " force des choses ", avec la méthodologie actuellement en vigueur en 4ème primaire, et qui m'a chargée de mener à bien un thème exploité dans cette même méthodologie... .

En résumé, les "enjeux en jeu" dans le choix d'une activité mathématique dans ce contexte sont les suivants :

- l'attente du professeur de méthodologie lors de sa visite, à savoir assister à une activité de type socio-constructiviste,
- le programme suivi par la classe et prévu par le maître de stage; celui-ci m'octroie un thème à poursuivre dans la continuité de son travail.

Privilégier ce deuxième enjeu correspond à une prise de risque certaine : la visite peut être "ratée", avec une insuffisance à la clé... Mon " expert " reviendra me voir ...

Choisir la solution de l'activité de type socio-constructiviste "casserait" la continuité du travail de mon professeur de stage et, surtout, celle de l'élève ... Une situation artificielle où je ferais juste une leçon hors contexte, hors programme suivi ...

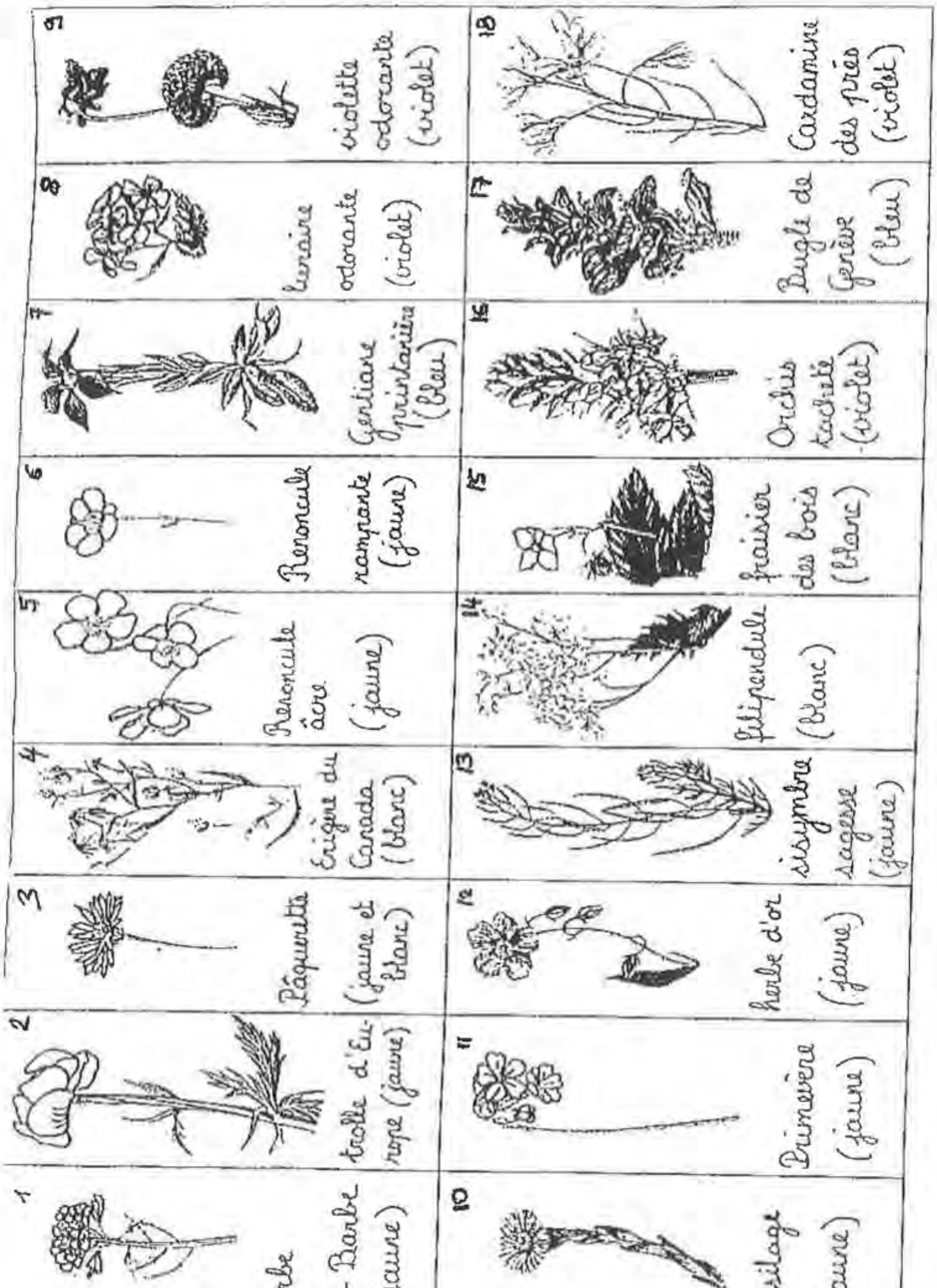
Poursuivre l'activité du programme actuel de la classe selon la nouvelle méthodologie semblerait être le compromis le plus logique, pour ce cas précis, impossible, comme je l'ai dit précédemment, ce thème n'est pas présent dans la future méthodologie (du moins dans ce que j'ai pu voir de cette nouvelle méthodologie)...

