MATH ECOLE

15e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

L'arithmétique d'Euler

Espace et perspective

39e année

194

octobre 2000

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.

Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces – bonnes – lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques**.

Dans *Math-Ecole*, on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques,
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.–
anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.- par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.- par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7**,
par courrier électronique E-mail : **francois.jaquet@irdp.unine.ch**
ou par INTERNET : **http://www.irdp.ch/math-eco**

Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.

MATH-ECOLE

39e année, cinq numéros par an

194

octobre 2000

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*
Case postale 54
CH-2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche et
de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH - 2007 Neuchâtel 7
Tél (032) 889 86 03
(de 14h à 17h30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 86 09
Fax (032) 889 69 71

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Jacques-André Calame
Michel Chastellain
Roger Délez
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Alain Ramelet
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Janine Worpe

Mise en page
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Florina, rue de la Lombardie 4
CH-1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Spirale de carrés ayant pour côté les nombres de la suite de Fibonacci

Sommaire

Editorial

2000, année mondiale des mathématiques

L.-O. Pochon, IRDP

En mai 1992, à Rio de Janeiro, l'Union Mathématique Internationale (IMU) a proposé que l'année 2000 soit l'année mondiale des mathématiques. La déclaration de Rio, évoque les trois buts principaux de cette initiative:

- La détermination des défis mathématiques du 21e siècle. Ce point fait référence à la série de problèmes proposée par David Hilbert lors d'une conférence à Paris en 1900. Ces problèmes, pas tous résolus, ont servi de base à l'édification de nombreuses théories mathématiques durant le 20e siècle.
- La promulgation des mathématiques, «pures» et appliquées, comme une des clés importantes pour la compréhension du monde et de son développement.
- La reconnaissance de la présence systématique des mathématiques dans la «société de l'information». Il apparaît que cette proposition a pour but de donner une juste image des mathématiques au «grand public».

En novembre 1997, l'UNESCO approuve l'initiative de l'Union Mathématique Internationale et déclare l'année 2000 «Année Mathématique Mondiale» et encourage d'entreprendre dans ce cadre, des activités de promotion des mathématiques à tous les niveaux et ceci à l'échelle mondiale[1]. Plusieurs pays appuient cette proposition dont la Suisse par la voix du Conseiller fédéral Flavio Cotti.

Il peut être intéressant de relever les raisons évoquées dans la déclaration de l'UNESCO, plus centrées que celles de l'UMI sur les aspects «humanistes» des mathématiques:

- Importance centrale des mathématiques et de leurs applications dans le monde actuel, en rapport avec les sciences, les technologies, notamment celles de l'information, et l'économie.
- Les mathématiques prennent des racines profondes dans beaucoup de cultures et les penseurs les plus éminents ont contribué d'une manière significative à leur développement au long de plusieurs millénaires.
- Le langage et les valeurs des mathématiques sont universels, elles conviennent donc de façon idéale à favoriser la coopération internationale.
- Le rôle clé des mathématiques pour l'éducation, en particulier aux niveaux scolaires primaire et secondaire, à la fois pour la compréhension des concepts mathématiques de base et pour le développement de la pensée rationnelle.

Diverses manifestations ont eu lieu à travers le monde à l'enseigne de cette «Année Mathématique Mondiale». Certaines destinées à un public spécialisé (congrès), d'autres à un large public (expositions dans les couloirs du métro à Bruxelles, Montréal, Buenos-Aires et Paris, cycles de conférences, etc.).

1. A noter, pour la petite (?) histoire, que le montant alloué par l'UNESCO pour cet événement était de 20 000 $. La «nouvelle économie» nous avait fait oublier qu'il existait des sommes aussi dérisoires !

En Suisse, quelques échos aussi : la manifestation «Matematica e Cultura 2000» (Accademia di architettura dell'Università della Svizzera Italiana, Mendrisio), le congrès lié aux cent ans de la revue «L'Enseignement Mathématique» (Université de Genève), la présentation du problème de l'empilement des sphères par François Sigrist (Université de Neuchâtel) au journal télévisé romand.

Il y a eu certainement d'autres «célébrations» de cette année dans notre pays, mais, dans l'ensemble, cette initiative ne semble pas avoir soulevé des montagnes. Toutefois, il vaut la peine de garder en mémoire les raisons évoquées par l'UNESCO pour soutenir ce mouvement. A l'heure où les programmes de mathématiques sont revus et corrigés, il pourrait être intéressant d'examiner attentivement cette déclaration et ses implications, notamment culturelles et sociales.

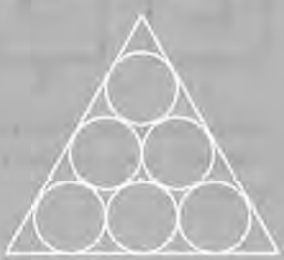
Par ailleurs, il reste encore un ou deux mois pour faire une petite information auprès des élèves. Pour cela, diverses idées peuvent être puisées sur les nombreux sites consacrés au sujet à partir du site «officiel» dont l'adresse est: wmy2000.math.jussieu.fr

Pour aborder le problème de l'empilement des sphères : les disques dans un triangle

Si on s'intéresse à la question des empilements optimaux d'objets dans des formes données, on peut examiner le cas particulier du placement de disques dans un triangle équilatéral.

Si le problème général du placement de k cercles égaux dans le plus petit triangle équilatéral possible reste ouvert, il est possible d'aborder des cas particuliers.

Par exemple, on peut placer 6 disques de diamètre 1 dans un triangle équilatéral de la façon suivante :



Dans cette disposition, quel est le côté du triangle équilatéral ?
Est-il possible de placer ces 6 cercles dans un triangle équilatéral plus petit ?
Est-il possible de placer 5 cercles de diamètre 1 dans un triangle équilatéral plus petit ?

(Problème adopté d'une proposition trouvée sur le site du Colloque EM 2000 : L'enseignement des mathématiques, dans les pays francophones, au XXe siècle, et ses perspectives pour le début du XXIe siècle. Internet : EM2000.imag.fr)

15e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

1/4 de finale individuels

Début catégorie CM

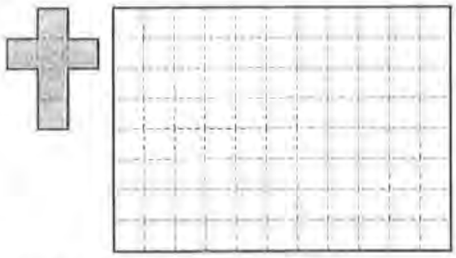
1. Les dix verres (coefficient 1)

Dix verres sont sur le comptoir. Trois contiennent du jus de pomme (de couleur claire) et deux contiennent du jus de raisin (de couleur foncée). Mais la distribution a été mal faite. Seuls les cinq verres les plus à droite (en traits plus épais) doivent contenir du jus de fruits, les cinq verres les plus à gauche devant être vides. De plus, deux verres de même forme doivent toujours contenir la même sorte de jus de fruits. Une manipulation consiste à prendre un verre, à le vider dans un verre vide, puis à le remettre à sa place initiale. **Combien de manipulations seront-elles nécessaires, au minimum, pour parvenir à ce résultat ?**

2. La caravanne Peugeot (coefficient 2)
L'autre jour, sur la route, se succédaient des voitures Peugeot d'années très différentes: une 106, une 203 et une 309. J'ai alors pensé à d'autres modèles de la même marque: 204, 304, 404, 504, 604. Parmi tous les nombres cités, on peut en trouver quatre dont la somme est égale à celle de trois autres. **Quel est le nombre qui reste seul ?**

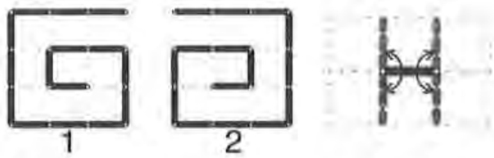
Début catégorie C1

3. Rangement pénible (coefficient 3)
Combien peut-on ranger, au maximum, de pièces en forme de croix dans une boîte rectangulaire 11 x 8 ?



Note: les pièces, rangées à plat, peuvent se toucher, mais pas se superposer.

4. Parois pivotantes (coefficient 4)
Pour une exposition de jeux mathématiques, Thomas a disposé 15 panneaux en spirale (disposition 1). Nina préfèrerait la disposition 2. Chaque panneau peut pivoter autour de ses extrémités (voir figure ci-contre).



Quel nombre de parois faut-il faire pivoter, au minimum, pour passer d'une disposition à l'autre ?

Début des catégories C1, L1, L2, GP, HC

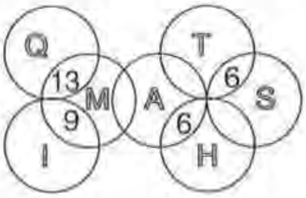
5. Aïe mes aïeux (coefficient 5)
La femme de D. Sandent a accouché de trois garçons en l'an 1800 (un beau triplé !). Depuis, chaque individu Sandent de sexe masculin a eu lui-même 3 garçons, sauf un petit-fils de D. Sandent et un arrière petit-fils de D. Sandent

qui n'ont pas eu d'enfant. Je suis moi-même le dernier né (de sexe masculin) de la 7e géné-ration suivant D. Sandent. **Au fait, combien de descendants de D. Sandent (de sexe masculin) ont-ils porté son nom, de la 1e à la 7e génération ?**

6. Les sept disques (coefficient 6)

Les 7 disques Q, I, M, A, T, H, S ont chacun une valeur différente comprise entre 1 et 7. Dans certaines intersections de deux disques, on a indiqué la somme des valeurs de ces deux disques.

Quelle est la somme des valeurs des cinq disques M, A, T, H, S ?

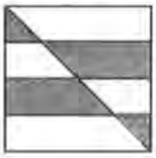


Fin catégorie CM

7. Le champ du père Méable (coef. 7)

Pierre Méable possède un champ carré de 100 m de côté. Amateur de fleurs, il a partagé son champ en quatre bandes de même largeur, il a tracé une diagonale, puis il a planté une partie du champ en rosiers (en gris sur le dessin) et le reste en tulipes.

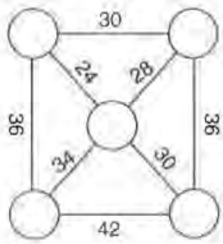
Quelle fraction du terrain représente la partie plantée en rosiers ?



8. Les cinq nombres (coef. 8)

Cinq nombres étaient écrits sur les cinq disques du dessin suivant. Ils ont été effacés, mais heureusement, sur chaque segment, on avait pris soin de noter la somme des deux nombres placés dans les deux disques situés aux extrémités de ce segment.

Retrouvez les cinq nombres.



9. Billes en tête (coefficient 9)

Jacques a six sacs de billes devant lui.Les nombres de billes contenus dans les sacs sont des entiers consécutifs pas nécessairement distincts, par exemple comme 12, 12, 13, 14, 14, 15. Jacques prend trois sacs pour lui et donne les trois autres à son frère. Il possède alors 58 billes en tout et son frère en a 61. **Donnez par ordre croissant les nombres de billes contenus dans les sacs.**

Fin catégorie CM

10. Quelle famille (coefficient 10)

Des membres d'une même famille sont réunis pour un anniversaire. Parmi les personnes présentes, il y en a deux qui peuvent être appelées «papa» par au moins une autre personne de l'assemblée, deux qui peuvent être appelées «maman», deux «mon fils», deux «ma fille», deux «ma sœur», quatre «mon frère», deux «ma belle-sœur», deux «mon beau-frère», deux «ma cousine», deux «mon cousin», deux «ma nièce», deux «mon neveu», deux «ma tante», deux «mon oncle», deux «ma femme» et deux «mon mari». **Combien de personnes sont-elles présentes, au minimum ?** Note: On supposera que lorsque deux personnes quelconques sont en présence l'une de l'autre, chacune ne peut appeler l'autre que d'une seule façon.

11. Un château médiéval (coefficient 11)

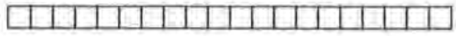
Le château de Mathville est entouré d'un rempart de hauts murs. Ces murs mesurent, classés par ordre croissant, 10 m, 20 m, 30 m, 40 m, 50 m, 60 m, 80 m, 110 m. D'autre part, chaque mur est perpendiculaire au mur précédent et au mur suivant. **Quelle est, au maximum, l'aire du domaine intérieur au mur d'enceinte ?** Vous donnerez la réponse en dam^2.

Fin catégorie C2

12. Esprit de suite (coefficient 12)
8 7 5 6 3 5 3 0 1 8 .... On a choisi et écrit deux chiffres : le 8 et le 7, puis on a écrit leur produit 56. Ensuite, on écrit le produit du 7 (2e chiffre) et du 5 (3e chiffre) : 35, puis le produit du 5 (3e chiffre) et du 6 (4e chiffre) : 30. On continue ainsi en se décalant d'un rang à chaque fois et en écrivant à la suite le produit des deux chiffres considérés (qui s'écrit avec un ou deux chiffres). Au bout d'un temps plutôt long, on n'obtiendra que des zéros. Quel sera le dernier chiffre non nul ?

13. Mi-carré – mi cube (coefficient 13)
Un nombre est dit « mi-carré - mi-cube » s'il peut s'écrire comme la somme d'un carré et d'un cube. Ainsi, l'an 2000 aura été une année «mi-carrée - mi-cube» car $2000 = 44^2 + 4^3$. **Quelles était la précédente année « mi-carrée - mi-cube» ?**

14. La petite grenouille et les pavés (coef. 14)

D  A

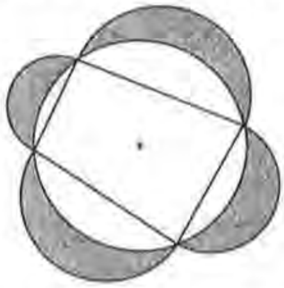
La petite grenouille est capable de sauter d'un seul bond par dessus les 20 pavés. Mais elle peut aussi aller de D à A en se posant sur un ou plusieurs pavés intermédiaires. Les seules règles qu'elle s'est imposées à elle-même sont d'aller toujours en avant et de ne jamais sauter d'un pavé à un autre pavé immédiatement adjacent. Combien de parcours différents peut-elle effectuer pour aller de D à A ?

15. Cadres autoréférents (coefficient 15)

Cadre A ------->	Le cadre A contient .... lettres de moins que le cadre B.
Cadre B ------->	Le cadre B contient .... lettres de moins que le cadre C.
Cadre C ------->	Le cadre C contient .... lettres de moins que n'en contiennent les cadres A et B ensemble.

Complétez les pointillés avec des nombres écrits en toutes lettres afin que toutes les phrases écrites dans les cadres soient vraies.

16. Le cerf-volant aux 4 lunules (coefficient 16)



Le cadre de ce cerf-volant est un quadrilatère inscrit dans un cercle.Les côtés du quadrilatère mesurent des nombres entiers de centimètres tous différents. Pour des raisons aérodynamiques, quatre lunules sont fixées sur le cadre, chacune d'elle ayant pour diamètre le côté du quadrilatère sur lequel elle est attachée. La somme des aires des quatre lunules (en gris) est égale à celle du quadrilatère. Quelle est-elle, au minimum ? On donnera la réponse en cm^2

Fin catégorie C2 HC

Consultez le site
du Comité International
des Jeux Mathematiques et la page
de la F.F.J.M. à l'adresse internet :
http://www.cijm.org

Comment participer au quinzième Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques ?

1) *Repérez les problèmes que vous avez à résoudre (de 6 à 12 problèmes selon votre catégorie).*

catégorie CM :
Cours Moyen 1 et 2 (2 dernières années de l'école primaire, CH : degrés 4 et 5)

catégorie C1 :
classes de 6e et 5e des collèges (2 premières années du secondaire, CH : degrés 6 et 7)

catégorie C2 :
classes de 4 e et 3 e des collèges (3e et 4e années du secondaire, CH : degrés 8 et 9)

catégorie L1 :
classes de 2e et 1e et Term des lycées (3 dernières années du secondaire, CH : degrés 10 à 13)

catégorie L2 :
2 premières années de l'enseignement post-baccalauréat

catégorie GP :
grand public (les ex-participants à une finale internationale sont en HC)

catégorie HC :
haute compétition

2) *Essayez de résoudre ces problèmes et complétez le bulletin-réponse, première page seulement pour la catégorie CM (chaque problème peut avoir une ou plusieurs réponses ; si l'emplacement pour 2 réponses est prévu, cela n'implique pas qu'il y en ait forcément plusieurs).*

3) *Joignez le montant de votre adhésion :*

	CM	C1 / C2	L1	L2	GP/ HC
Fr.	30 FF	50 FF	70 FF	80 FF	100 FF
Belgique	175 FB	350 FB	450 FB	500 FB	650 FB
Suisse	7 FS	15 FS	20 FS	23 FS	30 FS

4) *Postez le tout avant le* ***31 décembre 2000*** *à :* FFJM-Suisse B.P. 91 CH 1008 PRILLY

Bonne participation !

