MATH ECOLE

40e année

198

Analyse et utilisation en classe du problème *Décoration* du 9e RMT

Devons-nous encore enseigner les quatre opérations écrites ?

Les tentations de la proportionnalité

août 2001

Math-Ecole, pour ceux qui enseignent les mathématiques !

Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en serait-il autrement d'un enseignant ?

Tous ceux qui enseignent les mathématiques, à quelque niveau que ce soit, sont confrontés quotidiennement à des questions d'apprentissages, aux erreurs de leurs élèves, aux problèmes d'évaluation, etc.

Leurs questions sont multiples. Pour y répondre, il y a les échanges entre collègues lorsqu'on trouve le temps de les approfondir, il y a les cours de perfectionnement lorsque leur offre correspond exactement aux besoins, il y a les conseillers pédagogiques lorsqu'ils sont disponibles, il y a aussi les livres et revues lorsqu'elles existent. Or, précisément, *Math-Ecole* existe et souhaite être une de ces – bonnes – lectures pour tous ceux qui se soucient de l'apprentissage des mathématiques. C'est en ce sens qu'elle est **une revue pour des professionnels de l'enseignement des mathématiques.**

Dans *Math-Ecole*, on trouve, pour chaque degré d'enseignement, de la maternelle au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques,
- des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques,
- etc.

Abonnement annuel (5 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 7.–
anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153 épuisés)
Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Pour toute correspondance ou information :
Rédaction de ***Math-Ecole*, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7,**
par courrier électronique E-mail : **francois.jaquet@irdp.unine.ch**
ou par INTERNET : **http : //www.irdp.ch/math-eco**

Bulletin de commandes et d'abonnement en page 3 de couverture.

MATH-ECOLE

40e année, cinq numéros par an

198

août 2001

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*
Case postale 54
CH–2007 Neuchâtel 7

Administration
Institut de Recherche et
de Documentation Pédagogique
Fbg de l'Hôpital 43, CP 54
CH–2007 Neuchâtel 7
Tél (032) 889 86 03
(de 14 h à 17 h 30, ma, me, je, ve)
ou (032) 889 86 09
Fax (032) 889 69 71

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Roger Délez
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Mireille Snoecks
Janine Worpe

Mise en page
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Spirale de carrés ayant pour côté
les nombres de la suite de Fibonacci

Sommaire

Editorial

Des mêmes moyens d'enseignement pour tous les élèves

Michel Brêchet

En Suisse romande, le vaste processus de réécriture des moyens d'enseignement de mathématiques utilisés à l'école obligatoire, entamé dès le début des années 90, a franchi une nouvelle étape. En effet, tous les élèves de 5e année ont reçu la nouvelle édition de *Mathématiques 5e* lors de la rentrée scolaire d'août. Les travaux concernant la refonte de l'ouvrage actuel de 6e vont bon train, de sorte que la dernière version de *Mathématiques 6e* arrivera dans les classes en août 2002.

Afin d'assurer la cohérence des apprentissages tout au long de la scolarité obligatoire, l'année suivante verra la sortie de presse de nouveaux moyens d'enseignement destinés à tous les élèves romands des degrés 7, 8 et 9, quel que soit leur profil, c'est-à-dire la filière (ou le niveau) dans laquelle ils se trouvent. Cette unicité, qui constitue une des caractéristiques fortes de l'ouvrage à venir, peut certes engendrer des inquiétudes au sein du corps enseignant. Il est vrai qu'aujourd'hui les futurs lycéens et les futurs apprentis n'ont en général pas les mêmes livres sur leur table de travail. Toutefois, dans l'esprit des auteurs et des membres de la commission de lecture, il ne s'agit nullement de promouvoir l'uniformisation des parcours scolaires et une utilisation identique des moyens d'enseignement à l'échelle de la Romandie. Ni d'avoir les mêmes attentes envers chaque élève. Loin de là. Chaque enseignant a à conduire son cours selon ses propres conceptions, selon les projets éducatifs de son école, de son canton et, ne l'oublions pas, selon les exigences des plans d'études en vigueur.

Les origines de la création de moyens d'enseignement communs sont à chercher dans des registres fort divers.

- Le caractère « universel » des mathématiques amène à aborder, à peu de chose près, les mêmes notions avec tous les élèves. D'où le fait que les itinéraires mathématiques, aussi variés soient-ils, possèdent une toile de fond commune. Et c'est très bien ainsi.

- Les finalités de l'enseignement des mathématiques sont les mêmes pour tous les élèves, qu'elles concernent l'acquisition des notions fondamentales, le développement de la réflexion et du raisonnement, la formation de l'esprit scientifique, la dimension sociale de l'apprentissage (coopération, communication, sens de la responsabilité...), l'épanouissement de la personnalité ou encore l'appréhension des mathématiques comme forme de pensée, comme moyen de comprendre la nature et de résoudre des problèmes.

- D'une manière générale, les éléments de réponses à la question « Comment les élèves apprennent-ils ? » ne sont pas fonction de leurs capacités intellectuelles. Ce qui signifie qu'un même modèle d'apprentissage peut parfaitement convenir à de bons élèves comme à ceux qui ont plus de difficultés. Et les enseignants l'ont bien compris. Au cours de leur pratique quotidienne professionnelle, ils se réfèrent tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ces modèles, selon le contexte. Personne ne va se cantonner dans une seule stratégie didactique et l'appliquer de manière stricte.

- Enfin, en y regardant de près, force est de constater que la plupart des moyens d'enseignement utilisés actuellement dans les classes présentent des ossatures communes. Il y a bien des différences ici et là, dans les contenus, dans les types d'activités proposées et dans les approches didactiques, mais elles ne sont guère significatives.

Pour comprendre des phénomènes économiques et scientifiques, pour « se débrouiller » dans la vie quotidienne, pour trouver un emploi, pour faire face aux nombreuses situations inédites qu'ils rencontreront, pour assumer pleinement leur rôle de citoyen, il est important que les jeunes possèdent une culture mathématique commune à la sortie de l'école. Une culture à visage multiple qui a trait, notamment, aux concepts de base (nombre, opérations, mesure, fonctions, objets et transformations géométriques...), aux liens existant entre ces concepts, aux types de raisonnements (élaborer un cheminement déductif, justifier chacune des étapes de la résolution d'un problème, généraliser une règle...), mais aussi, pourquoi pas, à l'histoire des mathématiques et à leur rôle primordial dans les sciences et la technique.

Des moyens d'enseignement communs favoriseront sans doute l'accès de tous à cette culture commune. A condition toutefois que l'on n'oublie pas que les chemins qui y mènent sont nombreux et que les élèves sont tous différents.

Numéro 200, la fête !

Au rythme de cinq numéros par année, servis régulièrement depuis 1961, *Math-Ecole* est entrée dans sa quarantième année qui sera révolue en décembre 2001, avec la parution de son numéro 200.

En 40 ans, depuis « Les nombres en couleur », *Math-Ecole* a suivi de près toutes les innovations de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande, en a été un partenaire actif, les a souvent suscitées, les a toujours soutenues par des propositions pratiques, des réflexions, des comptes rendus d'activités...

Le comité a décidé de marquer cet important anniversaire,
- par la publication d'un numéro 200 exceptionnel, digne des caractéristiques remarquables de ce nombre,
- et par l'organisation d'une fête du quarantième anniversaire, avec expositions, ateliers, exposés, groupes de travail, repas et cérémonie officielle.

« Faire la fête pour le numéro 200 » de *Math-Ecole* signifie que tous ses lecteurs, abonnés et amis pourront y participer d'une manière ou d'une autre :
- en venant le 1er décembre à Neuchâtel, comme visiteur, auditeur, animateur,
- en proposant un article pour le numéro 200 : témoignage personnel, réflexion sur un thème de l'enseignement des mathématiques – d'hier, d'aujourd'hui ou de demain – proposition d'activité... ;
- en envoyant des suggestions ou propositions d'activités pour enrichir le programme de la journée.

Des renseignements plus précis paraîtront dans le numéro 199, en octobre. Les personnes intéressées peuvent d'ores et déjà s'inscrire, au moyen du bulletin de la page 48, par courrier électronique ou par internet.

Analyse et utilisation en classe du problème *Décoration* du 9e RMT

Michèle Vernex, Genève

Introduction

Dans le cadre de ma formation à la FAPSE de l'Université de Genève en vue d'obtenir un D.E.S., j'ai effectué un stage à l'IRDP, sous la responsabilité de François Jaquet. A cette occasion, j'ai travaillé sur une partie d'une recherche consacrée aux problèmes proposés par le *Rallye Mathématique Transalpin* (RMT). Plus particulièrement sur les procédures de résolution et sur le passage d'une situation a-didactique à une situation didactique[1] en relation avec le RMT.

1. Pour les didacticiens (selon Brousseau), une situation a-didactique est caractérisée par l'absence d'intention d'enseigner: le problème est entièrement dévolu aux élèves qui le prennent en charge, mettent en jeu leurs connaissances anciennes ou en créent de nouvelles, sans intervention du maître. Cette situation a-didactique n'est cependant concevable que lorsqu'elle est incluse dans le cadre d'une situation didactique, plus vaste, conçue préalablement et orchestrée par le maître pour provoquer les apprentissages des élèves. C'est dans un deuxième temps, lors de la reprise des problèmes en classe, que le maître exploite les procédures des élèves afin de les intégrer dans des objectifs mathématiques, en lien avec d'autres situations-problèmes.

Dans le RMT, la résolution de problèmes est entièrement dévolue au groupe-classe, en l'absence de l'enseignant. Les problèmes sont élaborés en coopération internationale et font l'objet d'analyses a priori approfondies dans le domaine des procédures et des représentations des élèves. Les résultats sont examinés régionalement, selon les critères définis précédemment. Les différentes stratégies de résolution sont relevées et comparées, d'une région à l'autre. Des analyses plus détaillées sont conduites par les centres responsables de la recherche (IRDP; Universités de Parma et Siena, IUFM de Bourg-en-Bresse, Institut de pédagogie de Prague) et font l'objet de journées d'études internationales entre les chercheurs et animateurs concernés. Les résultats obtenus font apparaître les obstacles caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, l'importance des interactions dans le travail de groupe, les effets des pratiques scolaires et des cultures des différents pays concernés.

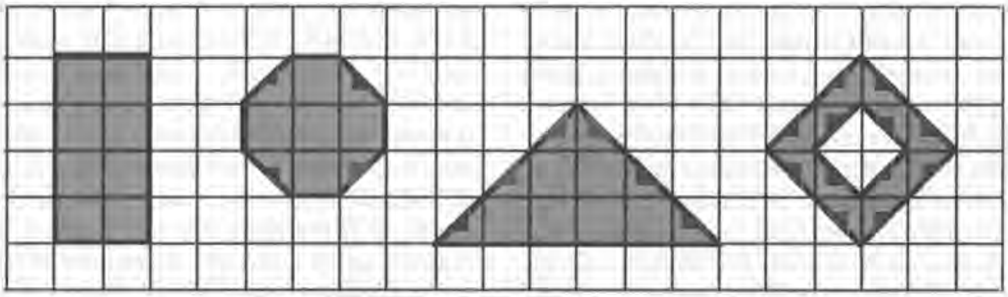
Les maîtres des classes participantes peuvent s'engager dans les équipes pour l'élaboration des épreuves et l'évaluation des copies. Ils reçoivent des résultats détaillés leur permettant d'exploiter les problèmes pour leurs pratiques didactiques.

Le problème

Pour la deuxième épreuve du 9ème RMT, j'ai participé à l'élaboration de plusieurs problèmes, dont celui intitulé *Décoration*, qui a été présenté aux classe de la cinquième à la septième année. Je me propose de l'examiner ici, du point de vue de son contenu mathématique tout d'abord, au travers de son l'analyse a priori. Puis je présenterai les procédures de résolution adoptées par les élèves ayant participé au 9ème RMT. Je terminerai par le compte rendu d'une pratique de ce même problème dans une classe romande de quatrième primaire. Cette dernière partie permettra de lier la recherche avec une pratique enseignante.

Décoration (Cat. 5, 6, 7)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur:

– 18 pots de rouge pour une des figures
– 27 pots de jaune pour une autre figure
– 21 pots de bleu pour une autre figure,
– des pots de noir pour la figure qui reste.

A la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.
Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés?
Expliquez comment vous avez trouvé.

Analyse a priori

Domaine de connaissance:
Géométrie: comparaison et mesure d'aires, définir une unité de mesure d'aires
Arithmétique: proportionnalité

Analyse de la tâche:
- Choisir une unité d'aire
- Trouver le nombre d'unités dans chaque figure
- Classer ces figures selon leur aire, en triangles: (double carré = 12, octaèdre = 14, rectangle = 16, triangle = 18) ou en carrés: (double carré = 6, octaèdre = 7, rectangle = 8, triangle = 9)
- Faire la correspondance entre les aires des figures et le nombre de pots de peinture (losange en rouge octaèdre en bleu, rectangle en noir et triangle en jaune)
- Trouver le nombre de pots de peinture noire (24)

Attribution des points:
4 Réponse juste (rectangle noir de 24 pots, octaèdre bleu, triangle jaune, double carré rouge), avec explications (relation aire/nombre de pots pour chacune)
3 Indication des couleurs et du nombre de pots de peinture noire, sans explications ou explications peu claires
2 Indication de l'aire de chaque figure, avec sa couleur, et erreur de calcul pour le nombre de pots noirs ou absence de réponse pour le nombre de pots noirs
1 Estimation visuelle des surfaces (explication du style «on a vu…») ou début de résolution de problème
0 Incompréhension du problème ou calcul du périmètre

Tâche de résolution

Comme le montre l'analyse a priori, les objectifs de ce problème sont la comparaison de la mesure d'aire de figures géométriques et la proportionnalité. Pour résoudre ce problème, il faut tout d'abord remarquer que deux grandeurs y interviennent, c'est la quantité de pots de peinture et l'aire des différentes figures. Pour trouver la solution, il est nécessaire de mettre en relation ces deux grandeurs. Mais à aucun moment dans l'énoncé du problème, une marche à suivre n'est donnée. Il n'y a, en effet, aucune mention de la notion de «calcul d'aire» ou d'une opération quelconque à utiliser. Les élèves sont donc face à une situation problème au sens de Arsac, Germain et Mante (1991).

Dans un «exercice» traditionnel, une partie de la démarche serait induite par la consigne et ce même problème serait probablement divisé en deux énoncés distincts.

- Dans un chapitre réservé aux aires, on pourrait trouver par exemple:
  Calcule l'aire des figures, puis classes-les de la plus grande à la plus petite.

- Dans un chapitre traitant de la notion d'application, on pourrait avoir:
  De combien de pots de peinture un décorateur a-t-il besoin pour peindre une figure dont l'aire est de 6 carrés, sachant qu'il aurait besoin de 24 pots de même grandeur pour peindre une figure dont l'aire est de 8 carrés?

Dans le cas de *Décoration*, tout est à la charge de l'élève. Tout d'abord, pour pouvoir s'engager dans une solution, il doit trouver les deux grandeurs en jeu, le nombre des pots de peinture et l'aire des figures proposées et imaginer qu'elles sont liées. Il lui faudra alors passer aux mesures des aires, pour obtenir une relation numérique. A cet effet, les élèves ne disposent pas encore de formules, ils doivent procéder par pavage et par conséquent, choisir une unité d'aire – le carré ou le triangle[2] – suggérée par le quadrillage.

Une fois l'unité choisie, il faut déterminer la mesure d'aire de chaque figure, pour pouvoir les classer. En carrés unités, le «double carré» a une aire de 6, l'octogone de 7, le rectangle de 8 et le triangle de 9. Ensuite il faut établir la correspondance entre chacune des mesures d'aires des figures et chacun des nombres de pots de peinture. Il y a quatre mesures d'aires et trois nombres connus de pots. Il y a donc plusieurs hypothèses sur la «position» du nombre inconnu de pots, qu'on peut illustrer par le tableau suivant où les mesures d'aires sont à chaque fois classées de la plus petite à la plus grande dans la ligne supérieure, les nombres de pots étant aussi ordonnés dans la ligne inférieure:

Hypothèse A	6	7	8	9
	?	18	21	27
Hypothèse B	6	7	8	9
	18	?	21	27
Hypothèse C	6	7	8	9
	18	21	?	27
Hypothèse D	6	7	8	9
	18	21	27	?

Comment choisir entre ces quatre hypothèses? C'est là le nœud du problème et c'est ici qu'intervient la notion de proportionnalité (voir tableau suivant).

2. Lors de l'analyse a priori, on avait imaginé que les élèves choisiraient des unités «triangles», ce qui rendait le problème plus complexe puisqu'il fallait mettre en relation les 12 unités du «double carré», les 14 de l'octaèdre, les 16 du rectangle et les 18 du triangle avec les 18, 21 et 27 pots de peinture proposés et le nombre inconnu de pots de couleur noire, ce qui conduisait à la recherche d'un facteur de proportionnalité non entier (1,5). Les élèves en ont décidé autrement!