J'ai hésité à préparer une "activité-show" sur un problème de raisonnement pour ma visite, ce qui aurait eu l'avantage de passer presque à coup sûr le "test de la visite", mais qui n'aurait pas correspondu à la réalité de la classe... et qui aurait, mais seulement de façon momentanée, évité le dilemme des méthodologies.

J'aurais pu effectivement préparer cette leçon modèle et suivre ensuite les activités de la méthodologie actuelle des mathématiques sur le sujet traité dans ce domaine avec la classe; j'ai trouvé plus honnête, et surtout plus constructif, de montrer lors de ma visite, les difficultés rencontrées pendant ma recherche d'activité ou d'adaptation d'activité sur un thème donné... et ainsi de pouvoir en parler avec mon professeur de méthodologie de l'Ecole normale et essayer de résoudre ou, tout au moins, de faire avancer ce problème.

Quelques jours avant la fameuse visite, j'ai eu la chance de partir en "camp vert" avec ma classe de stage, camp au cours duquel nous avons constitué une sorte d'herbier, cueillant et identifiant les fleurs que nous rencontrions en promenade...

Nous avions, heureusement, ramené ces fleurs en classe et j'ai pu baser mon activité de classement sur elles, ce qui a résolu mon problème de visite, au cours de laquelle nous avons tout d'abord observé les fleurs, et relevé toutes leurs particularités, leurs différences (couleurs, grandeurs, formes des fleurs et des feuilles, nombre de pétales et de feuilles (quand il y en a). Les élèves ont ensuite travaillé par deux ; avec des grandes feuilles à disposition et un jeu d'étiquettes sur lesquelles les fleurs que nous avions ramenées étaient répertoriées, avec leur nom, leur couleur et leur "image". (Voir ci-dessous)



La première consigne de ce travail par deux se voulait très ouverte: "Essayez de trouver un moyen simple et le plus clair possible pour classer ces fleurs".

Les enfants ont pu voir qu'il y avait de nombreuses façons de classer ces fleurs, certains ont utilisé un tableau à deux entrées, d'autres ont fait des tas en triant les étiquettes par couleur, grosseur de tige (je n'y avais moi-même pas pensé!), etc.

Pour pousser ceux qui n'avaient pris qu'un seul critère (beaucoup n'ont tenu compte que de la couleur), je leur ai ensuite demandé de reclasser ces fleurs selon trois critères différents, ce qui amenait l'emploi du diagramme pour ceux qui ne l'avaient pas encore utilisé.

Et les élèves ont vraiment "croché", comprenant l'utilité des diagrammes pour s'y retrouver dans un classement !

Si le diagramme en arbre est vite apparu, les élèves ont eu de la peine à retrouver ou imaginer celui de Caroll (tableau à double entrée), ils ont inventé de nombreuses " solutions " fantaisistes mais bien pensées... avant que l'on recherche la " solution officielle " collectivement.

J'ai rarement vu des élèves chercher autant, ce qui m'a vraiment comblée lors de cette visite " d'expert ", de plus, ils n'avaient pas conscience de faire des mathématiques, mais plutôt de la botanique ... Beaucoup ont, en effet, pris mon professeur de mathématiques pour mon professeur de sciences naturelles ! J'étais ravie !

Loin d'être un pamphlet, mon intervention écrite est le fruit de ma réflexion et de mon expérience personnelles. Elle s'inscrit dans un dialogue ouvert sur la difficulté, pour "l'institutrice ou l'instituteur en formation", de jongler avec la méthodologie "actuelle mais dépassée" et la "méthodologie future", pas encore utilisée dans les classes et, du coup, pas encore à l'entière disposition des normaliennes et normaliens, mais dont ceux-ci devraient constamment s'inspirer pour créer des activités mathématiques.

