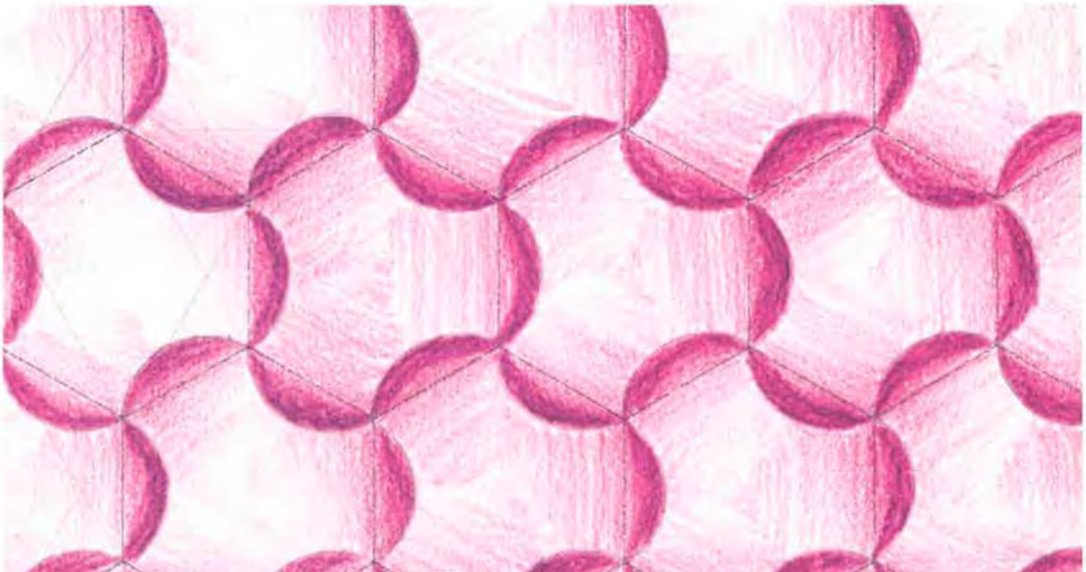
MATH-ÉCOLE 207

Juin 2003

La Grande Arche de la Défense

À propos de la résolution de problèmes par équation(s)

À propos de la droite numérique (2)



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 8.50
Anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Amélie, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

42e année, quatre numéros par an

207

Juin 2003

ÉDITORIAL

REVUES POUR LES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES, LA CRISE ?

François Jaquet

rédacteur responsable de *Math-Ecole*

Nos derniers éditoriaux ont souvent fait appel aux lecteurs pour qu'ils s'engagent, qu'ils écrivent des articles, qu'ils réagissent, qu'ils s'abonnent personnellement, qu'ils fassent connaître *Math-Ecole*. Durant de longues années, aussi, notre deuxième page de couverture nous présentait comme une « revue pour des professionnels de l'enseignement » et disait, entre autres : « Un ingénieur consulte les revues techniques de sa branche, un médecin ne saurait se maintenir au courant sans ses revues médicales, un passionné de sport lit la rubrique sportive de son journal. Pourquoi en irait-il autrement d'un enseignant ? » Élémentaire, mon cher Watson !

Et pourtant, les appels ne semblent pas entendus, les beaux slogans n'ont pas d'effets sensibles.

Vivrait-on une période de crise pour les revues consacrées à l'enseignement des mathématiques ? Il semble que oui. En Suisse romande, nous restons les seuls depuis bientôt dix ans. Nos confrères francophones en France et en Belgique connaissent aussi des difficultés et ne survivent souvent que grâce à des aides institutionnelles. Dans d'autres pays, comme pour d'autres disciplines, la situation n'est pas meilleure.

Cette crise est-elle due aux réseaux d'information et de communication ? Il est en effet facile d'aller consulter un site sur la « toile », mais nous doutons fort que cette pratique constitue une concurrence réelle pour notre revue, qui cherche avant tout à alimenter la réflexion dans le domaine de la pratique de l'enseignement des mathématiques.

Les gens n'ont-ils plus le temps de lire ou de réfléchir, devant la pression de la société de consommation scolaire ? Le rythme des réformes est-il trop élevé pour qu'on puisse se les approprier ? Les nouveaux moyens d'enseignement sont-ils si complets qu'il n'est plus nécessaire de présenter des expériences originales, de proposer de nouvelles activités, de chercher à analyser les difficultés des élèves (car celles-ci existent toujours, si l'on en croît les épreuves cantonales ou locales, les confrontations sur la résolution de problèmes, les études internationales).

La liste des raisons à évoquer pourrait s'allonger encore : prix trop élevé, lecture trop exigeante, articles inappropriés, conceptions didactiques dérangeantes pour certains lecteurs... Toutes doivent contenir une part d'explication, mais aucune n'émerge clairement, ce qui empêche les rédactions de faire face efficacement.

Lorsque la question de l'avenir de *Math-Ecole* est discutée au sein de son comité, la réponse est unanime : il faut continuer. Les témoignages des lecteurs, ceux qui s'expriment, vont dans le même sens. De très nombreux formateurs nous incitent aussi à aller de l'avant. Les volontés de poursuivre existent donc et, au-delà, les articles ne manquent pas, ni la matière !

Nous allons évidemment rechercher des soutiens institutionnels et privés, mais l'essentiel est entre les mains des lecteurs et abonnés sans lesquels la publication n'a pas de sens ni n'a les moyens d'assurer son existence matérielle. Comme la démocratie ne peut s'accommoder de l'abstentionnisme, une revue ne peut vivre sans la participation de ceux qui la lisent.

Alors, qu'on se le dise. Un lecteur engagé réagit, s'abonne et fait connaître sa revue autour de lui. C'est ainsi que tous ceux qui enseignent les mathématiques pourront continuer à disposer d'une source de réflexion, d'échanges et de renouvellement.

LA GRANDE ARCHE DE LA DÉFENSE

Denis Odiet

D. Odiet, septembre 2002

QUELQUES REFLETS D'UNE ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE PROPOSÉE À DES ÉLÈVES DE 14-15 ANS [1]

1. Le problème

Voici son énoncé tel qu'il a été proposé aux élèves :

L'Arche de la Défense à Paris est construite dans un cube de 110 m d'arête.

Les deux solides supérieur et inférieur sont isométriques et possèdent une «épaisseur» de 8 m.
Les deux solides latéraux sont également isométriques et ont une «épaisseur» de 18 m.

Imaginons le segment s reliant le milieu de la face supérieure du cube au milieu de la face inférieure de celui-ci. Son milieu est C, qui est également le centre du cube.

Si l'on prolonge les 4 arêtes obliques partant des 4 sommets supérieurs de l'Arche, alors celles-ci se coupent en un point A, situé sur s.

Il en va bien sûr de même pour les 4 arêtes obliques issues des 4 sommets inférieurs, se coupant en A', symétrique de A par rapport à C.

Calculer le volume propre de la Grande Arche
Construire une maquette de la Grande Arche

1. une classe du canton du Jura composée de 18 élèves de 9e année, d'option 2, et très majoritairement de niveau A, c'est-à-dire des élèves qui se situeraient dans le premier tiers des élèves de cet âge, si on les classait selon les bonnes dispositions qu'ils manifestent en mathématiques.

Tous les lecteurs qui sont arrivés à un volume de 476'704 m^3 peuvent aller plus loin dans la lecture de cet article.

2. L'organisation du travail

- Travail par groupes de 4 élèves, chaque élève rend une production et chaque groupe une maquette ;
- Temps à disposition : 3 x 2 leçons consécutives de 45 minutes en classe, possibilité de consacrer du temps à domicile ;
- Remise des travaux trois semaines après la distribution des énoncés.

3. L'évaluation

Les critères retenus ci-dessous ont été clairement exposés, commentés et détaillés au début du travail.

Volume (réponse exacte) :	6 pts
Calculs effectués, clarté de la démarche :	6 pts
Qualité, clarté, diversité des schémas et des croquis :	6 pts
Maquette :	6 pts
Appréciation personnelle du maître :	6 pts

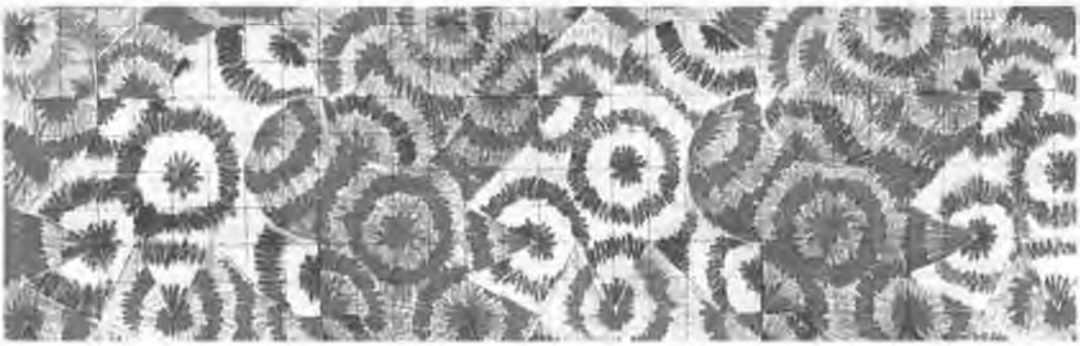
4. Le domaine de connaissances mis en jeu

Le moins que l'on puisse dire est que la palette des compétences mises en jeu pour la résolution de ce problème est très large.

En voici une liste non exhaustive :

- déduire la forme exacte d'un solide à partir d'une photographie et d'informations verbales ;
- représenter un solide en perspective, par des projections, par un développement ;
- utiliser la relation de Pythagore, le théorème de Thalès et les propriétés de la similitude ;
- résoudre des équations du premier degré ;
- calculer le volume de plusieurs solides : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide, tronc de pyramide, « obélisque » (par une décomposition en solides élémentaires).

Il est nécessaire de préciser que toutes ces notions avaient été abordées préalablement, mis à part le calcul du volume d'un « obélisque », nom inconnu des élèves qu'ils ont quelquefois remplacé avantageusement par le terme « toit de chaumière » ou « toit à quatre pans ».



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Pauline, 14 ans.

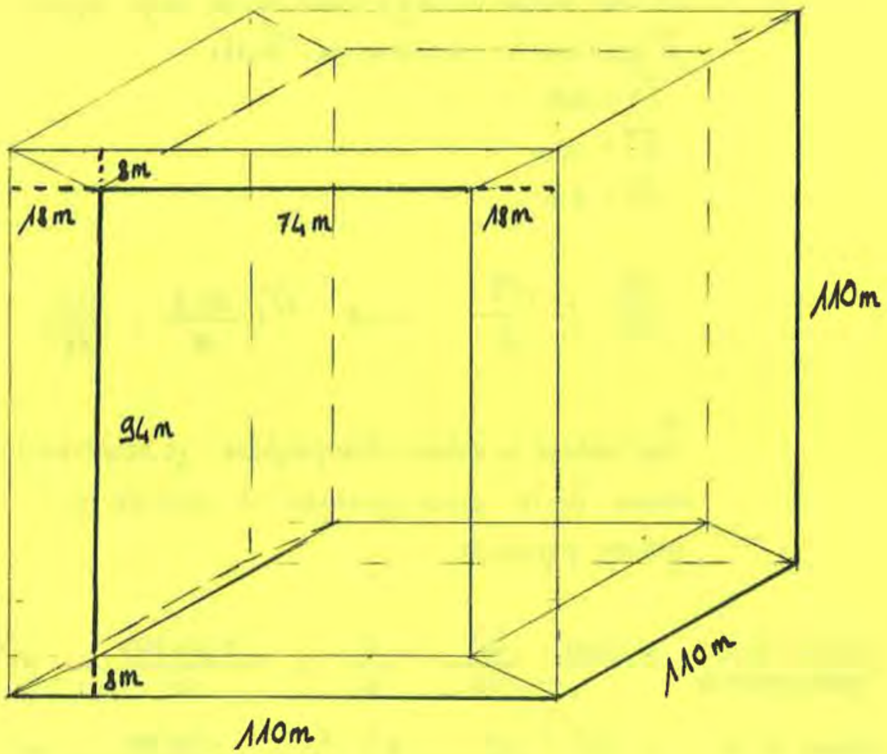
5. Quelques procédures de résolution

5.1 Calcul du volume du tronc de pyramide inférieur (ou supérieur) par soustraction des volumes de deux pyramides.

Etape I : Après avoir lu l'énoncé, je dessine un croquis du monument.