Bulletin réponse

Feuille à détacher ou photocopier et à envoyer à la F.F.J.M.
1 Avenue Foch 94700 MAISONS ALFORT avant le 31.12.99
BELGIQUE : FFJM-Belgique, B.P. 157, B 7700 MOUSCRON
SUISSE : FFJM-SUISSE, Case postale 91, CH 1008 PRILLY

|_|_|_|_|_|

Report du total

Nom : ....Prénom : ....

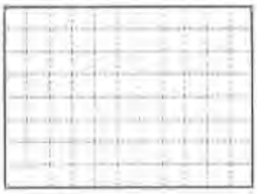
Adresse complète : ....

Tél. ou adresse internet : ....

CATEGORIE (impératif) CM ☐ C1 ☐ C2 ☐ L1 ☐ GP ☐ L2 ☐ HC ☐

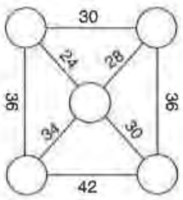
☐ Adhérent FFJM en 2000 : no FFJM .... Clé ....

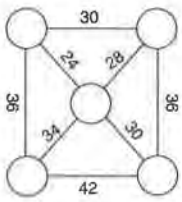
Cochez cette case si vous ne souhaitez pas l'affichage de votre résultat sur le site internet ☐

No du problème	Votre solution	Points (1 - 0)	Coéf. (0 à 6)
	catégorie CM		
1	nombre de manipulations : I__I		
2	nombre qui reste seul : I__I__I__I		
	catégories CM C1		
3	nombre de pièces : I__I__I (complétez le dessin) 		
4	nombre de parois : I__I		
	catégories CM C1 C2 L1 GP L2 HC		
5	nombre de descendants : I__I__I__I__I		
6	somme des valeurs des 5 disques M, A, T, H, S I__I__I		
	Total		

Bulletin réponse

(toutes catégories *sauf* CM – Identification sur l'autre partie - IMPÉRATIF !)

<table>
<tr><th colspan="2">No du problème</th><th>Votre ou vos solutions</th><th>Points (1 - 0)</th><th>Coéf. (0 à 6)</th></tr>
<tr><td colspan="5">catégories C1 C2 L1 GP L2 HC</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1 solution</td><td>fraction: .... /............</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>... solution(s)</td><td>1) 

2) 
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>... solution(s)</td><td>nb. de billes (séparez par des points-virgules)
1) ....
2) ....</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">catégories C2 L1 GP L2 HC</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1 solution</td><td>nombre minimum de personnes |___|___|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>1 solution</td><td>aire: |___|___|___|___| dam²</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">catégories L1 GP L2 HC</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1 solution</td><td>dernier chiffre non nul: |___|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>1 solution</td><td>précédente année: |___|___|___|___|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>1 solution</td><td>nb. de parcours: |___|___|___|___|___|___|___|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">catégories L2 HC</td></tr>
<tr><td>15</td><td>.... solution(s)</td><td>1) A: .... B: .... C: ....
2) A: .... B: .... C: ....
(écrire en chiffres)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>1 solution</td><td>................................. cm²</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Total</td><td></td><td></td></tr>
</table>

9e Rallye Mathématique Transalpin

Annonce et inscriptions

Les responsables de Suisse romande du Rallye mathématique transalpin se sont rencontrés récemment après les journées d'études internationales d'octobre, à Neuchâtel. Plus que jamais, les objectifs de cette confrontation entre classes sont reconnus d'une importance capitale pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Plus que jamais, le travail effectué dans le cadre du Rallye s'avère fructueux, tant pour les élèves, les maîtres, les animateurs (enseignants ou chercheurs) que pour le développement de la recherche en didactique.

Comme les années précédentes les **élèves** des classes inscrites vont résoudre des problèmes et, très probablement, faire des mathématiques pleines de sens à cette occasion. Ils vont aussi apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées car les épreuves se déroulent sous leur entière responsabilité. Ils vont encore pouvoir confronter leurs résultats avec ceux d'élèves d'autres classes.

Les **maîtres** observeront des élèves (les leurs lors des essais et ceux d'autres classes au cours des épreuves suivantes) en activité de résolution de problèmes. Ils pourront évaluer les productions et les capacités d'organisation de leurs propres élèves, pour ensuite en débattre avec eux et exploiter les problèmes ultérieurement en classe. Ils verront, par les analyses des résultats de l'ensemble des participants, quelles sont les procédures mises en œuvre, quels sont les obstacles rencontrés, quels sont les savoirs mathématiques en jeu. Finalement, ils pourront aussi s'engager eux-mêmes dans l'équipe des animateurs et participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Les **chercheurs** en didactique des mathématiques, les **formateurs**, les **conseillers pédagogiques** et toutes les autres personnes qui animent le Rallye mathématique transalpin vont découvrir des stratégies auxquelles ils n'avaient pas pensé lors de leurs analyses a priori, des représentations nouvelles, des obstacles non encore répertoriés. Ils en sauront un peu plus sur la manière dont les élèves résolvent des problèmes

Le Rallye établit **un contrat entre l'équipe d'animateurs, les maîtres et les classes participantes**, dont voici les termes essentiels :

- Lors de chaque épreuve la classe reçoit, une série de problèmes à résoudre, choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte.
- La classe dispose d'un temps limité, de 50 minutes, pour s'organiser, rechercher les solutions, en débattre, produire une solution unique pour chacun des problèmes, avec les explications et les démarches suivies. La classe est entièrement responsable des réponses apportées, sans aucune intervention du maître.
- La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres auront pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.

- Les épreuves qui suivent les essais se font hors de la présence du maître titulaire de la classe. Celui-ci est remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange. Il quitte donc son rôle d'enseignant pour celui d'observateur, s'abstenant de toute intervention, de quelque nature que ce soit, dans la classe dont il a le contrôle pendant la durée de l'épreuve. Son rôle se limite à la distribution des sujets, au contrôle de la durée et à l'envoi des copies à l'équipe qui sera chargée de les évaluer.

- L'évaluation des copies est faite par l'équipe des animateurs. Pour chaque catégorie, un classement est établi, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation à la finale. Les critères d'évaluation et le résultat de chaque problème, ainsi que les classements, sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.

- Après chaque épreuve le maître est invité à exploiter les problèmes avec l'ensemble des élèves.

Pour la Suisse romande **l'organisation pratique** du *9e Rallye mathématique transalpin* s'articule en quatre étapes :

- **une épreuve d'essai**[1], en décembre 2000, pour déterminer l'intérêt de la classe et décider de son inscription. Cette étape est placée sous l'entière responsabilité des maîtres qui choisissent les problèmes, les proposent selon les principes du rallye, en discutent avec leurs élèves, s'occupent de l'inscription et de son financement ; le délai d'inscription est le 20 décembre 2000 ;

- une **première épreuve**, entre le 18 et le 31 janvier 2001, selon entente entre les maîtres concernés, titulaires et surveillants ;

- une deuxième épreuve entre le 15 et le 28 mars 2001 ;

- une finale, le mercredi après midi 16 mai 2001, regroupant les classes des degrés 3 à 5 d'une part et les classes des degrés 6 à 8 d'autre part, vraisemblablement à Berne et à Lausanne.

Les épreuves sont envoyées deux ou trois jours avant la période de passation. Les maîtres s'organisent pour la photocopie des problèmes, ils prennent contact avec leurs collègues pour les «échanges de surveillances», ils envoient les solutions de leur classe pour l'évaluation, après les avoir photocopiées pour les exploiter en classe.

Les animateurs se réunissent en décembre 2000, février et avril 2001, pour les travaux d'élaboration des problèmes, pour la correction des copies reçues et pour l'analyse des résultats.

L'appui scientifique au *Rallye mathématique transalpin* est assuré par diverses institutions pédagogiques dont l'IRDP, qui participe aussi aux tâches administratives pour la Suisse romande.

Math-Ecole diffuse l'information sur le *Rallye mathématique transalpin*, en Suisse romande et au Tessin, et le soutient financièrement. Toutefois **les classes inscrites participent aux frais** pour un montant de Fr. 35.-.

L'équipe romande actuelle a besoin de renforts pour assurer la préparation des problèmes, l'évaluation, la correction et l'analyse des résultats. Ce travail est entièrement bénévole mais

1. Pour constituer une épreuve d'essai, on peut reprendre des problèmes des 5e, 6e, 7e ou 8e *RMT*, publiés de 1997 à 2000 dans *Math-Ecole*: no 176, 177, 181, 182, 186, 187, 188, 190, 191 et 192 ou demander une épreuve d'essai au moyen du bulletin d'inscription, ou la prendre sur le site Internet de *Math-Ecole*: http//www.irdp.ch/math-eco/.

l'animation du rallye est une tâche gratifiante et d'un très grand intérêt professionnel. Il faut espérer que de nombreux maîtres et maîtresses des classes inscrites accepteront de venir renforcer l'équipe des animateurs.

(La participation financière des classes couvre les expéditions des nombreux courriers nécessaires, les photocopies, les frais de déplacement des animateurs et l'achat des certificats et prix souvenirs pour tous les participants).

Ce bulletin d'inscription est à retourner à *Math-Ecole*, IRDP, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7, avant le 20 décembre 2000.

Je souhaite participer avec ma classe au *9e Rallye mathématiques transalpin*

Nom et prénom du titulaire: ....

Adresse personnelle: ....

.... Tél. privé: ....

J'accepte de m'engager dans l'équipe des animateurs (évaluation, analyse ou rédaction des épreuves) dans la mesure de mes disponibilités:

oui ☐ non ☐

Ma classe: .... Degré (3, 4, 5, 6, 7, 8): .... Nombre d'élèves: ....

Collège (nom, adresse, tél.): ....

Je souhaite recevoir les épreuves:

à mon adresse personnelle: ☐ à mon collège: ☐

Je désire recevoir des problèmes pour une épreuve d'essai: oui ☐ non ☐

Signature: .... Date: ....

La préparation, un moment clé pour la mise en place de nouvelles pratiques didactiques

Pierre Stegen & Annick Sacré
Equipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques
Service de didactique générale de l'Université de Liège

Un petit retour en arrière ...

Nous terminions notre précédente publication[1] sur le constat qu'il n'est pas toujours simple, pour un enseignant, d'utiliser les propositions didactiques que nous publions régulièrement dans cette revue. Trop souvent, notre description d'activités didactiques fait l'impasse sur les modifications qu'elles induisent dans la conduite habituelle d'une classe.

Nous n'avons pas souvent, dans nos écrits, favorisé une nécessaire réflexion critique sur la manière dont ces activités se situent par rapport aux pratiques habituelles d'enseignement des compétences numériques. Or, diverses observations, réalisées lors de nos passages dans les classes, nous ont permis de prendre la mesure de l'écart qui existe parfois entre ces deux types de pratiques.

Le tableau ci-dessous précise ces différences en les situant par rapport aux différents acteurs de toute situation d'apprentissage:

- l'enseignant et les choix qu'il opère dans le savoir qu'il a pour mission de transmettre à ses élèves,
- la manière dont les élèves rencontrent ce savoir,
- les rôles et statuts respectifs de l'enseignant et des élèves dans les dispositifs d'apprentissage mis en place.

Les pratiques habituelles d'enseignement	**Les pratiques induites par nos propositions**
Identification du savoir en jeu • une délimitation très précise des objets de savoir par l'enseignant (selon un schéma classique qui va du simple vers le complexe)	• des situations problèmes complexes faisant intervenir différentes compétences
Communication du savoir aux élèves • les objets de savoir sont présentés aux élèves sous la forme d'échanges questions/réponses au cours desquels les élèves participent en réponse aux sollicitations de l'enseignant	• des activités qui ne font pas apparaître très clairement les objets de savoir en jeu (situation adidactique). Ces derniers apparaissent en cours de résolution comme des outils permettant aux élèves de résoudre la situation proposée. Ils sont identifiés au terme de l'activité lors de la phase d'institutionnalisation
• ces activités d'identification sont le plus souvent suivies de phases d'exercices écrits suivis, à leur tour de mise en situation dans des «problèmes de vie scolarisés»	• les propositions ne prévoient pas toujours de phase d'exercisation et/ou d'entraînement qui sont pourtant bien nécessaires pour stabiliser les connaissances des élèves

1. Mettre en place une situation ludique d'apprentissage mathématique, une situation qui se prépare! *Math-Ecole* 191, avril 2000, pp. 5-9.

Rôle et statut respectifs du maître et des élèves	
• le maître occupe une place centrale; c'est lui qui dispense le savoir aux élèves; le rôle de ces derniers apparaît plus en retrait	• les élèves occupent une place centrale dans le processus de construction de leur savoir. Le rôle du maître apparaît plus en retrait; il n'apparaît plus comme l'incontournable dispensateur du savoir
• le maître interagit le plus souvent oralement avec l'ensemble du groupe-classe	• le maître s'adresse à des élèves qui travaillent en groupe

Il ne faut pas voir dans ce tableau des connotations positives et/ou négatives du type: *«la colonne de droite, c'est bien, c'est ce que vous devez faire... !» ou «la colonne de gauche... peut mieux faire !».*

En tant que chercheurs en didactique et formateurs d'enseignants, nous ne sommes pas là pour juger de la pertinence de vos pratiques. Pour nous, la question essentielle se pose davantage dans les termes suivants: **si, en tant que chercheurs, nous sommes convaincus de l'intérêt et de la pertinence de nos propositions, comment faire pour vous convaincre de leur bien fondé et, surtout, comment vous aider à les mettre en place ?**

Contenu de cet article

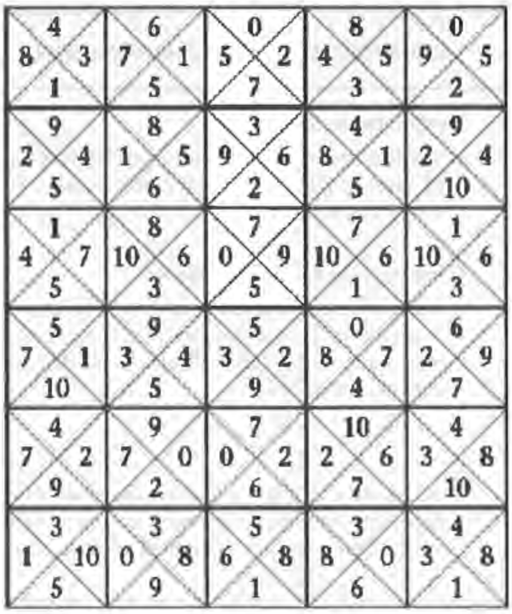
Dans cet article, nous vous proposons de découvrir une grille développée pour aider de futurs instituteurs primaires à construire leurs préparations de leçons. Cette présentation n'a d'autre ambition que celle de vous aider à mettre en place les activités que nous vous proposons dans cette rubrique. Il apparaît en effet qu'une part importante des difficultés liées au «passage de la colonne de gauche à la colonne de droite du tableau» doivent être anticipées lors de ce moment essentiel de l'activité professionnelle de l'enseignant que constitue la phase de préparation de leçon.

Dans un premier temps, fidèles à notre habitude, nous décrirons une proposition d'activité: «Faire 10». Nous présenterons ensuite la grille telle qu'elle est proposée aux étudiants. Enfin, dans un troisième temps, nous nous servirons de cette grille pour passer en revue toute une série de questions à se poser avant de mettre en place cette activité.

Présentation de l'activité

But de l'activité:
Faire 10 en accolant deux triangles et, de la sorte, reconstruire et mémoriser les décompositions additives en deux termes du nombre 10.

Déroulement:
Pour cette activité, il faut prévoir 30 cartons carrés (de 5 cm de côté). Sur chaque carton, sont représentées les diagonales. Dans chacun des 4 triangles ainsi délimités, on inscrit un nombre (de 0 à 10), en chiffres.