Pas si simple, la transition : vivement la fin de cette injonction paradoxale et l'arrivée officielle, entière et " en grande pompe " des nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques pour tous les niveaux qui n'en bénéficient pas encore, afin de pouvoir s'appuyer sur des activités mûrement réfléchies, en accord avec la méthodologie en vigueur et de voir les futurs maîtresses et maîtres généralistes sortir de cette situation où ils doivent recréer une sorte de nouvelle "méthodologie-maison", tampon entre deux méthodologies loin d'être évidentes à conjuguer.

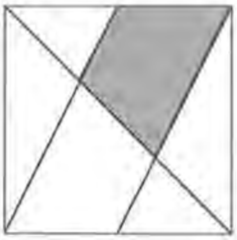
Un problème et son analyse : Fraction de Terrain[1]

Daniela Medici, Université de Parme

Le problème : FRACTION DE TERRAIN

Le père Joseph a un terrain carré. Il le partage par trois droites passant par des sommets ou des milieux de côtés.

François héritera de la partie grise du terrain carré de son père Joseph.



Quelle fraction du terrain recevra-t-il ?

Justifiez votre réponse.

Ce problème a été proposé aux classes de première, deuxième et troisième années de l'école secondaire, (Scuola media) lors de la première épreuve du 6e RMT (catégories 6, 7 et 8).

J'ai effectué une analyse a priori du problème et examiné les protocoles de la région de Parme et de Reggio Emilia en vue d'un travail de groupe pour les journées de Brique d'octobre 1998.

L'autre partie des protocoles et les stratégies de résolution ont été examinés durant la rencontre dans le groupe de travail auquel j'ai participé, avec des représentants de Suisse, du Luxembourg, de la République Tchèque et de France.

J'ai finalement repris nos données et résultats pour les exposer dans ce travail.

Analyse de l'énoncé

On peut reconnaître trois parties dans le texte du problème.

- La première introduit le sujet et veut décrire la figure, qui n'est jamais nommée explicitement. On précise comment le terrain a été partagé, mais sans explication complète. En fait, toutes les droites du type indiqué ne sont pas tracées sur la figure (l'article «les», qui se rapporte à «droite» est omis, justement) mais seulement certaines d'entre elles. Lesquelles ? Pour le déterminer il faut recourir au dessin. L'information absolument nécessaire est que ce sont les points milieux de deux côtés opposés qui sont utilisés pour le partage. La dernière partie de la phrase pouvait s'écrire ainsi « ... le partage en traçant une diagonale et les droites qui joignent les deux autres sommets aux points milieux des côtés opposés». Mais, plus simplement, on peut renvoyer la description à l'observation de la figure en ne signalant dans l'énoncé que les points milieux.
- La deuxième partie attire l'attention sur la zone à examiner. Dans la version italienne, le terme «ombreghiata» (qui veut dire «ombré» ou «ombragé» en français) n'est pas des mieux adaptés (un terrain ombragé a une autre signification). Il

[1] Cet article est tiré des *Actes des rencontres internationales de Brigue sur le Rallye Mathématique Transalpin* et (V. Notes de lecture et p. 3 de couverture). Traduction française : F. Jaquet

aurait été préférable, à mon avis, de dire plus explicitement que la partie de terrain reçue était pointillée (punteggiata, en italien) sur le dessin[2].

- Finalement, la question est bien formulée.

Contenu mathématique

Le problème est essentiellement de nature géométrique. Dans un premier temps, il faut analyser les types de figures qui composent le carré : en repérant les droites parallèles, on y reconnaît des trapèzes et des parallélogrammes. Il faut ensuite chercher des figures d'aires équivalentes, par découpage et compensations de polygones opportuns, choisis intuitivement (les instruments pour une démonstration pure et vraie font encore défaut) ou encore calculer directement des aires.

C'est un problème un peu insolite, étant donné qu'il est difficile d'exprimer des résultats de géométrie synthétique par l'intermédiaire de nombres.

Les résultats

Points attribués	Cat. 6 (77 classes)	Cat. 7-8 (81 classes)
4	13	36
3	4	2
2	11	12
1	4	3
0	35	16
Non réponse	10	12

Les protocoles des régions de Parma, Reggio Emilia, Siena, Cagliari et de la Suisse romande ont été analysés.