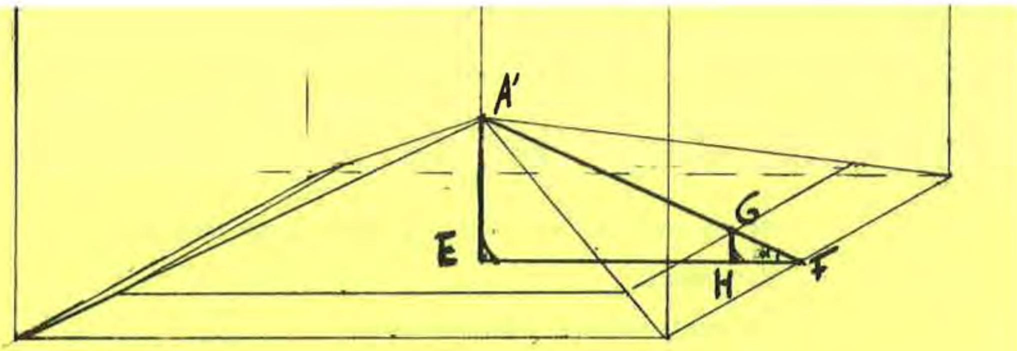
Je peux déduire deux mesures :

- 74 est obtenu en soustrayant 2·18 à 110
- 94 est obtenu en soustrayant 2·8 à 110



Etape II : Je cherche à calculer le volume des polyèdres supérieur et inférieur.

Je dessine un croquis correspondant à la situation énoncée :



Le triangle A'EF et le triangle GHF sont semblables
ils ont chacun un angle droit et un angle alpha.
J'applique le théorème de Thalès.

$\overline{EF} = 55m$

$\overline{HF} = 18m$

$\overline{GH} = 8m$

$$\frac{55}{18} = \frac{A'E}{8} \longrightarrow A'E = \frac{55 \cdot 8}{18} = \frac{440}{18}$$

Pour obtenir le volume d'un polyèdre, je soustrais le volume de la "petite pyramide" à celui de la "grande pyramide".

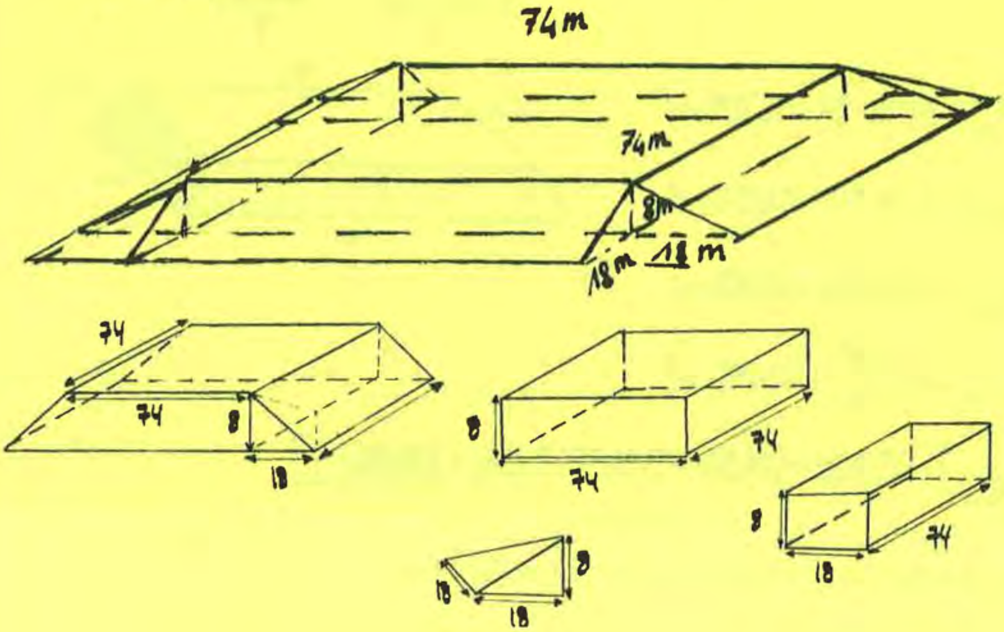
volume de la "grande pyramide" $= 110^2 \cdot \frac{440}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5'324'000}{54} \text{ m}^3$

volume de la "petite pyramide" $= 74^2 \left(\frac{440}{18} - 8 \right) \frac{1}{3} = \frac{1'620'896}{54} \text{ m}^3$

volume d'un polyèdre $= \frac{5'324'000 - 1'620'896}{54} = \frac{3'703'104}{54} = 68'576 \text{ m}^3$

volume des polyèdres supérieur et inférieur $= 2 \cdot 68'576 = \underline{\underline{137'152 \text{ m}^3}}$

J'effectue une autre démarche afin de vérifier le volume obtenu des polyèdres supérieur et inférieur.
Je découpe un polyèdre par des plans verticaux, de manière à obtenir des solides connus : 1 parallélipipède rectangle, 4 prismes à base triangulaire et 4 pyramides.

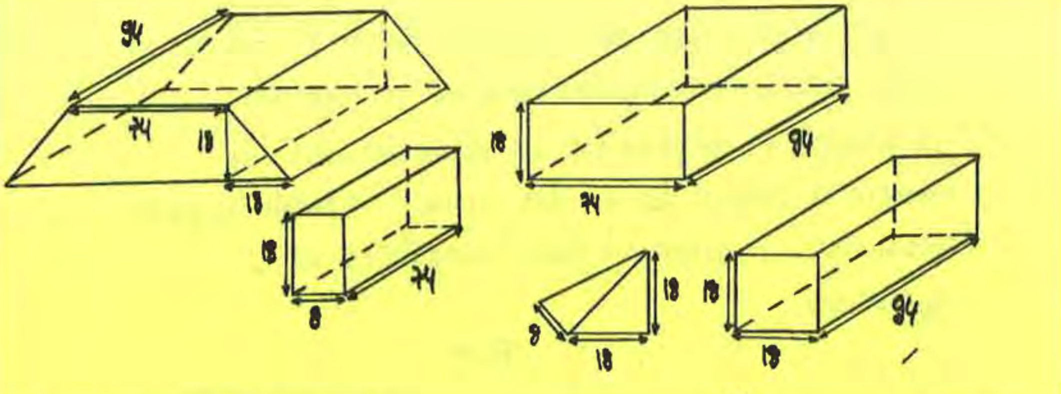


$$\text{volume du parallélipipède} = 74^2 \cdot 8 = 43'808 \text{ m}^3$$

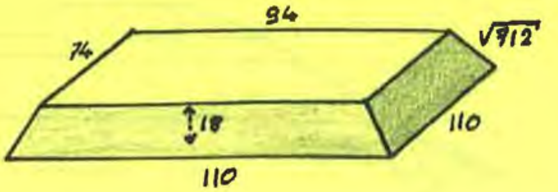
$$\text{volume des prismes à base triangulaire} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 18 \cdot 8 \cdot 74}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 21'312 \text{ m}^3$$

$$\text{volume des pyramides} = \frac{4 \cdot 18^2 \cdot 8}{3} = 3456 \text{ m}^3$$

5.3 Calcul du volume du solide latéral par découpage en solides élémentaires



$$V = 74 \cdot 18 \cdot 94 = 125208 \text{ m}^3$$



$$V = 8 \cdot 18 \cdot 74 = 10656 \text{ m}^3$$

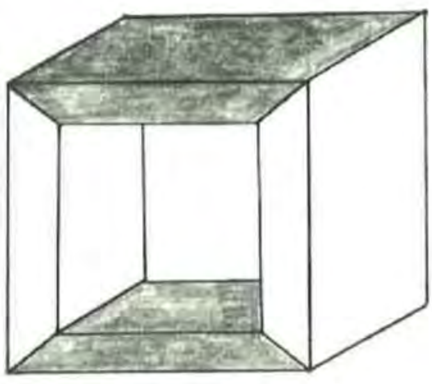
$$V = 18 \cdot 18 \cdot 94 = 30456 \text{ m}^3$$

$$2V = 4\,\frac{8 \cdot 18^2}{3} = 3456 \text{ m}^3$$

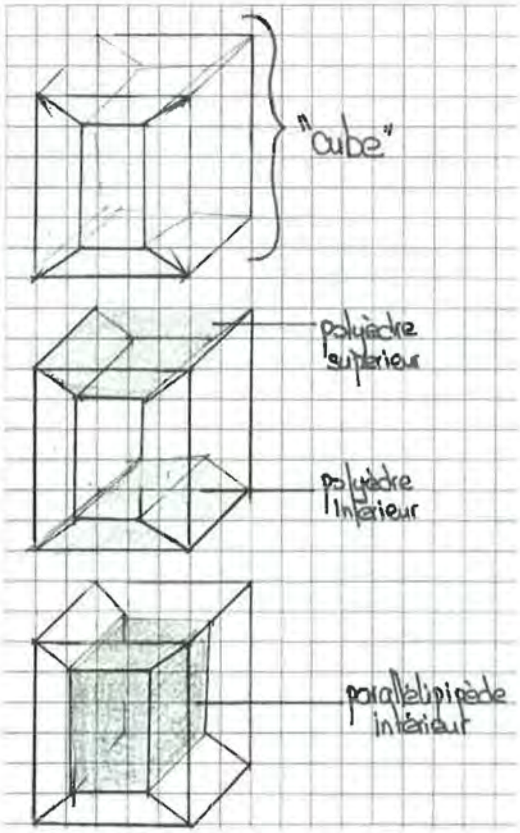
$$V_{tot} = 2(125208 + 10656 + 30456 + 3456) = \underline{339552 \text{ m}^3}$$

Le volume total de la Grande Arche vaut donc 476'704 m³.

5.4 Une autre manière de calculer le volume des solides latéraux



Dans la représentation ci-contre, on peut mettre en évidence un cube, 1 « parallélépipède rectangle intérieur », 2 troncs de pyramide (grisés) et 4 « obélisques » (les solides latéraux).



$$V_{\substack{\text{polyèdres}\\ \text{latéraux}}} = \frac{\left(V_{\text{cube}} - V_{\text{poly. inf. et sup.}} - V_{\text{paral. intérieur}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\left(110^3 - 137'152 - 74^2 \cdot 94\right)}{2}$$

$$= \frac{679'104}{2} = 339'552 \text{ m}^3$$

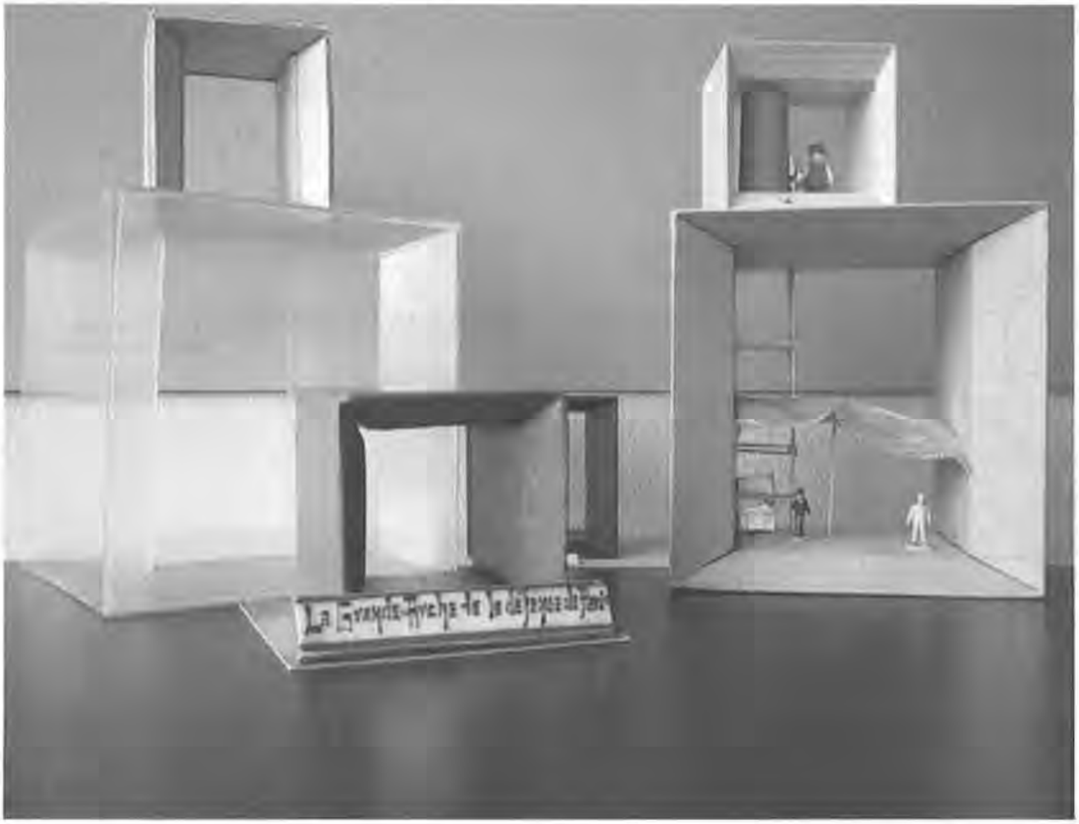
$$V_1 = 137'152 + 339'552 = 476'704 \text{ m}^3$$

6. La maquette

6.1 Le choix d'une échelle et les calculs qui en découlent :

mesures de la maquette (en cm)	mesures de la réalité (en cm)	mesures de la réalité (en m)	
1 :	250		
44	11'000	110	
37,6	9'400	94	
29,6	7'400	74	
7,2	1'800	18	
3,2	800	8	
~ 7,9	$\sqrt{388} \cdot 100$	$\sqrt{388}$	Mesures des hauteurs des faces rentrantes inférieures et latérales
~ 10,2	$\sqrt{648} \cdot 100$	$\sqrt{648}$	

6.2 Les constructions



En bois, en fer, en plexiglas, en carton et même en chocolat…

7. Brève analyse a posteriori

La tâche demandée aux élèves, même s'ils ont la possibilité de travailler par groupes, est considérable. N'oublions pas que la rédaction d'un compte rendu prend du temps et que la construction de la pyramide, au-delà du choix du matériau, demande précision et minutie. Le temps imparti me semble donc adéquat.