	Hypothèse				ISO[3]		FCT[4]
A	6	7	8	9	6 – 7 – 8 – 9	(écart de + 1)	6 x… = ?
	?	18	21	27	15 – 18 – 21 – 27	(15 = 18 – 3)	5 x… = 18
					12 – 18 – 21 – 27	(12 = 18 – 6)	8 x… = 21
							9 x 3 = 27
B	6	7	8	9	6 – 7 – 8 – 9	(écart de + 1)	6 x 3 = 18
	18	?	21	27	18 – 19,5 – 21 – 27	(19,5 entre 18 et 21)	7 x… = ?
							8 x… = 21
							9 x 3 = 27
C	6	7	8	9	6 – 7 – 8 – 9	(écart de + 1)	6 x 3 = 18
	18	21	?	27	18 – 21 – 24 – 27	(écart de + 3)	7 x 3 = 21
							8 x 3 = 24
							9 x 3 = 27
D	6	7	8	9	6 – 7 – 8 – 9	(écart de + 1)	6 x 3 = 18
	18	21	27	?	18 – 21 – 27 – 39	(+ 3 ; + 6 ; + 12 ; double)	7 x 3 = 21
					18 – 21 – 27 – 36	(+ 3 ; + 6 ; + 9)	8 x… = 27
							9 x… = …

L'hypothèse A donne seulement un facteur 3, pour 27/9, facile à calculer pour de jeunes élèves. Par isomorphisme, il pourrait y avoir la solution 15 (18 – 3) ou 12 (18 – 6), mais cette procédure est à éliminer puisque la suite des mesures d'aires présente un écart constant de 1.

En ce qui concerne l'hypothèse B il y a bien un facteur 3, pour 18/6 et 27/9, mais pas pour les autres nombres. En ce qui concerne l'isomorphisme de mesure il pourrait y avoir 18 – 19,5 – 21 – 27 en prenant la moyenne de 18 et 21. Mais cette procédure est à éliminer puisque l'écart ne serait pas constant entre les pots comme il l'est entre les mesures d'aires.

Pour l'hypothèse D il y a bien le même rapport 3, entre 18/6 et 21/7, mais pas pour 27/8. Un leurre serait (comme plusieurs groupes l'ont suivi) de penser à la suite 18 – 21 – 27 – 39 où les écarts doublent d'un terme à l'autre (+ 3, + 6, + 12) ou à la suite 18 – 21 – 27 – 36 où les écarts augmentent de 3 d'un terme à l'autre. Ces hypothèses ont des analogies avec les

3. ISO signifie « isomorphisme de mesures ». C'est la procédure consistant à reproduire, pour la grandeur « pots de peinture » (ou dans « l'espace » des pots de peinture), les opérations d'addition ou de multiplication qu'on pourrait effectuer avec la grandeur « aires » (ou dans « l'espace » des mesures d'aires). Autrement dit, c'est reproduire des opérations qu'on effectue avec des pots de peinture sur les aires ou vice-versa ; c'est également ce qu'on appelle souvent « la règle de la somme » ou « la règle du produit ». C'est encore la reproduction des régularités d'une suite sur l'autre : additionner ou multiplier par un nombre des pots de peinture et faire les mêmes opérations avec les mesures d'aires ou vice-versa.

4. FCT signifie « procédure fonctionnelle ». C'est la procédure qui met en œuvre le coefficient de la fonction, c'est-à-dire le nombre de pots par unité d'aire ou vice-versa (ici 1 carré pour 3 pots ou 3 pots pour 1 carré).

procédures d'isomorphisme de mesure et tentent souvent les élèves.

Finalement, l'élève doit se rendre compte qu'il y a un facteur 3 entre la mesure des aires en carrés unités et le nombre de pots de peinture 18/6, 21/7, 27/9. Ou, par isomorphisme, constater que la suite 18 – 21 – 24 – 27 est régulière (écart de + 3) comme celle des mesures d'aires 6 – 7 – 8 – 9 (écart de + 1). L'hypothèse conduisant à la bonne solution est donc la troisième (C). Cela permet de donner à chaque figure sa couleur et on obtient: le «double carré» en rouge, l'octogone en bleu et le triangle en jaune.

La figure de 8 carrés unités sera de la couleur restante, noire, et comme il y a une relation «multiplier par 3» entre les mesures d'aire et le nombre de pots de peinture, il faut 8 x 3 = 24 pots de peinture noir pour le rectangle. Dans cet exemple, le facteur 3 est simple. Si les élèves avaient calculé en unités triangles, le facteur aurait été beaucoup plus difficile à trouver.

Les résultats

Il s'est avéré que, lors de la deuxième épreuve du 9ème RMT, ce problème a été bien réussi. Voici ses taux de réussite par degré:

	Nombre de classe ayant réussi	Nombre de classe ayant échoué	Nombre total de classe	Taux de réussite
Cat. 5	37	15	52	0,71
Cat. 6	32	10	42	0,76
Cat. 7	33	3	36	0,92

Les pourcentages de réussite progressent de 71 à 92 de la cinquième année à la septième. Le problème comprenait en fait trois parties: la détermination des mesures d'aires, le calcul du nombre de pots et la détermination des couleurs. Ces trois questions sont dépendantes les unes des autres (il n'est possible de répondre aux deux dernières si on n'a pas répondu correctement à la première).

Voici un tableau qui résume les réussites et les échecs aux diverses parties du problème des 130 classes participantes des catégories 5, 6, 7:

	aires	couleurs	pots
réussite	113	104	105
échec	10	23	21
sans réponse ou incompréhension	7	3	4
taux de réussite	0,87	0,80	0,81

Une grande majorité des groupes ont donc réussi à trouver les mesures des aires, ils sont un peu moins nombreux à avoir trouvé le nombre de pots et les couleurs des diverses formes.

Il est intéressant de répertorier les différentes procédures utilisées par les élèves pour établir la proportionnalité, le mesurage des aires n'ayant pas posé de problème particulier. Le tableau suivant en donne le détail:

Proc.	détails:	nombre	total	taux
ISO	18 + 3 = 21 + 6 = 27 + 3 = 30[5]	1		
	27 + 21 + 18 = 66	1		
	Écarts de 3	4		
	27 – 6 = 21 – 3 = 18 – 3 = 15	4		
	Suite des multiples de 3	3		
	Livrets de 27	1		
	27 + 9 = 36	1		
	18 – 19,5 – 21 – 27	1		
	6/18 = 12/36 7/21 = 14/42 8/27 = 16/54 9/39 = 18/72 39 noirs	1	17	**13%**
FCT	Mesure d'aire x 3	47		
	3 pour 1	5		
	1 pour 3	6		
	3 pour 1, mesure d'aire x 3	2		
	1 pour 3, mesure d'aire x 3	7		
	Multiples de 3, mesure d'aire x 3	6		
	1 pour 3, mult. de 3, mesure d'aire x 3	2		
	Division par 3	10		
	Division par la mesure d'aire	7		
	3 pour 1et division par la mesure d'aire	3		
	1 pour 3 et division par la mesure d'aire	2		
	Divers	5	102	**79%**
Non réponses ou incompréhensibles			11	**8%**
Totaux			**130**	**100%**

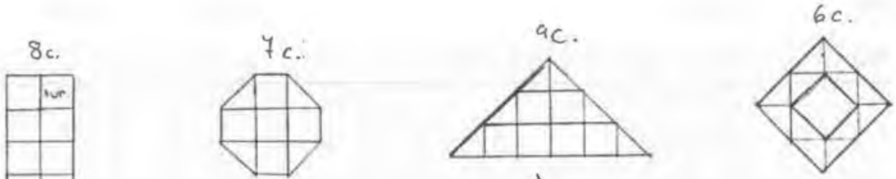
Ce tableau montre que la procédure fonctionnelle (FCT) a été la plus utilisée (102 copies, 79 %). C'était la plus économique pour ce problème. Parmi les réponses faisant état de cette procédure, 75 montrent qu'une multiplication par 3 a été effectuée pour trouver le nombre de pots de peinture (A x 3) et 27 copies présentent une division par 3 pour trouver à quelle couleur correspondait chaque figure. Il faut relever que la multiplication correspond à l'ordre de lecture de la consigne qui présente les figures avant les nombres de pots.

En ce qui concerne les procédures par isomorphisme de mesure (ISO), utilisées par 17 classes (13 %), on constate que 11 d'entre elles font référence à un écart de 3 dans la suite des nombres de pots, mais 8 seulement montrent qu'il y a un lien entre ces écarts et ceux de 1 dans la suite des mesures d'aire.

Les cinq exemples suivants montrent des procédures fonctionnelles, aboutissant à un résultat correct (pp. 10, 11, 12 haut):

5. Écritures d'élèves qui, à cet âge, ne respectent, en général, pas la symétrie de l'égalité

– 3 pour 1



24 pots
de couleur
noir

21 pots
de couleur
bleu

27 pots
de couleur
jaune

18 pots
de couleur
rouge

(on a utilisé 24 pots
de couleur noir.)

3 pots = 1 carré

6 x 3 = 18 → 18 : 6 = 3
9 x 3 = 27 → 27 : 9 = 3
7 x 3 = 21 → 21 : 7 = 3
8 x 3 = 24 → 24 : 8 = 3

– fois 3 : 3 est le multiple commun des aires; il y a un rapport de 3 donc Aire x 3

7x3=21
pots bleus

6x3=18
pots rouge

8X3=24
pots noirs

9x3=27
pots jaune

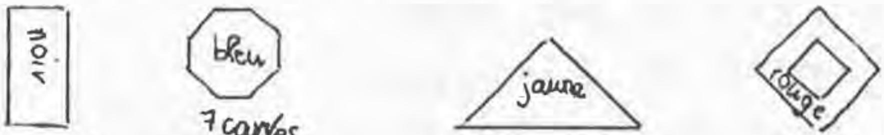
Explication:
Pour le rectangle, il y a 8 carrés donc on a essayé de trouver un chiffre qui a un rapport avec 8 il n'y en a pas. Alors on a essayé avec le [octogone] qui avait 7 carrés le 21 (pots) avait un rapport. 7 · 3 = 21.
le triangle avait 9 carrés donc le 27 avait un rapport, 3 · 9 = 27
le carré avait 6 carrés donc 3 · 6 = 18

REPONSE: donc il y a 24 pots noirs pour le rectangle (8 · 3 = 24)

– *division du nombre de pots par la mesure d'aire*

on a commencé par compter les carrés et on a comparé le nombre de pots de peinture et de carrés par forme. On a pris la plus grande forme et le plus grand nombre de pots de peinture et on a divisés 27 par 9 et on a trouvé 3 donc il y a 3 couches de peinture mais comme on était passur que ça soit juste on a diviser le nombre de pots de peinture par le nombre de carres par forme et ça a marché.

. il a utilisé 24 pots de peinture pour le noir.



8 carrés
$8 \times 3 = 24$

7 carrés
$21 : 7 = 3$

9 carrés
$27 : 9 = 3$

6 carrés
$18 : 6 = 3$

– *division par 3*

Démarche :

Tout d'abord nous avons calculé l'aire de chaque figure. Nous avons obtenu en prenant comme unité de mesure le carré de la feuille : (en partant de gauche) 8 carrés, 7 carrés, 9 carrés et 6 carrés.

Ensuite nous avons cherché les multiples de ces nombres de carrés par rapport au nombre de pots de peinture et nous avons trouvé qu'un pot de peinture valait un tiers de carré (par tatonement).

Ex :

le premier : 18 (pots de rouge) : 3 = 6. Nous regardons à quel aire cela corespond : le dernier.

Réponses :

Nous avons trouvé :

- 18 (pots de rouge) : 3 = 6 : le dernier (losange) vaut 18 pots de rouge.
- 27 (pots de jaune) : 3 = 9 : le 3ème (triangle) vaut 27 pots de jaune
- 21 (pots de bleu) : 3 = 7 : le 2ème (octogone) vaut 21 pots de bleu
- Pour le noir, par élimination, nous avons trouvé 24 (3 · 8 = 24).
  24 (pots de noir) : 3 = 8 : le 1er (rectangle) vaut 24 pots de noir.

- Pour le noir, par élimination, nous avons trouvé 24 (3 · 8 = 24). Nous avons suivi le fait qu'un pot valait un tiers.

– procédure «mixte» de multiplication par 3 et réponse peu claire

On n'a compter les carrés de chaques formes.

Le rectangle à 8 carrés.
L'exagone à 6 carrés.
Le triangle à 9 carrés.

Le losange à 6 carrés.

8 = pots noirs.
6 = 6×3 = 18 pots rouges
+ 9 = 9×3 = 27 pots jaunes
~~6~~ = 8+6 = 14 : 2 = 7×3 = 21 pots bleu.

(on n'a toujours fais ×3 sauf 1× ou on n'a fais 8+6 = 14 : 2 = 7×3 = 21)

Voici d'autres exemples de production d'élèves utilisant une procédure par isomorphisme de mesure. Elle permet d'aboutir parfois à des résultats corrects:

– 18 – 21 – 24 – 27

1. triangle : jaune
2. rectangle : noir
3. carré : rouge
4. hoctogone : bleu

Pour le noir il a du utilisé 24 pots de peinture.

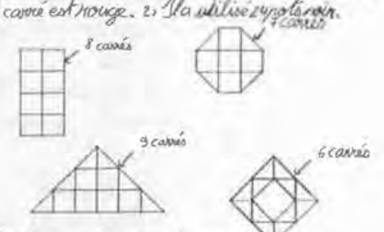
On a commencé par compter les carrés de chaque forme.

9 pour le triangle
8 pour le rectangle
7 pour l'hoctogone
6 pour le carré

On a vu que entre 18 et 21 il y avait 3 et que entre 21 et 27 il y avait le double. Donc nous avons cherché un nombre pour que entre 21 et 27 il y ai 3 d'écart.
18 + 3 = 21
21 + 3 = 24
24 + 3 = 27

réponse : 24

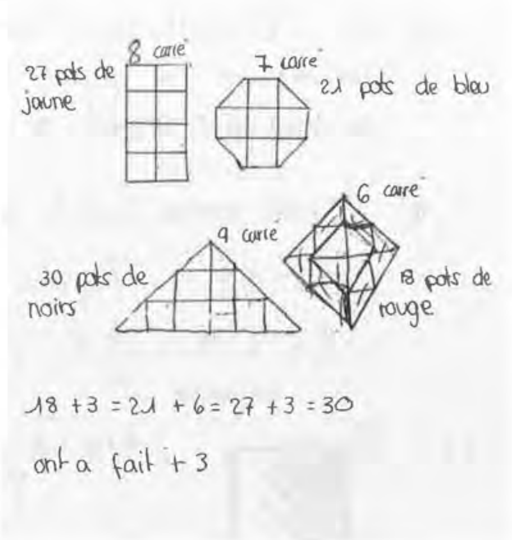
1. Le rectangle est noir, l'octogone est bleu, le triangle est jaune et le carré est rouge. 2. Il a utilisé 24 pots noir.



La forme qui a moin de carrés a le moins de pots, alors, pour le carré, on emploie 18 pots rouge, pour l'octogone 21 pots bleu, pour le rectangle, 24 pots noirs, parce que les pots vont de 3 en 3 comme ça 18, 21, 24, 27 et les carrés des forme vont de 1 en 1, comme ça 6, 7, 8, 9 et pour le triangle 27 pots jaunes.

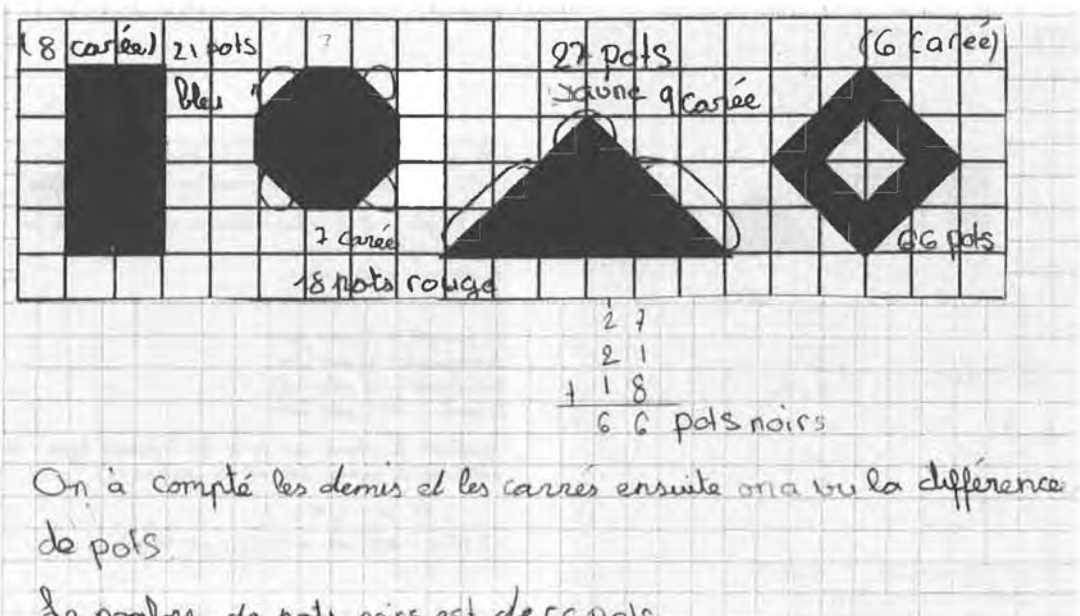
Parfois à des résultats incorrects:

– Isomorphisme de mesure par addition: 27 + 3 = 30



27 + 9 = 36;

27 + 21 + 18 = 66



et par « moyenne » (Hypothèse B du tableau de la page 7), 3 : 2 = 1,5 et 1,5 + 18 = 19,5

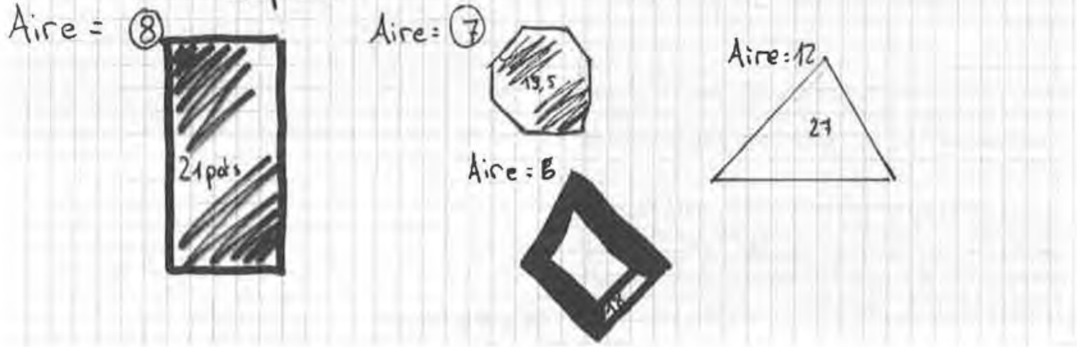
a) On n'a calculer l'air des formes. Après les avoir trouvés on a placé les pots de peintures (bleu, rouge, jaunes) par rapport à leur air. Ensuite on a placé le noir.

b) 7 est entre 6 et 8 et entre 6 et 8 il y a 3.