Aucune différence significative ne se manifeste entre la Suisse et l'Italie. Les types d'erreurs sont les mêmes et la variation de leur fréquence n'est pas sensible.

La première partie de l'énoncé, bien qu'elle n'était pas très claire, n'a pas créé de difficultés. L'analyse des protocoles montre que les élèves n'ont pas buté sur le texte mais ont examiné directement le dessin. Une seule classe a partagé ultérieurement le terrain en traçant toutes les droites du type indiqué par l'énoncé.

Au contraire, le doute exprimé dans l'analyse a priori à propos du terme "ombreggiata", s'est confirmé. Dans quelques classes, ce mot a donné lieu à de fausses interprétations : les élèves ont cherché à orienter le terrain selon les points cardinaux de façon à ce que la zone soit dans l'ombre. Une autre classe a affirmé, pour sa part, que «étant donné que le texte n'explique pas d'où vient le soleil, le problème est impossible à résoudre».

Un petit nombre de classes a donné à l'expression «fraction de terrain», le sens de «bout de terrain» souvent rencontré dans la langue courante.

Comme on le remarque dans le tableau, près du 50% des classes ont indiqué la réponse juste, parmi lesquelles, environ 35 % ont fourni une explication complète.

On observe que si on échangeait les données relatives aux points 0 et 4 dans la catégorie 7 - 8, les résultats ne seraient pas très différents de ceux de la catégorie 6.

Pour l'Italie, ceci dépend évidemment du fait que la géométrie est abordée en première secondaire (prima media) vers la fin de l'année scolaire. Les élèves n'avaient donc à disposition que les instruments élaborés à l'école élémentaire, probablement oubliés en partie.

[2] Note du traducteur, la critique ne vaut pas pour la version française qui a précisément évité l'ambiguïté en parlant de «partie grise».

Le concept de fraction est aussi appliqué de manière erronée : pour plus de la moitié des classes qui ont obtenu 0 point, le dénominateur n'indique pas nécessairement un nombre de parties équivalentes entre elles ! Il faut signaler que cette même erreur a été relevée dans cinq classes de la catégorie 7, six classes de la catégorie 8, ainsi que chez une équipe de correcteurs. On notera de nouveau que, en première secondaire, le thème des fractions n'est traité habituellement que dans le deuxième tiers de l'année. On retiendra donc qu'on aurait obtenu des résultats meilleurs si le problème avait été proposé dans la deuxième épreuve ou carrément dans l'épreuve finale.

Analyse des stratégies

Calcul de l'aire	15 classes	9,5 %	(8 classes des CAT. 7-8)
Décomposition en parallélogrammes	20 classes	12,6 %	(13 classes des CAT. 7-8)
Décomposition en triangles	29 classes	18,4 %	(26 classes des CAT. 7-8)
Décomposition en trapèzes	1 classe	0,6 %	(Cat. 6)
Sans aucune stratégie évidente	19 classes	12,0 %	(7 classes des CAT. 7-8)
Usage erroné des fractions	30 classes	19,0 %	
Incompréhension ou non réponse	44 classes	27,8 %	

On distingue essentiellement trois procédures de résolution :

a) **Utilisation de ciseaux et colle**

Cette stratégie a été adoptée par six classes seulement, (trois suisses et trois italiennes), révélant ainsi que les élèves (beaucoup d'entre eux venaient de quitter l'école élémentaire) n'ont que très peu l'habitude d'opérer manuellement. Pour l'essentiel, deux voies ont été suivies . Quelques groupes ont décomposé le carré en deux parallélogrammes : en découpant la figure selon les lignes dessinées, on obtient quatre triangles et deux trapèzes isométriques qui forment deux parallélogrammes isométriques et on en déduit que le trapèze vaut le quart du carré entier. D'autres, en revanche, ont affirmé que chaque trapèze est équivalent à deux triangles, sans pourtant en donner une vérification.

b) **Observation de la figure**

De nombreuses classes ont «raisonné» sur la figure, quelques-unes sans la modifier, d'autres en traçant des segments supplémentaires. Ceux qui n'ont pas modifié la figure ont désigné chaque partie du terrain par une lettre ou par un nombre (voir figure 1) et ainsi, par l'argumentation : " a + b = c et e + f = d, donc il y a en tout quatre trapèzes équivalents." La première partie de la réponse n'est cependant ni vérifiée ni justifiée.