Chacun des 4 joueurs reçoit 5 cartons. Le premier joueur dépose un de ses cartons sur la table. Le joueur suivant cherche parmi ses cartons celui dont un des 4 triangles porte un nombre qui, accolé à l'un des 4 triangles du premier carton déposé, donnera 10. S'il n'en trouve pas dans son jeu, il prend un carton dans la pioche. Si celui-ci ne convient pas, il passe son tour. Le jeu s'achève lorsque tous les cartons sont déposés sur la table. Il est préférable que tous les joueurs s'installent d'un même côté de la table. On peut ainsi demander aux enfants de n'accoler les cartons pour faire 10 que si les nombres sont orientés dans le même sens. Cela permet d'éviter les confusions entre 6 et 9, et cela permet également de contraindre un peu le jeu. En effet, lorsqu'on autorise l'accolage de triangles sans tenir compte du sens de l'écriture, il est presque toujours possible de déposer un carton. Lorsque, par contre, on impose de respecter le sens de l'écriture, l'un ou l'autre joueur doit parfois passer son tour et l'activité devient alors un jeu, puisqu'une part de hasard intervient. Il est évidemment important, dans ces conditions, de construire le jeu en rendant possible l'accolage des triangles. Pour cela, il suffit de déposer les 30 cartons en formant un rectangle de 5 sur 6 (ou toute autre forme) et d'écrire ensuite les nombres dans les triangles. On peut également associer une couleur à une **décomposition**, de manière à pouvoir rencontrer cette décomposition à plusieurs endroits du jeu (avoir, par exemple, le 1 et le 9 rouges dans le coin supérieur gauche, mais aussi le 1 et le 9 verts au milieu du plan de jeu).

Des variantes pour l'activité «Faire 10»

- Le jeu peut être construit pour des enfants qui ont encore besoin de **dénombrer** pour trouver le résultat d'une addition. Plutôt que des nombres écrits en chiffres, on dessinera les quantités dans chacun des triangles au moyen de points (sous forme de schèmes, organisés ou non).

- On peut également travailler les décompositions de nombres autres que 10. Pour les enfants de maternelle ou du début de la 1ère primaire, le jeu peut être construit pour aborder les décompositions de 5, 6, ... (avec les nombres représentés par des schèmes ou écrits en chiffres selon le niveau des enfants). En 2e primaire, on fera de même avec de plus grands nombres.

- Ce matériel permet aussi d'aborder la **notion de différence**. Au lieu d'accoler deux triangles dont l'addition donne le nombre 10 (par exemple), on demandera aux enfants d'accoler deux triangles portant des nombres entre lesquels il y a une différence de 1. Il s'agira donc de déposer les cartons de manière à avoir côte à côte 3 et 4, 7 et 8, ou encore 0 et 1, ... On peut pratiquer de même avec une différence de 2, de 3, de ... Une fois que l'activité aura eu lieu, il sera très utile, pour fixer les découvertes, de les faire exprimer par chacun, soit oralement, soit par écrit (de préférence au tableau pour que toute la classe profite de cette synthèse orale).

Analyse de l'activité au départ de la grille

1. La définition des objectifs

1.1. Définition des objectifs en termes de compétences

L'objectif de cette activité est de permettre aux élèves de reconstruire et de mémoriser diverses décompositions du nombre 10 (ou de tout autre nombre moyennant certaines adaptations). Cette activité participe à la construction des compétences identifiées notamment sous les intitulés suivants:
- dénombrer par comptage;
- dire, lire et écrire des nombres;
- décomposer et recomposer des nombres;
- identifier et effectuer des opérations dans des situations variées;
- construire des tables d'addition en comprenant leur structure et les restituer de mémoire;
- utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence;

Présentation de la grille[2]

	-	+/-	+
La définition des objectifs			
• L'objectif de la leçon est défini de manière opérationnelle en termes de compétences à développer chez les élève.	☐	☐	☐
• La place de cette séance dans une progression plus large est indiquée	☐	☐	☐
• Le type de leçon est précisé, – il s'agit d'une **leçon d'apprentissage** où de nouvelles connaissances vont être construites	☐	☐	☐
– il s'agit d'une **leçon d'entraînement** dont l'objectif est de familiariser les élèves avec un savoir construit précédemment	☐	☐	☐
Analyse préalable du savoir visé			
• Une **mesure des connaissances préalables** des élèves est proposée avant la mise en place de la situation de départ (pré-requis)	☐	☐	☐
• La **situation de départ** présente un intérêt pour l'élève (Pour quelles raisons risque-t-il de s'investir dans la tâche proposée ? Obligation – plaisir – défi personnel – désir de se mesurer à d'autres – désir de résoudre une situation complexe avec d'autres...)	☐	☐	☐
• La **situation de départ est un défi** qui est accessible aux élèves tout en présentant une certaine source de difficultés (Pour résoudre le défi proposé, l'élève doit construire une réponse en appliquant, par exemple, une procédure apprise dans un autre contexte. Par exemple: utiliser la compensation dans N pour résoudre certaines soustractions écrites).	☐	☐	☐
• Les **variables didactiques** de cette situation sont clairement identifiées. Ces variables didactiques sont des contraintes que l'enseignant pose sur certains éléments de la situation et qui doivent provoquer chez l'élève les déséquilibres nécessaires à l'apprentissage. (Par exemple : taille des nombres, choix des supports autorisés: bandelette numérique, droite des nombres, grille des nombres, recours à du matériel de substitution : réglettes, jetons, matériel multibase ...)	☐	☐	☐
• Dans la mesure du possible, les **procédures** que les élèves risquent de développer pour résoudre le défi de départ sont **anticipées**.	☐	☐	☐
• Pour **aider les élèves en difficultés**, l'enseignant a préparé des éléments pour les guider dans leurs démarches	☐	☐	☐
• **Qui renseigne les élèves sur la pertinence des démarches qu'ils utilisent ?** – **validation interne** : c'est la situation elle-même qui fournit un feedback à l'élève sur la pertinence de sa démarche	☐	☐	☐
– **validation externe** : c'est l'enseignant qui fournit le feedback ou c'est la confrontation des procédures utilisées par les autres élèves.	☐	☐	☐
• Les éléments sur lesquels portera la synthèse finale sont clairement identifiés (Autrement dit, même si le savoir en jeu est construit par les élèves, qu'est-ce qui devra apparaître comme trace écrite de la leçon dans le cahier des élèves ?)			
• Des **possibilités de prolongement** liées à l'activité sont envisagées. Le lien entre cette leçon et des activités futures est envisagé			

2. Merci à Marie Claire Nyssen et à Marie-Paule Parent pour les fructueuses discussions autour de cette grille et aux étudiants de 2e Normale Primaire de la Haute Ecole Charlemagne de Huy qui l'ont utilisée tout au long de l'année scolaire 1999/2000.

	-	+/-	+
La phase d'introduction de la leçon			
• Les consignes données aux élèves sont:			
– prévues	☐	☐	☐
– formulées de manière claire et précise	☐	☐	☐
En cas de mode de travail individuel des élèves,			
• leurs tâches sont clairement définies	☐	☐	☐
• le matériel mis à leur disposition est précisé (fiche, cahier, polycopié, matériel particulier, ...)	☐	☐	☐
• une estimation du temps nécessaire est prévue	☐	☐	☐
En cas de mode de travail en groupe des élèves,			
• ce choix d'un mode particulier d'organisation du travail des élèves est justifié par la nature de la tâche qui leur est demandée	☐	☐	☐
• la constitution des groupes de travail est anticipée	☐	☐	☐
• la répartition éventuelle des tâches au sein du groupe est précisée	☐	☐	☐
• le matériel mis à leur disposition est précisé (fiche, cahier, polycopié, matériel particulier, ...)	☐	☐	☐
• une estimation du temps nécessaire est prévue	☐	☐	☐
La phase de mise en commun et de synthèse			
• les modalités d'organisation de la phase de mise en commun sont précisées	☐	☐	☐
• un dispositif particulier est prévu afin d'éviter que cette phase de mise en commun ne soit trop longue et ne profite qu'aux élèves qui savent déjà	☐	☐	☐
• la préparation prévoit la manière dont l'enseignant va pointer, avec les élèves, les éléments importants rencontrés à l'occasion de l'activité	☐	☐	☐
La phase d'application et/ou de réinvestissement			
• Des exercices d'application sont prévus:	☐	☐	☐
• ils portent effectivement sur les éléments de savoir synthétisés précédemment	☐	☐	☐
• ils sont organisés selon une grille taxonomique (des exercices simples vers des exercices nécessitant le recours à des démarches plus complexes)	☐	☐	☐
• des exercices de différenciation sont prévus pour des élèves qui éprouvent des difficultés (valeurs numériques différentes, supports différents, ...)	☐	☐	☐
• des modalités de correction (autres que la traditionnelle phase de correction collective) sont prévues (travail par fichier, correction individuelle de l'enseignant, travail de mise en commun en petits groupes, ...)	☐	☐	☐

Clarification des codes:

- Si aucune case n'est cochée en regard d'un item, cela signifie que cette caractéristique est ici «sans objet» et n'entre pas dans l'évaluation
- Le code « - » indique que le critère évalué n'est pas pris en compte lors de la préparation
- Le code « +/- » indique que le critère évalué est pris en compte mais de façon incorrecte ou incomplète
- Le code « + » indique que le critère est pris en compte de façon adaptée.

1.2. Place de l'activité dans une progression plus large

Qu'est-ce qui viendra avant ? Après ? Comment situer cette activité parmi d'autres ? Est-ce une activité pour découvrir de nouveaux apprentissages ou au contraire une activité pour exercer des compétences déjà construites ? Dans de précédentes publications, nous avons déjà eu l'occasion d'insister sur la nécessité d'un travail sur les décompositions additives avant leur formalisation au départ d'écriture additive de type «a + b = c». Les lecteurs disposent maintenant de quelques activités: «Carré magique pour faire 10», «les encadrements», des variantes du «Jeu de la Corneille»... qui vont leur permettre d'aider leurs élèves à construire, par des manipulations concrètes, ces structures additives... avant tout formalisme prématuré et sans le recours à du matériel de substitution du type des réglettes Cuisenaire.

On sait aujourd'hui que les élèves utilisent différentes stratégies (reconstructives ou reproductives) pour résoudre des opérations additives. Dans un premier temps au moins, il est essentiel de laisser les enfants libres d'utiliser l'une ou l'autre stratégie pour, ensuite, les amener à privilégier la **mise en mémoire des résultats.** *Il paraît important de permettre à chacun de revenir, lorsque le besoin s'en fait sentir, vers une* **reconstruction de la réponse**, *que ce soit à l'aide d'un matériel concret ou d'un* **référentiel**.

Certaines activités, déjà présentées dans cette revue («Faire 10», «Carré magique») font une large place à la décomposition des nombres en deux, trois ou plus de trois termes. Ces activités ne sont pas à proprement parler des occasions de résoudre des additions et des soustractions, elles ont pour but d'armer les élèves dans leur connaissance des nombres et ainsi les aider à aborder les opérations proprement dites.

Un premier groupe d'activités

D'autres activités (en fait, à l'heure actuelle, il n'y en a qu'une seule qui ait été abordée: «Les encadrements» et, dans une moindre mesure, une des variantes du «Jeu de la Corneille») portent sur des additions et des soustractions. Au travers de ces activités, les enfants vont passer de la stratégie reconstructive à la stratégie reproductive. Les supports utilisés seront donc parfois moins concrets que ceux des activités du premier groupe, mais des suggestions d'adaptation permettront à ceux qui le jugent nécessaire de revenir vers un matériel autorisant le dénombrement.

2. Analyse préalable du savoir visé

2.1. Mesure préalable des connaissances visées

Une activité comme «Faire 10» peut très bien se prêter à cette tâche de vérification des connaissances préalables des élèves. Il est parfois bien plus intéressant de se donner les moyens d'observer les comportements de ses élèves en situation d'action plutôt que de leur donner une évaluation «papier-crayon».

Evidemment, cela pose la question d'une gestion différenciée de la classe. Tous les élèves doivent-ils faire la même chose au même moment ? Est-il possible de mettre en place un travail par contrat pour une partie de la classe pendant que l'enseignant observe tour à tour des groupes d'élèves à la table du jeu «Faire 10» ? Ne peut-on imaginer, à l'instar de l'organisation en ateliers fréquemment rencontrée lors d'activités d'éducation corporelle, que 3 ou 4 activités différentes soient proposées en même temps; certaines, plus «anciennes», considérées comme des activités d'exercisation, ne demandent pas spécifiquement l'intervention de l'enseignant... qui peut ainsi se libérer pour observer les comportements de ses élèves face à l'activité-cible et évaluer ainsi les connaissances préalables de ses élèves.

2.2. La situation de départ est un défi qui présente un certain intérêt pour l'élève et dont les variables didactiques sont soigneusement définies

Les activités que nous présentons sont construites au départ d'une double hypothèse : les élèves construisent leurs connaissances et leur donnent du sens, à la manière d'un mathématicien, en posant et en résolvant des problèmes. Cette question du sens est fondamentale. En effet, le but de tout apprentissage est de permettre aux élèves d'agir sur leur milieu ... Ce dernier, contrairement à ce qui se passe dans le «milieu-école» n'est pas aménagé à des fins didactiques. L'élève n'a véritablement acquis une connaissance que lorsqu'il est capable de la mettre en œuvre, de lui-même, dans des situations qu'il rencontre en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle («*Aujourd'hui, nous allons découvrir le nombre 10...*»).

Le rôle de l'enseignant est, selon cette perspective, d'aménager des situations artificielles aux contraintes didactiques soigneusement définies...

Comme le précise la grille, ces variables didactiques sont des contraintes que l'enseignant pose sur certains éléments de la situation et qui doivent provoquer chez l'élève les déséquilibres nécessaires à l'apprentissage. Les différentes variantes que nous proposons constituent d'autres contraintes qui permettent d'adapter cette activité aux niveaux de maîtrise des élèves. Nous avons déjà eu, lors de précédentes publications, l'occasion de développer cette caractéristique des situations que nous vous proposons : tous les élèves de la classe sont plongés dans une même activité, mais le choix des variables didactiques (réalisé au terme d'une mesure des connaissances préalables des élèves) permet de la différencier selon le niveau de compétence des élèves.

2.3. Qui renseigne les élèves sur la pertinence des démarches ?

Construire ses compétences au départ de situations problèmes implique bien évidemment des modifications au niveau des rôles et statuts de l'enseignant et des élèves dans la mise en place de telle situation d'apprentissage. Le rôle du maître n'est plus la communication de connaissances mais la dévolution de bons problèmes ... c'est-à-dire des problèmes choisis de façon à ce que les élèves puissent les accepter, des problèmes qui les font agir, parler, réfléchir, évoluer de leur propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit la réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur de connaissances qu'il souhaite voir apparaître.

La **dévolution** est l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation problème. Pour Brousseau[3], elle consiste, non seulement, à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne (consignes, règles, but, ...) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher. Bien souvent la consigne donnée par l'enseignant ne suffit pas pour réaliser ce processus ; des temps de découverte du matériel, de jeux libres, ... sont souvent nécessaires.

Ce choix pour l'enseignant de ne plus intervenir ne s'arrête pas à ce processus de dévolution ... Dans la mesure du possible, les activités que nous proposons permettent aux élèves de ne pas dépendre de l'avis de l'enseignant pour savoir si les démarches mises en œuvre ou les résultats obtenus sont conformes à ceux qui étaient attendus. Trop souvent, les élèves s'en remettent à l'avis de l'enseignant pour juger de la pertinence de leurs démarches ... de telles attitudes sont induites par les pratiques habituelles d'enseignement («*c'est juste, c'est faux... corrige !*»). Ainsi, l'enseignant de 6e année primaire

3. Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée sauvage.

constatera que bon nombre de ses élèves ne recommencent pas nécessairement une opération écrite alors que la preuve qu'ils ont réalisée (quand ils l'ont faite, ajouteront certains...) leur indique que le résultat est incorrect. Cela tient au contrat implicite qui s'est progressivement construit entre les enseignants et les élèves : à charge pour eux d'effectuer l'opération, à charge pour l'enseignant de leur dire si c'est juste.

2.4 Synthèse finale et possibilités de prolongement ...

Dans de précédentes publications, nous avons déjà longuement insisté sur ces deux points[5]. La synthèse finale, au cours de laquelle le savoir mis en jeu est institutionnalisé replace l'enseignant à l'avant plan. C'est à lui qu'incombe la délicate gestion de cette phase essentielle. Comme le soulignent Briand et Chevalier[6], une situation qui vise l'apprentissage d'une connaissance ne pourra remplir son rôle que si le savoir en jeu est repéré, identifié par l'élève. Certains résultats pourront être rapidement oubliés, d'autres doivent être retenus.