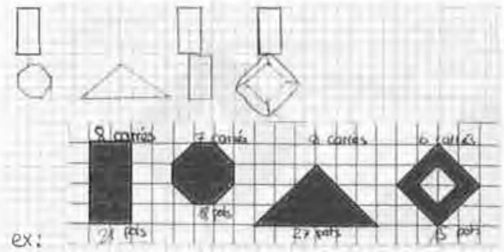
3 : 2 = 1,5 18 pots et 21 pots entre il y a 3.

1,5 + 18 = 19,5. pots noirs.

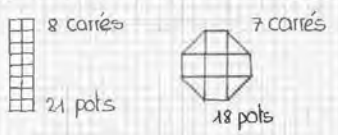
réponse



– Isomorphisme de mesure par soustraction (Hypothèse A) : 18 – 3 = 15



ex :



$- \frac{8}{7}$

1 carré

$- \frac{21}{18}$

03 pots

Quand en enlève 1 carré on enlève 3 pots, donc le ☐ noir ça a employé 15 pots de peintures.

En n'a compté la surface des formes.
et nous avons mis leur grandeur de leur surface.

le triangle = 9 de surface / donc en a besoin plus de pot.
le réctangle = 8 de surface
le octogone = 7 de surface
le carré = 6 de surface

le triangle = 27 pots jaune
le réctangle = 21 pots bleu
le octogone = 18 pots rouge
le caré = 16,5 pots noire

additioné la somme des carrés des 3 première figure = 24
additioné la somme des pots de peinture = 66

66 : 24 = 2,75

2,75 × 6 = 16,5 pots de peinture pour le carré

– (27 + 21 + 18) : (9 + 8 + 7) = 2.75 soit 16,5 pour le carré

L'intérêt de cette diversité de procédures est de constater que les élèves ont beaucoup d'idées et de moyens pour résoudre ce problème. De plus, même si une des procédures est plus économique, les autres ne conduisent pas forcément à des échecs. Il ne reste simplement qu'à montrer aux élèves cette procédure économique sans pour autant les obliger à l'utiliser. Ils le feront lorsqu'ils seront convaincus de sa pertinence.

Si le problème a été aussi bien réussi, malgré une structure complexe et de nombreuses tâches à la charge des élèves (voir analyse de la tâche), c'est que, à notre avis, deux choix de ses variables didactiques ont facilité le travail de sa résolution:

1. – Le facteur 3 entre le nombre de pots et la mesure d'aire est un nombre naturel.

2. – La suite des aires: 6, 7, 8, 9 est régulière (l'écart est constant) et évite à l'élève de rechercher des positions intermédiaires.

Application en classe

Etant donné le fort taux de réussite à ce problème en 5 P (71 %), j'ai pensé que ce problème conviendrait très bien à une classe de 4 P. Mon hypothèse était que les obstacles rencontrés par les élèves de cinquième à septième seraient plus clairement exprimés et qu'il y aurait peut-être des difficultés supplémentaires. *Décoration* a donc été testé sur les élèves d'une classe de quatrième année, tout d'abord dans les conditions du Rallye, c'est-à-dire sans aucune intervention de l'enseignant. Seul le fait que tous les groupes travaillaient sur le même problème entraînait une différence. Ensuite une séquence d'enseignement était prévue comme remédiation pour les élèves ayant rencontré des difficultés. Il faut encore préciser que la classe choisie avait participé au 9ème RMT, mais que le problème *Décoration* ne leur avait pas été proposé puisqu'il était réservé aux catégories 5, 6 et 7. De toute façon, il est clair que, lorsqu'on reprend les problèmes du RMT, ils sont nouveaux pour une majorité des élèves qui n'ont pas travaillé sur tous les problèmes.

L'enseignante a formé sept groupes de trois élèves, ces groupes étaient volontairement hétérogènes. Chaque groupe a reçu le problème *Décoration*. Les élèves ont travaillé pendant 30 à 40 minutes sans intervention de l'enseignante. Tous les groupes devaient fournir une réponse au problème posé. En effet, le contrat est très clair: l'énoncé demande une réponse et une explication. C'est ce qui correspond à la phase de dévolution selon Brousseau (1986).

J'ai analysé les réponses et j'ai remarqué qu'on pouvait répartir les résultats en deux catégories: d'un côté, cinq groupes qui avaient trouvé une solution correcte au problème des mesures d'aire en ayant trouvé ou non le nombre exact de pots de peinture noire et, d'un autre côté, les groupes qui n'avaient pas réussi à mettre en relation les mesures d'aire et le nombre de pots.

Les réponses de la première catégorie sont (résumées):

- *Pour trouver la réponse, on doit toujours faire 3 fois. Il a utilisé 24 pots noirs.*

- *Il y en a 30 (18 – 21 – 27 – 30)*

- *On a compté le nombre de carrés dans chaque figure et on a multiplié par 3 chaque nombre de carrés dans les figures et on a fait la même façon pour savoir combien il y a de noirs (24)*

- *Il a utilisé 24 pots de peinture (noire). Explication: Si on fait 3 x 6 = 18, après on fait 3 x 9 = 27 ensuite 3 x 7 = 21 ensuite il restait 24 car ce qu'on a fait 3 x 8 = 24 on l'a mis en noir.*

- *Réponse 36 pots noirs*

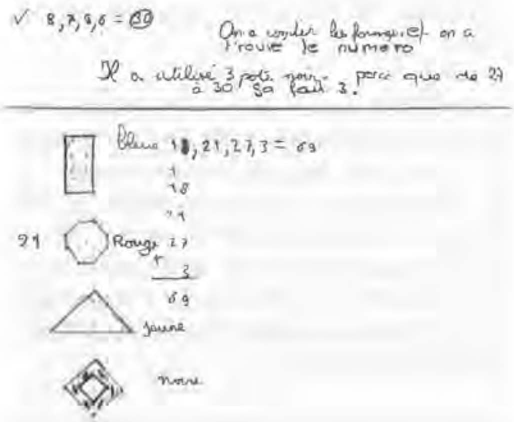
Explication 18 + 3 = 21   21 + 6 = 27, on a vu que c'était toujours le double de 3.

Il a donc été décidé que la phase de validation selon Brousseau (1986) se déroulerait de deux manières distinctes.

Les trois groupes qui avaient trouvé le nombre correct de pots de peinture noire, devaient comparer leur réponse avec celles de deux autres groupes qui avaient une réponse différente (36 et 30 au lieu de 24). Ils devaient alors se mettre d'accord sur une réponse. Pour les deux groupes n'ayant pas établi la relation, une remédiation, «arbitrée» par l'enseignante, a été proposée.

Avant de présenter la remédiation, voici les résultats obtenus par ces deux derniers groupes:

Groupe A:



Groupe B:

On remarque que le groupe A a trouvé les bonnes mesures d'aire, alors que le groupe B a mesuré les périmètres.

Ensuite le groupe A a d'abord calculé le nombre de pots de couleur noire en additionnant les mesures d'aires: 8 + 7 + 9 + 6 = 30, puis en cherchant le complémentaire de 27 à 30 pour obtenir les 3 pots de couleur noire utiles pour la figure la plus petite. Ensuite ils ont attribué les couleurs en fonction du nombre de pots: la plus petite figure aura 3 pots et sera noire, la seconde sera bleue, etc. Le groupe B a décidé que la plus grande figure était noire et a distribué les couleurs en fonction du périmètre. Il a donné comme réponse 33 car il a fait le calcul 21 + ... = 27 et obtient 6 puis 27 + 6 = 33.

La remédiation s'est déroulée de la manière suivante: Tout d'abord, les deux groupes devaient se mettre d'accord sur la mesure des aires. Un groupe s'était, en effet, lancé dans le calcul du périmètre (groupe B) et l'autre (groupe A) avait calculé correctement les aires. Après avoir expliqué respectivement à leurs camarades ce qu'ils avaient compris – aucun des deux groupes n'était vraiment convaincu de la validité de l'une ou de l'autre réponse – une discussion animée s'est instaurée et les enfants ont fini par comprendre, qu'on peignait l'intérieur des figures. Cela leur a permis de rejeter le mesurage du périmètre. Une nouvelle discussion a ensuite eu lieu pour savoir s'il fallait compter toutes les parties – discussion induite par le groupe B – c'est-à-dire pour savoir si un triangle avait la «même grandeur» qu'un carré. Là, l'enseignante a proposé aux élèves de réfléchir sur la question suivante: «est-ce qu'on utiliserait autant de peinture pour peindre un carré qu'un triangle?» Les élèves ont tous répondu sans hésiter qu'il fallait deux fois plus de peinture pour le carré que pour le triangle. Cela leur a permis de trouver la mesure d'aire de chaque figure.

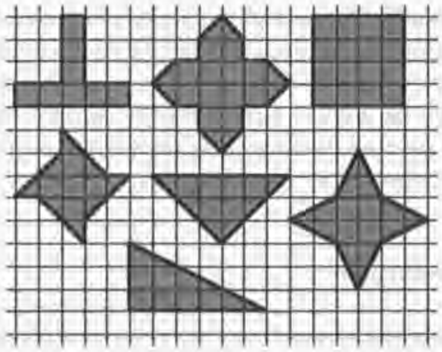
Ensuite ils se sont expliqués leur manière de calculer le nombre de pots. Les élèves du groupe A avaient additionné les mesures d'aire (6 + 7 + 8 + 9 = 30) et effectué le complément à 27 (27 + ... = 30). Ils ont donc obtenu 3 pots de noir. Les élèves du groupe B avaient fait le complément de 21 à 27 (21 + ... = 27). Ils obtenaient 6 et avaient ajouté 6 à 27, ce qui leur donnait 33 pots de noir. Le groupe A a proposé la solution 6 rouge, 7 bleu, 8 jaune, 9 noir. Mais un élève du groupe A a fait remarquer que 7 correspondait à 21 et que cela ne pouvait donc pas être la couleur bleu; il a proposé que le rectangle soit rouge. A ce moment-là, un élève du groupe B, qui avait recompté les unités de surface sur l'octogone jusqu'à 21, a remarqué qu'il «terminait à la fin»[6], mais que pour le rectangle il ne «s'arrêtait pas à la fin». Le rectangle ne pouvait donc pas être rouge. De plus, ça ne «marchait pas avec les autres figures». L'enseignante a alors pris le double carré et a repris la procédure du décompte des unités et est arrivée à 18. Là les enfants l'ont arrêtée et on fait l'hypothèse que cela devait être la bonne couleur. Un élève du groupe A a remarqué que dans les deux cas il a avait «fois 3»: 6 x 3 = 18 et 7 x 3 = 21. Les deux groupes se sont arrêtés sur le problème du triangle, car il est possible de décompter les unités jusqu'à 18 (9 + 9 = 18). Un élève a proposé de continuer puisque 18 avait déjà été obtenu et ils sont arrivés à 27. Ils ont retrouvé leur «fois 3». Un élève du groupe A a alors proposé de faire 8 x 3 = 24 pour obtenir le nombre de pots de peinture noire pour le rectangle.

6. en ayant compté 3 fois toutes les unités de surface

Apprentissage – évaluation

Pour pouvoir mesurer l'impact de l'apprentissage effectué par les élèves à travers le problème *Décoration*, le pré-test suivant, sur la détermination de mesures d'aires, avait été préalablement proposés aux élèves.

Tu as à disposition tout le matériel qui te semble nécessaire: calculette, jetons, cubes, etc.



Classe ces figures de la plus grande à la plus petite

Ce test a été repris, en post-test, après la séquence d'apprentissage en classe.

Sur 18 élèves testés, 3 avaient trouvé correctement l'aire de toutes les figures dès le prétest, 13 sur les 15 restants ont amélioré leurs résultat au post-test et seuls 2 élèves n'ont pas amélioré leurs scores.

Les figures ne comprenant que des carrés, c'est-à-dire le T renversé et le carré ont les meilleurs scores aux deux tests et obtiennent finalement une réussite de 17 sur 18 au posttest.

Les figures comprenant des triangles, en revanche, ont posé des difficultés à la moitié des élèves testés. (Les réussites qui étaient de 6 à 10 sur 18 au pré-test, sont devenues de 11 à 16 sur 18 au post-test.). Ces figures n'étaient plus un obstacle pour les élèves de la cinquième à la septième année qui ont passé l'épreuve du RMT et qui ont obtenu 87 % de réussite à cette partie du problème.

L'erreur la plus fréquente était de compter le triangle comme ayant la même valeur que le carré. 3 élèves avaient aussi mesuré le périmètre lors du pré-test et seul un élève a gardé cette procédure lors du post-test[7]. En fait, lors du travail en groupe pour certains élèves et lors de la séquence didactique pour d'autres, ils ont réalisé qu'il fallait plus de peinture pour peindre un carré qu'un triangle. Ils ont remarqué que c'était le double. Ceci a permis à la majorité d'entre eux de réussir le post-test. On peut en conclure que *Décoration* permet un apprentissage sur la mesure d'aire.

Conclusion

L'analyse du problème *Décoration* montre qu'il était trop facile pour des élèves des degrés 5 à 7, mais je pense que si l'on proposait le même problème avec une situation moins évidente de proportionnalité (par exemple un rapport non entier comme 1,75 ou 2,5) et une suite non régulière de nombres pour les mesures d'aires (comme 5, 7, 8, 11) les résultats seraient très différents.

Mais ce problème est très utile pour des élèves qui ne maîtrisent pas totalement la notion d'aire, puisqu'il engendre des discussions intéressantes sur la manière de traiter les différentes unités (les triangles et les carrés). En outre, une fois les nombres modifiés, il est également intéressant, puisqu'il met en jeu le calcul de la proportionnalité.

Un point encore digne d'intérêt est que le problème *Décoration* n'entre pas dans la catégorie des « exercices » de mathématiques, mais bien dans celle des situations-problèmes puisque qu'aucune procédure n'est induite par la consigne. Il s'inscrit donc bien dans les conceptions de l'apprentissage sur lesquels reposent les nouveaux moyens d'enseignement romands.

Bibliographie

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M., *Problème ouvert et Situation-Problème*, IREM Académie de Lyon, Villeurbanne, 1991

BROUSSEAU G., *Théorie des situations didactiques*, in « Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques », RDM, 7 (2). 33 – 115, 1986

VERGNAUD G., *Théorie des champs conceptuels*, in « Recherches en didactique des mathématiques », 9/3, 133 – 170, 1990

7: il additionne une longueur horizontale et une longueur verticale

La pensée de l'été

Denis Odiet, Collège de Delémont

Elle m'est venue à l'esprit[1] quelques jours après de reposantes vacances du côté de l'arrière-pays cannois, à quelques jets de boule de la capitale du parfum. Un de mes penseurs favoris, grand philosophe à ses heures, ne la renierait certainement pas. Vous aimeriez faire sa connaissance? Alors, à vos crayons, règle, équerre et compas...

Etape 1

Construire un carré **WXYZ** de 16 cm de côté, **W** en bas à gauche, **X** en haut à gauche.
Tracer les diagonales de ce carré; elles se coupent au point **O**.
Construire la parallèle à WX passant par **O**; elle coupe **WZ** en **V**.
Construire la perpendiculaire à **WX** passant par **O**. Elle coupe **WX** en **T**.
Construire le cercle C_1 de centre **O** et de rayon 3 cm.
Le cercle C_1 coupe le segment **OV** en **U** et le segment **OT** en **E**.
U' est le symétrique de **U** par rapport à **O**.
S est le milieu du segment **OU**.
Construire C_2 le cercle de centre **S** et de rayon **SU'**.
Ce cercle coupe le segment **OT** en **D** et le segment **OV** en **G**.
Placer **A** sur le segment **VW** tel que le segment **AV** mesure 1 cm.
Tracer le segment **XA**; il coupe C_2 en **B** et en **C**, **B** étant le plus proche de **X**.
Placer **F**, milieu du segment **WT** et **I**, milieu du segment **DE**.
Construire la bissectrice de l'angle **XOT**. Elle coupe C_2 au point **H**.
Placer **K** sur le segment **OX** tel que le segment **OK** mesure 6 cm.
Construire le cercle C_3 passant par **H** et dont le centre est l'intersection du segment **OX** avec le cercle C_1.
Construire le cercle C_4 passant par **U'** et dont le centre est l'intersection des cercles C_1 et C_3 la plus proche de l'axe **OV**.
Placer **L** sur le segment **KX** tel que **KL** mesure 1 cm.
Le segment **LI** coupe le cercle C_2 en **J**.
Tracer la parallèle à **OU'** passant par **E**. Elle coupe C_3 sur sa portion extérieure à C_2 en **M**.
La perpendiculaire à **OV** passant par **U** coupe **FB** en **P**.
Q est le milieu du segment **WA**.
Construire la perpendiculaire à **ME** tangente au cercle C_3 en son point «supérieur». Nommer ce point de tangence **N**.