Les élèves ont rencontré deux difficultés majeures.

La plus grande réside essentiellement dans la représentation du solide décrit par l'énoncé par un dessin géométrique correct. Cela ne va pas de soi, loin s'en faut. Beaucoup de temps s'écoule jusqu'à ce que les deux solides clés du problème, c'est-à-dire le tronc de pyramide et l'« obélisque », ne soient mis en évidence.

La représentation d'un objet de l'espace à trois dimensions par une figure du plan de la feuille est, en soi, un thème d'étude complet : celui de la perspective qui a occupé peintres et mathématiciens durant de nombreux siècles. La photo elle-même, qui est aussi une figure du plan, obéit à d'autres règles de perspective que celles que l'élève peut construire spontanément. Celui-ci doit d'abord « décoder » la photo pour s'imaginer le solide, à l'aide des informations du texte, puis revenir à un dessin plus dépouillé dans le plan de sa feuille.

La deuxième a trait au calcul même du volume de ce solide peu ordinaire, voire surprenant. Les élèves sont généralement habitués et confrontés à des solides plus traditionnels : parallélépipèdes rectangles, pyramide, tronc de pyramide, (demi-) sphère... Or, si les deux solides inférieur et supérieur de l'arche peuvent être reconnus comme des troncs de pyramides – eux-mêmes conçus comme des solides déterminés par deux pyramides – il n'en va pas de même pour les deux solides latéraux. Ceux-ci doivent être « construits » réellement ou par dessin pour en percevoir les caractéristiques : deux « bases » situées dans des plans parallèles, l'une carrée et l'autre rectangulaire (!), quatre faces de forme trapézoïdale qui, si on les prolongeait jusqu'à l'axe de la Grande Arche, donneraient deux triangles et deux trapèzes. Un découpage de l'« obélisque » en solides élémentaires exige donc de bonnes facultés de représentation spatiale !

Les travaux présentés et les commentaires précédents montrent la richesse des savoirs mobilisés lors de la résolution de ce problème.

Pour ce qui concerne l'organisation du travail, il convient de préciser que j'ai la chance de pouvoir travailler avec ce groupe d'élèves durant 7 périodes par semaine, en cours de mathématiques (5) et en cours de mathématiques appliquées (2). Les élèves sont donc au courant de mes attentes, réciproquement ils savent ce qu'ils peuvent attendre du maître lors de la résolution d'un problème.

Pour celui de la Grande Arche, le contrat a été clairement défini : une fois le problème distribué, mis à part les encouragements du maître, l'entière résolution leur était dévolue, sans aide de ma part, si ce n'est pour des questions liées au matériel.

L'analyse a priori du problème m'a convaincu qu'ils possédaient tous les outils nécessaires pour résoudre le problème, encore fallait-il les mobiliser à bon escient. Evidemment, il y a eu énormément d'interactions dans et entre les groupes qui ont favorisé l'émergence et la validation du calcul du volume.

Si les élèves ont fait preuve d'autonomie dans leur travail, celle-ci peut aussi être considérée comme le fruit du travail effectué en cours de mathématique et du type d'enseignement pratiqué dans lequel mises en commun, relances individuelles ou par groupes, contrôles intermédiaires, aides à la validation et appuis ponctuels sont courants.

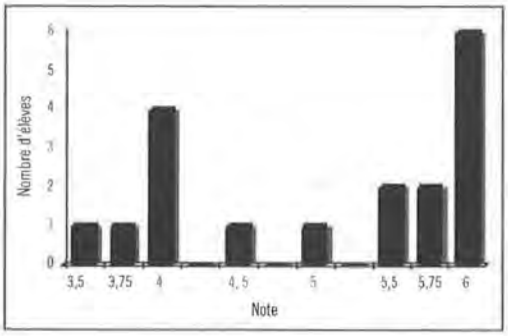
La classe a pris par moments des allures de véritable laboratoire, les élèves faisant réellement des mathématiques.

Nous vivons à l'époque à laquelle les mots mathématiques, enseignement et problèmes sont difficilement dissociables : « Faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes » peut-on lire sur la première page du plan d'études romand 1-6.

« I do believe that problems are the heart of mathematics » [2] s'exclame Paul R. Halmos. Nul doute que « La Grande Arche de la Défense » s'inscrit totalement dans cette philosophie de l'enseignement des mathématiques.

2. *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Mathematical Association of America, 1993

Voici les résultats obtenus par les élèves :



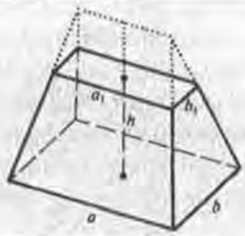
A noter que des élèves travaillant dans le même groupe n'obtiennent pas forcément le même résultat, leurs productions – la maquette mise à part – n'étant pas forcément identiques

8. Pour aller plus loin...

Trouvé dans un ancien formulaire de mathématiques et cité par un moyen d'enseignement en vigueur en Suisse romande [3] :

Tas de sable ou obélisque

$$V = \frac{h}{6}\,[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1]$$



Il me semble judicieux de montrer que cette formule correspond bien aux calculs liés à un découpage de l'« obélisque » en 9 solides élémentaires : 1 parallélépipède rectangle, 4 pyramides, 4 prismes droits à base triangulaire isométriques deux à deux.

$$V = V_{parall.\ rect.} + 4V_{pyramide} + 2V_{prisme\ droit} + 2V_{prisme\ droit}$$

$$V = a_1 b_1 h + 4\frac{a - a_1}{2}\cdot\frac{b - b_1}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{3} + 2\frac{b - b_1}{2}\cdot h\cdot a_1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{a - a_1}{2}\cdot h\cdot b_1\cdot\frac{1}{2}$$

$$= a_1 b_1 h + \frac{(a - a_1)(b - b_1)h}{3} + \frac{(b - b_1)a_1 h}{2} + \frac{(a - a_1)b_1 h}{2}$$

$$= a_1 b_1 h + \frac{abh}{3} - \frac{ab_1 h}{3} - \frac{a_1 bh}{3} + \frac{a_1 b_1 h}{3} + \frac{a_1 bh}{2} - \frac{a_1 b_1 h}{2} + \frac{ab_1 h}{2} - \frac{a_1 b_1 h}{2}$$

$$= \frac{a_1 b_1 h}{3} + \frac{abh}{3} + \frac{ab_1 h}{6} + \frac{a_1 bh}{6} \quad = \frac{h}{6}(2a_1 b_1 + 2ab + ab_1 + a_1 b)$$

$$\boxed{= \frac{h}{6}\left[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1\right]}$$

3. *Math 9 NE*, Jaquet et Calame

DES PROJETS POUR APPRENDRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE MATERNELLE : *LES HABITS DE CARNAVAL* [1]

Alain Pierrrard
Inspecteur pédagogique
Grenoble

FAIRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE MATERNELLE

S'il n'est pas envisageable de programmer un apprentissage formel des mathématiques à l'école maternelle, il est cependant indispensable de proposer des activités à dominantes mathématiques aux jeunes enfants. Elles participent au développement intellectuel de chaque élève, lui permettent de symboliser son action, d'organiser le monde qui l'entoure. Le langage y joue un rôle central. Outil de communication et de coopération dans le groupe social, il favorise en effet la mise à distance de l'action nécessaire à l'élaboration des connaissances mathématiques.

Certaines connaissances et compétences mathématiques s'acquièrent par imprégnation et répétition : c'est en les rencontrant, en les mobilisant de nombreuses fois dans des situations fonctionnelles ou des situations d'apprentissage que les enfants les intègrent. Mais, si cette fréquentation régulière permet l'incorporation de certains savoirs et savoir-faire, elle n'est pas suffisante. Il en est de même des activités de remplissage quotidien, sous la direction du maître, de fiches présentant des exercices, le plus souvent formels, sans enjeux extérieurs à leur réalisation. Des temps structurés de construction de compétences mathématiques sont ainsi indispensables. En effet, les enfants de l'école maternelle, comme les autres élèves, apprennent en résolvant des problèmes. Il s'agit donc pour le maître de mettre en place les conditions pédagogiques et didactiques adaptées à l'âge de ses jeunes élèves pour que ceux-ci « fassent » des mathématiques.

Les activités mathématiques mises en place en classe comprennent donc des situations de vie de classe où les mathématiques sont des outils, des situations ritualisées qui transposent des pratiques culturelles au milieu scolaire, des situations de jeux qui favorisent l'automatisation de procédures dans un cadre social, des « projets pour apprendre ».

Ce sont ces derniers que nous présenterons plus longuement dans cet article en en illustrant la méthodologie par la présentation d'une activité particulière d'enseignement/apprentissage.

Pour mettre en place « un projet pour apprendre », l'enseignant choisit en fonction d'objectifs d'apprentissage précis (une compétence, un public, un moment de l'année) une situation dont il analyse *a priori* les caractéristiques. C'est la détermination des variables didactiques de la situation qui va lui permettre de faire évoluer la situation initiale proposée aux élèves et de différencier ses approches de telle façon que chaque élève soit en position réelle d'apprenant. Il « habille » la situation d'apprentissage afin qu'elle trouve des échos dans les représentations enfantines et qu'éventuellement elle s'intègre à un projet plus large. Il détermine

1. L'activité « Les habits de carnaval » est tirée d'un ouvrage présenté dans les notes de lecture de ce numéro (pp. 63-64) : PIERRARD Alain, *Faire des mathématiques à l'école maternelle*, CRDP de l'Académie de Grenoble, Collection *Des projets pour l'école*, 2002

une suite de problèmes emboîtés qui permettent aux élèves de progresser après une phase initiale d'appropriation de la situation. Il articule les temps de recherche et les temps de mutualisation et de verbalisation des procédures de résolution mises en place et favorise de véritables interactions entre les élèves. Il propose ultérieurement d'autres situations permettant de réinvestir les compétences construites afin d'aider les élèves à élaborer des classes de problèmes.

UN PROJET POUR APPRENDRE : *LES HABITS DE CARNAVAL* (Grande section[2])

Présentation générale

La situation du bonhomme carnaval conduit les élèves à manipuler de très grandes collections d'objets (de l'ordre de deux cents objets) et à les répartir en trois parts égales. Les élèves ne pouvant mettre en œuvre aucune procédure numérique directe – à la fois parce qu'ils ne peuvent dénombrer des collections aussi grandes et parce qu'ils ne disposent pas de procédures leur permettant de rechercher le tiers d'un nombre –, ils doivent créer des procédures de distribution plus rapides que celle qui consiste à répartir tous les objets un par un.

Une autre difficulté provient de l'existence possible d'un reste (il suffit pour que le reste ne soit pas nul que le nombre d'objets ne soit pas un multiple de trois), ce qui justifie la mise en place de procédures de validation des parts constituées.

Cette situation est proposée au deuxième semestre de l'année à des élèves ayant déjà été confrontés à plusieurs situations de comparaison.

Compétences visées

- Constituer des parts égales.
- Distribuer ou répartir de manière équitable des objets.
- Utiliser des groupements d'objets (« paquets »).
- Comparer des collections d'objets déplaçables.

Variables de la situation

- Le nombre d'objets à répartir.
- Le nombre de parts.
- La présence d'un reste.
- Les supports utilisés pour regrouper les parts.
- La possibilité de déplacer ou non les objets des parts constituées.