Conclusions provisoires

Il ne nous est pas possible, dans les limites de cet article, d'aborder les modes de gestion de ces activités (seconde partie de la grille). Nous y reviendrons dans une prochaine publication. N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et commentaires suscités par la lecture de nos propositions. Comme nous l'avons écrit plus haut, ce qui nous intéresse, c'est de vous aider à mettre en place d'autres pratiques d'enseignement des compétences numériques... vos réactions à ces propositions devraient nous aider à progresser dans la réalisation de cet objectif.

5. Cfr les questions à poser au terme d'une activité : «qu'avez-vous appris ?» et «comment avez-vous procédé ?» ainsi que les éléments de progression susceptibles d'aider les élèves à mathématiser les situations rencontrées en cours de jeu.

6. Briand, J. & Chevalier, M.C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* Paris : Hatier Pédagogie.

L'arithmétique d'Euler

Pierre Banderet
Université de Neuchâtel

Ce bref article présente tout d'abord le «Rechenkunst» puis offre une traduction de la présentation de l'ouvrage, due à Euler.

Le «Rechenkunst»

Ayant pris la décision de donner à la jeunesse en Russie une formation en arithmétique, l'empereur de Russie, Pierre le Grand, a chargé son Académie de s'occuper du problème. Après mûre réflexion, Euler a entrepris la rédaction d'un livre d'arithmétique. C'est le «Rechenkunst»[1] probablement écrit en allemand, puis traduit en russe.

Le premier volume (1738) est consacré au calcul proprement dit, c'est-à-dire aux quatre opérations sur les entiers et les fractions. Dans le deuxième (1740), l'auteur traite les *grandeurs* (benannte Zahlen), c'est-à-dire les applications concernant les calculs relatifs au temps, aux monnaies, aux longueurs, aux poids, où l'on a affaire à des systèmes comportant différentes unités. A l'époque, ces problèmes étaient d'un emploi constant et de la plus haute importance: les tables publiées ici, où l'on trouve les monnaies et les poids en usage dans différentes villes d'Europe en donnent une idée. Ces questions ont perdu leur actualité sans avoir complètement disparu; peut-être sommes nous plus maladroits lorsque par exemple nous voulons savoir dans une unité particulière (jours, années, minutes) la durée de la vie d'un grand homme.

C'est la rigueur avec laquelle l'ouvrage est écrit qui en constitue l'originalité et la valeur. Aucune préoccupation pédagogique n'apparaît, en ce sens qu'on ne trouve pas la moindre allusion aux qualités du public visé. Pour Euler, il faut et il suffit de présenter son sujet sans rien laisser dans l'ombre et sans détours: autrement dit faire œuvre de mathématicien. On commence alors à se rendre compte qu'il y a beaucoup à écrire: ainsi la méthode pour expliciter l'addition passe obligatoirement par l'établissement d'une table allant de 1 plus 1 égale 2 à 9 plus 9 égale 18. Au moment voulu, tout maître écrira quelque chose d'analogue au tableau noir. Quel que soit son sujet, le maître trouvera tout dans le Rechenkunst et n'éprouvera jamais le besoin d'y ajouter quoi que ce soit.

Ainsi l'écriture des très grands nombres est très nettement exposée. Euler emploie ce que Du Pasquier[2] appelle la règle germanique, où l'on découpe le nombre en tranches de six chiffres et l'on emploie les billions, trillions, etc. Des exemples avec un symbole particulier pour marquer la division en tranches complètent l'explication. J'ai le sentiment que bien des adultes n'ont pas des idées claires sur cette question; l'introduction du milliard contribue à une certaine confusion.

L'utilité du Rechenkunst pour un enseignant d'aujourd'hui est qu'il constitue un ouvrage de référence incomparable. Il serait bon que les Ecoles normales le présentent aux futurs instituteurs-trices, et qu'il soit aisément accessible à tous les maîtres. C'est un monument; on y trouve une structure concrète sur laquelle on peut s'appuyer pour tout problème de présentation qui peut se poser; il ne laisse

1. Léonard Euler, *Opera Omnia Series III*, Vol. II, 1942.

2. Louis-Gustave Du Pasquier, *Le développement de la notion de nombre*, 1921.

aucun point dans l'obscurité. Les exemples joints mettent en lumière tous les cas possibles.

La présentation d'Euler

Ce qui suit est la traduction de la «Vorrede» du «Rechenkunst» par Euler.

Il existe actuellement sur le marché un grand nombre de livres d'arithmétique qui ont été publiés en Allemagne et ailleurs, de sorte que notre ouvrage pourra paraître à bien des gens inutile ou superflu. Cependant, lorsqu'il a été décidé sur ordre de sa Gracieuse Majesté l'Empereur de dispenser à la jeunesse de Russie une formation très complète en arithmétique comme en géométrie, de sérieuses difficultés se sont présentées dès que l'on a voulu utiliser dans ce but des introductions déjà existantes. Comme de plus, il faudra aussi répondre à la demande de livres en russe, il s'est avéré que la réédition en un si grand nombre d'exemplaires amènerait plus de problèmes que d'avantages; de même, prendre un ouvrage paru ailleurs et le traduire en russe nous a semblé peu souhaitable pour diverses raisons. En particulier, la plupart des livres étrangers présentent des défauts auxquels il nous paraît très important de remédier. Ou bien ils ne donnent que les règles accompagnées d'un grand nombre d'exemples; mais sans mention de la cause ni des raisons sur lesquelles se basent ces règles; ou bien, s'ils donnent quelques indications sur les bases de l'art du calcul, la présentation en est si fragmentaire que le lecteur ne l'assimile pas comme il le ferait en suivant la méthode d'enseignement des mathématiques. De plus, ces traités ignorent les avantages et les raccourcis permettant d'acquérir l'habileté et la rapidité du calcul, se bornant à les citer brièvement.

Comme l'apprentissage de l'art du calcul sans une base solide ne suffit, ni pour résoudre tous les problèmes qui peuvent se présenter, ni pour affiner l'esprit, on a fait dans le présent ouvrage, l'effort, pour chaque règle et pour chaque opération, d'en présenter et d'expliquer les raisons de manière que tout lecteur, même s'il n'a pas l'habitude de lire des traités, soit capable d'en faire le tour. Cela ne nous a pas empêché de décrire complètement les règles et avantages qui facilitent le calcul en les illustrant au moyen d'une quantité suffisante d'exemples.

Par cette méthode on espère obtenir que la jeunesse visée, tout en acquérant une bonne habileté technique dans le calcul, soit toujours consciente du sens de chaque opération, et s'habitue progressivement à réfléchir avec méthode. Si en pratiquant ainsi, on ne se borne pas à appliquer aveuglément les règles, mais si l'on reste toujours conscient de la raison pour laquelle on les applique, alors on sera bientôt en mesure d'en inventer de nouvelles, au moyen desquelles on deviendra capable de résoudre de nouveaux problèmes pour lesquels les anciennes règles ne suffisent pas. Il n'y a aucune raison de croire que cette manière d'enseigner l'arithmétique soit plus difficile et prenne plus de temps que celle où l'on donne les règles sans motivation. Chacun comprend et garde mieux en mémoire les faits pour lesquels il voit une raison et un motif, et il saura beaucoup mieux les utiliser dans la pratique.

Celui qui apprend à fond une science ou un art quelconque prend conscience, même sans explications, de bien des faits qu'on lui apprendrait à grand peine s'il n'était habitué à considérer les causes. En particulier, une introduction solide des jeunes gens à l'arithmétique sera d'autant plus utile et indispensable que pendant de longues périodes, ils subissent un enseignement des langues et d'autres branches pour lequel aucune étude fondamentale n'existe, où donc ils ne sont pas amenés à réfléchir profondément à une question; ce qui a pour conséquence logique qu'ils rencontreront de grosses difficultés dans leurs entreprises.

On ne peut pas mieux combattre cette erreur qu'en enseignant à fond l'arithmétique à la jeunesse, qui de toute manière doit apprendre à cet âge, afin qu'elle prenne l'habitude de penser juste. Aucun enseignement n'est comparable à celui des mathématiques pour atteindre ce but, parce que c'est là que tout se déduit à partir des principes fondamentaux de notre connaissance, de la manière la plus claire et la plus rigoureuse, tandis que dans les autres sciences, bien des choses restent imprécises ou inexactes, au point que même des affirmations fausses sont données comme des vérités. C'est pourquoi l'on a, dans le présent traité, déduit les règles et les opérations de l'arithmétique à partir de la nature même des nombres et des propriétés des chiffres usuels, en sorte que n'importe qui soit capable, sans introduction particulière, non seulement de comprendre les opérations et d'en acquérir la technique, mais aussi de se faire une idée des raisons qui y président. C'est pourquoi aussi le traité est présenté sous forme de propositions dans lesquelles on donne d'une manière brève et claire, soit une règle elle-même, soit une justification pour la faire comprendre. Ces propositions sont complétées par des explications dans lesquelles le contenu de la proposition ainsi que sa justification sont tirés au clair. Enfin pour chaque opération on trouvera des exemples permettant au lecteur d'en réaliser l'utilité et l'usage.

Présentation de la SENS

La «Société des enseignants neuchâtelois de sciences» est issue d'une société regroupant les maîtres de mathématiques, physique et chimie du canton. Dans sa nouvelle structure elle a étendu son activité à d'autres sciences (biologie, informatique, etc.) et se préoccupe du problème de la diffusion de la culture scientifique. Dans ce but elle a organisé il y a quelques années un «mois de la science» et elle participera en 2001 au festival «Sciences et cité» qui se tiendra à Neuchâtel.

Depuis 1988, la SENS édite un Bulletin à l'intention de ses membres et autres lecteurs intéressés.

Pour des raisons d'organisation, le Bulletin du SENS depuis son numéro 19 ne paraît que sous forme électronique à l'adresse: www.abord-ch.org/sens.

Comme toute publication «virtuelle», ce bulletin est accessible à tout «internaute», mais encore faut-il connaître son existence et son intérêt.

A cet effet, *Math-Ecole* publie dans ce numéro deux articles du Bulletin du SENS no 21 : «L'arithmétique d'Euler» et «L'histoire des mathématiques en Suisse».

Cette collaboration sous forme d'échange d'articles, déjà engagées depuis plusieurs années, constitue un enrichissement mutuel des deux revues.

Histoire des mathématiques en Suisse[1]

Lucia Grugnetti
Université de Parme, Italie

Introduction

Chaque civilisation, chaque région, voit se développer les mathématiques en liens étroits avec son contexte culturel, historique et social.

Les cantons suisses, aux différents stades de leur confédération, ont aussi apporté leur pierre à l'édifice des mathématiques, dans le cadre élargi de l'Europe.

Cette exposé présentera quelques-unes de ces contributions, ainsi que leurs auteurs, dont on oublie souvent l'origine, dans le contexte historique, social et économique de la Suisse, dès 1291 jusqu'au XIXe siècle.

De Joost Bürgi, à Ludwig Schläfli, en passant par d'autres mathématiciens tels que les Bernoulli, et Leonhard Euler, plusieurs mathématiciens d'origine helvétique ont leur place, à juste titre, dans l'histoire des mathématiques.

Le contexte Suisse de 1291 au XVIe siècle

Les zones d'influence respectives des comtes de Savoie et des comtes de Habsbourg se rencontrent dans les Préalpes. La frontière linguistique se met en place.

Le Moyen Age ne connaissait pas de territoires aussi nettement délimités qu'aujourd'hui. Cette carte met en évidence les zones d'influence des comtes de Habsbourg, plus tard ducs d'Autriche, (au nord-est) et des comtes de Savoie (au sud-ouest)[2].

Dans un Moyen Age plus mobile, plus créatif qu'on n'a longtemps voulu le croire, le XIIIe siècle, riche de vie et de mouvement, est un siècle de croissance, presque de révolution.

- Croissance démographique d'abord, la peste semblant en régression.

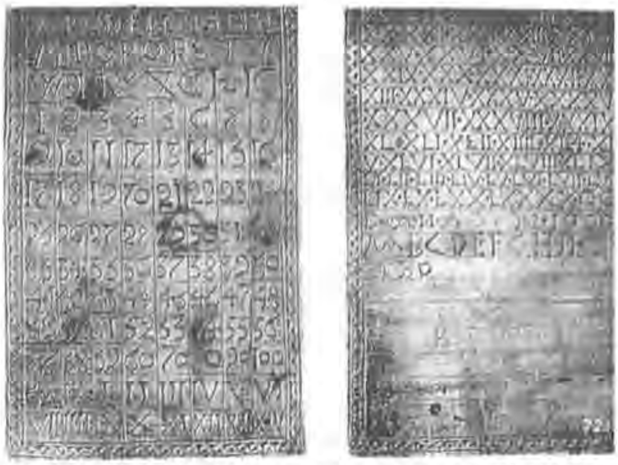
1. Ce thème a été présenté dans le cadre du mois de la science organisé par la SENS. L'article a paru également dans les actes de CIEAEM 50.

2. Cette carte et les suivantes, aussi bien que certaines considérations historiques, sont tirées du livre de H. P. Treichler, L'aventure suisse de siècle en siècles, cité en bibliographie.

- Développement de l'agriculture: il faut donner du travail à de nouvelles forces et nourrir de nouvelles bouches.
- Le commerce s'anime, les communications s'améliorant sur les grands chemins, les voies d'eau, les passages des Alpes.
- Les villes se développent ou se créent, centres d'une économie désormais à l'échelle régionale, villes portuaires ou se situant au passage des axes routiers, au franchissement des fleuves.
- L' apparition des chiffres arabes, remplaçant la numération romaine dans les comptabilités, dès le milieu du siècle, contribue au développement des banques, du crédit.
- Les premières écoles sont créées dans les couvents et puis dans les «Cités Médiévales».

Les écoles rattachées aux couvents étaient chargées d'instruire des clercs qui devaient assurer la relève.

Le XIIIe siècle, notamment dans les cités, vit s'accroître chez les artisans et les marchants, la bourgeoisie de l'époque, le besoin d'acquérir une formation scolaire. Des écoles laïques sont fondées pour enseigner aussi le calcul.



Tablette de bois sculptée (Adelboden, BE, XVIe siècle) porte au recto et au verso l'alphabet latin, les chiffres arabes et romains

L'artisanat, le commerce et le trafic avaient besoin dans une certaine mesure, de paix et de sécurité. Deux voies s'offraient alors aux intéressés.

Une cité qui sentait peser sur elle quelque menace pouvait se placer sous la protection d'un seigneur puissant; ainsi Berne et Genève, ville de foires, ont sollicité celle des comtes de Savoie; Zurich et temporairement Uri, celle des Habsbourg.

L'autre moyen de parer au danger était la formation d'une confédération régionale ayant pour objectif d'assurer la paix dans ses limites[3].

C'est ainsi que les trois cantons de Uri, de Schwyz et de Nidwalden, après la mort du roi Rodolphe Ier de Hasbourg (15 juillet 1291) conclurent, le 1er août déjà, un pacte pour se prémunir contre l'insécurité d'une double élection possible ou pour prévenir l'élection d'un roi étranger qui n'aurait pas été en mesure, comme Rodolphe l'avait fait, de s'occuper personnellement d'eux[4].

3. G. Andrey et all.: 1982, *Nouvelle Histoire de la Suisse et des Suisses*, Editions Payot Lausanna, Tome I, p. 152.

4. *La Suisse de la formation des Alpes à la quête du futur*, 1975, Dixième publication de la Fedération des coopératives Migros, p. 55.

Au cours du XIVe siècle les cantons confédérés arrivent à huit. Ils sont 13 en 1515, mais on compte aussi plusieurs «Pays alliés», selon divers statuts politiques et juridiques :

Dans leurs grandes lignes, les frontières de la Suisse actuelle se dessinent dès 1515: la Confédération des 13 Cantons et les territoires alliés avant la bataille de Marignan.

C'est bien dans un des pays alliés, la ville de Bâle, qu'on voit la fondation en 1460 de la première Université du territoire Suisse. L'Université de Bâle reste longtemps seule de son espèce en Suisse. Aux XVIe et XVIIe siècles, les villes ont installé des hautes écoles qui, contrairement aux universités, n'ont pas de statut d'autonomie. Les hautes écoles réformées et les collèges des jésuites occupent une place de choix dans l'organisation ecclésiastique des cantons. Jusqu'à la fin du XVIIe siècle, leur tâche a consisté surtout à enseigner la théologie et à former des prêtres et des pasteurs[5].