Etape 2

Construire C_3' et C_4', les symétriques des cercles C_3 et C_4 par rapport à l'axe **OV**.
Construire les symétriques de **A**, **B**, ... **P** et **Q** par rapport à l'axe **OV**. Les nommer **A'**, **B'**, ... **P'** et **Q'**.

Etape 3

Prendre maintenant un crayon plus épais.

Relier **C'A'GAC**, **B'F'ZWFB**, **JLN**, **HKM**, **J'L'N'**, **H'K'M'** et **FXYF'**.
Tracer en gras les segments **PQ**, **P'Q'**, **IE** et **I'E'**, la portion de C_2 extérieure à tous les autres cercles, la portion de C_1 extérieure à C_4 et C_4', les portions de C_3 et C_3' extérieures à la fois aux cercles C_1, C_4 et C_4' et finalement les cercles C_4 et C_4'.

Colorier en jaune l'intérieur des cercles C_4 et C_4' et en vert l'intérieur du triangle **AGA'**.
Pour terminer, gommer soigneusement tous les traits de construction.

1. en feuilletant le dernier numéro (36) de *Hypercube*

Solution page 47

Devons-nous encore enseigner les quatre opérations écrites ? [1]

Yvo Dallagana[2], Cavigliano (TI)

Nous référant à la contribution de G. Arrigo dans le numéro 40 du «*Bolletino dei docenti di matematica*»[3], mai 2000, nous désirons proposer quelques remarques, fruit d'un travail attentif d'analyses et de recherche sur l'enseignement des opérations écrites, initié déjà en 1994, et que nous avons commencé à diffuser à partir de l'automne 1996 dans le cadre des cours de formation Dimat[4].

1. Cet article a été publié dans la revue italienne *Scuola italiana moderna*, 15 avril 2001, pp 19-25, sous le titre *Matematica, linguaggio dell'universo.* Nous remercions la rédaction de cette revue et l'auteur d'en faire bénéficier aussi les lecteurs de *Math-Ecole*, ainsi que Mme Doris Penot, de l'IRDP, de l'avoir traduit en français. [ndlr]
2. L'auteur travaille au Tessin, dans l'enseignement spécialisé à 50 % et, le reste du temps, s'occupe de formation continue des enseignants, il est en particulier responsable du groupe DIMAT (présenté en note 4). [ndlr]
3. *Le Bolletino dei docenti di matematica* est la revue de nos collègues tessinois, professeurs de mathématiques, publiée 3 fois par année. L'article mentionné traite des procédures de calcul écrit et de ses évolutions nécessaires à l'époque de la calculatrice. [ndlr]
4. Cours de formation pour enseignants d'écoles élémentaires qui a eu lieu en 1994 au Tessin (coordonné par l'Office de l'enseignement primaire) et également en 1996 dans la province de Varese (en coordination de l'Instituto comprensivo di Laveno-Mombello) et qui jusqu'à présent a impliqué au total environ 400 enseignants.
Dellagana, I., & Losa, F. (1998). *DIMAT, differenziare in matematica: approccio differenziato all'apprendimento della matematica nel 2° ciclo della scuola elementare*, Bellinzona: Département de l'instruction publique et de la culture.

En pensant à l'espace, au temps et à l'énergie accordés dans la scolarité élémentaire à l'enseignement des opérations écrites (à partir de la 3ème année), aux préoccupations et au sens que ces «objets» d'enseignement revêtent dans les esprits des enseignants et des parents, il devient urgent d'assumer notre professionnalisme d'enseignant en se posant des questions du type :

- *Est-il correct, dans les premières années de l'école élémentaire d'accorder autant de temps et d'énergie à l'enseignement et à l'apprentissage des techniques de calcul ?*
- *Quels sont les objectifs et quel est le sens de telles pratiques ?*
- *Quels sont les objectifs essentiels de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire ? Est-ce obligatoirement les quatre opérations écrites ?*
- *S'agit-il d'un apprentissage vraiment essentiel, prioritaire pour l'élève ?*
- *Quelle relation existe entre l'enseignement frontal des techniques de calcul et le développement des connaissances et compétences logico-mathématiques de l'élève ?*
- *S'agit-il de compétences que l'élève utilisera vraiment dans son futur scolaire, professionnel et social ?*
- *Quels sont les rôles des élèves et des enseignants dans cet enseignement ?*
- *Par rapport à une conception constructiviste de l'enseignement, dans lequel l'enfant devrait être l'artisan de son propre apprentissage, comment considérer l'enseignement des algorithmes[5] conventionnels,*

5. Un *algorithme* est un «procédé systématique de calcul qui permet de résoudre une classe de problèmes». La fonction essentielle de l'algorithme est de «consommer le moins

comme il se pratique dans la très grande majorité des classes?

- *Les calculatrices n'ont-elles pas écarté la nécessité d'utiliser les opérations écrites qui sont désormais en complète voie d'extinction dans les pratiques sociales quotidiennes? A qui et quand arrive-t-il encore, dans toute une vie d'adulte, de faire par écrit, par exemple, une division du type 183,45 : 3,2 ou une simple multiplication comme 38 x 45?*

Grâce à de telles interrogations et surtout à la stimulation émanant des recherches de C. Kamii[6] la problématique de l'enseignement-apprentissage des techniques de calcul écrit a pris de plus en plus de poids.

La nécessité d'atteindre une plus grande clarté, tant professionnelle qu'institutionnelle (cf. *Finalità della scuola e Programmi*), est également liée au fait que nous nous trouvons en face d'un «noyau dur» et d'un héritage de l'école du siècle passé, avec des racines si fortement ancrées dans notre culture scolaire que cette pratique résiste à l'innovation de manière acharnée. Pour bien des enseignants et parents, les quatre opérations écrites «représentent les mathématiques elles-mêmes», elles sont «sacrées», «gare à qui veut y toucher».

Maintenant, à la lumière des connaissances actuelles, nous désirons montrer comment **l'enseignement précoce des opérations écrites, à partir de la 3ème année élémentaire**[7] **est non seulement inopportun par rapport aux objectifs cognitifs des élèves mais peut même avoir des effets néfastes,** que ce soit pour les élèves experts qui apparemment semblent tirer bénéfice de cet enseignement, ou pour les élèves moins experts.

Cette évaluation drastique, qui peut paraître exagérée à celui qui n'a pas encore analysé cette thématique dans toutes ses implications pédagogiques, didactiques et sociales émerge après des années d'analyses attentives et scrupuleuses des erreurs ou des succès des élèves et des rôles qu'assument les maîtres et les élèves dans cet enseignement-apprentissage.

Une attention particulière a été portée à l'impact que l'enseignement direct, frontal, mécanique des algorithmes conventionnels a sur le développement de **l'autonomie mentale** des élèves. Ceci devrait être en fait notre première préoccupation, surtout en ce qui concerne les mathématiques, une discipline qui devrait toujours avoir comme objectif premier le développement de la capacité logique de l'élève, lui garantissant la liberté de pensée, le stimulant à devenir créatif, autonome et socialement impliqué dans un continuel échange d'idées et non une discipline, comme il arrive

d'énergie possible», donc d'occuper le moins d'espace possible dans la mémoire de travail. Ceci permet au sujet, pendant la résolution de situations et problèmes, de se consacrer au mieux à des opérations de pensée plus importantes (associations, inductions, déductions, synthèses, hypothèses...). Apprendre la technique du calcul signifie donc savoir appliquer rapidement (mécaniser) un ensemble fini de règles, appliquées selon des prescriptions déterminées. Nous pouvons distinguer parmi *les algorithmes conventionnels*, par exemple, ceux des quatre opérations ainsi qu'elles sont habituellement enseignées à l'école et les *algorithmes spontanés* qui, à la différence des premiers, ont un usage local, contingenté, personnel et qui sont crées, inventés dans des situations particulières, en fonction de leur nécessité, de leurs particularités et des connaissances du sujet qui les utilise.

6. Kamii, C. (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic: 2n grade* New York: Teachers College Press.
Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*, Berne: Peter Lang.
Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic: 3rd grade* New York : Teachers College Press.
Kamii, C., Lewis, B. A., & Jones, S. (1991). *Reform in primary mathematics education: a constructivist view.*, Educational Horizons, vol. 70, no. 1, 19-26.

7. En Italie et dans d'autres pays, cet enseignement se fait déjà en 2ème année élémentaire.

encore trop souvent, qui requiert presque exclusivement de l'attention, de la diligence et de l'ordre pour assimiler et répéter mécaniquement lorsque l'enseignant montre ou enseigne, même au moyen des dernières aides didactiques les plus sophistiquées.

Dans l'optique des théories pédagogiques et didactiques les plus récentes, les mathématiques, mais pas uniquement elles, requièrent de l'enseignant de **s'abstenir de faire de l'enseignement direct**[8] pour justement laisser à l'élève la possibilité d'utiliser toutes ses connaissances et facultés mentales, pas seulement pour apprendre de nouvelles choses mais aussi pour prendre toujours plus confiance en ses propres possibilités logiques et créatives ; un enseignement où le maître est avant tout une personne ressource, le responsable des conditions d'apprentissage de ses élèves et non le dispensateur de savoirs et procédures à faire entrer dans la tête des enfants : un véritable « instrument » de transmission de la connaissance[9].

Dans l'optique d'une école qui privilégie le constructivisme, la différenciation, l'autonomie, l'autoévaluation, l'autocontrôle, la collaboration, le partage des idées, la recherche, la découverte... nous désirons attirer l'attention sur les possibilités alternatives de l'apprentissage des techniques de calcul, par rapport à l'enseignement traditionnel direct des opérations écrites.

Réduire le rôle de enseignement frontal, afin que les élèves puissent apprendre et surtout **apprendre à apprendre**[10] (dans le domaine des objectifs cognitifs, métacognitifs et socio-affectifs), en se basant sur leurs propres forces et compétences, requiert premièrement, de la part de l'enseignant, la capacité de choisir et mettre en jeu les situations mathématiques adéquates. Ensuite, le maître encouragera les élèves à choisir leurs propres procédures, à se confronter à de nouveaux obstacles, à accepter, comme dans un jeu, les « défis cognitifs », etc. plutôt que de leur montrer comment résoudre des problèmes et de les inciter à utiliser exclusivement des procédures et solutions enseignées précédemment, c'est-à-dire les siennes[11].

La mathématique est envisagée comme recherche, invention, collaboration, échange de points de vues, confrontation critique, argumentation, etc. plutôt que comme discipline constraignante, rigide, où l'enseignant, au nom de l'Institution, montre les procédures nécessaires pour résoudre des problèmes en instaurant et perpétuant un *contrat didactique*[12] de soumission dans lequel le message implicite est du type « je possède le savoir et maintenant je te le transmets ». « Comment puis-je accroître ma **propre estime** et la confiance en moi, en mes propres capacités mentales, en ma propre autonomie de pensée si l'on ne me permet pas de penser à ma manière, d'être actif, d'être mon propre patron ? » peut-on

8. Nous nous limiterons à signaler par exemple la *théorie des situations*, de Guy Brousseau, au cours desquelles l'unique moment où l'enseignant prend position par rapport aux objets mathématiques est dans la phase d'institutionnalisation.

9. Nous pourrions ouvrir une parenthèse sur le degré d'insatisfaction et d'ennui (certaines fois aussi de dépression !) qui peut naître à la longue pour l'enseignant lorsqu'il est renfermé ou qu'il s'enferme soi-même dans le rôle du dispensateur de la connaissance où le modèle dominant de son rôle se limite à l'idée de « je sais, tu ne sais pas, alors je te fais voir, je t'enseigne, il suffit que tu sois attentif »

10. L'objectif d'apprendre à apprendre, compétence indispensable dans la nouvelle société, demande un déplacement radical de l'attention de ce qu'on apprend vers la façon de l'apprendre.

11. Si nous prenons un simple exemple dans le cadre du calcul mental, pourquoi la procédure de l'addition $8 + 7$ devrait-elle forcément être $8 + (2 + 5)$ et ne pourrait pas être $8 + 8 - 1$ ou $7 + 7 + 1$ ou $5 + 5 + 3 + 2$, etc. ?

12. Par contrat didactique on entend les attentes réciproques, surtout implicites qui lient l'enseignant à l'élève : « ce que j'attends de toi en tant qu'élève est ce que tu attends de moi en tant qu'enseignant ».

entendre dire par des élèves auxquels on a accordé un grand espace de liberté dans la production d'algorithmes spontanés!

N'est-ce pas, peut-être, surtout dans le développement de la **capacité de choix** et de l'autonomie que les enseignants et parents devraient investir le maximum d'énergie, afin que les élèves ou leurs enfants puissent apprendre à apprendre et devenir des citoyens en pleine possession de leurs droits, conscients et responsables de leurs propres idées?

Et l'enseignement direct des opérations écrites (qui, dans de nombreuses classes occupe le 50 % du temps scolaire consacré aux mathématiques!) contribue-t-il à la réalisation de ces objectifs fondamentaux? Nous pensons fermement que non et même que l'effet nous paraît opposé.

A travers un mécanisme subtil et imperceptible, dans la bonne foi des enseignants et des parents qui désirent aider au mieux les jeunes, il arrive, jour après jour, qu'ils se «soumettent» à l'enseignement, qu'ils s'habituent «à faire comme je dis» à répéter avec zèle, indépendamment du degré effectif de compréhension, à s'arrêter de penser d'une manière autonome, à s'adapter à l'unique manière possible et «juste» d'affronter les devoirs (ceux de l'enseignant ou des parents), à ne pas valoriser les différences, à être avant tout performant, etc. L'effet est similaire au phénomène de la goutte d'eau qui tombe toujours au même endroit, apparemment inoffensive mais qui, à la longue, laisse des traces indélébiles. C'est l'ensemble de petits moments (les gouttes) qui comptent pour les élèves et c'est là que les grandes intentions sont mises à épreuve. C'est seulement dans la pratique quotidienne, dans chaque proposition, dans les médiations constantes, dans la succession de chaque petit geste ou action que l'école peut réaliser son véritable accomplissement (voire les finalités de l'école) et pour cela également, dans la manière dont les algorithmes sont affrontés, proposés, enseignés ou construits.

En enseignant précocement les opérations écrites conventionnelles, le maître fait des leçons de mathématiques un des instrument les plus pénétrants et occultes de «normalisation», dans le sens péjoratif du terme.

En résumé, nous soutenons que **l'enseignement des algorithmes conventionnels devrait, dans un premier temps, laisser la place à la production d'algorithmes spontanés, au développement de la connaissance numérique** (en visant particulièrement la maîtrise des valeurs positionnelles des chiffres) **et des compétences du calcul mental**. C'est seulement dans un deuxième temps (à partir de la 4ème – 5ème année), quand les compétences récemment acquises seront renforcées et quand le champ numérique sera étendu au-delà de 1000 et des nombres naturels (avec l'introduction des nombres décimaux) que l'enseignement des algorithmes conventionnels[13] aura un sens. Et à ce point il s'agira d'apprentissages rapides et simples, parce qu'ils seront soutenus par une réelle possibilité de contrôle numérique de la part de l'élève et une «implantation cognitive» plus profonde.

Retirer leur première place aux quatre opérations écrites signifie affirmer simultanément l'importance croissante d'un solide développement des **connaissances numériques**. Comme le souligne Vergnaud[14] il s'agit de la

13. Dans ce cas, nous parlons explicitement d'un enseignement dans lequel un algorithme conventionnel, justement parce qu'il est le fruit d'une convention et ne peut être découvert ou inventé par l'élève.

14. *«Le concept de nombre ne se réduit ni au critère de la conservation, ni à l'activité de dénombrement, ni à la résolution d'une classe de problèmes, ni à quelques procédures automatisables, ni à la compréhension et à la manipulation de signes sur le papier. Mais c'est de cet ensemble d'éléments divers qu'émerge, avec l'aide de l'environnement familial et scolaire, l'un des édifices cognitifs des plus impressionnants».*
Vergnaud, G.: préface au texte de Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes,* Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé

construction d'un édifice cognitif impressionnant qui permet à la personne le contrôle effectif numérique et le sens de toutes les situations arithmétiques.

A ce point, à travers quelques-uns parmi de nombreux exemples concrets, nous désirons mettre en évidence comment **dans la pratique des algorithmes conventionnels, l'élève raisonnant avec les chiffres, de droite à gauche, perd peu à peu le contrôle numérique de la situation** du moment qu'il est induit à se concentrer uniquement sur les chiffres pris individuellement, en les traitant en fait comme des unités indépendamment de leur valeur positionnelle. En effet, à travers les diverses connaissances liées au nombre, la maîtrise de **la valeur positionnelle des chiffres** devient essentielle pour garder le **sens du nombre, l'estimation et le contrôle** des solutions. Comme nous nous trouvons tous confrontés quotidiennement et quasi exclusivement aux calculatrices, attribution de sens, capacité d'estimation et de contrôle deviennent des compétences obligatoires, essentielles et prioritaires à l'école obligatoire. Et dans ce but il est essentiel pour un individu de développer au maximum ses propres compétences en calcul mental élémentaire[15].