Déroulement

Appropriation de la situation par les élèves

Pour décorer un bonhomme carnaval, chaque groupe de trois élèves dispose de multiples « boutons » de couleurs et de formes différentes qui doivent être collés sur son habit.

L'activité mathématique s'intègre dans un projet plus large de fête de l'école. Le bonhomme (silhouette) sera effectivement construit, habillé, décoré et promené dans les rues du quartier. Pour que tous les bonshommes soient identiques, il s'agit, pour les élèves, de répartir en trois parts égales le très grand nombre de boutons dont ils disposent collectivement.

Pour permettre aux élèves de bien comprendre la situation, l'enseignant leur propose, avant d'envisager le partage des boutons de se répartir 15 gommettes pour décorer les sacs des bonshommes.

2. La Grande section de l'école maternelle, en France, accueille les élèves de 5 à 6 ans.

Très vite, chaque élève en prend quelques-unes. Le constat de l'inégalité des parts leur permet d'obtenir, par réajustements, trois parts de cinq gommettes. Il n'y a pas de véritable procédure collective mise en place.

Problème 1 : Peut-on toujours faire un partage en parts égales ?

L'enseignant propose au groupe-classe 26 gommettes complémentaires et intervient pour qu'une méthode moins aléatoire soit trouvée. Plusieurs procédures apparaissent alors.

- Une procédure d'estimation globale ne différant guère dans le principe de la précédente mais coordonnée dans sa réalisation : chaque élève prend le même nombre d'objets (par exemple 5) et les objets restants sont répartis. Cette procédure montre vite ses limites puisque l'estimation faite est parfois excessive (tous les enfants ne peuvent pas prendre le nombre prévu de gommettes) et surtout que la répartition des gommettes restantes se fait dans les mêmes conditions que précédemment.

- Une procédure de distribution qui conduit un enfant à donner successivement une gommette à chaque élève jusqu'à épuisement du stock. Une variante de ce dispositif consiste à ce que chaque élève prenne à son tour un objet. Quand les tours sont respectés, cette procédure est bonne mais elle conduit à une distribution totale, donc parfois inégalitaire, de tous les objets.

- Une procédure de répartition qui consiste à ce que les trois élèves prennent simultanément un objet jusqu'à ce que tous ne puissent plus en prendre un. Bien appliquée la procédure est pertinente mais elle suppose une coordination parfaite des individus. Or on constate que souvent cette procédure conduit à des prises d'objets non simultanées et donc à la création de parts non égales.

- Une procédure numérique qui fonctionne pour des nombres connus des enfants. Avec 26 gommettes, quelques enfants procèdent à des estimations numériques suivies de régulations : si on en prend chacun 5, on aura distribué 5-10-15, si on en prend 6, on aura 6-12-18...

Quelle que soit la procédure mise en place, et après rectification éventuelle, les élèves constatent que deux parts sont constituées de 9 gommettes, une part de 8 gommettes. Après discussion, les élèves réalisent qu'il est impossible de tout distribuer si l'on veut obtenir des parts égales.

Problème 2 : Comment répartir une grande quantité d'objets ?

Il s'agit maintenant de se partager les boutons qui vont décorer les habits. Après une phase d'émerveillement devant le stock de 178 « boutons », les élèves se trouvent confrontés au problème de leur répartition. Il s'agit de réaliser un partage en parts égales avec reste minimum et la procédure experte de division euclidienne ne sera pas disponible avant le cycle 3.

Ils essaient tout d'abord de répéter la procédure de distribution (chaque enfant prend à son tour un objet) précédemment mise en œuvre. Il s'avère que, malgré la persévérance de certains, la distribution est trop longue : la méthode est inefficace. Certains élèves renouent alors avec les premières procédures : chacun prend un tas de boutons et la validation de l'égalité des parts se fait de manière perceptive.

Un nouveau problème se pose alors.

Problème 3 : Comment comparer des grandes collections que l'on ne peut pas dénombrer ?

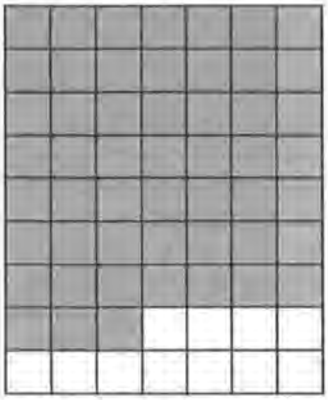
Pour vérifier l'égalité des parts :

- certains tentent de les dénombrer mais leur répertoire numérique s'avère insuffisant ;
- certains essaient de réaliser des correspondances terme à terme un/un mais le nombre de boutons et la présence de trois parts découragent cette initiative ;
- certains proposent des regroupements spatiaux : le matériel ne favorisant pas la mise en place de piles (les boutons ne peuvent se superposer),
- certains constituent des files. Cette procédure pose cependant deux problèmes : les boutons ne sont pas tous identiques et n'occupent pas tous spatialement le même espace, ce qui induit une confusion entre le nombre d'objets et la longueur de la file. Peu d'élèves comprennent la nécessité de faire des files comportant un nombre régulier de boutons afin de ramener le problème à une comparaison du nombre de files et non du nombre de boutons.

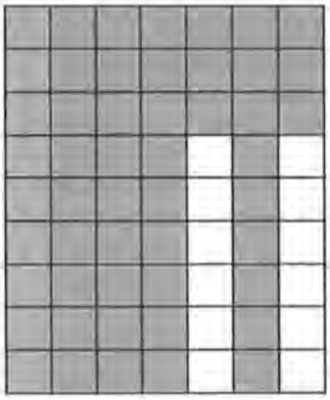
En collectif, après un constat d'échec, l'enseignante rappelle le but de l'activité : il s'agit de remplir l'habit des bonshommes carnaval de manière régulière en collant un même nombre de boutons sur chaque bonhomme. Elle montre que conformément au projet de construction précédemment élaboré, les boutons de différentes formes et de différentes couleurs doivent se répartir sur un quadrillage.

Lors de la phase suivante d'ateliers, les enfants disposent d'une grille rectangulaire 7x9 représentant le plastron. Ils doivent de nouveau comparer de grandes collections. Les élèves répartissent immédiatement les boutons sur le quadrillage. Celui-ci comportant plus de cases que de boutons, toutes les cases ne sont pas remplies et certains répartissent leurs boutons sur toutes les cases : l'élève A a rempli les cases régulièrement (elles sont grisées), l'élève B a d'abord rempli sa grille par ligne puis par colonne.

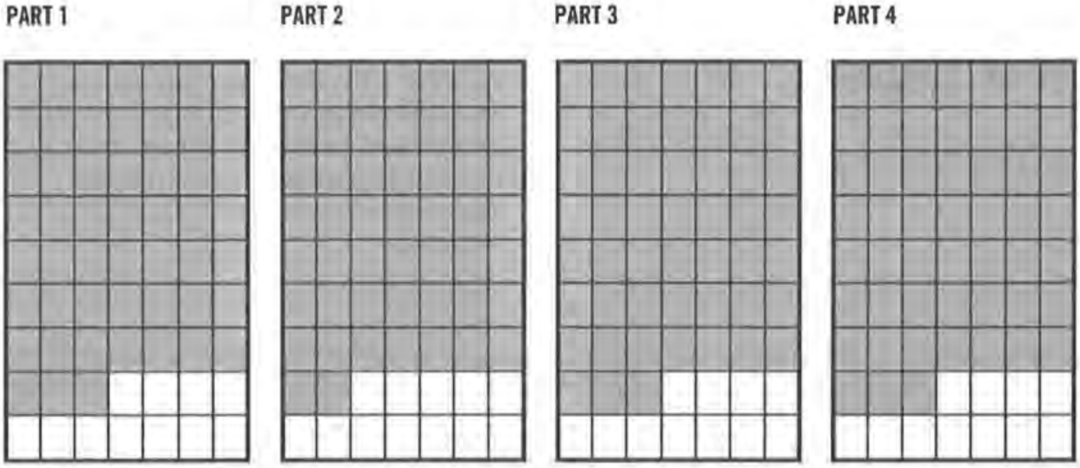
ÉLÈVE A



ÉLÈVE B



Pour comparer les collections, il est donc nécessaire de remplir les grilles supports de manière régulière. Ce travail étant fait, les élèves constatent que les grilles ne sont pas remplies de manière identique et comparent précisément les résultats obtenus. Ils mettent en évidence l'égalité des nombres de lignes remplies et constatent que les écarts sur la dernière ligne renvoient à l'impossibilité de répartir équitablement tous les boutons.



Problème 4 : Comment faire pour distribuer rapidement de manière équitable une grande collection ?

Après une présentation collective des résultats obtenus, le problème initial est repris en grand groupe : la classe dispose d'une procédure de comparaison de grandes collections et donc de validation des parts, comment faire pour obtenir une distribution rapide équitable ?

Immédiatement, des élèves proposent de remplir les grilles utilisées précédemment. L'enseignante demande à trois enfants de réaliser ce qu'ils suggèrent devant les autres, à partir d'une grande collection (167 boutons). Ils prennent les boutons et remplissent leur grille sans tenir compte les uns des autres malgré les protestations de certains spectateurs. Une comparaison des résultats obtenus montre que les parts (51-56-60) ne sont pas égales. Un des enfants est accusé d'avoir voulu prendre tous les boutons en remplissant sa grille trop vite ! Rapidement un consensus s'établit : il faut prendre chacun en même temps 7 boutons (une ligne) et répéter cette action aussi souvent que possible ; à la fin, il suffit de se répartir le petit nombre de boutons restants. Tous les élèves sont alors conduits à effectuer ce travail à leur table par groupes de trois et ne rencontrent pas de difficulté.

Lors d'un nouveau regroupement, l'enseignante pose le problème de la procédure à suivre en l'absence de grille. Les élèves indiquent immédiatement qu'il suffit de faire des tas de sept objets pour résoudre le problème et sur incitation de la maîtresse comprennent que le nombre « sept » peut être remplacé par n'importe quel autre nombre.

PROBLÈMES D'OR ET DE SIÈGES

Augustin Genoud, Savièse

Voici deux problèmes d'apparence semblable.

En réalité, celui des sièges, bien connu des politiciens, est plus complexe et pourrait certainement créer quelques bonnes discussions dans les classes. Les lois donnent les règles permettant de répartir correctement les sièges.

Cinq banques (A, B, C, D, E) veulent se partager 9 quintaux d'or. Combien vont-elles toucher sachant que A, B, C, D et E ont droit respectivement à 1000 parts, 1500 parts, 1880 parts, 2300 parts, 13320 parts?

Pour l'élection d'un conseil communal de 9 sièges, au système proportionnel, cinq partis (A, B, C, D, E) ont présenté des candidats. Combien de sièges récoltera chaque parti sachant que A, B, C, D et E ont obtenu respectivement 1000 suffrages, 1500 suffrages, 1880 suffrages, 2300 suffrages, 13320 suffrages?

Dans le partage de l'or, nous sommes en présence d'un simple problème d'application linéaire.
Somme des parts: 1000 + 1500 + 1880 + 2300 + 13320 = 20000

		A	B	C	D	E
Nombre de parts	20000	1000	1500	1880	2300	13320
Quantité d'or (q)	9	0,45	0,675	0,846	1,035	5,994
Quantité d'or (kg)	900	45	67,5	84,6	103,5	599,4

Pour le partage des sièges, les choses se compliquent pour deux raisons:

1. Les hommes doivent être représentés par des nombres entiers.
2. Le nombre de suffrages, dans un système proportionnel, doit tenir compte du fait que gagner 10 suffrages pour un parti qui en aurait eu 100 correspond à gagner 1000 suffrages pour un parti qui en aurait eu 10000!

Note: lorsque cela n'a aucune incidence sur la solution, certains nombres ont été arrondis.

Somme des suffrages: 1000 + 1500 + 1880 + 2300 + 13320 = 20000 suffrages.

		A	B	C	D	E
Nombre de suffrages	20000	1000	1500	1880	2300	13320
Nombre théorique de sièges	9	0,45	0,675	0,846	1,035	5,994
Nombre de sièges attribués	9	0	0	0	1	5
Nombre de suffrages par siège	2222	–	–	–	2300	2664

Lors de cette première répartition, 6 sièges ont été attribués, par arrondi à l'entier inférieur du nombre théorique de sièges.

On pourrait alors croire que le 7e siège est obtenu par E, le 8e par C et le 9e par B en regardant les nombres théoriques de sièges: 5,994 est plus proche de 6 que 0,846 de 1, 0,846 étant lui-même plus proche de 1 que 0,675 de 1.