En conquérant le Pays de Vaud, Berne s'est étendu jusqu'au Léman; la Confédération occupe maintenant l'espace entre les grands lacs des Préalpes. La structure générale (cantons, alliés, bailliages communs) ne changera plus guère jusqu'en 1798.

5. G. Andrey et all., Op. Cit:, pp. 146-147.

La Réforme entraîna la création «d'Ecoles supérieures» dans toutes les grandes villes ayant embrassé le protestantisme: Zurich (1523), Berne (1528), Lausanne (1537), Genève (1595), Shaffhouse (1648) et enfin Saint-Gall (1713).

En Suisse catholique, les gymnases jésuites reprirent l'enseignement secondaire général à Lucerne (1574), Fribourg (1580), Porrentruy (1591), Feldkirch (dans le diocèse de Coire; 1649), Brigue (1662), Soleure (1668) et Sion (1734).

Donc la plupart des cités de la Confédération édifièrent bien leurs propres écoles mais les étudiants devaient aller acquérir leur diplôme universitaire à Bâle ou à l'étranger.

Les mathématiciens suisses du XVIIe siècle

C'est dans ce contexte qu'on trouve la première contribution suisse importante au développement des mathématiques. C'est l'œuvre de **Joost Bürgi** (1552-1632), originaire du Toggenbourg, horloger de la cour et astronome tout d'abord auprès du landgrave Guillaume IV de Hesse, puis auprès de l'empereur Rodolphe II à Prague et assistant du grand astronome Johannes Kepler (1571-1630).

C'est à Prague qu'il calcula une table d'antilogarithmes entre 1603 et 1611. Il n'imprima ses « Progress Tabulen », ses tables logarithmiques, qu'en 1620, bien des années après. Entre-temps, le mathématicien écossais John Napier (1550-1617) l'avait devancé en publiant en 1614 et 1619 son travail qui concerne le logarithme d'un sinus.

Si d'un côté le « droit d'aînesse » de Bürgi est bien établi par Kepler, Montucla[6] dit, d'une façon qui peut sembler d'une sévérité gratuite: «Remarquons toutefois que c'est à tort que de l'existence de cet ouvrage donné en 1620, on concluroit que Byrge auroit inventé les logarithmes antérieurement à Neper; car l'ouvrage de Neper avoit paru dès 1614, et c'est l'antériorité des dates des ouvrage qui, au tribunal de l'opinion publique, décide l'antériorité de l'invention: »

Au delà de la priorité de publication, Bürgi et Neper travaillent indépendamment l'un de l'autre et les tables de logarithmes, qui répondaient pour les astronomes et les calculateurs à un besoin pressant, connurent un succès immédiat et considérable.

Saint-Gall, la ville de la toile de lin exportée dans toute l'Europe, donne naissance à **Habakuk Guldin**, qui, devenu Jésuite, prendra le nom de Paul. On le présente ici par les mots de Montucla: *Le Père Guldin était né à St-Gall, en 1577, et ayant adjuré la religion protestante, il entra dans la compagnie de Jésus, en 1597, sous la simple qualité de Frère, ou de Coadjuteur temporel. Mais les talents qu'il montra pour les mathématiques, ayant frappé ses supérieurs, on l'envoya les cultiver à Rome, où il professa les mathématiques pendant quelques années.*
Il les enseigna ensuite successivement à Gratz [où il mourra en 1643] *et à Vienne.*
La principale découverte qui rend l'ouvrage de Guldin (Centrobaryca ou de Centro gravitatis, 1635-1642) recommandable, consiste dans l'application qu'il fait du centre de gravité à la mesure des figures produites par circonvolution.
« Toute figure – dit Guldin – *formée par la rotation d'une ligne ou d'une surface autour d'un axe immobile, est le produit de la quantité génératrice par le chemin de son centre de gravité ».*
Il n'est personne qui ignore que le cône droit est formé par un triangle rectangle, tournant autour d'un des côtés qui comprennent l'angle droit. L'on sait aussi que le centre de gravité de ce triangle est éloigné de cet axe du tiers de la base, et par conséquent il décrit une circonférence qui est le tiers de celle que décrit l'extrémité

6. Montucla, J. F.: (AN VII), *Histoire des Mathématiques*, tome deuxième, pp. 11-12.

de cette base. La cône sera donc, selon Guldin, le produit du triangle générateur par le tiers de cette dernière circonférence, d'où l'on tire facilement, qu'il est le tiers du cylindre de même base et même hauteur[7].

Pendant son séjours en Italie Guldin rencontre Galileo Galilei (1564-1642), mais c'est avec un autre savant italien, Bonaventura Cavalieri (1598-1647), qu'il a une polémique assez violente. Dans son deuxième livre de la *Centrobaryca* (1640), Guldin attaque la théorie des indivisibles[8] de Cavalieri sur le plane de l'originalité et sur le plan de la rigueur.

Guldin affirme que les idées de Cavalieri viennent de Kepler et de Bartolemeo Souvey (voir plus loin). A son tour Cavalieri dit que Guldin aurait dû nommer Pappus (vers 300) et ses *Collectiones Mathematicae*, à propos de son théorème sur la mesure des figures de l'espace.

Sur les questions d'originalité, il faut une fois pour toutes mettre en clair que l'histoire des idées en général et l'histoire des mathématiques, en particulier, est pleine de disputes. Mais il faut aussi souligner que la théorie s'élabore à partir des idées de plusieurs personnes, retravaillée par chacune d'entre elles, améliorée et enfin formalisée.

Bartolomeo Souvey (connu comme Sovero), cité auparavant, vient d'une famille de Corbière (Fribourg) et il est né vers l'année 1577. Il sera «Lecteur» de mathématiques à Padoue à partir du mois de novembre 1624 jusqu'à sa mort en 1629.

Sa seule œuvre publiée, *Curvi ac recti proportio*, est sortie en 1630 en six livres dont le cinquième et le sixième sont les plus importants[9]. Il s'intéresse ici, entre autre, aux propriétés des courbes transcendentes.

Des cantons aux noms insolites et des chefs-lieux qui le sont tout autant: l'introduction éphémère de nouvelles unités administratives sous la République helvétique (de 1798 à 1803).

7. Montucla, *Op. Cit.*, tome deuxième, pp. 31-36.

8. Bonaventura Cavalieri a développé la méthode des indivisibles dans *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). L'ouvrage ne contient aucune définition des indivisibles, mais Cavalieri caractérise ainsi les éléments infinitésimaux dont se composent les surfaces et les volumes. Il considère une figure plane comme composé d'un nombre «*indéfini*» des lignes et conçoit le solide comme composé d'un nombre «*indéfini*» de plans parallèles.

9. E. Ulivi, 1990, *Le quadratrici di Bartolomeo Sovero, L'educazione Matematica*, Anno XI, Serie III, Vol. 1, n. 2, pp. 103-121.

Entre les XVIIe et XVIIIe siècles

Le mathématicien et astronome vaudois **Nicolas Fatio** (1664-1713) qui fut un collaborateur de Gian Domenico Cassini à Paris et plus tard de Newton en Angleterre, est représentatif d'un âge béni de la révolution scientifique où les savants pouvaient presque tout connaître et tout faire, où les grands esprits de l'Europe étaient en communication permanente, partageaient leurs résultats, se lançaient des défis et se posaient des problèmes les uns aux autres, enfin rivalisaient de rapidité pour apporter des solutions (Landes David, 1983). Emigré à Londres, il est élu à la Royal Society et il s'intéresse entre autre à des problèmes mathématiques mis au concours. L'un de ces problèmes porte sur une question posée par Newton: *Quelle est la forme de moindre résistance pour un solide* ? Fatio publie en 1701 une réponse élégante à cette question[10].

Comme on le sait bien, la période à cheval sur les XVIIe et XVIIIe siècles est l'époque prestigieuse de la dynastie bâloise des **Bernoulli** qui se pencha sur le calcul infinitésimal, le calcul des probabilités, la théorie des nombres et la physique: en premier lieu **Jakob Ier** (1654-1705) et **Johann Ier** (1667-1748) dont le disciple **Leonhard Euler** (1707-1783) est le mathématicien le plus génial du XVIIIe siècle. De la mort de Fermat en 1665 à la naissance d'Euler en 1707, les conditions de la vie scientifique en Europe ont subi une considérable évolution.

Au temps des amateurs éclairés, échangeant entre eux une abondante correspondance, a peu à peu succédé celui des professionnels appointés, communiquant les résultats de leurs travaux dans des publications spécialisées. Euler fut à tous égards exceptionnel: la publication de ses *Œuvres complètes*, commencée en 1911 sous les auspices de la Société scientifique nationale helvétique n'est pas encore tout à fait achevée et a donné lieu à plus de 70 volumes (Guinot, 1994).

D'autres mathématiciens du XVIIIe siècle, d'influence culturelle française ou allemande, sont passés dans l'histoire: **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) de Mulhouse (ville qui à l'époque – à partir de la paix de Westphalie en 1648 et jusqu'au 1798 – était dans la Confédération Helvétique[11]), **Samuel König** (1712-1757) de Berne (élève de Johann Bernoulli), **Niklauss Fuss** (1755-1826) de Bâle, représentèrent les sciences mathématiques au sein des Académies de Berlin et de Saint-Pétersbourg, **Gabriel Cramer** (1704-1752) et **Jean-Louis Calandrin** (1703-1758) œuvrèrent à Genève dans les domaines des mathématiques et de la philosophie.

On rappelle ici quelques résultats au sein des mathématiques de Cramer et de Lambert.

Les concepts de déterminant et de matrice sont étroitement liés historiquement; tous proviennent de l'étude, au cours du XVIIIe siècle, des systèmes d'équations linéaires, que nous écrivons aujourd'hui:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \qquad \text{avec } i = 1, 2, \dots, m$$

où les x_i sont connus et les y_j inconnus.

Dès 1678, Leibniz les avait abordés, et utilisé une notation à indices dans le cas d'un système de trois équations à deux inconnues. Il éliminait les deux inconnues et obtenait un déterminant dont la nullité était la condition de possibilité de résolution du système.

10. Il porte son attention aussi sur le problème encore pas très bien résolu des coussinets des pivots concernant les horloges. On doit à Fatio (en travaillant avec deux horlogers français réfugiés à Londres du nom de Pierre et Jacob Debaufre) l'utilisation des rubis comme coussinets et contre-pivots pour l'axe du balancier.

11. Les frontières de la Confédération changèrent d'une façon brutale durant les guerres napoléoniennes (1798-1815).

En 1748, Mac Laurin donne les formules de résolution explicites pour $n = m = 2$ et $n = m = 3$.

La méthode de résolution simultanée d'équations linéaires à plusieurs inconnues, sous forme de quotients de deux expressions, qui sont des polynômes multilinéaires par rapport aux coefficients du système, est explicitée par Cramer en 1754.

Lambert, philosophe et mathématicien, fut membre de l'académie de Berlin en 1765. Il a innové en préparant les géométries non euclidiennes.

Son nom est resté attaché en cartographie à une projection encore utilisée de nos jours. Son œuvre de logicien a été trop peu étudiée. Lambert étudie la perspective, notamment dans son livre *La Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral*, en 1759.

Dans sa préface, il indique comment simplifier les règles de construction perspectiviste en explicitant leurs principes.

Pour Lambert les règles ont à la fois une fonction pratique et une fonction théorique, celle-ci définie par l'effectivité de la méthode.

En 1761, Lambert démontre que π est irrationnel (en 1882, Lindemann établit la transcendance de π).

Lambert a 33 ans, en cette année 1761 où Rousseau publie la *Nouvelle Héloïse* et adresse à L'Académie des Sciences de Berlin un mémoire (qui ne sera lu qu'en 1767) intitulé «*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmétiques*».

Ce mémoire est rédigé en français (Lambert qui a appris le français à quinze ans, écrit essentiellement en allemand et pour une part en latin). Sa structure est de forme assez classique pour le dix-huitième siècle:

Un exposé des motifs rédigé presque entièrement en langue commune, qui occupe deux pages et demie, et développe à la fois les intentions de l'auteur et l'état de la question et des idées à son époque, puis un corps de texte assez analogue aux textes modernes, c'est à dire un mélange bien particulier d'écriture et de signes symboliques mathématiques et la rhétorique qui les enchaîne, enfin, et dans les deux dernière pages, un retour à la pure rhétorique, dans un très pertinent exorde au style parfois prophétique.

Le XIXe siècle

Dans son *Essai sur une matière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* paru en 1806, **Jean Robert Argand** (Genève 1768 - Paris 1822) fournit une représentation géométrique des nombres complexes.

Après les résultats de Gauss dans ce domaine, on parle du plan d'Argand-Gauss.

Au sein de l'école allemande, le fossé se creuse rapidement entre les géomètres, qui privilégient la forme et veulent créer une géométrie purement descriptive, et les analystes, qui favorisent les méthode algébriques.

Les représentants les plus intransigeants de la première tendance sont **Steiner** et Staudt, tandis que Möbius et Plücker refusent de bannir les coordonnées de la géométrie projective.

Fils d'un agriculteur bernois, **Jakob Steiner** (1796-1863), élève de Pestalozzi à Yverdon, fut professeur de géométrie à l'Université de Berlin.

L'œuvre de Steiner s'inscrit dans le développement de la géométrie projective, après le travail de Poncelet, et consacre le renouveau de l'école mathématique allemande.

Steiner devint un spécialiste de la géométrie dite «synthétique», discipline dans laquelle ses ouvrages font encore autorité de nos jours.

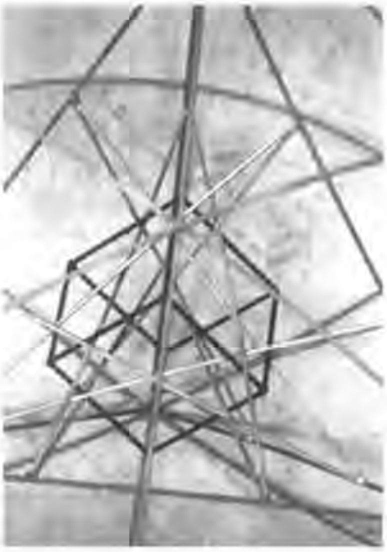
C'est au Genevois **Charles Sturm** (1803-1885) que l'on doit des connaissances importantes en algèbre, en géométrie et en calcul différentiel.

Professeur à l'Ecole Polytechnique, auteur d'un cours de mathématiques, Sturm était desservi par une écriture alambiquée. son nom est resté attaché à un théorème de nature algorithmique sur la recherche des racines réelles des équations algébriques.

Sa contribution essentielle est l'étude entreprise avec Liouville de certaines équations différentielles du second ordre avec des conditions aux limites. Il publie ses résultats principaux dans les travaux: «*Mémoire sur la Résolution des équations numériques*» (1835) et «*Mémoire sur les Lignes du second ordre*» (1825-26)

Pour conclure cet aperçu historique sur la Suisse et ses mathématiciens, je rappelle ici encore **Ludwig Schläfli** (1814-1895) de Graswyll (Berne). Il fait ses études secondaires au Gymnase de Thun et ses études universitaires à l'Université de Berne ou, en 1863, il devient professeur.

Il est un des créateurs de la géométrie pluridimensionnelle.



Schlafli is Alive and Well and Living in a Hollywood Studio

Références

Dahan-Dalmedico, A . Peiffer, J.: 1987, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales.* Editions du Seuil.

Dhombres, J., & all.: 1987, *Mathématiques au fil des âges*, gauthier-villars Paris.

Guinot, M.: 1994, *Ce diable d'homme d'Euler*, Aléas Editeur.

Landes David, S.: 1983, *Revolution time: Clocks and the Making of the Moderne World. L'heure qu'il est, ...*

Montucla, J. F.: (AN VII), *Histoire des Mathématiques*, Tome deuxième.

Serfati, M.: 1992, *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, Brochure A.P.M.E.P. n° 86.

Treichler, H. P.: 1991, *L'aventure Suisse de siècle en siècle*, Presse Migros.

Ulivi, E.: 1990, «Le quadratrici di Bartolomeo Sovero», *L'educazione Matematica*, Anno XI, Serie III, n. 2, 103-121.

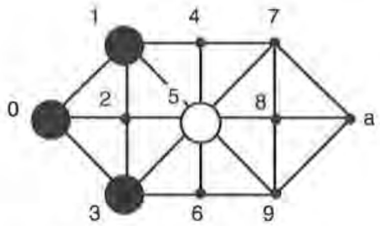
La Suisse, de la formation des Alpes à la quête du futur, 1975, pp. 583-584.