Voici quelques exemples liés à la perte de contrôle de situations numériques:

Exemple 1: Sandro (soustraction en colonne) 872 – 428 = 456

$$\begin{array}{r} 872\;- \\ 428 \\ \hline 456 \end{array}$$

– *J'ai retourné le calcul*
– On peut le retourner?
– *Oui, bien sûr, ma mère me l'a enseigné*
– *J'ai aussi fait le contrôle 456 + 428 pour voir si on obtient 872.*
– Comment as-tu fait?
– *4 + 4 font 8, puis 5 + 2… 7 puis… 6 + 8 font 14… puis… je fais la moitié… non, moins 2… et ça donne 12… je mets le 2 et les dizaines je les enlève.*

Exemple 2: Remo (soustraction en colonne) 872 – 428 = 456

$$\begin{array}{r} 872\;- \\ 428 \\ \hline 456 \end{array}$$

– On peut en être sûr?
– *Avec la preuve*
– Comment on la fait?
– *Je peux mélanger les chiffres*
– Montre-moi (il écrit en colonne 872 – 248)
– *8 moins 2 font 6* (et il l'écrit)
– *7 moins 4…* (il s'arrête)
– *… ça ne va pas parce que ça fait 3* (et il s'arrête)

PREUVE:

$$\begin{array}{r} 872- \\ 248 \\ \hline 6 \end{array}$$

15. Par calcul élémentaire, nous n'entendons pas uniquement les calculs jusqu'à 20 ou jusqu'à 100 mais toutes les opérations similaires qui s'étendent progressivement sur l'enemble du champ numérique: outre 9 – 4 ou 90 – 40 il y aura également 900 – 400, 9000 – 4000, 90000 – 40000, et également 9500 – 4000, etc.

Exemple 3: Maura

114 -
16
198

– 4 moins 6 je ne peux pas alors je prête 1 et ça fait 14 et… moins 6 égal 8… je rajoute 1 ce qui fait 2 et 11 moins 2 font 9… puis… 1 moins 0 donne 1.

Maura a appris presque parfaitement la technique enseignée, mais elle commet une petite erreur à la fin de la procédure en oubliant que le 1 des centaines (10 dizaines) a déjà été utilisé auparavant.

Cet exemple montre que Maura ne se préoccupe absolument pas du contrôle numérique qui pourtant lui permettrait facilement de voir que le résultat est impossible. Elle est tellement centrée sur la procédure de calcul qu'elle perd le contrôle d'une situation numérique qui pourtant devrait lui faire dire que le résultat doit forcément être inférieur à 100.

Exemple 4: Luca

114 -
16
102

– 4 moins 6 je ne peux pas le faire parce que la maîtresse me l'a dit… je fais 6 moins 4… qui donne 2
… 1 moins 1 donne 0 et puis 1.

Il s'agit d'une erreur «classique», induite par le fait que, pendant plusieurs années, Luca a appris qu'on ne peut pas faire 4 moins 6.

Exemple 5: Lia

183 +
94
627
1082
11'447

Lia donne un exemple de perte macroscopique du sens et du contrôle de la situation numérique. Elle mélange les procédures de l'adition et de la multiplication. Elle s'efforce de se souvenir mécaniquement de tout ce qu'elle a entendu.

– 4 plus 3 font 7
– 4 plus 8… 12… j'écris 2 et je retiens 1
– 4 plus 1… 5 et 1 que j'ai retenu font 6
– je laisse un espace
– 9 plus 3… 12… j'écris 2 et je reporte 1
– 9 plus 8 font 17 et 1 font 18… j'écris 8
– 9 et 1 font 10 (elle oublie le 1)
… (elle continue l'adition et exécute la dernière phase de manière correcte).

Exemple 6: Anna

700 + 24 = 940
7 plus 2 … 9 …
4 plus 0 … 4
et puis … 0

Dans l'exemple d'Anna, nous sommes dans le domaine du calcul mental. Dans son cas, l'enseignement des opérations écrites conventionnelles a donné lieu à des conséquences immédiates graves. Quelques semaines auparavant, Anna savait effectuer ces additions mais après

39 + 400 = 790
3 plus 4… 7…
9 plus 0… 9
et puis… 0

900 + 72 = 620
9 plus 7… 16… j'écris 6
2 plus 0… 2
et puis… 0

les leçons de la maîtresse qui avait enseigné et préconisé l'utilisation cette procédure de calcul, Anna a renoncé (pourquoi?) à utiliser ses propres procédures pour adopter, en calcul mental également, la procédure de calcul écrit.

Dans un tel cas, il est nécessaire d'arrêter immédiatement l'enseignement des opérations écrites pour éviter des conséquences encore plus désastreuses.

Exemple 7 : Sergio

200 +
200
―――
400

Il s'agit véritablement d'un élève en grandes difficultés qui utilise la technique du calcul écrit pour des opérations que, évidemment, il ne devrait pas faire (parce qu'elles sortent du champ numérique qu'il est capable de maîtriser) ou qu'il devrait pouvoir faire uniquement mentalement. Pour Sergio c'est le début de la fin !
(Avec fierté il dit :) – *Regardez, maintenant je suis capable de faire des opérations avec de grands nombres* (et il écrit 200 + 200 en colonnes)
– *0 plus 0… 0* (et il écrit 0)
– *0 plus 0… 0* (et il écrit 0)
– *2 plus 2…* (il compte sur ses doigts 1, 2, 3, 4)… *cela fait 4* (et il écrit 4).
– Quel est le résultat ? (il hésite en lisant le nombre)

Voyons maintenant en revanche quelques exemples d'algorithmes spontanés :

263 +
128
―――
300
80
11
―――
391

243 +
215
―――
400 50 8
= 458

324 ×
3
―――
900
60
12
―――
972

384 +
173
―――
407 +
150
―――
557

468 -
199
―――
268 +
1
―――
269

355 -
124
―――
255
235
$\boxed{231}$

798 -
135 -
232
———
498 -
67
———
438 -
7
———
431

384 +
173
———
300 +
100
———
400 +
80 +
70
———
550 +
7
———
557

24 +
8 +
6 +
12 +
33
———
60 +
23
———
83

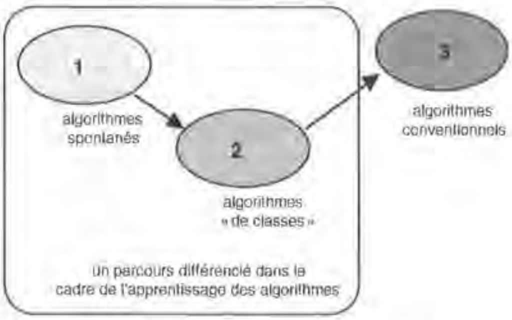
Donc, d'une part, nous pouvons dire que, dans l'apprentissage des opérations écrites conventionnelles, l'enfant doit abandonner sa manière de penser pour se soumettre à l'enseignement. Il est implicitement induit à désapprendre la valeur positionnelle des chiffres (et à penser uniquement aux unités prises individuellement) et à perdre le sens et le contrôle numérique de la situation. D'autre part avec les algorithmes spontanés, on peut faire les observations suivantes :

- en traitant les nombres de gauche à droite, on ne perd jamais le contrôle numérique ;
- le langage intérieur utilisé fonde (et en même temps se renforce) le concept de la valeur positionnelle (qui devient la connaissance essentielle, constamment sollicitée) ;
- les connaissances-compétences en calcul mental sont de plus en plus exercées et développées ;
- l'élève opère uniquement dans le champ numérique qu'il maîtrise (il ne lui est pas possible d'aller au delà sans en construire l'extension) ;
- il sait toujours expliquer la procédure utilisée parce qu'elle est le fruit de sa connaissance ;
- son autonomie, sa capacité de rechercher et de découvrir les solutions sont valorisées ;
- il confronte ses procédures avec celles de ses camarades en instaurant des débats sur la validité mathématique des procédures crées ;
- il réussit à surveiller, modifier et maintenir le contrôle de l'exécution de la procédure et de la situation numérique ;
- il se rend compte immédiatement des obstacles (éventuellement des erreurs) dès qu'ils se manifestent ;
- il joue constamment, dans l'activité logicomathématique, un rôle actif de constructeur de son propre « impressionnant édifice cognitif » (Vergnaud).

A la lumière de ce qui a été présenté, nous pouvons conclure en disant que **les objectifs à court terme de l'enseignement des algorithmes conventionnels sont en opposition avec les objectifs à long terme, tant du développement des connaissances numériques que de celui des compétences socio-affectives.**

Dans la relation de continuelle dépendance entre le développement des connaissances numériques, du calcul mental et des opérations écrites, nous devrions éviter de perpétuer dans les écoles la situation paradoxale qui se manifeste dans l'enseignement «traditionnel»: d'une part, à partir de la 3ème année d'école primaire, les règles des opérations écrites sont imposées, d'autre part, on propose des activités et jeux logiques pour développer la pensée mathématique de l'enfant. **Pourquoi ne pas utiliser *aussi* les opérations écrites pour développer les capacités logiques, créatives et sociales des élèves?**

Notre proposition, que nous présentons sous une forme extrêmement synthétique pour cause d'espace, consiste en un parcours didactique qui va des «algorithmes spontanés» aux «algorithmes de classe» (soit à l'institutionnalisation provisoire des algorithmes partagés de la classe et mathématiquement validés[16]) pour arriver finalement, mais seulement beaucoup plus tard aux opérations écrites conventionnelles. Un parcours de quelques années (dans le cadre d'un enseignement-apprentissage différencié où le rythme, le style et la particularité de chaque élève sont respectés).



En respectant quels rythmes?

Selon les expériences observées, la durée de ce parcours pourrait être de deux ans, mais elle est en fait déterminée par le rythme et les périodes de développement des élèves. Le passage d'une phase à l'autre dépend de la capacité atteinte par les enfants en calcul mental et de leurs connaissances numériques, plus que des programmes (ceux-ci ne pouvant être qu'indicatifs). Dans tous les cas, on ne peut pas imaginer de passer aux algorithmes conventionnels avant la 4ème année primaire du fait qu'ils acquièrent du sens et de l'efficacité par l'extension du champ numérique[17].

Avant de se plonger dans la synthèse de notre proposition, nous désirons préciser que le *calcul mental* et les *connaissances numériques* (entre autre, surtout la *valeur positionnelle* des chiffres, la signification et le sens des nombres) sont toujours les objectifs prioritaires qui restent pourtant constamment présents dans toutes les phases du parcours.

Dans les précisions qui suivent, pour chaque phase, nous nous limiterons à l'essentiel, en omettant de parler de toutes les activités mathématiques (situations, jeux, manipulations de petits cubes, automatismes élémentaires, mesures...) toujours pratiquées à l'école, qui contribuent à donner un sens aux opérations arithmétiques, à créer le réseau des connaissances permettant à chacun de construire son «édifice» logico-mathématique et de l'utiliser au mieux lorsqu'il est confrontée à de nouveaux obstacles.

16. Il s'agit d'un premier moment provisoire d'institutionnalisation, de mise en accord, mais qui n'a une valeur qu'à l'intérieur de la «société classe». Ces moments, outre le fait d'avoir une importance dans le processus progressif de construction de la connaissance et des compétences mathématiques, ont l'avantage de permettre aus élèves de s'approcher d'une vraie (parce qu'elle est issue de leur vécu) compréhension de ce que sont les conventions (quelques références à de simples moments liés à l'histoire représentent des pistes de développements ultérieurs; ce ne sont pas les exemples qui manquent).

17. Dans le champ des nombres naturels jusqu'à 1000, les enfants les plus experts réussissent à résoudre mentalement la plupart des situations numériques habituellement enseignées avec les opérations écrites. On sourit lorsqu'on observe encore, dans certaines classes, l'enseignement par écrit d'opérations telles que 24 + 45. Les variables numériques d'une opération doivent toujours avoir un sens, être en harmonie avec la procédure adoptée (calcul mental? calcul écrit?). Le calcul écrit n'a de sens que lorsqu'on ne réussit pas à trouver la solution mentalement! A moins que le but ne soit simplement d'apprendre une technique, de devenir une «machine».

Première phase:
Calcul mental, connaissances numériques et «*algorithmes spontanés*»
(à titre indicatif, en 2ème et 3ème année d'école primaire)

Dans cette phase, le matériel de référence essentiel est la «*Banque des nombres*» et les situations et objectifs qui en déterminent l'utilisation[18].

Il s'agit de proposer des situations numériques qui poussent l'élève au désir d'explorer toujours plus ses compétences en calcul mental et d'utiliser, lorsque c'est le cas, l'écriture comme un support, c'est-à-dire une procédure de décomposition de l'écriture d'une opération complexe (pour chaque élève) dans ses composants les plus simples. Ces modalités amènent en peu de temps l'élève à la construction d'algorithmes «personnels», «spontanés», dans lequel le nombre est (dans la presque totalité des cas observés) traité de gauche à droite. Dans toute cette phase, les algorithmes écrits librement par les enfants dépendent du développement progressif des compétences en calcul mental et des connaissances numériques. Dans cette période déjà, les procédures qui ne sont pas mathématiquement soutenables (pour les enfants) sont mises en discussion et, pour cette raison,

18. La «Banque des nombres» qui, selon le niveau des élèves, peut être constituée de cartes pour la construction des nombres jusqu'à 100 ou jusqu'à 1000 (d'habitude ce matériel n'est plus nécessaire lorsque l'élève a acquis une bonne maîtrise de la valeur positionnelle des chiffres jusqu'à mille) permet de traiter les situations numériques selon les objectifs fondamentaux suivants:

– Acquérir la *maîtrise de la valeur positionnelle des chiffres* pour opérer avec sûreté et rapidité dans un champ numérique déterminé (d'abord jusqu'à 100 puis jusqu'à 1000, puis...).

– Maîtrise d'un *langage opérationnellement utile* (conforme à la structure de la pensée de la personne qui calcule). Bien que les élèves soient progressivement amenés à connaître les dizaines, les centaines et les milliers, dans les procédures de calcul et de transformation des nombres, ils ne doivent pas absolument utiliser un support verbal et visuel dans lequel la valeur positionnelle des chiffres soit exprimée en unités, dizaines, centaines, etc. Il est important que l'élève (pour maîtriser les nombres) conserve l'habitude de parler, par exemple pour le nombre 324, de sa décomposition en *trois cents, vingt* et *quatre* et non pas de 3 *centaines*, 2 *dizaines* et 4 *unités* (pire encore si l'enseignant utilise les abréviations 3 c, 2 d, 4 u). Cela ne signifie évidemment pas que l'élève ne doive pas connaître ce que sont les dizaines et les centaines mais connaître ces termes ne signifie pas devoir les utiliser dans la procédure de calcul!

– Utiliser du *matériel didactique* et *des supports visuels à usage temporaire* (le plus brièvement possible) comme des moyens de faciliter la construction de représentations et non pas pour «emprisonner» les élèves en en faisant un matériel indispensable. (Un support didactique est valable dans la mesure où il «inclus sa propre extinction»!) Ainsi, nous n'amenons pas l'élève, confronté à des situations numériques de calcul, à parler d'unités, de nombre de dizaines, de nombre de centaines mais plutôt à *trois cents, vingt* et *quatre*, de même en ce qui concerne le matériel didactique, nous excluons l'utilisation de cartes avec des chiffres seuls (pire encore lorsqu'elles sont de couleurs différentes pour les unités, les dizaines et les centaines; habituant involontairement les élèves à se baser sur des critères non pertinents et sous-évaluant l'essentiel, à savoir la position).

– Utiliser un matériel qui permette de s'adapter à des situations numériques toujours plus complexes dans lesquelles l'élève pourra *toujours maintenir le contrôle numérique de la situation.*

900	90	9
800	80	8
700	70	7
600	60	6
500	50	5
400	40	4
300	30	3
200	20	2
100	10	1

«Banque des nombres»

toutes les activités mathématiques alternent avec des moments de communication et de validation. L'enseignant devient l'animateur de «débats mathématiques» sur la validité des procédures spontanées proposées par les élèves (il est important que dans cette phase, il ne prenne pas position, mais qu'il se limite à stimuler les enfants pour expliquer leurs choix et les argumenter).

2ème phase:
Calcul mental, connaissances numériques et «*algorithmes de classe*»
(A titre indicatif, à la fin de la 3ème et début de la 4ème élémentaire)

Après une longue période de création, confrontation, discussion, de nombreux algorithmes différents, l'enseignant pose la question suivante à la classe: «*dans tout ce que vous avez produit nous devons à présent faire un choix, garder uniquement les procédures de calcul les plus efficaces, les plus sûres et les plus commodes*». Il ne s'agit pas de choisir la meilleure stratégie pour l'adition, pour la soustraction, etc., mais d'approfondir le débat sur la validation pour arriver à «un accord de classe», à un savoir «valable pour nous», pour «notre groupe» dans lequel la diversité des algorithmes adoptés par la classe puisse toujours permettre la différentiation, en tenant compte des styles, des compétences et des divers rythmes des élèves. Il s'agit d'une «auto-institutionnalisation» provisoire, une phase qui permet de se confronter intensément avec les procédures qui contribuent le mieux à la consolidation du calcul mental et des connaissances numériques. Et ceci, avant d'introduire les algorithmes conventionnels qui, de fait, renverseraient la manière de traiter les nombres. Il faut que, auparavant, les élèves puissent acquérir la maîtrise de l'estimation et du contrôle numérique. A titre d'exemple, devant l'adition 314 + 521 un enfant doit pouvoir apprendre, quasi à première vue, que le résultat doit être forcément «huit cents et quelque chose».