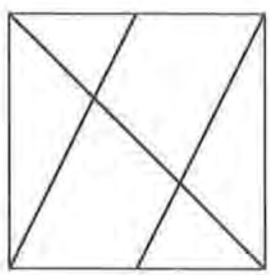


figure 1

Parmi ceux qui ont modifié la figure, et qui généralement ont dessiné la médiane (figure 2), on distingue des stratégies variées :

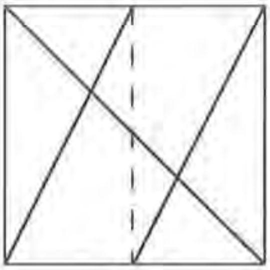


figure 2

Dans le carré on reconnaît quatre triangles rectangles isométriques. Deux d'entre eux composent le parallélogramme. La zone en gris (figure 3) est la moitié du parallélogramme et est donc le quart du carré.

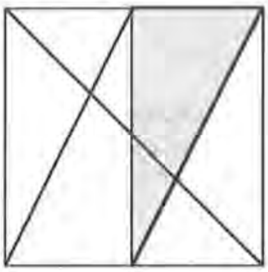


figure 3

Le carré est divisé en quatre triangles rectangles isométriques et le trapèze est équivalent à l'un d'eux. «En additionnant entre eux DFA et ECB on obtient un rectangle» qui est la moitié du carré. (figure 4)

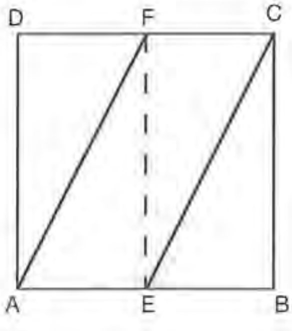


figure 4

Une seule classe, faisant preuve d'une bonne intuition, a décomposé le carré en quatre trapèzes isométriques.

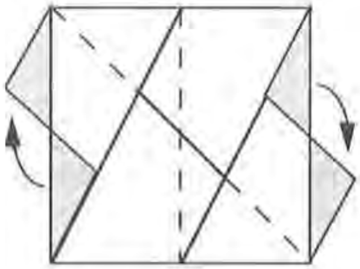


figure 5

c) **Calcul de l'aire**

Cette stratégie s'est révélée peu efficace dans la majorité des cas. Elle dépend en effet de mesurages qui, évidemment, entraînent des erreurs dues au manque de précision des instruments et des élèves ou dues au passage par des approximations. Les protocoles corrects étaient peu nombreux. Dans certains d'entre eux, la côté du carré a été choisi comme unité de mesure. On note qu'en catégorie 6, l'aire du trapèze a été calculée comme une différence.

Un carré magique pour l'an 2000

Francis Perret, Cortaillod

Voici un carré magique d'ordre 5 établi à l'intention des lecteurs de Math-Ecole:

472	238	274	400	616
436	544	220	292	508
580	346	418	454	202
328	490	562	256	364
184	382	526	598	310

Vous retrouverez la somme s = 2000 en additionnant les termes dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans les deux diagonales.

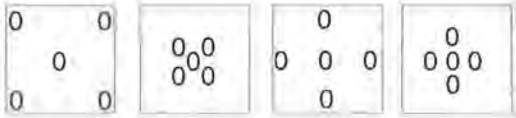
Par ailleurs, les 25 nombres de 3 chiffres (répartis semble-t-il au hasard) forment une suite arithmétique de raison 18 (l'auteur est né en 1918). Le premier terme 184 est en bas à gauche et le dernier terme 616 en haut à droite.

En remplaçant dans le carré chaque nombre par son rang dans la suite arithmétique, on obtient un autre carré magique :

remplacer	184	par	1
	202		2
	220		3
	...	...	...
	616		25

Quelle est la somme s' de ce nouveau carré magique ?

Revenons au carré magique de départ. Totalisez les schémas suivants que je nomme «diamants 1, 2, 3 et 4». Vous découvrirez 4 nouvelles merveilles:



1 2 3 4

Remarque de la rédaction

Les diamants 1 et 2 d'une part, les diamants 3 et 4 d'autre part, apparaissent toujours simultanément. Ils sont conséquence l'un de l'autre.