Sur un réseau (deuxième partie[1])

François Jaquet, IRDP

Résumé de la première partie

Le jeu à deux joueurs *Léa et les pirates*[2] se déroule sur ce réseau selon les règles suivantes :



position
de départ

(Les cases ne sont pas numérotées sur le plan de jeu original ; les notations : 0, 1, 2,... 9, a, sont introduites ici pour les besoins de l'article.)

Un des joueurs, prend les trois pions noirs (les pirates) et tente de bloquer le pion blanc (Léa), conduit par le second joueur.

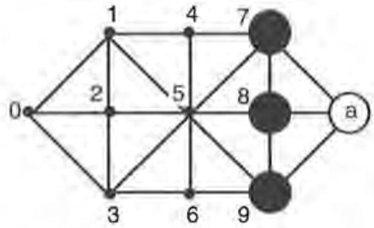
1. La première partie de cet article a été publiée dans *Math-Ecole* 193 (pp. 26-30)

2. Ging, E., Sauthier, M.-H., Stierli, E. (1997) *Mathématiques 2P (livre du maître, fichier de l'élève, fichier de classe).* Neuchâtel : COROME.

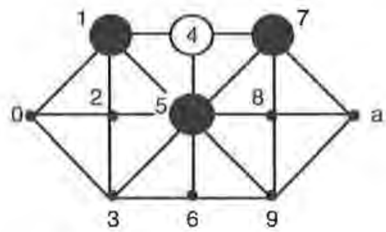
A tour de rôle, les joueurs déplacent un de leur pions (ou leur pion) vers une case voisine libre en suivant les lignes du réseau. Le pion blanc peut aller dans toutes les directions et tous les sens ; les pions noirs vont de gauche à droite horizontalement ou en oblique, ou verticalement vers le bas ou le haut ; ils ne peuvent pas reculer.

Les pirates gagnent s'ils arrivent à bloquer le pion blanc. Léa gagne si elle peut échapper aux pions noirs ou contraindre les pirates à une répétition des coups.

Les deux positions de blocages sont :



position A
a - 789



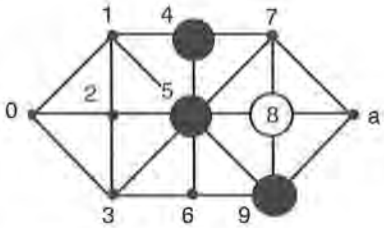
position B
4 - 157

Les positions symétrique par rapport à l'axe horizontal ne sont pas distinguées dans l'article. Ainsi, la position B' : (4 - 359) est assimilée à la position B (4 - 157).

Solution des problèmes

La première partie se termine par quatre problèmes, que nous rappelons ici et dont nous donnons les solutions. Les positions correspondantes: C, D, E et F serviront de référence pour l'analyse globale du jeu et la description d'une stratégie gagnante pour les pirates.

Problème 1.
C'est aux noirs à jouer, ils peuvent gagner en deux coups. Comment ?
Solution:



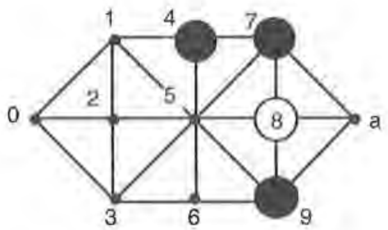
position C
459 - 8

Au premier coup, les noirs poussent leur pion 4 en 7 (coup assez naturel et évident). Léa est contrainte d'aller en a. Au deuxième coup, les noirs poussent leur pion 5 en 8 et obtiennent la position de blocage A.

Ces coups peuvent se noter ainsi (ceux des noirs sont en gras):

458 - 8 (position C) - **579** - a - **789** (position A)

Problème 2.
C'est aux noirs à jouer, ils peuvent gagner en deux coups. Comment ?



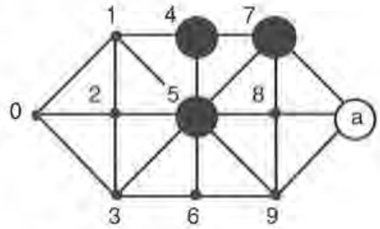
position D
479 - 8

Solution:
Au premier coup, les noirs ramènent leur pion 4 en 5 (coup obligatoire pour empêcher le pion blanc de s'échapper). On se retrouve alors dans la situation précédente:

479 - 8 (position D) - **579** - a - **789** (position A)

Les autres positions équivalente à D sont 179, 279, 379, 679 - 8

Problème 3.
C'est aux noirs à jouer, ils peuvent gagner en trois coups. Comment ?



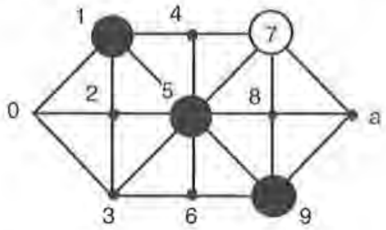
position E
457 - a

Solution:
Au premier coup, les noirs amènent leur pion 5 en 9. (et non en 8 ! ce qui permettrait à Léa de s'échapper en deux pas, comme nous l'avons vu dans la première partie de l'article). Ce coup constitue la clé de nombreuses parties: lorsque le pion blanc est en a, les noirs doivent profiter de l'occasion et chercher à occuper les deux cases 7 et 9, pour autant que leur troisième pion soit en 4 (ou 6), 1 (ou 3) ou 2 . Léa est alors contrainte de revenir en 8. Les pirates vont occuper la case 5 et se retrouver dans une des positions vues précédemment:

457 - a (position E) - **479** - 8 - **579** - a - **789** (position A)

Les autres positions équivalente à E sont: 157, 257, 357, 657 - a, ainsi que, par symétrie: 459, 159, 259, 359, 679 - a

Problème 4.
C'est aux noirs à jouer, ils peuvent gagner en quatre coups au plus. Comment ?



position F
159 - 7

Solution:
Au premier coup, les noirs amènent leur pion 1 en 4. Léa a alors deux possibilités : aller en 8 pour se retrouver en position C, ou aller en a pour se retrouver dans une position du type E, permettant aux pirates d'occuper les cases 7 et 9 :

159 - a (position F) - 459
– 8 (position C) - **579** - a - **789** (position A)
– a (position E) - **479** - 8 - **579** - a - **789** (position A)

L'autre position équivalente à F, par symétrie, est 357 - 9.

La stratégie gagnante

Edouard Lucas, qui a analysé un jeu tout à fait analogue dans ses *Récréations mathématiques*, (l'histoire de ce jeu fait l'objet du chapitre suivant) donne un tableau général par lequel il montre que les noirs gagnent toujours en une douzaine de coups, au maximum.

Le cas étudié par Lucas est celui où **les pirates commencent** et déplacent leur pion noir de 0 en 2. Trois possibilités s'offrent à Léa : aller en **4** (ou 6 par symétrie), aller en **7** (ou 9), aller en **8** :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	123	**4**	- 135 -	7	- 345	**8**	- 357	**a**	E						
b								**9**	F						
c						**a**	- 349	**7**	- 459	**8**	C				
d										**a**	E				
e								**8**	- 359	**7**	- 259	**4**	- 159 -	7	F
f												**8**	- 159	**7**	F
g														**a**	E
h												**a**	E		
i										**a**	E				
j		**7**	- 125	**4**	- 135		(a;3)								
k				**8**	- 135	**7**	(a;4)								
l						**a**	- 138 -	7	- 158	**4**	B				
m										**a**	- 258 -	7	- 259	(e;11)	
n				**a**	- 129	**7**	- 259	(e;11)							
o						**8**	- 159	(f;13)							
p		**8**	- 135	(k;5)											

Tableau 1.

Les lettres B, C, E, ou F indiquées en fin de certaines lignes indiquent qu'on se retrouve dans une position des problèmes (ou de leurs variantes) déjà examinées précédemment.
Pour les autres lignes, on indique les coordonnées d'une position qui s'est déjà présentée précédemment. Par exemple, à la fin de la ligne j, le couple (a;3) indique qu'on peut poursuivre l'analyse en partant de la ligne a, en 3e colonne.

Il ne reste plus maintenant qu'à examiner le cas où **Léa commence**. Elle a quatre possibilités : aller en **2**, en **4** (ou 6 par symétrie), en **7** (ou 9), ou en **8**. Cette analyse aboutit aussi à des positions rencontrées dans le tableau 1 ou dans l'une des lignes précédentes de ce tableau 2.

	dép.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
a'	013	**2**	015	3	025	6	035	9	056	**8**	059	**a**	058	7	158	(l;9)
b'												**7**	259			(e;11)
c'										**a**	059	**8**	159			(f;13)
d'												**7**	259			(b';12)
e'		**4**	015	7	125											(j;3)
f'		**7**	015	**4**	135											(b;3)
g'				**8**	135											(k;5)
h'				**a**	019	**8**	059	**7**	259							(b';12)
i'								**a**	058							(a';12)
j'						**7**	059	**4**	159							(e;13)
k'								**8**	159							(c';12)
l'								**a**	058							(a';12)
m'		**8**	015	**7**												(e';2)
n'				**a**												(h';3)
o'				**9**	125	**6**	135									(f';4)
p'						**8**	135									(g';4)
q'						**a**	129	**7**	259							(h';8)
r'								**8**	159							(k';8)

Tableau 2

Un peu d'histoire

Léa et les pirates est une variante du *Jeu militaire* qui fit le bonheur des habitués du Café de la Régence à la fin du siècle dernier. E. Lucas[3] le présente ainsi dans ses *Récréations mathématiques* :

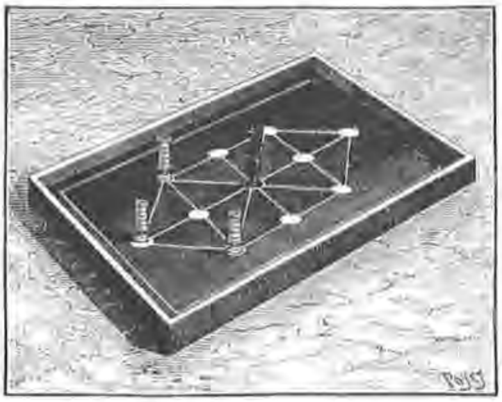
«Le *Bulletin de la Réunion des officiers* (No 34 du 21 août 1886, p. 795) annonce que [...] M. Louis Dyen, sous-lieutenant en retraite, chevalier de la Légion d'honneur[4], a utilisé ses loisirs à la confection d'un jeu militaire qu'il a offert à la bibliothèque, et qui, par ses combinaisons variées, donne une idée des manœuvres stratégiques employées par trois brigades de cavalerie pour couper de ses communications un corps d'armée qu'elles harcèlent. Sous une apparence des plus simples, le Jeu militaire présente une variété de combinaisons très compliquées. (Suit la description du matériel et des règles de déplacement)... Le corps d'armée est victorieux lorsque, après un nombre d'étapes marqué d'avance, il n'a pu être immobilisé ; il est vaincu dans le cas contraire. Moins difficile que le jeu d'échecs, le Jeu militaire est

3. Edouard, Lucas. (1892) *Récréations mathématiques*, Tome III. Nouveau tirage (1975) A. Blanchard, Paris.

4. D'après Martin Gall, le chroniqueur des jeux de combinaisons au Journal Gil Blas, l'inventeur du Jeu militaire serait M. Constant Roy, à Saint-Mandé (Seine).

des plus instructifs, et mérite d'être recommandé comme une distraction des plus utiles aux officiers et aux sous-officiers.»

E. Lucas mentionne encore que le prospectus qui accompagne la tablette du *Jeu militaire* annonce que «des primes de *cent* francs sont offertes par l'inventeur aux personnes qui gagneront autant de parties que lui-même, et des primes de *mille* francs à celles qui en gagneraient plus de la moitié.»



Le nouveau jeu militaire.

Ce jeu est probablement devenu un classique des jeux de marelles ou de combinaisons au début de notre siècle et à ce titre est parfois mentionné dans des recueils ou encyclopédies des jeux. On le voit réapparaître ensuite dans des publications en lien direct avec l'enseignement des mathématiques:

- en 1977, dans *Pentomino* (no 3) (Irem de Grenoble), sous une forme voisine: *Les nains et le géant*
- en 1981, dans la revue *Jeux et stratégie* (no 7): *Le géant, les trois nains et les graphes*
- en 1982, dans *Jeux I* (Brochure APMEP no 44): *La chasse à courre*
- en 1992, dans la rubrique *Pour une pratique autonome de la mathématique* de L'Educateur (1.92): *Les gendarmes et le voleur*

En plus de cent ans, ce jeu proposé à l'origine dans des cercles d'officiers est arrivé en classe de mathématiques de deuxième année primaire, après avoir passé par des revues de jeux spécialisées, puis par des publications pédagogiques.

Dans toutes les publications concernées, le jeu est considéré comme apparemment simple mais on admet toutefois que les stratégies menant au gain sont complexes. Seuls, d'ailleurs, Edouard Lucas dans ses *Récréations mathématiques* et Pierre Tricot (dans *Jeux et stratégies*, sur une version simplifiée) en donnent une analyse complète.

Cette évolution est caractéristique de beaucoup d'autres jeux de ce genre, dont on estime actuellement qu'ils ont leur place dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. L'introduction d'activités construites autour de la recherche et l'élaboration de stratégies est stimulante, tentante pour ceux qui en sont friands. Mais elle ne va pas de soi. *Léa et les pirates* en est un bon exemple. La première partie de l'article se terminait par «La balle est dans le camp des lecteurs de *Math-Ecole*». Un seul d'entre eux a réagi, non pas pour apporter une solution, mais pour dire son intérêt d'approfondir la réflexion didactique sur ce jeu.

Avec les auteurs qui proposent des jeux de stratégie dans les moyens d'enseignement, nous souhaitons que ceux-ci arriveront à faire leur place, à être reconnus comme formateurs pour le développement de la pensée déductive. Mais nous sommes conscients qu'un long travail de formation et de promotion sera encore nécessaire.

Les comptes rendus ou observations à propos de *Léa et les pirates* en classe de deuxième ou troisième année sont les bienvenus. *Math-Ecole* se fera un plaisir de les publier.

Espace et perspective

Michel Bréchet

Un peu d'histoire

L'élaboration de la perspective constitue une étape importante dans l'histoire de la pensée scientifique. Elle se résume à trouver une technique permettant de créer sur un plan l'illusion de la profondeur. Notre vision binoculaire étant capable d'apprécier le relief, comment dès lors construire une géométrisation cohérente de la représentation spatiale ? Mais pour que cette innovation géométrique apparaisse, encore fallait-il que les dessinateurs et les artistes éprouvent la nécessité de traduire les trois dimensions de l'espace physique sur une surface.

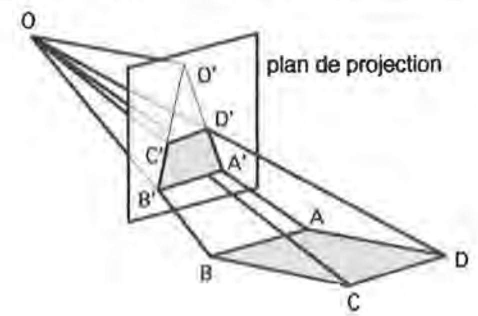
Au Moyen Age, les artistes ne cherchent pas à donner de la «profondeur» à leurs œuvres, car les modalités de représentation du réel sont assujetties à des visions du monde bien particulières. Les peintures ne tiennent pas compte des relations spatiales, elles reflètent davantage la hiérarchie que les proportions, elles valorisent fréquemment le sujet principal, quitte à donner aux autres éléments représentés une certaine distorsion.

La naissance de la perspective date de la fin de la période médiévale. A cette époque, l'analyse des formes géométriques devint une préoccupation récurrente : l'urbanisation tenta de quadriller les villes, l'art de mesurer prit une importance croissante pour les ingénieurs, la cartographie et la topographie – techniques se fondant sur des projections dans un plan – se développèrent, et il devint courant pour les commerçants de déterminer des volumes. Dans le même temps, les Toscans rationalisèrent leur agriculture grâce à des alignements stricts et, comme les engins de génie civil et militaire se multiplièrent, les modes de représentation permettant de rendre compte des volumes évoluèrent. Ainsi, le regard porté sur les objets se transforma; ce changement de mentalité conduisit à valoriser dans tous les domaines les notions de proportion et d'ordre mathématique.

Ce contexte social, technique et économique extrêmement riche ne doit toutefois pas occulter l'influence prépondérante des artistes du début de la Renaissance – dont la peinture porte essentiellement sur des thèmes religieux – dans la mise en place de ce nouveau système de représentation spatiale. C'est en effet les peintres et les architectes du début du XVe siècle qui mirent au point la première théorie de la perspective.