3ème phase:
Calcul mental, connaissances numériques, «*algorithmes de classe*» et «*algorithmes conventionnels*»
(A titre indicatif, au cours de la 4ème et au début de la 5ème pour les élèves les moins experts)

C'est seulement après avoir acquis la maîtrise de ce qui est décrit ci-dessus et après que le champ numérique s'est étendu (au-delà de 1000, avec les nombres décimaux) qu'il est possible de décider d'enseigner les algorithmes conventionnels. Ainsi, quand les nombres se complexifient, l'algorithme conventionnel devient plus pratique et se justifie (avant cela aurait été le contraire) mais il est nécessaire qu'à ce point l'élève puisse gérer alternativement deux modalités différentes de traitement des nombres: de droite à gauche lorsqu'il applique les diverses procédures des opérations conventionnelles[19], de gauche à droite quand il doit exercer le contrôle numérique de la situation, calculer oralement et mentalement ou encore estimer.

C'est une particularité des algorithmes conventionnels de ne pas devoir maintenir le contrôle numérique en ne fixant son attention que sur la procédure corecte à suivre (note 5). C'est pour cette raison, précisément, que leur enseignement doit attendre le moment où les élèves sont engagés dans d'autres défis cognitifs plus importants, liés en particulier au développement du calcul mental et des connaissances numériques.

19. Dans les quatre opérations, pour ce qui concerne le traitement des chiffres de droite à gauche, fait exception la division. En réalité pourtant, bien qu'il soit vrai que dans le fait de diviser je considère le dividende de gauche à droite, il s'agit tout de même d'une procédure dans laquelle l'élève perd le sens du nombre du fait que les chiffres ne sont pas considérés par rapport à leur position réelle (en résolvant 845 : 5, il dit «5 dans 8 va une fois», etc.)

Pourquoi faire simple quand on peut faire superflu ?

Marc Blanchard, Rochefort/Mer

[ndlr] M. Marc Blanchard, nous envoie une «petite réflexion tirée de la correction d'un exercice de l'épreuve officielle 2000 du Challenge mathématique Poitou-Charentes» dont il est l'un des animateurs. Il y ajoute, en commentaire:

«Il n'est pas si fréquent de disposer d'un énoncé avec une donnée superflue... néanmoins utilisable dans une résolution assez naturelle. Sans elle, l'énoncé serait simpliste. Ceci pour agrémenter / alimenter la réflexion des didacticiens... ».

Les lecteurs de *Math-Ecole* y trouveront vraisemblablement aussi de l'agrément et de l'intérêt.

1. Le 30 mai 2000, près de 10000 élèves de CM2 et de sixième planchaient sur les épreuves du Challenge mathématique Poitou-Charentes. Parmi les 12 exercices proposés, voici le neuvième:

2. Un conseil : consacrez une minute et demie à la résolution effective de cet exercice élémentaire...

3. ...

4. Parions que la plupart d'entre vous ont résolu l'exercice d'une façon équivalente à la suivante (avec un diagramme de Venn sous-jacent) :

   25 % utilisent les deux modes de paiement (car, par exemple : 79 + 46 = 100 + 25).

   La réponse est donc 54 % (car 54 = 79 – 25)

5. Quelques-uns ont peut-être procédé ainsi :

   Puisque tous les clients utilisent l'un ou l'autre mode de paiement, ceux qui utilisent la seule carte bancaire sont donc ceux qui n'utilisent pas le chéquier. La réponse est 54 % (car 54 = 100 – 46).

6. Les deux raisonnements et le résultat commun sont exacts bien sûr mais dans le premier cas, toutes les données sont utilisées, dans le second une donnée est superflue.

   Pourquoi faire simple quand on peut faire superflu ?

7. Un petit raisonnement à partir du premier montre que 54 % résulte de l'opération :

   $$79 - (79 + 46 - 100)$$

   Ce qui équivaut parfaitement au second et révèle que 79 s'élimine.

8. Toutefois, cette donnée superflue ne peut être quelconque. Il faut que le pourcentage d'utilisateurs de cartes bancaires soit compris entre 54 et 100 pour la cohérence de l'énoncé !

9. ... Je laisse méditer les didacticiens sur cet exemple d'énoncé simple qui appelle « statistiquement » une solution utilisant toutes les données alors qu'une esst superflue.

   Sans cette donnée, la deuxième solution est naturellement évidente.

[ndlr] *Le Challenge mathématique Poitou-Charentes*, a de nombreux points commun avec le Rallye mathématique transalpin. C'est une compétition destinée aux classes de CM2 et de sixième (degrés 5 et 6, 10-11 ans et 11-12 ans) de l'Académie de Poitiers. Il existe depuis 1989 et chaque année plus de 10000 écoliers et collégiens y participent. Il propose deux épreuves de deux heures : une d'entraînement et une « officielle ». Durant chaque épreuve, les classes inscrites doivent résoudre douze problèmes variés et originaux. Il y a trop de travail pour un élève, la classe doit donc s'organiser pour se partager le travail. Les échanges entre élèves sont recommandés et nécessaires. A la fin, si plusieurs solutions sont trouvées, les élèves doivent en choisir une[1].

1. Pour en savoir plus sur le *Challenge mathématique de Poitou-Charentes*, voir l'ouvrage *PanoraMath 2*, (page 3 de couverture) qui présente une fiche signalétique et une dizaine de problèmes de 28 compétitions mathématiques d'expression française.

Les tentations de la proportionnalité

Jean-Paul Dumas, formateur, Fribourg
François Jaquet, IRDP, Neuchâtel

1. Introduction

Dès que le jeune élève a construit ses premières connaissances sur le nombre et les opérations, on lui propose de les mettre en œuvre dans des situations de la «vie courante», dans celles du domaine physique des grandeurs et, plus généralement, dans toutes celles d'ordre numérique.

Dans le champ de l'addition et de la soustraction, il y a les problèmes de réunions de quantités, de gain ou de perte, de comparaison d'états... Dans le champ de la multiplication et de la division, dès la troisième et la quatrième années d'école primaire, arrivent les problèmes où deux grandeurs sont en relation: le nombre d'objets et leur prix, le nombre de reports d'un mesurant-unité sur un objet et la mesure de sa longueur, le nombre d'animaux et le nombre de leurs pattes... Une majorité de ces situations entrent dans le cadre de la proportionnalité et les élèves retiennent très vite les outils qui permettent de les traiter, c'est-à-dire les propriétés de linéarité, celle du «produit» et celle de «la somme», comme on les appelle communément. Par exemple, dans un problème de prix, si 12 objets coûtent 30 francs, la propriété du «produit» (par 3) permet de dire que 36 objets (12 x 3) coûtent 90 francs (30 x 3) et si l'on sait en outre que 8 objets coûtent 20 francs, la propriété de la «somme» permet de calculer le prix de 20 objets (12 + 8) par addition des prix correspondants: 50 francs (30 + 20).

Ces mécanismes de calcul sont très simples, lorsque les nombres sont judicieusement choisis, et vite retenus par les élèves. Mais, ils ne sont valables que dans les cas de proportionnalité et, par conséquent, exigent un contrôle préalable de la situation.

Or, ce contrôle est souvent absent et peut conduire à des procédures de résolution de problème vides de toute signification.

C'est une des fonctions de l'enseignement que de replacer le sens avant les techniques opératoires de résolution. Les élèves doivent apprendre qu'il ne faut pas s'engager tête baissée dans les procédures avant de se demander si elles sont adéquates et à revenir à la réalité si, toutefois, ils avaient oublié le contrôle de la situation.

Le compte rendu qui suit est révélateur de cette nécessité absolue d'une réflexion préalable sur un problème, lors de son appropriation, avant la mise en œuvre de procédures quasi algorithmiques.

2. Le problème

Tailles est un problème de l'édition 2001 de Mathématiques, cinquième année. Il a été proposé, en avril dernier, à une classe de cinquième année disposant encore de l'ancienne édition 1984.

En voici le texte[1]:

1. M. Chastellain, F. Jaquet. *Mathématiques, cinquième année Livre de l'élève*. Corome, 2001. p. 90 (Th. 9 - Applications)

10. TAILLES

La taille d'Ophélie était de 83 cm à 2 ans et de 1,66 m à 16 ans.
Peux-tu dire quelle est la taille d'Ophélie aujourd'hui, alors qu'elle vient d'avoir 32 ans ?
Et quelle était sa taille à 1 an, 4 ans, 8 ans ?

Et voici les commentaires correspondants du livre du maître[2]:

10. *Tailles*

La relation entre l'âge et la taille d'une personne n'est pas linéaire, chacun le sait. Mais l'énoncé, par le choix des données et des questions, peut induire l'élève qui ne soumet pas ses réponses à un examen critique à appliquer mécaniquement les propriétés de linéarité.

Par une réflexion sur le comportement de l'application «croissance d'un individu», on peut donner des estimations, argumentées, aux questions posées . Par exemple :

- Comme on sait que la taille d'une personne de sexe féminin ne varie plus beaucoup dès 15 à 16 ans, on peut en déduire que celle d'Ophélie, à 32 ans, est proche de 1,66 m.
- A un an, Ophélie devait avoir entre 50 cm (taille courante à la naissance) et 83 cm, vraisemblablement entre 70 et 75.
- Pour 4 ans et 8 ans, on ne peut donner que des ordres de grandeur, respectivement de 100 à 110 et de 120 à 130 cm, compte tenu d'une croissance plus forte vers 2 à 3 ans que dans la période de 8 à 16 ans.

L'esquisse d'une courbe de croissance peut être justifiée ici car elle est utile pour tenter de répondre.

Pour information, le tableau suivant donne la taille moyenne des enfants suisses en vigueur ces dernières années en pédiatrie.

tailles, en cm

âge (ans)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
garçons	76	88	98	104	112	118	124	130	134	140	144	150	156	162	169	174	176	176
filles	75	86	96	103	110	116	122	128	133	138	144	150	156	160	163	165	165	165

Et voici encore un extrait de l'«approche méthodologique et didactique» du thème correspondant, toujours dans le livre du maître[3]:

2. M. Chastellain, F. Jaquet. *Mathématiques, cinquième année Méthodologie - Commentaires.* Corome, 2001. pp. 174-175 (Th. 9 - Applications)
3. Ibidem, p. 166.

Les fonctions non linéaires

On n'étudie pas de fonctions non linéaires à l'école primaire, mais, paradoxalement, il faut en présenter de nombreuses à l'élève, afin qu'il puisse différencier une fonction linéaire d'une autre fonction qui ne l'est pas.

Si on ne le fait pas, on crée un obstacle didactique important : celui de construire une représentation des fonctions indissociable de la linéarité et, par conséquent, de mettre en œuvre systématiquement les procédures de «la somme» et du «produit» dans des situations où elles sont inopportunes.

C'est le cas, en particulier dans *Ribambelles*, *Grilles*, *Tailles*, *Abonnements de ski*, *Des escaliers*.

3. Le contexte

C'est une étudiante de l'école normale de Fribourg, Nadia Gumy, qui, lors d'un stage dans une classe de cinquième année, a donné le problème *Tailles* aux élèves. Ce problème s'intégrait dans l'étude du thème 9 «Applications» qu'elle devait assurer pendant la durée de son stage. Elle a choisi de «panacher» l'ancienne édition du livre de l'élève par des versions d'activités prévues pour la nouvelle édition.

Dans l'ancienne édition, le tableau de correspondance et la représentation graphique apparaissent dans la majorité des problèmes et figurent parmi les finalités et objectifs du thème[4].

- observer des situations où interviennent les applications, en extraire les éléments pertinents, les organiser en tableaux et les représenter graphiquement ;
- établir, analyser et interpréter des représentations graphiques ;
- rechercher des liens entre les grandeurs qui varient en fonction l'une de l'autre pour reconnaître les cas de linéarité ;
- compléter un tableau de grandeurs proportionnelles en s'appuyant sur les propriétés de la linéarité, explicites ou non.

Pour satisfaire ces finalités, l'étudiante a proposé aux élèves dans un premier temps les activités *Tuuuuuuuuuuuuut* et *Sur le chemin de l'école*, toutes deux classées sous les «Points de départ» dans la page «Plan du thème». Ensuite, les élèves ont étudié les problèmes 5 (tableau à compléter «temps de travail – somme gagnée», au prix de 12 francs de l'heure) et 6 (tableau à compléter «longueur d'un ruban – prix», au prix de 3,75 francs par mètre) de la

4. M. Chastellain, F. Jaquet, Y. Michlig, *Mathématique, cinquième année Méthodologie – Commentaires*. Corome, 1984. p.157 (Th. 9 - Applications)

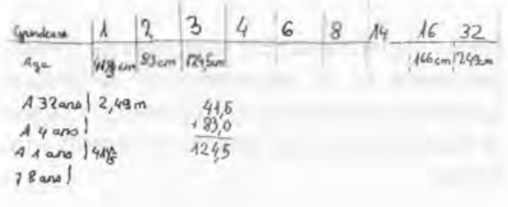
page 111 du livre de l'élève (édition 1984), ce qui leur a permis d'approfondir l'utilisation de l'outil tableau donné dans la consigne de chaque problème. Cet outil de représentation leur est donc devenu familier. Comme pour *Tailles*, ces deux problèmes mettent en relation deux grandeurs (temps et somme d'argent pour l'un, longueur et prix pour l'autre). Devant un problème de fonction non linéaire *Tailles*, les élèves ont rencontré un obstacle essentiel : alors que la forme et la présentation des problèmes sont proches, les procédures utilisées précédemment (somme et produit) ne sont pas opportunes, d'où le désarroi de quelques élèves.

Ce problème a été donné aux élèves sans commentaire, seul le mot «taille» a dû être précisé pour quelques-uns. Ils étaient libres de choisir leur méthode et aucune limite de temps n'était imposée. La calculatrice n'étant pas encore un outil utilisé dans cette classe, ils ne l'avaient pas à disposition.

4. Les résultats

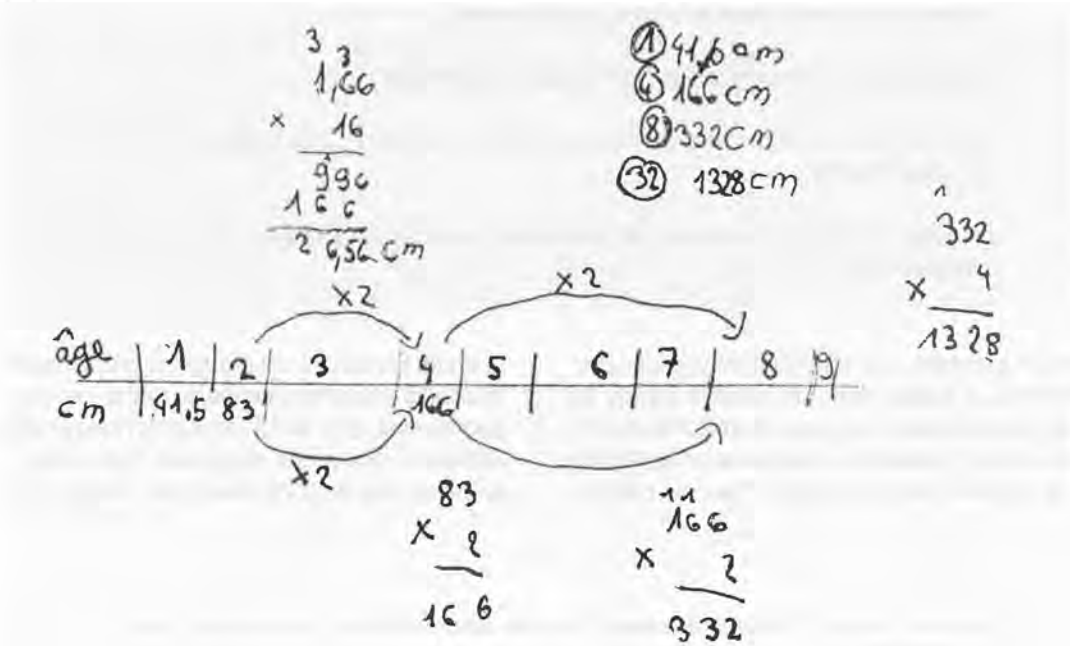
Voici huit réponses obtenues, tout à fait caractéristiques de celles des dix-neuf élèves de cette classe de cinquième année :

Jul



Len

NicO



Mar

ans	1	2	4	8	16	17	32
taille	16,6cm	83cm	166cm	332cm	1,66m	1,67	3,32m

×2 ×2 ×2 ×2

16

Cel

Age	2	16	32	1	4	8
Taille en M et cm	0,83 cm	1,66 m	1,66	41,5 cm	41,5	0,83 m

32ans = 1,66 1an = 41,5cm. 4ans = 41,5 8ans = 0,83
Ce problème est impossible !!!

Pau

a)
1,66
× 200
000
0000
+33200
3,3200

c)
83
× 2
166

b)
83 | 2
-8 | 41,0
02
-2
reste 00

a) Ophélie a 32 ans mesure : 3,32m
b) Ophélie a 1 ans mesurai : 41 cm
c) Ophélie a 4 ans mesurai : 166cm

pas fini

Taille	41 cm	83 cm	166		3,32	...
age d'ophélie	1	2	4	8	32	...

Fab

taille (en cm)	-	83	91	1,00	1,09	1,18	1,27	1,36	1,45	1,54	1,66	
ans	1	26	3.	4	5	6	7	8	9	10	16	32

Cec

×2 :2 ×2 ×2

âge	2	16	32	1	4	8
taille	0,83	1,66	3,32	0,415	01,66	03,32

×2 ×2 :2 ×2

01,66
× 2
03,32

Et à 8 ans sa grandeur était de 03,66 m.