Mais il faut partir du principe que tous les partis revendiquent le 7e siège et refaire les calculs pour chacun, selon cette attribution hypothétique:

A aurait alors 1 siège pour 1000 suffrages (1000 : 1 = 1000).
B aurait alors 1 siège pour 1500 suffrages (1500 : 1 = 1500).
C aurait alors 1 siège pour 1880 suffrages (1880 : 1 = 1880).
D aurait alors 1 siège pour 1150 suffrages (2300 : 2 = 1150).
E aurait alors 1 siège pour 2220 suffrages (13320 : 6 = 2220).

C'est E qui a droit au 7e siège car il obtient le plus grand nombre de suffrages par siège (2220) dans cette nouvelle répartition.

De même, tous les partis revendiquent le 8e siège:

Le nombre de suffrages par siège ne change pas pour les partis A, B, C et D

E aurait alors 1 siège pour 1902 suffrages (13320 : 7 = 1902)

C'est encore E qui a droit au siège supplémentaire! (car 1902 est supérieur à 1880, 1500, 1150 et 1000.)

Et finalement, tous les partis revendiquent le 9e siège:

Le nombre de suffrages par siège ne change pas pour les partis A, B, C et D
E aurait alors 1 siège pour 1665 suffrages (13320 : 8 = 1665)

C'est alors C qui obtient le 9e et dernier siège (1880 suffrages par siège, supérieur à 1665).

Il est intéressant de voir comment les lois proposent de calculer cette répartition. Laissons de côté le fait que les partis qui n'ont pas obtenu un pourcentage suffisant de suffrages défini par les règlements électoraux locaux n'ont pas le droit de participer à la répartition des sièges car cela n'a aucune influence sur le mode de faire. Voici ce que disent les lois valaisannes:

Art. 66. Première répartition: le nombre total des suffrages de parti est divisé par le nombre, plus un, des sièges à répartir. Ce nombre constitue le quotient électoral. Chaque liste a droit à autant de sièges que son nombre total de suffrages de parti contient de fois le quotient.

Art. 67. Deuxième répartition: si les sièges ne sont pas tous attribués, le total des suffrages obtenus par chaque liste est divisé par le nombre, plus un, des sièges attribués à cette liste et le premier siège vacant est attribué à la liste qui accuse le quotient le plus élevé.

Cette opération est répétée autant de fois qu'il reste de sièges à repourvoir[1].

On remarque que, dans le texte de l'article 66, au lieu de diviser le nombre de suffrages par le nombre de sièges, comme nous l'avons fait précédemment, on divise par le « nombre, plus un ». Comme le nombre de sièges attribués doit être un nombre entier, on peut faire comme si l'on avait 10 (9 + 1) sièges à répartir sans grand risque d'obtenir plus de sièges que disponibles. Ce qui pourrait quand même arriver, dans des cas rarissimes, par exemple, lorsque trois partis veulent se partager 5 sièges et qu'ils ont obtenu respectivement 200, 400 et 600 suffrages[2]. Pour ces cas exceptionnels, les lois prévoient diverses règles. Dans d'autres cantons, le quotient électoral est calculé en divisant le nombre total de suffrages par le nombre exact de sièges à répartir. Il n'y a pas de « plus un ». Dans ce cas, le résultat final est toujours le même, mais exige une répartition supplémentaire, comme nous l'avons vu dans notre premier exemple : quatre répartitions en divisant par 9, contre trois en divisant par (9 + 1).

Voici ce que cela donne dans notre exemple, avec 10 sièges (9 + 1), au lieu de 9 :

Quotient électoral : 20000 : (9 + 1) = 2000[3].

	1ère répartition	*	2e répartition	**	3e répartition	***
A	1000 : 2000 = 0,5	0	1000 : 1 = 1000	0	1000 : 1 = 1000	0
B	1500 : 2000 = 0,75	0	1500 : 1 = 1500	0	1500 : 1 = 1500	0
C	1880 : 2000 = 0,94	0	1880 : 1 = 1880	0	1880 : 1 = 1880	1
D	2300 : 2000 = 1,15	1	2300 : 2 = 1150	1	2300 : 2 = 1150	1
E	13320 : 2000 = 6,66	6	13320 : 7 = 1902	7	13320 : 8 = 1665	7

* nombre de sièges obtenus lors de la première répartition
** nombre de sièges obtenus après la 2e répartition
*** nombre de sièges obtenus après la 3e répartition

Cette manière de faire, à première vue étrange, permet une répartition parfaite, mais est sûrement un peu moins facile à justifier auprès des élèves.

1. Le « plus un » n'est ajouté qu'au parti qui a obtenu le siège précédent.

2. Somme des suffrages : 200 + 400 + 600 = 1200
   Quotient électoral : 1200 : 6 = 200
   Première répartition : A : 200 : 200 = 1. A obtient 1 siège.
   B : 400 : 200 = 2. B obtient 2 sièges.
   C : 600 : 200 = 3. C obtient 3 sièges.
   Nombre de sièges attribués : 6 !
   Quel que soit le mode de calcul, on tombe sur une impasse. D'où la nécessité de règles particulières pour des cas exceptionnels.

3. Ce 2000 représente le nombre minimal de suffrages pour obtenir un siège. Il correspond au 2222 (20000 : 9) si on n'ajoute pas le « plus un ».

À PROPOS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR ÉQUATION(S)

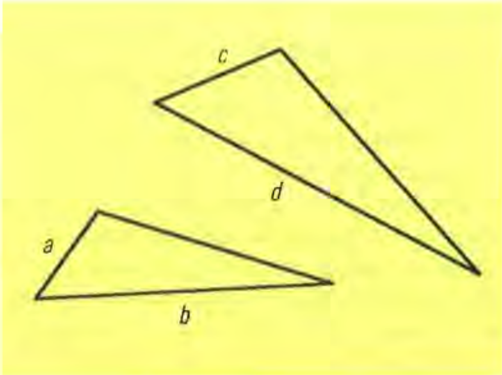
Michel Brêchet

Préambule

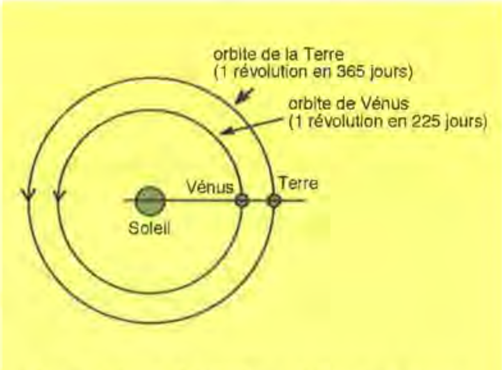
Durant les premiers degrés de la scolarité obligatoire, l'élève résout de nombreux problèmes additifs et multiplicatifs qui concernent les nombres, le mesurage ou encore la proportionnalité. Lors de la recherche de leurs solutions, il peut la plupart du temps associer des images mentales aux opérations qu'il effectue et aux résultats qu'il trouve. Par exemple, selon la situation étudiée, la comparaison de deux grandeurs appelle une soustraction, un partage renvoie à une division, le calcul d'une aire conduit à une multiplication, un nombre exprime une mesure (de longueur, de temps...) ou alors il est le cardinal d'une collection d'objets. L'élève a donc la possibilité de contrôler intuitivement le bien-fondé de ses démarches et d'établir des liens entre ses opérations de pensée et des contenus concrets. A l'inverse, lorsque les bases du calcul littéral sont acquises, la démarche algébrique trouve un sens en elle-même comme instrument qui « fonctionne » selon ses propres règles de calcul formel. Deux exemples :

- Si ces deux triangles sont semblables, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. D'où $a=\frac{b \cdot c}{d}$.

  Cette procédure, qui consiste à exprimer une longueur (a) en fonction de trois autres (b, c et d), débouche sur une égalité dont le membre de droite contient un produit de deux longueurs ($b \cdot c$) auquel il serait vain de vouloir accorder une signification géométrique autre que celle d'une aire, dont le quotient par une longueur (d) donnera une autre longueur (a), selon le calcul de dimensions cher aux physiciens.



- L'équation $\frac{x}{225}-\frac{x}{365}=1$ (dans laquelle x représente la durée en jours) permet de trouver le temps qui s'écoulera avant que les trois astres soient à nouveau alignés (avec Vénus entre la Terre et le Soleil). L'expression littérale réduite de son membre de gauche, $\frac{28x}{16425}$, n'entretient pas de lien immédiat avec la situation réelle. D'où le caractère abstrait de la transformation algébrique $\frac{x}{225}-\frac{x}{365}=\frac{28x}{16425}$.



Sur ce schéma, le Soleil, Vénus et la Terre sont alignés.

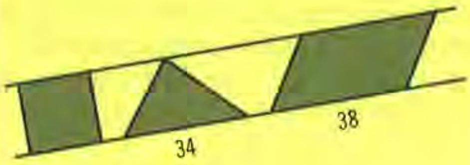
Allons voir de plus près...

La résolution de problèmes par équation(s) montre aux élèves quelle peut être l'utilité des mathématiques qu'ils apprennent. Elle permet en particulier de donner un champ d'action à l'étude des transformations littérales (développement, réduction, factorisation...). C'est un des apprentissages clés de la scolarité secondaire. Il constitue en quelque sorte un aboutissement, car des problèmes très variés peuvent être résolus par des procédés algébriques. Qu'ils concernent les nombres, les opérations, la proportionnalité, les fonctions, la mesure des grandeurs, les théorèmes métriques... les équations font souvent partie de la panoplie des outils utilisés pour en chercher les solutions. Résoudre un problème par équation(s) demande dans une première phase d'identifier les grandeurs (ou les quantités) en présence et d'établir des relations entre elles. Par la suite il s'agit, dans le cadre algébrique, d'utiliser de manière adéquate les opérations et leurs propriétés, de respecter les conventions d'écriture, de transformer des expressions littérales... L'occasion est donc belle d'entrevoir la solidité de l'édifice mathématique. La résolution algébrique d'un problème consiste à manier mentalement des quantités inconnues et à traduire des faits par des écritures symboliques avant de les soumettre à des règles de calcul. La pensée mathématique manifeste ainsi toute son originalité et sa puissance.

1. J.-A. Calame, F. Jaquet, J.-P. Crevoiserat, *Mathématique 8e année*, Département de l'instruction publique et des affaires culturelles du canton de Neuchâtel

2. Notons que ce problème se résout sans équation dans le cadre de la géométrie. En transformant les figures en rectangles équivalents dont la hauteur est la largeur de la bande, le triangle devient un rectangle de base 17 et le parallélogramme un rectangle de base 38. Le carré doit donc avoir une base de 21, valeur qui est par conséquent celle de la largeur la bande.

Arrêtons-nous un instant sur la résolution de ce problème [1] par une équation à une inconnue, et analysons les différentes étapes qui mènent à sa solution [2]. Précisons que la contrainte « une équation à une inconnue » est artificielle. On pourrait aussi utiliser un système d'équations. Mais notre propos n'est pas d'aborder cet aspect-là.



L'aire du parallélogramme est égale à celle du carré et du triangle réunis. Quelle est la largeur de la bande dans laquelle ces trois polygones ont été dessinés ?

1. Appropriation de la situation

Cet énoncé est « transparent », ce qui n'est pas toujours le cas. Cela signifie qu'il se laisse découper exactement en fonction des membres de l'équation à écrire. Quatre expressions désignent les quantités inconnues : l'aire du parallélogramme, celle du carré, celle du triangle et la largeur de la bande. Une opération (la réunion de deux parties) et la relation d'égalité permettent d'écrire l'équation. L'opération articule deux quantités inconnues en un membre de l'équation : «... [l'aire] du carré et du triangle réunis. » Quant à la relation d'égalité, elle est donnée par « L'aire du parallélogramme est égale à celle du carré et du triangle réunis. »

2. Traduction de la situation par une équation

Quatre quantités sont inconnues et une seule lettre est à disposition. Il s'agit donc de désigner une quantité par cette lettre et d'exprimer les trois autres en fonction de cette même lettre. Plusieurs tentatives sont parfois nécessaires pour mener à bien cette étape. L'inconnue (x) pourrait représenter l'aire du parallélogramme, celle du carré ou encore celle du triangle. Cependant, chacun de ces choix conduirait à des expressions algébriques complexes, délicates à manipuler. Par exemple, si x désigne l'aire du parallélogramme, on obtient l'équation

$$x = \frac{34 \cdot \frac{x}{38}}{2} + \left(\frac{x}{38}\right)^2,$$

dont la résolution n'ira sans doute pas de soi. La façon la plus simple de procéder est de désigner la largeur de la bande par l'inconnue. La question de l'énoncé y incite d'ailleurs. Mais attribuer l'inconnue au nombre cherché (mesure ou quantité) ne constitue pas toujours le choix le plus judicieux. Si x est la largeur de la bande, alors l'aire du parallélogramme est $38x$, celle du triangle est $\frac{34x}{2}$ et celle du carré est x^2.