En 1425, Masaccio utilise pour la première fois de façon consciente et systématique la perspective. Sa *Trinité*, peinte sur un mur de l'église Santa Maria Novella de Florence, possède un point de fuite unique, situé au milieu de la ligne d'horizon, et celle-ci se trouve à peu près au niveau des yeux d'un observateur se tenant debout devant la fresque.

Dans son traité *De la peinture*, Alberti (1404-1472) propose d'étudier la représentation spatiale en analysant les triangles et autres figures formés par les rayons visuels. Il élabore l'idée selon laquelle il faut concevoir un tableau comme une «fenêtre» à travers laquelle le regard explore les figures de l'espace. Selon lui, ces figures font l'objet d'une projection sur un plan défini par cette «fenêtre». Le tableau n'est donc rien d'autre que l'intersection de ce plan et de la pyramide visuelle dont le sommet est l'œil.



Une telle représentation de l'espace visuel ne reflète toutefois pas fidèlement l'espace réel : les deux postulats selon lesquels l'observateur est borgne et son œil unique immobile ne sont en effet pas vérifiés et, en outre, la sphéricité de l'image rétinienne n'est pas prise en compte.

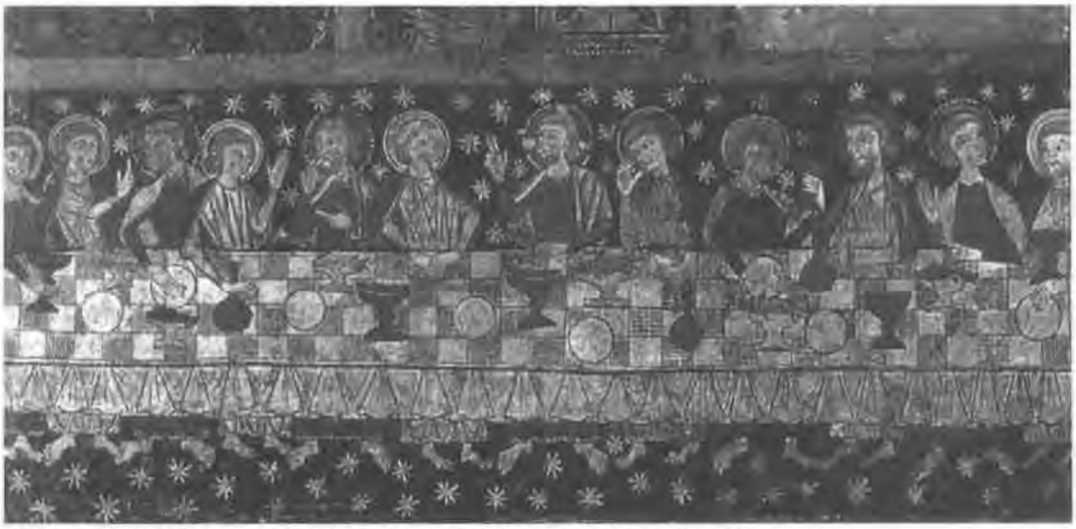
En classe

Les questions relatives à la représentation plane de la réalité tridimensionnelle constituent un vaste réservoir de problèmes pour l'enseignement de la géométrie de l'espace. Elle permettent aux élèves d'évoluer dans un environnement où se côtoient des objets mathématiques fondamentaux tels que les points, les droites et les plans, et de développer ainsi leur intuition de l'espace. En lien étroit avec l'éducation visuelle, elles visent en outre à aiguiser «leur regard de géomètre» et à leur faire acquérir un coup d'œil utile à l'interprétation des œuvres architecturales et picturales.

Examinons quelques situations vécues avec des élèves de 13-15 ans.

a) Analyser une œuvre

Tâche:
Observer cette fresque médiévale qui représente le Christ et ses apôtres au moment de la célébration de la Cène et noter ce qui est frappant dans la représentation des personnages, de la table, des plats et des pichets.



Parement d'autel de Soriguerola (détail), fin du XIIIe siècle, Musée d'art catalan, Barcelone.

Cette image illustre une technique fréquemment utilisée au cours des siècles passés, qui ne manque pas d'étonner les élèves :

Ils ont tous des aréoles. Les plats sont plats et vides. Les pichets sont grand et certains sont remplit de poissons. Pas de perspective. Les assiettes sont vu de dessus et les pichets de face.

Tout est représenté très à plat, il n'y a aucuns reliefs, on dirait que les personnage sont collé au mur, on dirait qu'il porte la table et que les pichets sont colle à plat sur la table, pas de 3D.

On dirait que les personnages sont debout ou ont les jambes coupées. Les assiettes ne sont pas dessinées justes: il aurait fallu qu'elles soient en 3D. Les coupes sont beaucoup trop grandes par rapport au reste. On dirait que la table est posée sur les genoux des personnages. Les pichets, par rapport aux personnages et à la table, devraient avoir du volume; ils n'en ont pas. On dirait qu'ils sont en carton.

En fait, les objets et les personnages qui se trouvent sur cette peinture sont vus à partir de points de vue différents, comme si le peintre s'était déplacé pour représenter chacun d'eux dans la position la plus favorable à la compréhension visuelle:

- la table est figurée par un rectangle et les plats sont ronds, comme si ces objets étaient vus d'en haut;
- les pichets et les personnages sont vus d'en face.

Il s'agit donc de projections parallèles sur les faces d'un parallélépipède rectangle, procédé couramment utilisé en dessin géométrique.

Il est par ailleurs intéressant de constater que toute perspective mathématique est également absente des dessins enfantins. En général, jusqu'à l'âge de 10 ans (avec de grandes disparités entre les enfants), ils dessinent les objets selon différents points de vue, pour mettre en évidence ce qu'ils sont réellement et non ce qu'ils paraissent être. Sous cet aspect, l'analogie avec l'œuvre *Parement d'autel de Soriguerola* est éloquente.

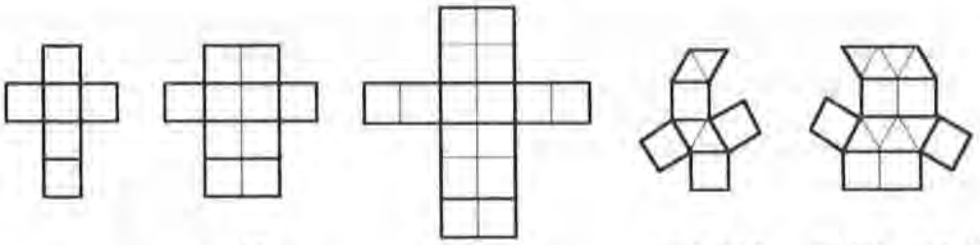
Noémie sur sa planche à roulettes (9 ans)

A table (Julie, 7 ans)

b) Représenter un solide

Matériel :
Pour chaque groupe (4-8 élèves), cinq prismes – déjà construits – dont les développements figurent ci-dessous (tous ces polyèdres peuvent être construits à l'aide du matériel Polydron).

Tâche :
Dessiner ces prismes sur une feuille de papier de telle sorte que les camarades d'un autre groupe puissent reconnaître à quel prisme correspond chaque dessin.

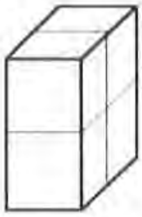
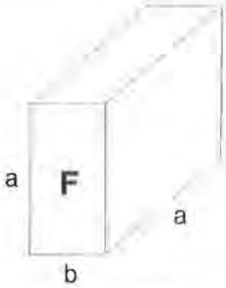
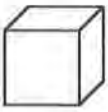
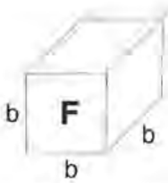
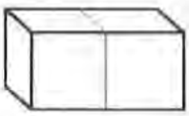
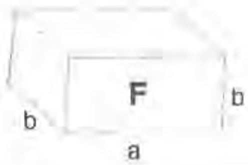
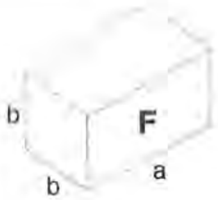


cube	«petit» parallélépipède rectangle	«grand» parallélépipède rectangle	prisme droit dont la base est un losange	prisme droit dont la base est un parallélogramme

Cette activité met en relief :

- la difficulté de prendre en compte la tridimensionnalité ;
- la difficulté de reconnaître un objet à partir d'une représentation, notamment de repérer les caractéristiques de cet objet, caractéristiques qui n'apparaissent pas directement sur le dessin ;
- qu'il n'existe pas de manière parfaite de représenter ce que nous voyons, qu'il n'y a pas de principe ou de norme qui soit absolu ;
- que la forme apparente d'un objet varie selon le point de vue.

Analysons à titre d'exemple quelques productions d'élèves :

Nom du prisme à représenter. Vue en perspective cavalière de ce prisme	Représentation effectuée (les lettres ont été ajoutées dans le but de clarifier l'analyse)	Nom du prisme auquel la représentation a été associée
A) «Grand» parallélépipède rectangle 		«Grand» parallélépipède rectangle
B) Cube 		Prisme dont la base est un losange
C) «Petit» parallélépipède rectangle 		«Grand»parallélépipède rectangle
D) Prisme dont la base est un parallélogramme 		«Petit» parallélépipède rectangle

Eléments d'analyse

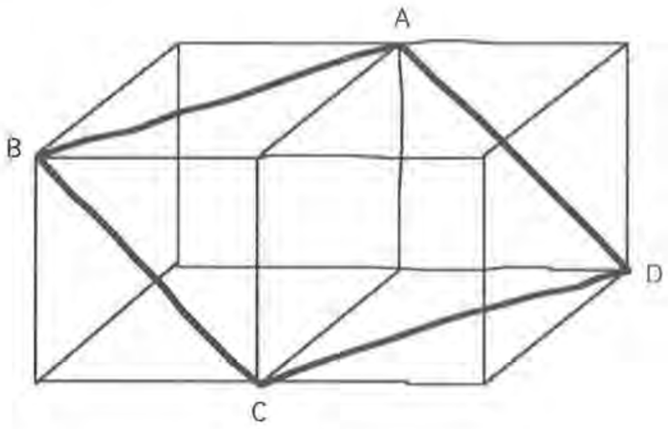
Aucune de ces représentations n'est effectuée selon les règles de la perspective. Toutes sont le fruit d'un compromis entre ce que les élèves savent de l'objet et ce qu'ils voient. Sur chaque représentation :

- les rapports des longueurs des arêtes sont identiques à ceux du prisme correspondant, en particulier a/b = 2 ;
- la face avant F est dessinée sans déformation, comme si elle était parallèle au plan de projection;
- les arêtes perpendiculaires à la face F fuient selon une même direction.

Les deux premières mises en correspondance sont probablement dues au fait que a = 2b (cas A) et que la face supérieure de la représentation du cube est un losange (B). Quant aux deux dernières, c'est certainement la familiarité avec les perspectives cavalière (C) et isométrique (D) qui sont à leurs origines.

c) Interpréter le dessin d'un solide

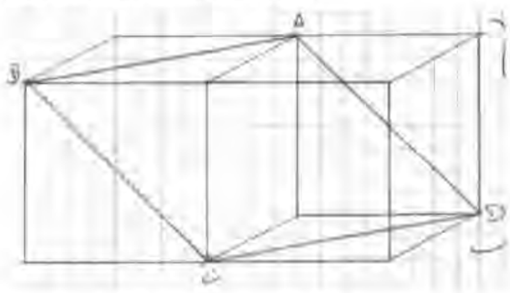
Tâche :
Enumérer les propriétés du quadrilatères ABCD.



Les points A, B, C et D sont les sommets de deux cubes mis côte à côte

L'interprétation d'une représentation plane d'un solide pose en règle générale des difficultés aux élèves de la scolarité obligatoire. Comme en témoigne le dialogue ci-dessous, certains d'entre eux ont tendance à rester en prise directe avec le dessin, et à «oublier» que l'objet réel s'étend dans les trois dimensions de l'espace.

Alain, Léa et Julie, trois élèves de 9e année, commencent chacun par traduire la situation en perspective cavalière. Ils respectent approximativement les conventions en vigueur. Ils n'ont pas de cube sous les yeux.



Alain : *AB égal BC. C'est sur les faces d'un cube. C'est des carrés de même grandeur* (sur son dessin, il montre les faces correspondantes). *ABCD, c'est un losange.*

Léa : *Mais non, j'ai mesuré sur mon dessin. J'obtiens pas les mêmes mesures.*

Julie : *Regarde. AB et BC, c'est des diagonales. Donc c'est les mêmes.*

Léa : *Mais je ne suis pas folle. Mesurez sur vos dessins. Vous verrez bien. ABCD est un parallélogramme.*

Alain et Julie mesurent et obtiennent des longueurs différentes pour AB et BC.

Julie : *Je sais pourquoi.* (Elle explique alors, avec son vocabulaire, que pour représenter un cube en perspective, il faut choisir des angles de 30° pour les angles de fuite et un facteur 0,5 pour les longueurs des fuyantes). *Comme ça, on aura des côtés de même longueur.*

Alain : *Alors on refait le dessin.*

Chaque élève effectue une nouvelle représentation en ayant la certitude que, sur celle-ci, les côtés du quadrilatère seront isométriques.

Prof.: *Alors ?*

Alain: *Ouais, ça joue. C'est la même longueur.*

Prof.: *Vraiment ?*

Alain: *A deux millimètres près* (c'est à peu près ce que l'on obtient à partir de cubes de 3 cm d'arête).

Léa: *Donc j'avais raison. C'est un parallélogramme.*

Julie: *S'ils avaient eu la même longueur, ç'aurait été un losange.*

Prof.: *Un losange ou un carré.*

Alain: *Ben non. On voit bien que c'est pas un carré. Y'a pas d'angle droit.*

Prof.: *Montre-moi des angles droits ?*

Alain montre les segments qui sont perpendiculaires sur la représentation, mais ne prend pas en compte ceux qui le sont sur l'objet réel. A la demande du prof., les élèves entament la rédaction de la réponse.

Alain: *Mais logiquement, c'est un losange. Un cube a des faces carrées. Les diagonales sont isométriques. C'est le dessin qui trompe. La face du dessus est fuyante. Elle paraît allongée.*

Julie: *Ouais, ben la logique...*

Après quelques minutes de discussion, c'est le statut quo: Alain est convaincu que la figure ABCD est un losange et Léa que c'est un parallélogramme. Julie, quant à elle, ne sait plus trop.

La prise de conscience de la différence entre un objet et sa représentation plane n'est donc pas une mince affaire. Pour amener les élèves à lire correctement un dessin, il est essentiel, d'une part, de favoriser les interactions objet-dessin – en les laissant par exemple manipuler des maquettes –, et d'autre part, d'expliciter les multiples conventions liées à la représentation spatiale.

Références bibliographiques

THUILLIER Pierre, *Espace et perspective au Quattrocento*, in *La Recherche* n°160, nov. 1984

Commission inter-IREM, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Ed. Marketing, Paris, 1993

DAHAN-DALMEDICO Amy / PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques*, Seuil, 1986

Le grand livre de la perspective, Bordas, Paris, 1991

GILBERT Thérèse, *La perspective en question*, Ciaco éditeur, 1987

IREM de Montpellier, *Enseigner la géométrie de l'espace*, 1992

Mathador, l'univers des chiffres

Martine Simonet

Ce jeu, disponible dans le commerce, convient aux enfants dès 10 ans. Il peut être facilement adapté pour y jouer avec toute la classe, en individuel ou par équipes.

Le but du jeu est d'arriver le premier au terme d'un parcours de 63 cases en résolvant des problèmes ou en effectuant des opérations comme dans «le compte est bon».

Il y a 4 types de cases (12 rouges, 3 bleues, 36 jaunes et 12 vertes). Selon la couleur, la mission à réaliser est différente.

Lorsqu'on arrive sur une case rouge, il faut tirer une carte et résoudre le problème qui y figure en moins de deux minutes. Voici deux exemples parmi les 250 cartes que contient la boîte de jeu[1]:

«Je pense à un nombre. Il y a le même écart entre 17 et mon nombre qu'entre mon nombre et 239. Quel est ce nombre auquel je pense ?»

«Je viens de commencer la lecture d'un livre. En additionnant le numéro de toutes les pages que j'ai déjà lues, j'obtiens 78. Quel est le numéro de la page suivante ?»

Les réponses figurent au dos des cartes...

Sur les cases bleues, il s'agit de trouver 99 à l'aide des cinq nombres obtenus en lançant les dés à 4, 6, 8, 12 et 20 faces.