En voici la preuve :
Désignons par s la somme des cinq termes en ligne, en colonne, en diagonale dans le carré magique d'ordre 5

a				b
	x		y	
		c		
	z		t	
d				e

		a		
		x		
b	y	c	z	d
		t		
		e		

Hypothèse : le diamant 1 (ou 3) apparaît dans le carré magique,

(1) $a + b + c + d + e = s$

Conclusion : le diamant 2 (ou 4) apparaît aussi dans le carré magique

(2) $x + y + c + z + t = s$

Démonstration : Additionnons les termes des deux diagonales dans le premier cas et les termes de la verticale et de l'horizontale dans le deuxième cas :

$$(a + x + c + t + e) + (b + y + c + z + d) = 2s$$

ou

$$(a + b + c + d + e) + (x + y + c + z + t) = 2s$$

D'après l'hypothèse, cette relation devient :

$$s + (x + y + c + z + t) = 2s$$

d'où $x + y + c + z + t = s$

La réciproque s'obtient en échangeant l'hypothèse et la conclusion.

Le Casino

Martine Simonet, Ecole Normale, NE

Nombre de joueurs : 2 à 6

Matériel

- 4 séries de cartes numérotées de 0 à 13 (4 couleurs). (On peut prendre les cartes du jeu du Coucou ou Nombres, matériel de 1+2P, ou les cartes d'un jeu de 52 cartes + Jokers.)[1]
- des pièces de 1.-, 2.-, 5.- et des billets de 10.-, 20.-, 50.- (la Banque).

Règles du jeu

La Banque est disposée au centre de l'espace de jeu. Chaque joueur reçoit 4 cartes et les dispose devant lui, ne gardant visibles que celles qui sont de la même couleur, détournant les autres. Le joueur qui, avec 2, 3, ou 4 cartes de même(s) couleur(s) obtient le plus grand nombre de points, gagne une somme d'argent équivalente (c'est-à-dire autant de francs que de points obtenus).

Après avoir écarté les cartes distribuées à ce premier tour, chaque joueur reçoit 4 nouvelles cartes. Et ainsi de suite.

Le gagnant du jeu (à définir au début de la partie !) peut être :

- Celui qui totalise la plus grande somme après un certain nombre de tours défini préalablement.
- Le premier à atteindre ou dépasser 100.-
- Celui qui ... (selon le choix des enfants). Les enfants avancés aiment jouer aussi longtemps que la banque le leur permet.

---

[1] Moyens d'enseignement Mathématiques 2P, Corome 1997.

JEUX & MATHEMATIQUES POUR TOUS[1]

A. Deledicq, J.-C. Deledicq, F. Casiro, 1999, ACL - Les éditions du Kangourou, 64 p. Quadrichromie, 21x 27 cm

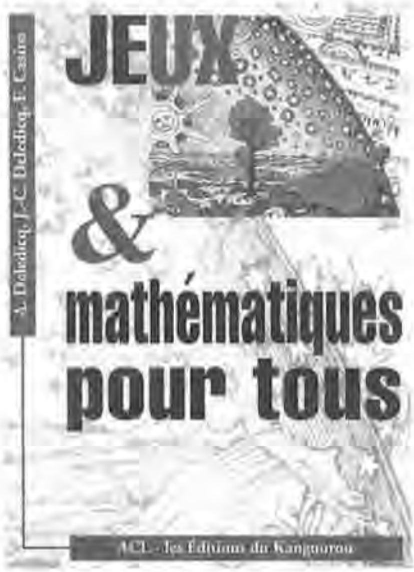
«Pourrait-on vivre dans un monde sans essayer d'en comprendre les pourquoi et les comment ? Qu'on l'appelle curiosité, appétit de savoir ou soif de connaissance, l'attrait de la découverte nous entraîne à explorer les limites de notre territoire et de notre intelligence.»

C'est par ces termes que les auteurs présentent leur dernier ouvrage, dans la veine *des Jeux & découvertes mathématiques*, paru il y a quelques années dans la collection *Maths pour Tous*, destiné à tous les «mathémaliciens de 11 à 111 ans». Ils proposent au lecteur de jouer avec les mathématiques, en en abordant quelques thèmes mathématiques avec le sourire, en résolvant quelques problèmes pour le plaisir de réfléchir, et en se posant 64 petites questions amusantes, pratiques, logiques, géométriques ou numériques. En voici le contenu détaillé :

Des mathématiques pour s'amuser

Les sept ponts d'Euler
La Terre est-elle vraiment ronde ?
De la feuille A4 à l'octogone régulier
Les filets des nombres
Les carrés scissipares
Les triangles mystérieux
Stephen Leacock
L'arithmétique diabolique
Les puzzles polygonaux