Le tableau suivant regroupe les résultats des 19 élèves. Les explications des contenus de ses différentes colonnes suivent:

nom	tabl.	1 an	2 ans	4 ans	8 ans	16 ans	32 ans	autres	prod.	som.
Mar	a-t	166 ans	83 cm	166 cm	332cm	1,66	3,32 m	17 ->1,67	x2 fl.	
Pau	t-a	41 cm	83 cm	166	–	–	3.32	–	x2 et :2	
Dav	t-a	73,74	83	–	–	166		pairs -		
Ang	a-(m)	0,41	0,83	1,64	–	1,66	3,72	3 ->1,16 de 5 à 13 -> –		?
Marg	t-a	41,5	83	166	232	1,66	2,49		?	
Ant	–	41,5cm 0,415m		166cm 0,166m	332cm 0,332m	–	–	–	?	
Cél	a-t	41,5	0,83cm	41,5	0,83m	1,66	1,66	–		
Jul	t-a	41 $1\frac{2}{3}$	83	–	–	166	249	3 -> 124,5 de 6 à 14 -> –		+ 41,5
Cla	a-t(m)	0,41 ou 0,42 m	0,83 m	1,28 m	1,34 m	1,66 m	1,86 m	3, 5, 6 -> –	x2	– 0,83
Len	a-t	41,5	83	166	232	–	2203,5	de 1 à 13 3 -> 124,5...		+ 41,5
Hél	a-t(cm)	41, ?	83	illisible	–	166	–	de 1 à 13 3 -> 126,5	x2 :2 fl.	+ 41,5
Mag	a-t	41,5 cm	83 cm	79 cm	1,58	1,66	2,32	–	x2 ?	
NicO	a-(cm)	41,5	83	166	332		1328	5, 6, 7 -> –	x2 fl.	
NicR	a-t	0,41m		0,166m	0,322m	1,66	4,15m	de 1 à 16 -> –		
Cec	a-t	0,415	0,83	01,66	3,32	1,66	3,32	–	x2 :2 fl.	
Abd	(ans)-(cm)	–	83	–	–	1,66	–	de 1 à 16 -> –		
Fab	t(cm) - (ans)	–	83	1,00	1,36	1,66	–	de 1 à 16 3 -> 91, 5 -> 1,09, ...		+ 0,09
Vic	t-a	41,1cm	83 cm	83 cm	1,66	1,66 m	3,32	–	x2 :2 ?	
Elé	a–t	41,5 cm	83	–	83	1,66	3,32 m	18		

nom Les premières lettres du prénom de l'élève figurent ici.

tabl. Dans 18 cas sur 19, les élèves ont organisé leurs données par un tableau horizontal, dans 6 cas (notés t – a), la taille est dans la ligne supérieure et l'âge est dans la ligne inférieure, dans les 12 autres cas (notés a – t), c'est l'âge qui figure dans la première ligne. Parfois, des indications d'unités sont indiquées et complètent ou remplacent l'âge ou la taille.

A ce propos, il paraît assez normal que les âges soient notés le plus souvent dans la ligne supérieure du tableau car les questions sont posées dans le sens «âge –> recherche de la taille». (*... quelle est la taille d'Ophélie à 32 ans ... à 1, 4, 8 ans ?*).

1 an La taille à un an.
16 des 17 élèves qui ont calculé la taille à un an, l'on fait en divisant par 2 la taille à deux ans.
Il y a quelques erreurs dans la recherche de la moitié de 83, qui attestent des obstacles que rencontre l'élève de cinquième, l'année où il aborde les nombres décimaux dans son programme scolaire :
41,5 ou 0,415 (7 élèves) quotient exact
41 ou 0,41 (4 élèves), division non terminée ou avec reste implicite
41,1 ; 41, ? ; 41 $1\frac{x}{5}$; 0,41 ou 0,42 (4 élèves), tentatives de recherche d'un quotient
73,78 (1 élève),
non réponse (2 élèves).
(C'est ainsi qu'il faudrait répondre à ce problème, mais on peut douter que les élèves qui n'ont pas répondu aient été conscients que les réponses n'étaient pas calculables. La seule réponse qui précise que le problème est *impossible* donne tout de même la taille à 1 an. Voir Cel).

2 ans La taille à 2 ans (83 cm) était donnée par l'énoncé. Elle a été reportée correctement par tous les élèves dans le tableau, avec parfois une transformation en mètres.

4 ans La taille à 4 ans pouvait être de 166 cm ou de 41,5 cm, selon les procédures de proportionnalité : de 166 cm en partant de celle à 2 ans (voir Mar), de 41,5 en partant de celle à 16 ans (v. Cel). C'est le premier volet de l'alternative qui l'emporte.

8 ans Comme précédemment, les deux possibilités 332 cm et 83 cm sont attendues, selon que l'on part de la taille à 2 ans ou à 16 ans, auxquelles s'ajoutent celles qui proviennent d'autres réponses antérieures, comme 1,66 en tant que double de 83 (voir Vic) ou 1,58 comme double de 79 (voir Mag).

16 ans La taille à 16 ans était donnée par l'énoncé. Elle a été reportée correctement par tous les élèves dans le tableau, avec quelques transformations – correctes – en cm.

32 ans La taille d'Ophélie à 32 ans est la première question de l'énoncé. Les procédures de proportionnalité (multiplication par 2) devaient conduire à 3,32 m, mais seules cinq réponses correspondent à cette attente. On relève des difficultés de calcul, dues peut-être à la présence de nombres décimaux et à la grandeur de ces nombres.

autres De nombreux élèves ont rempli d'autres cases de leur tableau que celles correspondant aux données et demandes de l'énoncé: (âges de 1, 2, 4, 8, 16 et 32). C'est la taille à 3 ans qui est la plus fréquemment calculée et qui devrait être, dans le modèle proportionnel, la moyenne entre 166 et 83, c'est-à-dire 124,5.

prod. Comme la grande majorité des élèves sont partis du principe que la taille est une fonction linéaire de l'âge, ils ont donc tous utilisé l'une ou l'autre des propriétés de la proportionnalité pour effectuer leur calcul : les règles du «produit» ou de la «somme». Selon ces procédures, désignées aussi par «isomorphisme de mesure», l'élève reproduit, dans une ligne de son tableau, les transformations découvertes dans l'autre (fl. marque la présence de flèches entre les valeurs du tableau, voir Mar, Cec, NicO). Ici, les données permettaient facilement d'opérer par des multiplications par 2 ou des divisions par 2.

som. A partir de la taille à 1 an, obtenue par une division par 2 de celle à 2 ans, les élèves pouvaient aussi travailler par additions répétées de 41,5 cm (en mettant en œuvre la règle de la «somme»).

4. Mise en commun

Lors de la mise en commun du problème, une réflexion collective a permis de comparer les procédures utilisées et les différentes solutions proposées. L'une d'elles (3,32 m.) a fait réagir les élèves et a donné lieu à discussion. Sur proposition de l'enseignante, les élèves ont recherché la taille d'un basketteur connu et ont consulté un livre de records, permettant ainsi de mettre en évidence l'inadéquation de certaines solutions, mettant en cause les procédures de proportionnalité utilisées. C'est là que réside l'intérêt de ce problème : au cas où les élèves se sont lancés dans des procédures de calcul où il n'y a plus de place pour la réflexion sur le sens à attribuer aux résultats obtenus, c'est à la mise en commun de les faire revenir à la réalité et de montrer l'importance d'un contrôle permanent de la signification des opérations.

5. Commentaires

Les résultats précédents montrent que les algorithmes de calcul écrit de ces élèves et les moyens de traitement des données sont relativement efficaces, quoique très complexes par rapport au degré de difficulté des opérations effectuées. Mais c'est au profit de procédures totalement inadéquates pour cette situation que ces mécanismes sont mis en œuvre.

D'une part, on peut se réjouir du fait que tous les élèves aient bien mis en évidence les deux grandeurs en jeu dans cette situation et aient élaboré un tableau.

D'autre part, on ne peut qu'être consterné de voir qu'ils ont tous adopté le modèle de la proportionnalité, inadapté à cette situation.

Il y a plusieurs explications, selon nous, à ce qu'il faut bien appeler un «échec», même si les solutions proposées nous donnent de riches informations sur le niveau des élèves et leurs procédures de résolution.

Une première explication réside, évidemment, dans l'énoncé même du problème, qui induit l'appel à la proportionnalité. On peut le considérer comme un piège, certes, mais il serait toutefois souhaitable que les élèves ne s'y laissent pas prendre. Sous l'effet du «contrat didactique» traditionnel, ils pensent que chaque problème doit avoir une réponse et une seule, qu'il faut utiliser toutes les données fournies, que celles-ci ne peuvent être remises en cause.

Mais l'objectif de ce problème est précisément de présenter une fonction non linéaire, selon les commentaires du livre du maître cités précédemment (voir point 2).

A ce propos, le problème *Tailles* figurait aussi dans l'édition 1984 du *Livre de l'élève*, sous une forme réduite[5], mais avec un appel encore plus pressant à utiliser la linéarité, par la présence du tableau :

5. M. Chastellain, F. Jaquet. *Mathématiques, cinquième année Livre de l'élève.* Corome, 2001. p. 112 (Th. 9 - Applications)

10. Recopie ce tableau et essaie de le compléter.

Age d'Ophélie (en années)	3	6	12	
Taille d'Ophélie (en mètres)	0,90			

et avec, comme commentaires correspondants du livre du maître[6]: «Situation typique de non linéarité qui conduit l'élève à soumettre des résultats à un examen critique et à un contrôle.»

Une deuxième explication est à chercher dans les programmes et les moyens d'enseignement eux-mêmes Nous rappelons que les résultats présentés dans cet article sont ceux d'élèves de cinquième ayant utilisé régulièrement l'édition 1984 de «Mathématiques 5P», qui venaient d'utiliser des tableaux de correspondance (voir le contexte décrit au point 3) et qui les avaient déjà rencontrés en quatrième année et au début de la cinquième, dans d'autres thèmes.

Le livre ou le fichier de l'élève ne sont pas seuls en cause dans cette version précédente des moyens d'enseignement, le livre du maître se référait aussi aux tableaux considérés comme un objectif (voir point 3) et utilisés couramment dans les commentaires méthodologiques et didactiques, comme sur l'exemple précis des tailles[7]:

...

2) Examen des données relevées.

La variation d'une grandeur en en fonction d'une autre est-elle «régulière», prévisible, assimilable à une opération connue ?

Bien souvent les apparences ou les préjugés sont trompeurs. Dans le cas de l'âge de deux personnes, par exemple :

Age de Lucien	8	16	20	
Age de Camille	5	?		

Une première tentation est de remplacer le ? par 10, par automatisation répétitive de situations précédentes. L'élève doit donc émettre des hypothèses, puis soumettre ses résultats à un examen critique et à un contrôle.

Il est indispensable que, dans cette phase de construction, on alterne les problèmes linéaires avec d'autres non linéaires pour justifier l'utilité d'une confrontation des prévisions premières à la réalité.

6. M. Chastellain, F. Jaquet, Y. Michlig, *Mathématique, cinquième année Méthodologie – Commentaires.* Corome, 1984. p.165 (Th. 9 - Applications)
7. Ibidem, p. 159

Une troisième explication est à chercher dans le rôle que les adultes – maîtres, rédacteurs de plans d'études, auteurs de manuels – attribuent aux tableaux et aux propriétés de linéarité. On peut en faire des objets d'études ou on peut les considérer comme de simples outils.

Dans le premier cas, on les verra figurer dans les objectifs, voire les finalités, de l'enseignement. C'est un peu ce qui s'est passé lors de la réforme des «maths modernes» où l'on a assisté à des glissements significatifs allant jusqu'à la présence de questions d'examens sur la «propriété de la somme» ou à la création d'exercices de constructions de tableaux de correspondance.

Dans le second cas, on ne les utilisera que lorsqu'ils se révèlent utiles ou nécessaires, sans les faire précéder d'activités d'introduction. Mais là aussi les dérives sont possibles : on peut s'interdire de valoriser ces outils lorsqu'ils apparaissent par peur de les institutionnaliser, on peut croire en leur génération spontanée chez tous les élèves, on peut encore ne pas en profiter pour leur contribution au développement du concept de fonction.

Une introduction prématurée de ces outils comporte le risque d'occulter le sens de l'activité mathématique, ce que laissent à penser les résultats précédents. Leur ignorance priverait l'élève d'instruments fort efficaces pour le calcul et pour la conceptualisation des fonctions.

Les nouveaux moyens romands d'enseignement des mathématiques ont renoncé à présenter des «tableaux à compléter» dans les manuels et les fiches, jusqu'en sixième année. Leur élaboration est entièrement dévolue à l'élève, qui doit décider de leur opportunité. Il en va de même pour les propriétés des opérations : celles-ci sont mises en œuvre de manière différenciée par les élèves et l'un des buts des mises en commun est de les comparer, de les expliciter, de juger de leur efficacité et, surtout, de leur adaptation à la situation.

Il ne reste plus qu'à voir si les élèves de cinquième qui, dès cet automne, seront confrontés au problème *Tailles*, feront preuve d'un sens critique plus aiguisé face aux tentations de la proportionnalité. Ce sera l'occasion d'évaluer les effets de quatre à cinq ans de pratiques d'activités plus ouvertes en mathématiques, d'interactions et de mises en commun.

Courrier des lecteurs

De Monsieur Gilbert Walusinski
Saint Cloud (France)

A Monsieur François Jaquet
Rédacteur de Math-Ecole

Cher Collègue,
D'abord bravo! Vous annoncez, avec ce numéro 196 de Math-Ecole, *l'entrée dans la 40ème année de votre revue, je désire avec vous me réjouir du succès de votre entreprise dont j'apprécie et ses réalisations et l'esprit dans lequel elles sont menées à bien.*

Vous voulez bien, depuis des années, m'assurer le service de votre revue, je vous en remercie et je peux vous assurer que je vous lis régulièrement avec un intérêt qui ne diminue pas, même si l'âge (j'ai dépassé 86 ans) m'empêche toute activité enseignante.

Au contraire, les loisirs de la retraite m'amènent à réfléchir, mieux que je n'avais pu le faire antérieurement, à la valeur et à la portée des recherches pédagogiques.

J'ai souvenir du témoignage d'un collèguze plus ancien que moi qui m'exprimait le bonheur quil avait ressenti à enseigner, dans une classes de Sixième (début du collège[1]), les nouveaux programmes qui venaient d'être proposés dans les années 60. Ce pédagogue expérimenté reconnaissait qu'avec la meilleure bonne volonté, l'application des anciens programmes donnaient à ses classes un climat de ronronnement et même d'ennui qui ne pouvait susciter l'enthousiasme chez les élèves. La nécessité de penser à neuf un nouvel enseignement procurait énergie et jubilation aussi bien au professeur qu'aux élèves.

La lecture de Math-Ecole *doit avoir le même effet sur les enseignants qui vous suivent et qui collaborent aux efforts de votre équipe. Conclusion évidente, après le numéro 200, il y aura les 201, 202... vers le 500 ou le 1000 avec les jeunes collègues qui prendront le relais. Je leur souhaite bon courage et lucidité.*

En vous renouvelant, cher François Jaquet, mes sincères félicitations, je vous assure de ma cordiale estime. Salut et fraternité.

[ndlr] Un grand merci à Monsieur Gilbert Walusinski, pour ses aimables propos et ses encouragements. Fidèle lecteur de *Math-Ecole*, comme il le dit lui-même, il nous a fait l'honneur de rédiger un article pour notre numéro 100-102, intitulé *Apprendre des mathématiques pour s'en servir.* Cette préoccupation a toujours été présente chez lui, puisqu'il a mis ses grandes connaissances et expériences de mathématicien dès sa retraite et durant une vingtaine d'années, au service de l'excellente revue *Les Cahiers Clairaut* (bulletin du comité de liaison enseignants et astronomes) que *Math-Ecole* a présenté à plusieurs reprises dans ses colonnes.

De Monsieur Jean-Claude Chassot
Instituteur, Noréaz FR

Monsieur Jaquet,

J'ai lu avec grand intérêt votre éditorial dans le numéro 197 de Math-Ecole. *Vous précisez qu'il faudra bien choisir entre l'entraînement intensif des algorithmes qui exige un temps trop important et l'apport de la calculatrice au profit de la construction des connaissances mathématiques. Bien évidemment, j'abonde dans votre sens.*

1. degré 6 en Suisse romande (11-12 ans)

Je pense notamment au temps perdu en 5P pour l'algorithme de la division écrite avec deux chiffres au diviseur qu'il est obligatoire de revoir périodiquement afin que les élèves le maîtrisent... tant bien que mal! Dans ce cas, la calculatrice procurerait un temps appréciable pour des activités de recherche bien plus motivantes. Ceci n'empêche pas que l'algorithme de la division soit maintenu dans les limites du raisonnable (par exemple, un chiffre au diviseur).