Pour les cases jaunes ou vertes, on utilise les mêmes dés que précédemment et deux dés à 10 faces (0 à 9 et 00 à 90). L'addition de ces deux dés détermine le résultat à atteindre (entre 0 et 99). Sur les cases jaunes et vertes figurent respectivement un et deux signes opératoires (+, –, x, :) qui devront être utilisés obligatoirement dans le calcul.

Pour ces trois derniers types de cases, le temps est limité à une minute !

Le déplacement sur le parcours se fait en fonction des points obtenus avec un dé conventionnel à 6 faces. Dans le cas d'une partie avec toute la classe, je vous propose la variante suivante: le temps n'est pas limité. C'est l'équipe qui a trouvé la solution le plus rapidement qui peut avancer son pion, déterminant par la même occasion le type de défi soumis à la sagacité de tous au tour suivant. Petite suggestion pratique qui vaut ce qu'elle vaut: reproduire le plateau de jeu sur une grande feuille, la fixer au tableau noir et utiliser des pions aimantés pour rendre la progression de chaque équipe visible aux yeux de tous.

Vous trouverez plus d'informations sur ce jeu ainsi qu'une démo sur le site internet: http://perso.wanadoo.fr/mathador/

1. A part les 250 cartes «problèmes», la boîte de jeu contient 8 dés différents (4, 6, 8, 10, 12 et 20 faces), 4 pions, 1 sablier, un plateau et la règle du jeu avec plusieurs variantes.

Courrier des lecteurs

Courrier de Mme Janine Cosandey, de Blonay, du 3.10.00, à propos de l'article *Cahiers de Vacances* paru dans *Math-Ecole* no 193, pp. 43-46

Monsieur Jaquet,
Vous avez décrit vous-même lucidement votre article dans Math-Ecole sur les cahiers de vacances, comme dur et ironique. Je trouve aussi !

Merci pour votre analyse intéressante des activités qui y sont proposées. La critique, même violente peut faire progresser, soit parce que le lecteur y souscrit, soit par défi de prouver que la critique était exagérée. Il était donc important que vous nous fassiez part de votre opinion.

A mon tour de donner la mienne:
D'abord je me situe tout de suite comme ayant accueilli les nouvelles conceptions de l'apprentissage avec grand intérêt, notamment: donner du sens, pouvoir essayer, se tromper sans représailles, prendre conscience des démarches de pensée, donner du temps pour laisser se construire les structures de pensée logiques, travailler l'erreur comme une opportunité de progresser, n'entraîner qu'une démarche déjà bien assimilée, etc.

Mais je suis méfiante de la pensée unique, de la méthode adaptée à tous, à tout, en toute occasion.

D'ailleurs vous en appelez vous-même à l'ouverture dans votre introduction aux nouveaux moyens. Rester vigilant, être prêt à se remettre en question.

Je ne tirerais donc pas à boulets serrés contre une autre approche, qui ne se veut d'ailleurs pas du tout un modèle, mais un simple complément d'activités de vacances. Dans une brochure, quelle qu'elle soit, on ne peut prétendre pratiquer la conception socio-constructiviste qui vous tient à cœur, conception qui ne se laisse pas mettre en fiches, vous le savez bien.

Ces exercices de vacances me paraissent un peu maladroits, plutôt anodins que dangereux. Je comprends votre agacement à la vue de ces colonnes de calculs que vous vous êtes efforcés avec ténacité de< remplacer par un entraînement plus riche de sens. Mais... Tous les élèves (100%) profitent-ils assez de ces occasions de pratique du calcul en situation ? Autrement dit, ces activités sont-elles suffisantes pour tous ?

Les recherches dans le «comment apprendre» ont mis en évidence des fonctionnements très différents suivant les élèves.

J'ai le sentiment que les nouveaux moyens sont très appropriés aux élèves curieux, ouverts aux autres, assez solides pour supporter la confrontation avec les pairs. Mais certains autres peuvent être déstabilisés par les tâches de recherche, ou bloqués par le travail en groupe, ou rebutés par les jeux perdant-gagnant, p. ex. J'en connais.

Ce n'est pas une critique de la méthode, mais une vigilance pour proposer autre chose à ceux-là, ou à ce moment-là, ou dans ce thème-là. Privilégier la souplesse.

J'ose avancer ce qui vous fera peut-être bondir: un enfant peut très bien avoir envie et besoin d'une bonne colonne de calculs pour faire fonctionner une démarche qu'il a fait sienne.

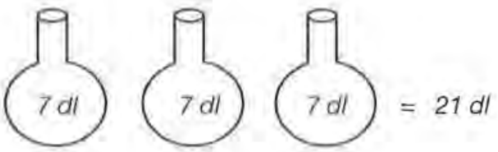
C'est stabilisant, ça conforte, et par conséquent, ça fait plaisir. Ne pas faire d'une colonne de calcul un synonyme d'ennui.

A propos de la suite à compléter, 2, 4, 6 ...., 10, etc. je suis entièrement d'accord avec vous que toute solution correcte doit être accueillie avec bonheur. Mais vos propos dans le paragraphe suivant sont une mascarade ! Certes la consigne est vague, mais elle consiste à faire découvrir une régularité. Cela fait faire des essais, fait chercher. Tenez, la dernière suite qu'on m'a proposée : U, D, T, Q, C, S, S,...

J'ai beaucoup cherché, mais je n'étais par sur la bonne longueur d'onde. Il m'a fallu un indice pour mobiliser ma pensée sur une autre piste. N'est-ce pas un bon exercice de recherche ?

Quand on donne la loi, ce n'est plus qu'un exercice de réflexion-application, aussi valable, mais autre.

A propos des □, △, ○, certes, il manque l'indication «tous les □ valent pareil» etc.... Mais ceci dit, votre critique sur le fait qu'une erreur en entraîne d'autres et sur l'interprétation que vous en faites : Là vous vous amusez j'espère ! L'enfant n'additionne pas des formes, mais des nombres inscrits dans les formes. Du même genre que :



Ne soyons pas «tatillon» quand la consigne est assez claire pour être comprise sans problème !

A propos des rectangles et des carrés parallèles aux côtés de la feuille, je suis aussi d'avis qu'il aurait été meilleur d'en proposer un ou deux orientés autrement. Mais de là à prétendre que ce petit exercice aboutit à un stéréotype, il y a de la marge. Toutes les vertus ne peuvent être réunies dans un petit exercice.

Et nous en arrivons aux poissons. D'abord j'ai assez aimé l'idée d'introduire quelques non-poissons. Bien sûr, la grandeur des poissons est très intuitive, pas du tout mesurable. Mais n'est-ce pas souvent le cas dans la vie ? Par exemple : Si vous faites choisir un fondant à un petit gourmand, malgré les formes très diverses qu'ils prennent, il sait très bien choisir le plus gros !

Si vous avez pensé mettre les poissons dans l'ordre alphabétique, c'est que vous avez oublié de lire la consigne. Ça arrive à tout le monde !

Si le signe > vous gêne hors du domaine des nombres, il suffit de remplacer ces signes par des virgules, et le tour est joué.

Ce que j'apprécie dans cet exercice, c'est la sériation autre que numérique (ce qui manque dans nos nouveaux moyens).

A propos du 3 x 5 et 5 x 3, s'ils étaient apparus dans les solutions, on l'aurait reproché, vu que la multiplication est introduite en 3P !

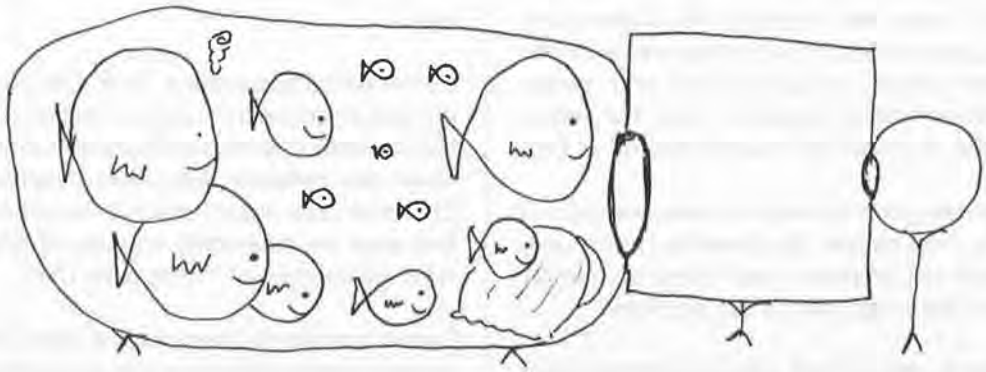
Oui, vous êtes dur, c'est jouable. Mais le risque est de devenir sectaire.

Pour terminer sur quelque chose de constructif, j'essaie de proposer une activité genre «aquarium» qui ne sente pas trop mauvais à votre nez très très exercé. C'est risqué !

Je me réjouis de recevoir votre commentaire. Allez-y. Ironie, contradiction, fureur, je suis prête à tout. Du choc des idées...

Bien cordialement.

Janine Cosandey



- Combien y a-t-il de poissons dans l'aquarium ovale ?
- Combien peuvent passer dans l'aquarium carré ?
- Combien peuvent passer dans l'aquarium rond ?

Les poissons qui ont dû rester dans l'aquarium ovale seront pêchés et vendus Frs 5.– chacun.

- Combien d'argent les pêcheurs vont-ils encaisser ?

Calcul : .... = ...

P.S. Pas de solutions proposées, mais une discussion avec le géniteur qui aura imposé cet exercice à son enfant !

Réponse du rédacteur

Je remercie Madame Cosandey de sa réaction qui ouvre un débat intéressant. Je me permets simplement de rappeler que, en première analyse, j'ai trouvé que ces cahiers ne sont «ni pires ni meilleurs» que d'autres publications de ce genre et qu'ils ne «pouvaient pas faire de mal aux élèves, qui en ont déjà vu d'autres, ...» Je rejoins donc le point de vue de notre lectrice qui, selon ses propres termes, estime aussi que, si ces exercices sont «maladroits», «ils sont plutôt anodins que dangereux». Mais la publicité qui accompagne ces cahiers prétend qu'ils sont conformes au programme de la Suisse romande; c'est cette conformité que j'examine dans la suite de mon article et que je nie avec fermeté.

Vous me proposez de commenter l'activité que vous proposez. Je le fais volontiers :

J'ai compté 12 poissons dans l'aquarium ovale et j'ai observé que, vraisemblablement, les trois «gros» ne pourront pas passer dans l'aquarium carré, où les quatre «moyens» resteront piégés, et que seuls les cinq «petits» arriveront dans l'aquarium rond. Par conséquent, le produit de la pêche sera de 15 Fr.

J'ai beaucoup apprécié la remarque qui suit et qui me permet de connaître l'esprit dans lequel est proposé: celui d'une discussion, sans que la réponse ne soit imposée.

C'est là, précisément, que se situent les enjeux du débat. Chacun a le droit et le devoir d'inventer des problèmes pour ses élèves, pour sa classe. On peut ainsi se sentir beaucoup plus libre dans la rédaction d'une texte «officiel» car on part de conventions, habitudes, accords tacites, complicités,... qui caractérisent le contexte et le milieu social de la classe.

La question de la souplesse ou de l'élasticité des poissons, les problèmes de forme et d'étanchéité des aquariums, l'interprétation des dessins,... font partie du contrat qui régit les activités autour de ce problème. Si certains détails ne sont pas encore réglés, ils le sont rapidement par une remarque du maître, un court échange entre élèves, une boutade,...

L'activité mathématique peut alors commencer sur des bases communes à la classe.

On peut imaginer, a priori, que certains élèves vont juger «à l'œil» quels seront les poissons qui passeront; il ne feront alors pas beaucoup de mathématiques. D'autres pourront découper, décalquer, puis déplacer les objets matériels créés pour les comparer directement avec les entrées des aquariums. Ils feront alors appel à la conservation des longueurs dans leurs reports et à la comparaison de grandeurs par superposition ou juxtaposition.

D'autres encore pourront utiliser un mesurant intermédiaire: un tige, un objet «long» et pourquoi pas une règle graduée, pour savoir si les poissons passent. Ils manifesteront alors des compétences plus développées dans le mesurage.

L'essentiel se passera lors de la discussion – ou mise en commun, selon la terminologie de nos nouveaux moyens d'enseignement: comparaison des méthodes, justifications, validation. Et, lors de cette phase collective, on commentera aussi les différentes écritures et opérations qui conduisent à la réponse 15 Fr.

Dans le contexte de votre classe et dans l'esprit proposé, votre problème de poissons peut donc conduire les élèves à faire des mathématiques, intelligemment. La situation est totalement différente s'il paraît dans un ouvrage imprimé et largement diffusé. Il échappera à son auteur pour être, immanquablement, interprété par ses lecteurs, qu'ils soient élèves, parents ou maîtres.

Si par exemple, ce problème était proposé pour une épreuve du RMT, les rédacteurs le modifieraient aussitôt pour expliciter tout ce qui n'est pas dit: sur la nature de la «grandeur» qui permettra de répartir les poissons, sur leur rigidité, sur le sens de la nage, sur la phrase «... qui ont dû rester», sur les objets «distracteurs». Ils régleraient ensuite les tailles pour qu'une simple appréciation visuelle ne permette pas d'arriver à la solution.

Toutes ces transformations et aménagements seront nécessaires pour que l'élève puisse entrer seul dans un problème de mathématiques, où il a de fortes chances de rencontrer les savoirs visés.

Il en est de même pour les problèmes d'un manuel de mathématiques, bien que, dans ce cas, on puisse compter sur les relances du maître pour pallier les implicites de l'énoncé. Il devrait en être de même aussi, à plus forte raison, pour des cahiers de vacances, avec corrigé, sous le seul contrôle éventuel de parents qui n'ont peut-être pas les mêmes conceptions de l'apprentissage que celle qui sont à la base de nos ouvrages romands.

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à** *Math-Ecole (tarifs en page 2 de couverture).*

Veuillez me faire parvenir:

Encyclopédie kangourou, ACL	...	(ex. à Fr. 28.–)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex. à Fr. 28.–)
Les annales du kangourou, ACL	...	(ex. à Fr. 29.–)
Exos-malices, ACL	...	(ex. à Fr. 29.–)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Faites vos jeux !	...	(ex. à Fr. 18.–)
La magie du calcul, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Les maths & la plume, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Jeux mathématiques pour tous, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Pliages mathématiques, ACL	...	(ex. à Fr. 17.–)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex. à Fr. 25.–)
100 Jeux mathématiques du «Monde», POLE	...	(ex. à Fr. 27.–)
Le système métrique, hier et aujourd'hui, ADCS	...	(ex. à Fr. 38.–)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	...	(ex. à Fr. 38.–)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	...	(ex. à Fr. 26.–)
PROBLÈMES DE RALLYES ET CONCOURS:		
Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT	...	(ex. à Fr. 18.–)
Jeux IV: de l'intérêt des problèmes de Rallye, APMEP	...	(ex. à Fr. 28.–)
Fichier Evariste APMEP	...	(ex. à Fr. 25.–)
Panoramath 96, APMEP	...	(ex. à Fr. 12.–)
Panoramath 2, CIJM, APMEP, ACL	...	(ex. à Fr. 18.–)
Panoramath 96, Panoramath 2,	...	(ens. à Fr. 25.–)
50 Enigmes mathématiques pour l'école	...	(ex. à Fr. 14.–)
50 Enigmes mathématiques faciles	...	(ex. à Fr. 16.–)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles, POLE	...	(ex. à Fr. 16.–)
50 Enigmes mathématiques pour tous	...	(ex. à Fr. 16.–)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous, POLE	...	(ex. à Fr. 16.–)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens	...	(ex. à Fr. 16.–)
Le Trésor du vieux Pirate (n° 12)	...	(ex. à Fr. 5.–)*
Le Pin's Tourneur (n° 11)	...	(ex. à Fr. 5.–)*
Les Pentagones (n° 8)	...	(ex. à Fr. 5.–)*
Le Serpent Numérique (n° 10)	...	(ex. à Fr. 5.–)*
Le Singe et la Calculatrice (n° 14)	...	(ex. à Fr. 5.–)*
Anciens numéros de Math-Ecole	....	(ex. à Fr. 4.–)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro): ....

Localité (avec code postal): ....

Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.
*En liquidation jusqu'à épuisement du stock.

Bulletin à retourner (photocopié) à: ***Math-Ecole, CP 54, 2007 Neuchâtel 7***

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

sommaire