On remarquera au passage que pour exprimer ces trois aires de manière littérale, on s'est autorisé à manipuler une quantité inconnue (x) comme si elle était connue, c'est-à-dire au même titre que les nombres de l'énoncé (34 et 38). C'est bien là une des caractéristiques de l'algèbre qui pose passablement de difficultés lors des premiers pas dans cette discipline. L'équation à résoudre est ainsi

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

Comme ses deux membres représentent une même grandeur (une aire), elle est homogène.

3. Résolution de l'équation

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

Simplification de la fraction dans le membre de droite

$$38x = x^2 + 17x$$

Soustraction de 38x dans chaque membre

$$0 = x^2 - 21x$$

Factorisation du membre de droite

$$0 = x(x - 21)$$

Détermination de l'ensemble des valeurs possibles

$$S = \{0\,;\,21\}$$

Pour résoudre formellement une équation, il faut la transformer à l'aide des règles d'équivalence, des propriétés des opérations et des conventions de priorités en vigueur. Les difficultés et les erreurs liées à la mise en œuvre de ces connaissances sont développées ci-dessous. Il est intéressant de constater que la résolution algorithmique de l'équation

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

amène à examiner le cas de la largeur nulle, que personne n'aurait envisagé en suivant une démarche géométrique.

L'écriture de l'équation $38x = x^2 + \frac{34x}{2}$

nécessite de rester en prise directe avec le contexte initial, c'est-à-dire de tenir compte des objets géométriques en présence (parallélogramme, carré, triangle, bande de papier), de la nature des grandeurs en jeu (aire des figures et longueur des segments) ainsi que des unités dans lesquelles elles sont mesurées. Il en va tout autrement lors de la résolution de l'équation, phase durant laquelle on peut se détacher de la réalité concrète, car les lettres peuvent être manipulées indépendamment des objets ou des grandeurs qu'elles représentent. Ainsi, comme on l'a dit tout à l'heure, il serait difficile de vouloir à tout prix maintenir le lien entre les écritures algébriques successives et les êtres géométriques. L'écriture x^2 représente bien entendu l'aire du carré; quant à $21x$ (déjà plus abstrait), c'est la différence des aires du parallélogramme et du triangle, c'est-à-dire à celle du carré. On pressent ainsi qu'il vaut mieux renoncer à donner une explication rhétorique aux expressions $x^2 - 21x$ et $x(x - 21x)$, car elles n'entretiennent pas de lien évident avec la situation réelle. On a meilleur temps de faire confiance aux algorithmes du calcul littéral, qui constitue pour les élèves, sous cet angle-là, une rupture forte avec toutes les habitudes acquises durant la scolarité primaire notamment. Rupture qui peut s'avérer constructive et libératrice, mais qui peut aussi être le début d'un échec scolaire si le lien avec les habitudes du primaire n'est pas clairement établi.

4. *Réponse et vérification*

Cette phase nécessite un retour à l'énoncé du problème. Comme on ne peut pas découper des polygones dans une bande de papier de largeur nulle, la solution est 21, valeur dont il s'agit encore de vérifier la validité:

$$38 \cdot 21 \stackrel{?}{=} 21^2 + \frac{34 \cdot 21}{2}$$
$$798 = 798$$

Résoudre une équation? Pas si simple!

La maîtrise de la résolution des équations est indispensable pour résoudre de nombreux problèmes traités au cours des dernières années de la scolarité obligatoire et pour aborder bon nombre des chapitres mathématiques enseignés plus tard. D'une manière générale, la somme des connaissances mises en jeu dans la recherche de l'ensemble de solutions d'une équation est très vaste. Afin de guider les élèves lors de cette phase d'apprentissage de l'algèbre, il est important de prendre conscience des tâches qui leur sont proposées et des difficultés à surmonter pour les mener à bien. En plus de compétences liées au calcul numérique – particulièrement avec les entiers relatifs – et au calcul littéral, la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue demande:

- d'organiser les transformations algébriques à réaliser. Par exemple:
  - de transformer, le cas échéant, un seul ou les deux membres de l'équation, par développement ou par réduction:

$$\begin{aligned} 2{,}5x - 4 + 1{,}5x &= 7 \\ 4x - 4 &= 7 \end{aligned}$$

  - de laisser momentanément en suspens les opérations concernant le coefficient de l'inconnue:

$$\begin{aligned} 4x - 40 &= 160 \quad \Big| +40 \\ 4x &= 200 \end{aligned}$$

– d'éliminer dans un premier temps le terme contenant l'inconnue dans un des deux membres en ajoutant son opposé dans chaque membre :

$$\begin{array}{rcl|l} 12x+23 & = & 5x+72 & -5x \\ 7x+23 & = & 72 & \end{array}$$

• d'appliquer les règles d'équivalence qui permettent de passer d'une équation à l'autre. Le non respect de ces règles peut amener les élèves à :

– transformer un seul membre d'une équation :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x-40 & = & 160 & +40 \\ 4x & = & 160 & :4 \\ x & = & 40 & \\ S & = & \{40\} & \end{array}$$

– effectuer des transformations additives différentes dans chaque membre :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x-40 & = & 160 & -40 \\ 4x & = & 120 & :4 \\ x & = & 30 & \\ S & = & \{30\} & \end{array}$$

– ne pas changer le signe d'un terme transféré d'un membre à l'autre, dans le cas où les transformations ne sont pas notées explicitement :

$$4x - 40 = 160$$
$$x = \frac{160-40}{4}$$
$$x = 30$$

• d'identifier l'ordre des opérations à effectuer et de respecter les conventions de priorité existantes. C'est ici la lecture de la notation algébrique qui est en jeu. Plusieurs erreurs peuvent survenir. Par exemple :

– un terme situé à l'intérieur d'une parenthèse est traité comme un terme indépendant :

$$\begin{array}{rcl|l} 3(x-15) & = & 75 & +15 \\ 3x & = & 90 & :3 \\ x & = & 30 & \\ S & = & \{30\} & \end{array}$$

– le produit *ax* est considéré comme ayant les mêmes propriétés que la somme $a + x$:

$$\begin{array}{rcl|l} 28x & = & 266 & -28 \\ x & = & 238 & \end{array}$$

- un seul terme d'un membre est multiplié ou divisé (ci-contre, l'expression $\frac{x}{4} + 3$ n'est pas traitée de la même façon qu'une expression entre parenthèses) :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{x}{4} + 3 & = & 50 & \cdot 4 \\ x + 3 & = & 200 & -3 \\ & S = \{197\} & & \end{array}$$

- de transférer exhaustivement les termes non transformés d'une équation à l'autre.
  Cette compétence implique en particulier de ne pas omettre un signe « moins » lors de l'écriture d'une nouvelle équation : $37 - x = 21 \Rightarrow x = 21 - 37$ est une erreur fréquente. Elle est probablement due à la difficulté de travailler avec une quantité inconnue précédée du signe « moins » ou à une absence de contrôle lors du report des termes.

- de valider la solution trouvée par substitution dans l'équation initiale.

Comme la maîtrise d'un algorithme dépend étroitement de la richesse des situations vécues, il est souhaitable de confronter les élèves à des équations dont la résolution demande des tâches très différentes les unes des autres (calculer avec des nombres négatifs, réduire des sommes de termes, développer des produits de facteurs, passer des termes d'un membre à l'autre...). En outre, lors de la résolution d'une équation, la justification des transformations réalisées est formatrice, car une telle pratique :

- favorise la généralisation de la méthode à d'autres situations (deuxième degré, systèmes d'équations...) ;
- incite les élèves à ne pas remplacer les règles d'équivalence par d'autres, plus économiques mais moins fiables, comme :
  - « un terme passe de l'autre côté en changeant de signe » ;
  - « un coefficient passe de l'autre côté en divisant » ;
  - « on compte les x pour réduire les termes » ;
- renforce la maîtrise des principes sur lesquels repose le bon fonctionnement de l'algorithme en jeu, à savoir la conservation de l'égalité, le respect des priorités des opérations et le contrôle des transformations algébriques effectuées d'une équation à la suivante.

Sources

A. Cortes, N. Kavafian, *Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations*, in Petit x n°51, IREM de Grenoble 1998-1999

Problèmes de mise en équations, IREM de Strasbourg, janvier 1996

4e SALON DES JEUX ET DE LA CULTURE MATHÉMATIQUES

François Jaquet
coordinateur international du RMT

Organisée par le CIJM (Comité international des jeux mathématiques), ce 4e Salon s'est déroulé du 29 mai au 1 juin 2003, à Paris : une place entière autour d'une fontaine monumentale devant l'Eglise St Sulpice, environ 80 stands, des milliers de visiteurs, un soleil de plomb, une dizaine d'animations et concours, des centaines de livres et publications exposés, des dizaines d'expositions et ateliers de construction, et finalement, des centaines de jeux et problèmes, où chacun pouvait manipuler, chercher des stratégies ou des solutions.

Dans son discours d'inauguration, Marie-José Pestel, la présidente du CIJM pouvait légitimement parler de succès de l'opération :

« ... *La réunion de nombreuses compétences, la présence de nombreux partenaires, tout particulièrement : le soutien financier et logistique de la Mairie du VIème, de la mairie de Paris, du ministère de l'Education Nationale, du ministère de la Recherche et de l'Académie de Paris permettent au Comité International des Jeux Mathématiques de réaliser ce 4e Salon des jeux et de la culture mathématiques.*

... *Nous sommes fiers d'avoir à nos côtés de grands pôles scientifiques parisiens, le CNAM, le musée de la Marine, la Cité des sciences et de l'Industrie, le Palais de la découverte, l'Observatoire de Paris, le département de Cristallographie de Paris VI. Nous sommes heureux que de nombreuses animations nous soient proposées par des jeunes.* ...

Avec ce salon, nous organisons des événements tous plus originaux les uns que les autres. Citons rapidement : le rallye mathématique dans les rues de Paris, dimanche, parrainé par la revue Tangente ; la coupe EUROMATH-CASIO qui verra s'affronter des équipes venues de différentes régions de France et d'Europe (Belgique et Ukraine) ; le rallye CIJM des P'tits loups ouvert aux enfants de 5 à 9 ans, le concours Combi-logique ...

Les jeunes venus par classes entières, les milliers de visiteurs que nous attendons confirment l'intérêt et l'importance de cette manifestation résolument ludique et originale dont l'ambition est de contribuer à promouvoir la culture scientifique et une image vivante des mathématiques. Les mathématiques sont ancrées dans notre histoire, dans notre culture et dans notre vie quotidienne. Chaque allée de ce salon vous le prouvera. »

Le **Rallye mathématique transalpin** était présent pour la première fois à cet événement, (même si deux lettres interverties sur l'enseigne du stand ont intrigué certains visiteurs qui se demandaient ce que pouvait bien signifier « translapin » !).

Un des buts de cette présence était de faire connaître ce concours original et d'informer le public, par la présentation de panneaux, de photos et de problèmes inventés par des élèves de classes italiennes. Un second but était de proposer aux visiteurs, enfants et adultes, une vingtaine de problèmes du RMT, aménagés en « manipulations », de façon à éviter les résolutions sous forme « papier-crayon ».

Toute personne intéressée se trouvait donc devant un énoncé trilingue, en français, italien et allemand, avec le matériel nécessaire pour la résolution.

Expérience concluante ! Le stand du RMT a été occupé en permanence et a permis aux animateurs présents de tester les 20 problèmes proposés en manipulations, de voir comment, dans la majorité des cas, le matériel peut

Des jeux partout, même en dehors des stands !

Graine de maths, jeux pour tous les âges

Les forces de capillarité permettent un ajustement extrêmement précis de polygones, fort apprécié lorsque la température ambiante est de 30 degrés

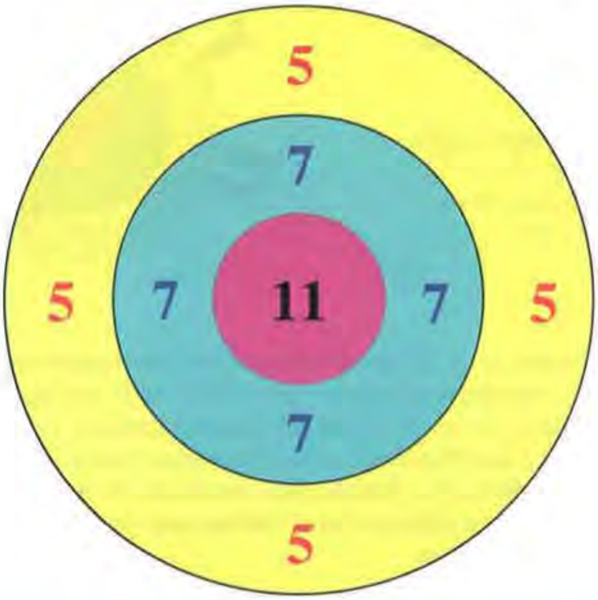
faciliter les recherches, et de constater que certains sujets conçus pour des élèves du primaire peuvent encore présenter de solides obstacles chez de nombreux adultes.