[1] Commandes, v. p. 3 de couverture



Quinze pages de malices
L'horloge de Kürchak
Les comptes de M. Barrême
Opération aérienne
Quel temps fait-il à Paris ?
Comptes et fables
Le Kangourou
Intersections
Le triangle de Chou Chi Kei
Le triangle de Leibniz
Un problème difficile
Jeux olympiques

64 petites questions
Questions pratiques
Questions calculatoires ou géométriques
Questions de bon sens

Solutions

Destinataires : toute personne curieuse et qui trouve du plaisir à réfléchir en mathématiques, en particulier maîtres et élèves des premiers degrés de l'école secondaire

Mots-clés : mathématiques, plaisir découverte

F.J.

LE TRAVAIL DE GROUPE DANS LES NOUVEAUX MOYENS D'ENSEIGNEMENT DE MATH 1P : ATTITUDES D'ENSEIGNANTS

Pierre-Charles Dagau et Laurent Dubois

Mémoire de licence en Sciences de l'Education de la subdivision DPE. Université de Genève, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education

(Commission : Greta Pelgrims Ducrey, directrice, Gianreto Pini, directeur, Chantal Tièche)

[ndlr] Un mémoire de licence est d'un type différent de publications habituellement présentées dans nos notes de lecture : il n'est pas édité publiquement et s'inscrit dans un processus de certification institutionnelle des connaissances de son (ses) auteur(s). Nous signalons cependant celui-ci en raison de la «proximité» du thème traité pour les lecteurs de *Math-Ecole.* [2] .

Après une année d'expérimentation de la méthode de travail en groupe dans le cadre des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques, les titulaires genevois de 1e primaire ont certainement développé un discours à l'égard de ce mode d'organisation. Nous en sommes d'autant plus convaincus que, comme nous avons pu le comprendre au travers des propos de Gagnebin, Guignard et Jaquet (1997)[3] , le travail de groupe, loin d'être une simple stratégie d'enseignement de plus, remet sérieusement en question la nature de la relation pédagogique (basée sur un savoir transmis par l'enseignant dans le cadre d'une organisation frontale de la classe). En conséquence, l'orientation du corps enseignant vers une pédagogie axée sur la coopération entre pairs pour développer des savoirs mathématiques présuppose, nous semble-t-il, que cette méthode et ses implications rencontrent, au sein de celui-ci, un minimum d'approbation.

Dans ces circonstances, on peut s'interroger sur les attitudes des enseignants à l'égard de certaines problématiques relatives à l'apprentissage coopératif : la gestion de la classe, l'efficacité de cette démarche et le nouveau rôle qu'ils doivent assumer.

On peut également se demander si l'hétérogénéité des trajectoires et des contextes professionnels du corps enseignant ne conduira pas ce dernier à adopter des attitudes variables. En effet, il est difficile d'imaginer que des caractéristiques personnelles telles que l'expérience professionnelle, la formation continue, la collaboration professionnelle ne soient pas sans incidence sur les attitudes. De même, il nous semble légitime de penser que les enseignants peuvent être influencés par le fait de bénéficier d'une ressource supplémentaire (poste de GNT) ou d'évoluer dans un cadre institutionnel engagé dans un mouvement de réformes pédagogiques (école en innovation/réflexion).

Comme on peut le constater, le recours à l'apprentissage coopératif, dans la nouvelle méthodologie de mathématiques, soulève toutes sortes d'interrogations particulières. Envisagée comme un des instruments susceptibles de contribuer à l'établissement d'un bilan, nous espérons que la recherche que nous avons menée apporte quelques éléments de réponses en recueillant et en analysant les attitudes des enseignants.

P. C. D et L. D.

[2] Ce mémoire peut être emprunté à la bibliothèque de la FPSE de Genève ou au Service de documentation de l'IRDP, à Neuchâtel

[3] Gagnebin A., Guignanrd. N., Jaquet. F. 1997 *Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'Ecole primaire.* Ed. COROME (deuxième édition, 1998)

LE RALLYE MATHEMATIQUE TRANSALPIN QUELS PROFITS POUR LA DIDACTIQUE ?
(Il Rally matematico transalpino, quali apporti per la didattica ?)[4]

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, (Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino) Brigue 1997 - 1998

L. Grugnetti et F. Jaquet Eds. 1999. IRDP (CP 54, CH-2007 Neuchâtel 7) et Dipartimento dell'Università di Parma (Via d'Azeglio 85,1- 43100 Parma) 190 pages, (format 24 x 17)

Les concours et autres confrontations mathématiques interclasses suscitent un intérêt croissant chez les élèves et les maîtres. Parmi eux, le «Rallye mathématique romand» devenu «Rallye mathématique transalpin» (RMT) après quelques années d'existence, connaît un développement important puisque, de 20 classes en 1993, il a vu sa participation s'étendre à près de 1000 classes des degrés 3 à 8 (8 à 13 ans) en Suisse, Italie, France, Luxembourg et République tchèque.