Vous précisez, dans ce même article, que «la nouvelle édition de Math 5 *a diminué la part de l'entraînement des algorithmes de calcul en raison de l'utilisation généralisée de la calculatrice et au profit du calcul réfléchi». J'aimerais tellement que vous ayez raison! Toutefois, lors de nos deux réunions cantonales, il nous a été confirmé que l'introduction généralisée de la calculatrice n'était pas à l'ordre du jour... J'ai bondi, mais en vain...*

Qu'en est-il? Existe-t-il des directives qui ont été prises sur le plan romand au sujet de l'introduction de la calculatrice en 5P-6P? Au moment de gérer les moyens 5P-6P remis à jour, je pense qu'il serait urgent de prendre les bonnes décisions car nous ne pouvons pas être au four et au moulin. Il nous est demandé d'augmenter les ateliers mathématiques et les activités de recherche. J'en suis le premier convaincu mais qu'on nous donne le temps nécessaire en laissant à la calculatrice certaines opérations qui exigent trop de temps. Ceci nous permettrait également d'intensifier **les estimations** *qui sont le complément indispensable à la calculatrice.*

Ne serait-il pas souhaitable de préciser, par des exemples, à partir de quel moment la calculatrice pourrait être utilisée: multiplication avec deux chiffres au multiplicateur, division avec deux chiffres au diviseur, etc. Comme le nouveau plan romand «précise» seulement qu'il faut effectuer les calculs à l'aide d'outils appropriés (en 5P et 6 P, dans ***R***...*), il serait judicieux de préciser de quels outils il s'agit. Il semble que les personnes responsables n'osent pas prendre de décisions et qu'un certain flou s'installe. En l'absence de directives claires à ce sujet, chacun campe sur ses positions alors que nous devrions profiter de l'introduction de ces nouvelles méthodes pour nous souvenir qu'il existe des machines peu onéreuses et très fiables qui fonctionnent même à l'énergie solaire!*

J'approche de la retraite. J'adore les mathématiques. Chaque année, je regrette le temps perdu pour assurer provisoirement des opérations que l'élève ne fera plus jamais dans sa vie, à part avec sa calculatrice! L'exemple de la racine carrée au CO est édifiant, ce qui ne m'a pas empêché d'apprécier l'article d'Antoine Gaggero, me permettant de me remémorer cet algorithme qui s'était évaporé de mon esprit depuis belle lurette!

Les rallyes mathématiques pourraient enfin avoir droit de cité dans nos classes!

Merci de vos nouvelles rassurantes à ce sujet. Meilleures salutations.

[ndlr] La lettre de Monsieur Chassot vient en écho à l'article de notre collègue Yvo Dallagana: *Devons nous encore enseigner les quatre opérations écrites* (pages 20-30). Il convient en effet de relever le flou et les ambiguïtés qui existent actuellement à propos de l'usage de la calculatrice. Le plan d'études romand ne prend pas de risques en inscrivant dans ses compétences «utiliser des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace», les moyens d'enseignement ne franchissent pas le cap non plus et il n'y a donc aucun texte officiel qui puisse empêcher de glisser une peau de banane du genre «effectue la division 8570 par 87, sans calculatrice» dans une épreuve d'orientation cantonale ou locale et de contraindre ainsi les maîtres à consacrer le temps nécessaire pour entraîner l'algorithme correspondant. Le débat reste ouvert et devient urgent car, dans moins de deux ans, le problème de savoir si la calculatrice sera admise aux examens d'entrée au cycle d'orientation se posera dans la plupart de nos cantons.

Rallye mathématique sur Internet

L.-O. Pochon, IRDP

Dans le compte rendu de l'exposition «Rivages mathématiques» présentée lors du Festival Sciences et Cité (voir *Math-Ecole 197*), il a été fait mention d'un complément informatisé. Ce complément a été développé dans le cadre du projet Ermitage dont voici une brève présentation.

Contexte du projet

Ce projet sert de base à diverses études concernant l'usage de l'Internet à fins éducatives et formatives. Il est principalement soutenu par l'IRDP, le Rallye mathématique transalpin (RMT) et l'Association ABORD. Son but est de fournir des outils permettant de mettre en scène des contenus didactiques et de constituer un complément flexible aux produits multimédia du commerce. Il contient actuellement quelques centaines de fiches allant de problèmes du RMT à des «ateliers» et exercices destinés aux premiers degrés post-obligatoires.

Un projet pédagogique

Trois aspects qui relèvent de principes pédagogiques généraux sont particulièrement étudiés dans le cadre de ce projet:

- L'interactivité: il n'est en effet pas toujours évident d'utiliser au mieux les potentialités interactives de l'ordinateur tout en laissant à l'utilisateur un «espace» de réflexion.
- Le principe d'immersion: il s'agit également de trouver un juste milieu entre les chemins trop fortement balisés et la perte dans le «cyberespace».
- Le développement participatif. il s'agit aussi de faire collaborer les trois acteurs en présence: élève, enseignant et «designer». L'outil n'étant pas neutre, il est important que chacun puisse se l'approprier et qu'aucun ne soit un «jouet» du système (et des autres partenaires).

Le complément à l'exposition «Rivages mathématiques»

Dans le cadre de l'exposition «Rivages mathématiques», 6 questions ont été préparées et ceci pour 4 niveaux différents (béotien, débutant, avancé, expert). Ces questions étaient liées aux thèmes développés par l'exposition: repérage de symétries de figures, utilisation des théorèmes de Thalès et de Pythagore, dénombrements divers, carrés magiques, etc. Deux ordinateurs étaient à la disposition des visiteurs et leur permettaient de répondre aux questions.

La figure 1 donne un exemple d'une question du niveau avancé. Elle reprend un problème présenté par ailleurs sur une fiche (voir *Math-Ecole 197*). Toutefois, certains aménagements ont été apportés à la situation «papier-crayon» pour l'adapter au contexte d'une exposition et de sa présentation sur ordinateur.

Les utilisateurs

Après avoir donné 6 réponses exactes, l'utilisateur pouvait laisser ses coordonnées afin de recevoir un prix récompensant son effort. Environ 130 utilisateurs sont parvenus à ce stade, et plusieurs d'entre eux ont effectué

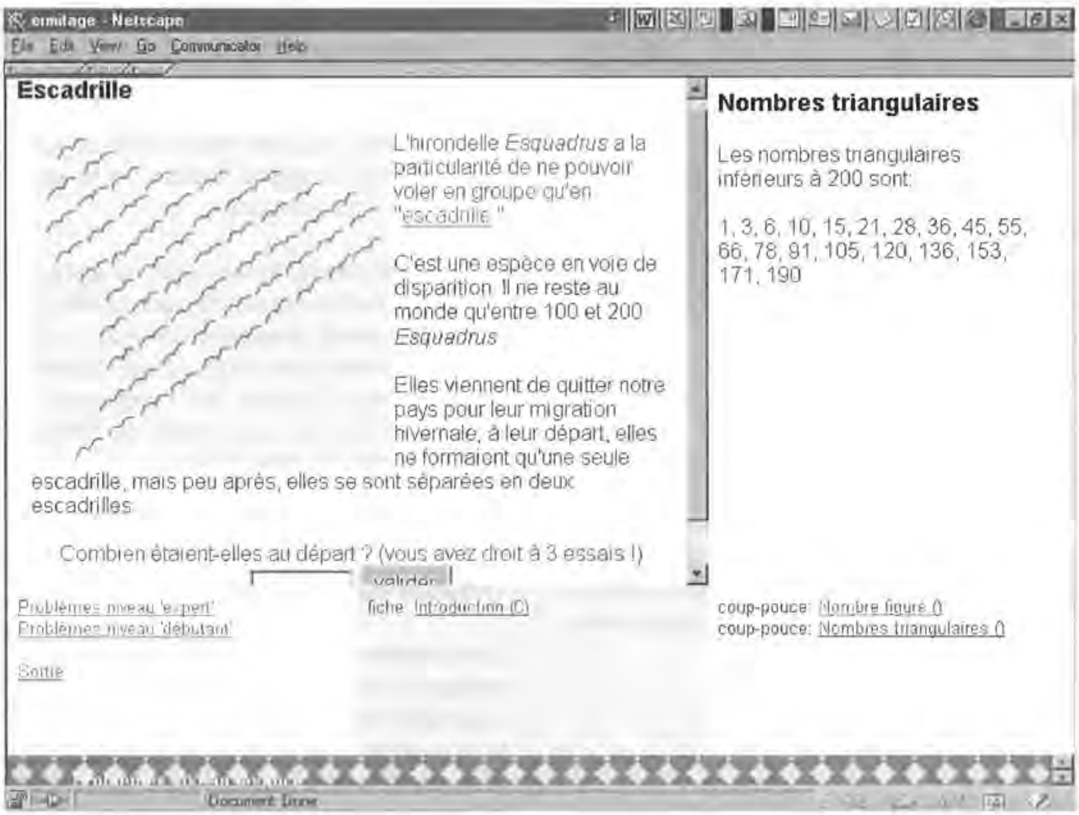


Figure 1

Cette question est reprise du rallye mathématique. La situation originale a été adaptée au contexte de son utilisation sur ordinateur dans le cadre d'une exposition (la situation originale se trouve dans Math-Ecole 197). En particulier on a précisé l'intervalle dans lequel se trouvait la solution ceci pour faciliter la validation de la réponse par l'ordinateur. Par ailleurs, deux fiches d'aide sont à la disposition du visiteur. La première suggère l'utilisation des « nombres figurés » et la deuxième donne une liste des nombres triangulaires. Après avoir validé sa réponse, l'utilisateur reçoit une quittance pouvant introduire quelques explications complémentaires. En l'occurence, le système donnait la liste des réponses possibles: 120 = 105 + 15; 136 = 91 + 45; 171 = 105 + 66

plusieurs parcours. Les 2 ordinateurs mis à disposition durant les 5 jours de l'exposition ont donc été utilisés presque sans discontinuer.

Un usage intéressant

Les deux ordinateurs étant côte à côte, les visiteurs (notamment les plus jeunes d'entre eux) ont souvent travaillé de concert. Une particularité du système a transformé cette situation de collaboration en une situation plus intéressante que la simple recopie. En effet, les données numériques de la plupart des problèmes proposés étaient tirées « au hasard ». Ainsi les compères travaillant en commun ne pouvaient pas simplement se communiquer les bons résultats, mais devaient plutôt se mettre d'accord sur la bonne méthode de calcul à utiliser.

Cette démarche impromptue mériterait d'être systématisée lors de l'usage de dispositifs d'enseignement basés sur des moyens d'enseignement informatisés (ou non informatisés, mais il semble plus difficile de gérer plusieurs versions d'un même problème avec des supports classiques).

Poursuite de l'expérience

Le «succès» rencontré par ce volet informatisé nous a incité à prolonger l'expérience. Un concours à donc été organisé avec le même système. Deux parcours sont à disposition: un est de niveau élémentaire qui reprend des situations de «Rivages mathématiques» et l'autre est d'un niveau plus avancé et consacré à des propriétés sur les nombres. Ce nouveau rallye sur Internet sera ouvert tout l'été. Il est également doté de prix.

Concours-rallye de l'été

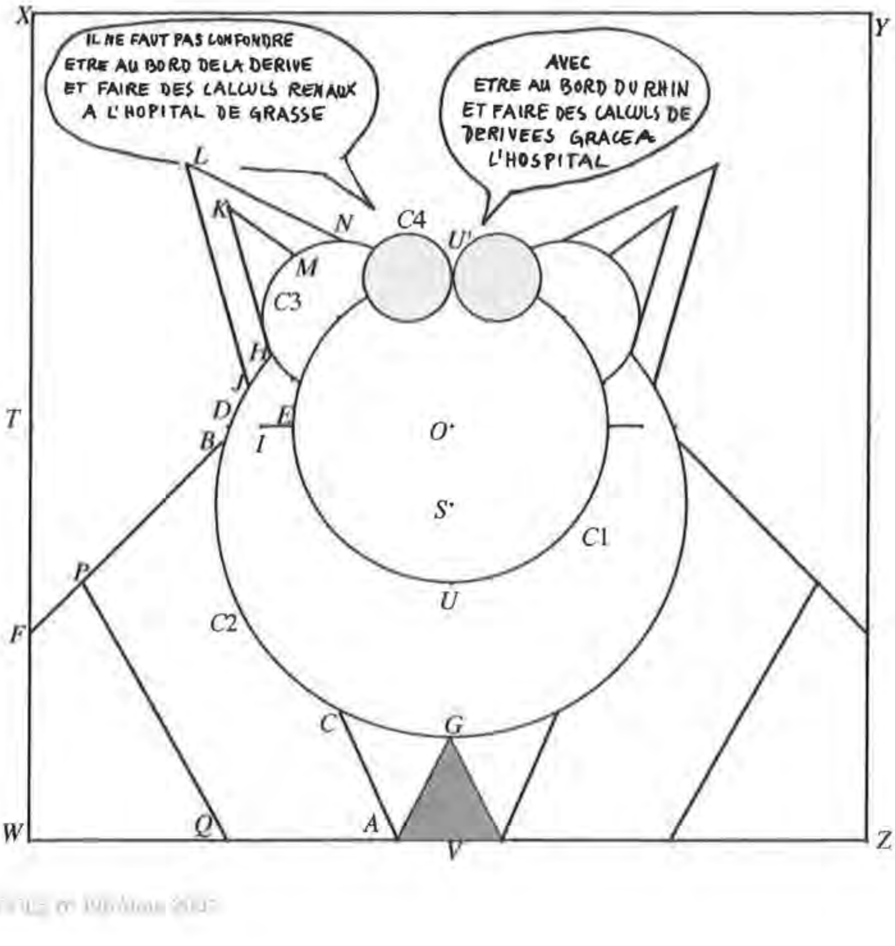
Marche à suivre pour vous rendre au début du parcours:

1) vous rendre à l'adresse Internet: www.irdp.ch/rmt/webexp

2) «cliquer» sur «Entrée». Dès ce moment vous vous trouverez dans le «hall» de l'exposition

3) «cliquer» sur «Jeux et concours» puis sur le niveau de votre choix.

L'utilisation du navigateur Netscape version 4.x est conseillée.



Fête de *Math-Ecole*
Samedi 1 décembre 2001, Neuchâtel.

Bulletin de pré-inscription

Participation

journée entière (de 9h30 à 16h45) ☐
repas (12h30 à 14h30) ☐
ateliers et exposés du matin (9h30 à 12h15) ☐
conférence et partie officielle (14h45 à 16h45) ☐
nombre de personnes ...

Animations

propose une activité pour le matin (durée 1h15)
atelier (suivi d'échanges) ☐
présentation de matériel ☐
présentation orale (suivie d'échanges) ☐
autre: ________________ ☐

sur le thème de:
l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande ☐

l'enseignement de la géométrie (trois expositions sont déjà annoncées) ☐

autre: ________________ ☐

Autres propositions: ________________

____

Nom, prénom: ________________

Adresse; ________________

Tél, ou e-mail: ________________

Une participation financière légère sera demandée pour couvrir les frais de la journée (de 10 à 20 Fr), elle n'est pas encore déterminée car elle dépend de la générosité des sponsors. Le prix du repas ne dépassera pas 40 Fr.
Le programme précis et les informations sur les lieux de la rencontre seront publiés dans le numéro 199 d'octobre et envoyées aux personnes déjà inscrites.

Bulletin à faire parvenir à *Math-Ecole*, IRDP, Case postale 54, 2007 Neuchâtel 7
ou par internet: http/www.irdp.ch/math-eco

Abonnements et commandes

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir :

Encyclopédie kangourou, ACL	...	(ex. à Fr. 28.–)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex. à Fr. 28.–)
Exos-malices, ACL	...	(ex. à Fr. 29.–)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Faites vos jeux!	...	(ex. à Fr. 18.–)
La magie du calcul, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Les maths & la plume, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Jeux mathématiques pour tous, ACL	...	(ex. à Fr. 19.–)
Pliages mathématiques, ACL	...	(ex. à Fr. 17.–)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex. à Fr. 25.–)
100 Jeux mathématiques du «Monde», POLE	...	(ex. à Fr. 27.–)
10 expériences mathématiques (HyperCube 32/33)	...	(ex. à Fr. 20.–)
Jeux mathématiques du «Scientific American», ADCS	...	(ex. à Fr. 38.–)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, N. Rouche, CREM	...	(ex. à Fr. 26.–)
Mille ans d'histoire des mathématiques (Tangente HS 10)	...	(ex. à Fr. 20.–)

PROBLÈMES DE RALLYES ET CONCOURS :

Actes des rencontres internationales de Brigue sur le RMT	...	(ex. à Fr. 18.–)
Fichier Evariste I APMEP (degrés 5-9...)	...	(ex. à Fr. 25.–)
Fichier Evariste II APMEP (degrés 5-9...)	...	(ex. à Fr. 25.–)
Fichier Evariste I + II APMEP	...	(ens. à Fr. 40.–)
Panoramath 96, APMEP (degrés 4-12...)	...	(ex. à Fr. 12.–)
Panoramath 2, CIJM, APMEP, ACL (degrés 4-12...)	...	(ex. à Fr. 18.–)
Panoramath 96, Panoramath 2	...	(ens. à Fr. 25.–)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4-5...)	...	(ex. à Fr. 14.–)
50 Enigmes mathématiques faciles (degrés 6-7...)	...	(ex. à Fr. 16.–)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles, POLE (degrés 6-7...)	...	(ex. à Fr. 16.–)
50 Enigmes mathématiques pour tous (degrés 8-9...)	...	(ex. à Fr. 16.–)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous, POLE (degrés 8-9...)	...	(ex. à Fr. 16.–)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex. à Fr. 16.–)
Anciens numéros de Math-Ecole	....	(ex. à Fr. 4.–)

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro): ....

Localité (avec code postal): ....

Date: .... Signature: ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués.

Bulletin à retourner (photocopié) à: ***Math-Ecole, CP 54, 2007 Neuchâtel 7***

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables
à retourner à
Math-Ecole, CP 54
2007 Neuchâtel 7

sommaire