Les pages suivantes en proposent quelques-uns :

A.
Voici une version complète du problème de « la cible » pour voir à quoi ressemblent les 20 fiches présentées[1] :

LA CIBLE / IL BERSAGLIO / DIE ZIELSCHEIBE

Guillaume a atteint la cible avec toutes ses fléchettes, il compte ses points : 34 !
Jeanne joue et dit : « j'ai aussi 34 points, mais j'ai deux fléchettes de moins que toi ».
Combien ont-ils chacun de fléchettes dans la cible ? et dans quelles zones ?



Guglielmo ha messo tutte le sue freccette su questo bersaglio. Conta i suoi punti e dice : 34 !
Gianna gioca a sua volta e dice. « Anch'io ho 34 punti, ma ho due freccette in meno di te ! ».
Quante freccette ha ciascuno dei due giocatori sul bersaglio ? E in quali zone ?

Willi hat mit allen Pfeilen die Zielscheibe getroffen. Er zählt seine Punkte zusammen : 34 !
Jetzt spielt Johanna. Sie stellt fest : « Auch ich habe 34 Punkte erreicht, aber mit 2 Pfeilen weniger als du »
Wie viele Pfeile hat jeder in der Zielscheibe stecken ? Und in welchen Gebieten ?

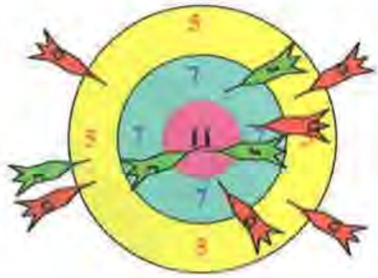
1. En cas de demande, les documents nécessaires (fiches avec les énoncés, commentaires didactiques et le matériel) seront édités à l'intention d'établissements scolaires, de classes, d'expositions ou toute autre exploitation des problèmes du RMT. Les personnes intéressées sont priées de s'adresser à la rédaction de *Math-Ecole.*
Au verso de chaque fiche, ne figuraient que la liste du matériel et la solution, les commentaires qui les accompagnent ici font l'objet d'une édition complémentaire.

Matériel : Des pions de deux couleurs pour représenter les flèches de Guillaume et de Jeanne.

Solutions :
Il faut trouver les différentes manières d'obtenir une somme de 34 avec les termes qui sont des multiples de 5, 7 ou 11

flèches dans	« 5 »	« 7 »	« 11 »	sommes	nb. de flèches
	1	1	2	5 + 7 + 22	4
	4	2	0	20 + 14	6

Un inventaire montre qu'il n'y a que deux possibilités, avec 4 flèches ou 6 flèches, d'où la solution suivante :



Guillaume a mis 6 flèches dans la cible : 4 dans le « 5 » et 2 dans le « 7 »
Jeanne a 4 flèches : 1 dans le « 5 », 1 dans le « 7 » et 2 dans le « 11 ».

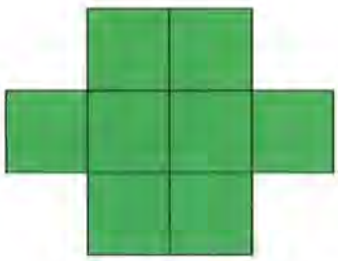
Variables :
Il y a de nombreuses variantes de ce problème, qui modifient les cibles et les nombres de points. Dans sa version actuelle, le problème est relativement pauvre car il n'y a que deux manières d'obtenir 34 avec le 5, le 7 et le 11 de la cible. Pour une version ultérieure, il serait plus judicieux de choisir un total différent qui puisse être obtenu de 3 manières au moins, pour lesquelles le nombre de flèches offre des choix plus variés. Par exemple, avec un total de 47 et une différence de 4 flèches, il faut éliminer les trois manières d'obtenir 47 en 7 flèches pour ne conserver que les deux possibilités en 5 et 9 flèches respectivement.

Origine : 1er Rallye mathématique romand, Finale, Problème 4
Degrés : 3 à 5

B.
Le problème de la grille de nombres s'est révélé intéressant à tout âge. Le matériel – les jetons numériques – favorise évidemment la recherche de la solution « au hasard », mais on voit rapidement ainsi apparaître le rôle particulier des nombres 1 et 8 et celui des deux cases centrales.

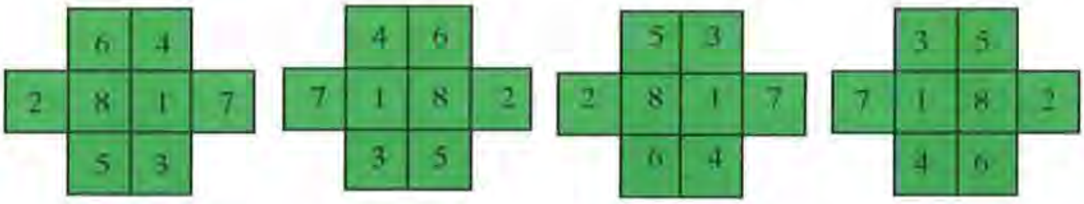
GRILLE DE NOMBRES

Placez les huit nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dans une grille, de telle sorte que deux nombres consécutifs (qui se suivent) soient dans des cases qui ne se touchent pas, ni par un côté, ni par un sommet.
Essayez de découvrir toutes les solutions.



Matériel : Plusieurs jeux de carrés de bois portant les nombres de 1 à 8

Solutions : Il y a quatre solutions, symétriques l'une de l'autre selon les axes de la grille :



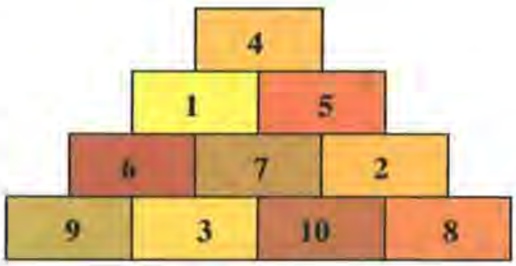
Les deux cases « centrales » de la grille ont chacune 6 voisines et une seule case non voisine, à l'extrémité opposée. Un nombre placé dans une case centrale ne doit donc avoir qu'un seul nombre « consécutif », qu'il faudra placer dans la case opposée. Seuls les deux nombres 1 et 8 n'ont qu'un seul nombre « consécutif ». Ils devront donc être placés dans les cases centrales et les deux nombres respectivement « consécutifs » 2 et 7 dans les cases opposées.

Origine : 2e Rallye mathématique romand, Epreuve I, Problème 8
Degrés : 3 à 5

C.
Parmi les problèmes numériques, celui de l'escalier des différences a beaucoup plu. Chacun pouvait effectuer sa construction et la comparer à celles des autres pour vérifier si elle était nouvelle. Là aussi les pièces à empiler accélèrent le rythme des essais et il faut peu de temps pour que chacun soit convaincu, par exemple, que le « 6 » ne peut se trouver qu'à l'étage inférieur et que le « 3 » ne peut pas être à côté de lui.

L'ESCALIER DES DIFFÉRENCES

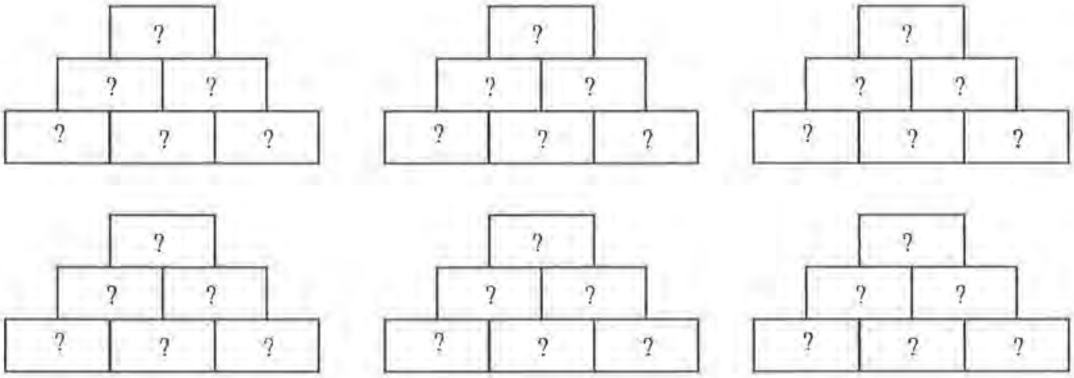
Cet escalier de quatre étages est construit ainsi :



Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

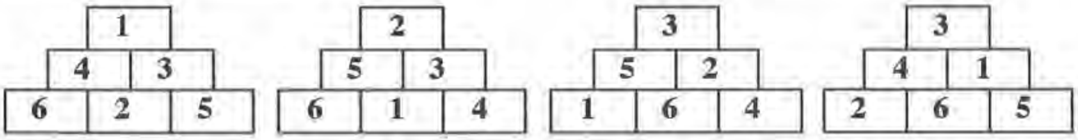
Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, en utilisant les nombres de 1 à 6. Combien en trouverez-vous de différents ?



Matériel : Cinq jeux de 6 briques numérotées de 1 à 6

Solutions :
Il y a 4 solutions différentes, ou 8, si l'on compte les dispositions symétriques, qui se retrouvent sur l'autre face de chaque pyramide :



Variables :
Le nombre d'étages et les nombres « autorisés ».
Ces nombres peuvent être les premiers naturels : de 1 à 6 pour 3 étages, de 1 à 10 pour 4 étages, de 1 à 15 pour 5 étages... Il y a plusieurs solutions à 4 étages avec les nombres de 1 à 10, il y en a une à 5 étages avec les nombres de 1 à 15, mais il n'y a pas de solution pour des escaliers de 6 étages avec les nombres de 1 à 21, ni avec les suivants. (Voir Math-Ecole 161, 163 et 165)

Origine :
2e Rallye mathématique romand, Finale, Problème 1 (inspiré de : FFJM 1 1987, Concours par classes du Valais 1992, Concours « Colloque Mathématiques 93 »)

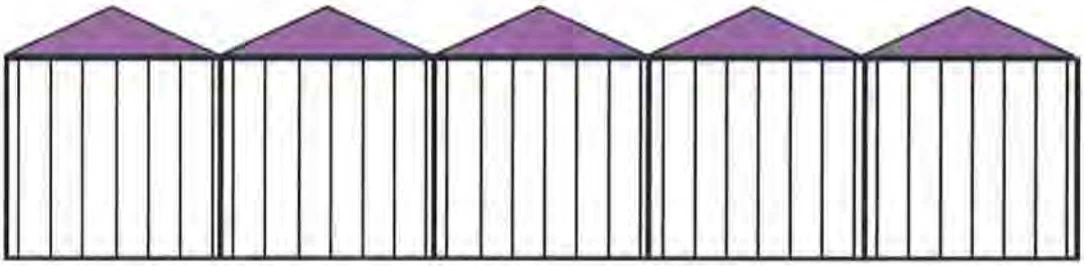
Degrés : 4 à 6

D.
Le problème de la ménagerie était proposé par les animateurs aux visiteurs les plus jeunes, qui, pour autant qu'on les aide dans la lecture, s'appropriaient facilement la situation. Les cinq images provenaient des cartes d'un domino des animaux de la savane, ce qui a contraint les concepteurs à remplacer le singe du texte d'origine – mais ne figurant pas sur les cartes – par un zèbre. Les stratégies de résolution n'en ont pas été affectées, la seule incidence de cette substitution s'est révélée au niveau de la traduction en allemand, vu le changement de genre de l'animal et les connaissances très sommaires du traducteur en déclinaison.

À LA MÉNAGERIE

À la ménagerie, vous êtes devant cinq cages, alignées les unes à côté des autres.
- La cage du zèbre n'est ni à côté de celle de l'ours, ni à côté de celle de la panthère ;
- il y a deux cages entre celle du tigre et celle de l'ours ;
- la cage de la panthère est à droite de celle de l'ours, elles sont l'une à côté de l'autre ;
- la cage du lion est à côté de celle du zèbre.