Ce qui distingue le RMT d'autres concours tient à son organisation et aux analyses de ses problèmes : dévolution de la tâche de résolution à la classe (en l'absence du maître) qui doit expliciter ses procédures et justifier ses solutions; analyses approfondies des problèmes et des productions des groupes d'élèves par des équipes de chercheurs et enseignants. Les résultats accumulés depuis sept ans offrent une source de données extrêmement riche pour la didactique des mathématiques.

L'ouvrage contient les présentations et les synthèses des travaux de deux rencontres internationales qui ont permis aux équipes animatrices de conduire une réflexion approfondie sur les buts, la gestion et l'exploitation des résultats du concours :

- une présentation du RMT, de ses finalités aux modalités d'organisation,
- des points de vue de chercheurs, d'enseignants et d'élèves sur les apports du concours,
- les études détaillées de neuf problèmes, tirés des épreuves des 5e et 6e RMT, de l'analyse a priori aux différents types de procédures révélées par l'examen des protocoles de résolution élaborés par les élèves.

Tous les articles sont en français et en italien.

En annexe, deux épreuves complètes avec, pour l'une, les analyses a priori des problèmes et, pour l'autre, les résultats et commentaires à l'intention des élèves, complètent la présentation du RMT et de ses apports.

Les articles de ces actes peuvent être directement exploités en formation initiale ou continue, ils suggèrent également de nombreuses pistes de recherche pour les élèves, les maîtres et les chercheurs, dans les domaines de la résolution de problème et de la didactique des mathématiques.

Mots-clés : didactique des mathématiques : procédures et stratégies en résolution de problème, interactions entre élèves, analyse a priori.

Destinataires : praticiens et chercheurs en didactique des mathématiques, formateurs.

[4] Commandes, v. p. 3 de couverture

Abonnements et commandes

Bulletin à retourner (photocopier) à : ***Math-Ecole*** **- CP 54 - 2007 Neuchâtel 7**

☐ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole*** . (Tarifs en page 2 de couverture.)

Veuillez me faire parvenir :

Faire de la géom. en jouant avec Cabri-géomètre (I/II)	......	(ens. à Fr. 30.-)
Encyclopédie kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 28.-)
Les annales du kangourou, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Exos-malices, ACL	......	(ex. à Fr. 29.-)
Histoire de Maths, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
La magie du calcul, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Pythagore et Thalès, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Le monde des pavages, ACL	......	(ex. à Fr. 19.-)
Les maths & la plume, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 14.-)
Jeux mathématiques pour tous, ACL	......	(ex. à Fr. 16.-)
Pliages mathématiques, ACL	......	(ex. à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	......	(ex. à Fr. 25.-)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	......	(ex. à Fr. 38.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	......	(ex. à Fr. 26.-)
La CIEAEM au travers de ses 50 premières rencontres	......	(ex. à Fr. 6.-)
Actes de la CIEAEM 50	......	(ex. à Fr. 35.-)

PROBLEMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT	......	(ex. à Fr. 18.-)
Jeux IV : de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	......	(ex. à Fr. 28.-)
Fichier Evariste APMEP	......	(ex. à Fr. 25.-)
Panoramath 96, APMEP	......	(ex. à Fr. 12.-)*
Panoramath 2, CIJM, APMEP, ACL	......	(ex. à Fr. 18.-)*
Panoramath 96, Panoramath 2,	......	(ens. à Fr. 25.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	......	(ex. à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles	......	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles, POLE	......	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour tous	......	(ex. à Fr. 16.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous, POLE	......	(ex. à Fr. 16.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	......	(ex. à Fr. 16.-)
Le Trésor du vieux Pirate (n°12)	......	(ex. à Fr. 5.-)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	......	(ex. à Fr. 5.-)*

*En liquidation jusqu'à épuisement du stock. Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Nom et prénom : ☐ Mme ☐ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Localité (avec code postal) : ....

Date : .... Signature : ....

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7