Placez dans chacune des cinq cages l'animal qui l'occupe.



Matériel : Cinq images d'animaux
Solution : L'ordre des cages est, de gauche à droite : tigre – zèbre – lion – ours – panthère
Origine : 3e Rallye mathématique transalpin, Epreuve II, Problème 1
Degrés : 3 à 5

E.

Le problème des moutons a été conçu, à l'origine, pour des élèves de 5e année. Mais les adultes y sont en majorité « tombés dans le panneau » et ont dû avoir recours au matériel pour se convaincre que leur première réponse n'était pas la bonne.

MOUTONS NOIRS ET MOUTONS BLANCS

Dans l'enclos du Père Leblanc, il y a 100 moutons, tous blancs.
Dans l'enclos du Père Lenoir, il y a 200 moutons, tous noirs.
Un beau jour, 25 moutons blancs du Père Leblanc sautent les barrières et vont se mêler aux moutons noirs du Père Lenoir. Le soir, lorsqu'il compte ses moutons, le Père Leblanc constate qu'il lui en manque 25.
Il décide aussitôt d'aller rechercher ses moutons blancs.
Mais quand il arrive devant l'enclos du Père Lenoir, il fait nuit noire.
Et chacun sait que la nuit, tous les chats sont gris, et les moutons aussi.
Le Père Leblanc compte à tâtons 25 moutons et les ramène dans son enclos.
Et le lendemain, évidemment, il y a quelques moutons noirs parmi les 100 moutons de l'enclos du Père Leblanc, et des moutons blancs parmi les 200 moutons dans l'enclos du Père Lenoir.
Selon vous, petits bergers, y a-t-il plus de moutons noirs dans l'enclos du Père Leblanc que de moutons blancs dans l'enclos du père Lenoir ?

Matériel : Une boîte avec100 cailloux blancs, une autre avec 200 cailloux noirs

Solution :
Il y a autant de moutons noirs dans l'enclos du Père Leblanc que de moutons blancs dans l'enclos du Père Lenoir.

Certains peuvent penser qu'il y « plus de moutons noirs » vu les données initiales : 200 moutons noirs et 100 moutons blancs. D'autres qu'il y a plus de « moutons blancs » parce que, « à l'aller » il y avait 25 blancs et « au retour » les 25 n'étaient pas tous blancs.

En fait, il suffit de faire le décompte final. Les moutons blancs restés dans l'enclos de Lenoir sont remplacés par autant de moutons noirs dans l'enclos de Leblanc. On peut aussi fixer un nombre de moutons blancs restés chez Lenoir à 15, par exemple, sur 25, ce qui veut dire que 10 moutons blancs, sur 25, ont été repris par Leblanc et, par conséquent, 15 noirs transférés « par erreur » dans son enclos.

Variables :
On peut reprendre le thème avec une cuillère prise dans une salière et mélangée dans un sucrier et une seconde cuillère du mélange remise dans la salière, où les nombres de particules sont très grands. Le problème classique à l'origine de ce thème est celui d'un verre de vin pris dans une carafe d'un litre, mélangé avec l'eau d'une autre carafe d'un litre d'eau, puis, pour revenir aux niveaux initiaux, un verre du mélange remis dans la carafe de vin.

Origine :
3e Rallye mathématique transalpin, Epreuve II, Problème 9, problème classique de « eau et vin », Concours « Colloque Mathématiques 93 » dans la version « sucre-sel »

Degrés : 5 et +

Conclusion provisoire

L'adaptation de problèmes du RMT dans le contexte festif du 4e Salon des jeux et de la culture mathématiques s'est révélée potentiellement intéressante. On passe de la résolution en groupe à des recherches individuelles, on laisse de côté – provisoirement – les justifications et les validations, on accélère le rythme des essais en quittant le papier et le crayon pour des matériels concrets, on se libère du dispositif complexe de la passation d'une épreuve de rallye en passant à une activité de type « atelier » facile à organiser à l'échelon d'une seule classe.

Il y a là des arguments en faveur d'un élargissement et d'une nouvelle diffusion des problèmes du RMT, comme points de départ, comme recherches libres et individuelles, comme sources de motivation pour la résolution de problème. Toutes ces pistes peuvent, comme la présentation d'origine des problèmes en épreuves « officielles », être exploitées aussi en vue de la construction de notions mathématiques nouvelles ou du renforcement de concepts existants.

À suivre donc.

LE COIN DES PAVAGES (1)

Michel Brêchet

Les pages de couverture de *Math-Ecole* des numéros 206 et 207 montrent des détails d'œufs géométriques pavés par des élèves de 14 – 15 ans. Il en ira de même pour les prochains numéros. L'étude des figures permettant de recouvrir uniformément une surface est prisée par bon nombre d'enseignants lorsqu'ils abordent les isométries (translation, rotation et symétries) avec leurs élèves. Et pour cause. Les motifs périodiques, lorsqu'ils ne sont pas composés de figures élémentaires telles que le triangle équilatéral, le carré, le rectangle, le parallélogramme ou encore l'hexagone régulier, sont sources de questionnement et d'étonnement, voire de fascination. Comment générer des figures qui s'imbriquent sans trou ni superposition ? Quelles isométries utiliser pour paver le plan avec telle ou telle figure ? A quelles conditions un motif créé par la juxtaposition de quelques pavés se répètera-t-il à intervalles réguliers ? Au fil des âges, ces questions et bien d'autres ont par ailleurs piqué la curiosité d'artistes et de scientifiques de cultures et d'horizons multiples [1].

Vous trouverez dans ce numéro le premier d'une série de quatre articles consacrés aux pavages du plan. Chacun d'eux présentera une façon de recouvrir le plan avec des pavés isométriques, selon cinq rubriques : *Comment faire ?*, *Motif obtenu*, *Analyse du motif*, *Pourquoi ça marche ?* et *En classe*.

Pavages par rotations d'un quart de tour

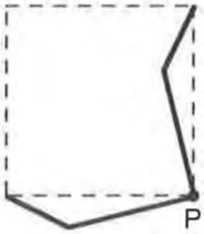
C'est ce type de pavages que l'on peut observer sur la couverture du numéro 206. La figure de base étant symétrique, ce qui n'est pas une condition nécessaire, il n'est pas évident de percevoir qu'elle est construite à partir de la « déformation » des côtés d'un carré. Comme nous le verrons dans les prochains articles, il pourrait aussi s'agir d'un pavage par symétries centrales ou par symétries glissées, car la figure de base est très particulière. Mais voyons tout d'abord comment procéder par rotations d'un quart de tour.

1. De très nombreux ouvrages traitent des pavages du plan. Pour n'en citer que quelques-uns :

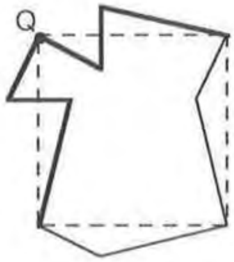
M.C. Echer, *L'œuvre graphique*, B. Taschen, 1992
R. Fields, *Geometric Patterns from Islamic Art & Architecture*, Tarquin Publications, 2000
A. Deledicq, *Le monde des symétries*, ACL–Editions, Paris, 1993
D. Schattschneider et W. Walker, *M.C. Escher Kaléïdocycles*, B. Taschen 1990

Comment faire?

- Construire un carré.
- Tracer une ligne (ligne brisée, courbe...) dont les extrémités sont deux sommets consécutifs de ce carré. Construire ensuite son image par une rotation de 90° et dont le centre est une des extrémités de la ligne (ici le sommet P).
- Faire de même avec les deux autres couples de sommets consécutifs du carré. Il faut que les centres de rotation soient deux sommets opposés.
- Paver le plan par rotations d'un quart de tour.

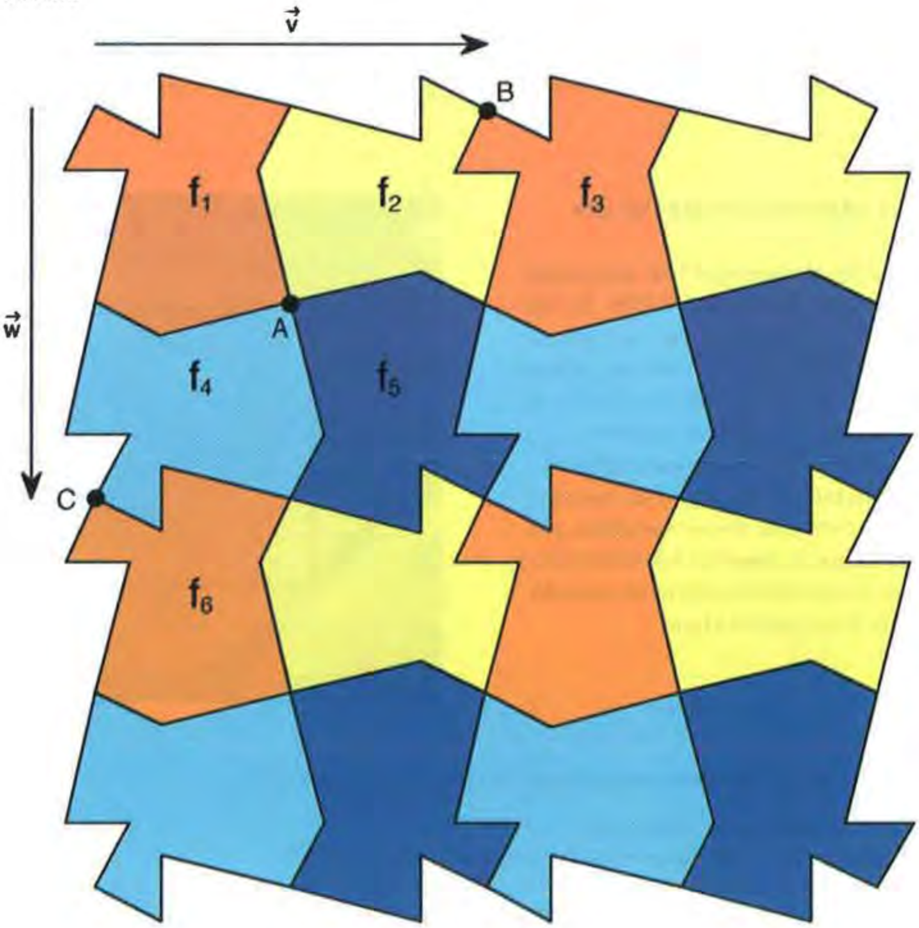


Etape 1



Etape 2

Motif obtenu



Analyse du motif

Plusieurs isométries sont présentes dans ce motif périodique. Par construction, les polygones voisins d'une même ligne ou d'une même colonne sont images l'un de l'autre par une rotation d'un quart de tour :

Première ligne	Deuxième ligne	…	Première colonne	Deuxième colonne	…
$f_1 \xrightarrow[R(A;\,-90°)]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[R(A;\,+90°)]{} f_5$	…	$f_1 \xrightarrow[R(A;\,+90°)]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[R(A;\,-90°)]{} f_5$	…
$f_2 \xrightarrow[R(B;\,+90°)]{} f_3$	…	…	$f_4 \xrightarrow[R(C;\,-90°)]{} f_6$	…	…
…	…	…	…	…	…

En conséquence :

- La composée de deux rotations de même centre étant une rotation dont la mesure de l'angle est la somme des mesures des angles des rotations données, on a : $f_1 \xrightarrow[S(A)]{} f_5$ et $f_2 \xrightarrow[S(A)]{} f_4$

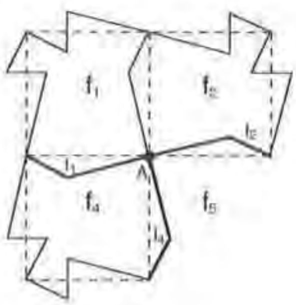
  De même, f_3 et f_5 sont images l'une de l'autre par une symétrie centrale, tout comme f_5 et f_6…

- La composée de deux rotations dont la somme des mesures des angles est nulle étant une translation, on a : $f_1 \xrightarrow[T(\vec{v})]{} f_3$, $f_1 \xrightarrow[T(\vec{w})]{} f_6$, …

Pourquoi ça marche ?

Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, …) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, …) s'emboîtent deux à deux car deux lignes correspondantes sont images l'une de l'autre par une rotation d'un quart de tour.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, par construction, la ligne l_4 est image de l_1 par la rotation de centre A dont l'angle est 90° et la ligne l_2 est aussi image de l_1 par la rotation de centre A dont l'angle est $-180°$ ($-90° \cdot 2$). Par conséquent, l_4 est l'image de l_2 par la rotation de centre A dont l'angle mesure $-90°$.

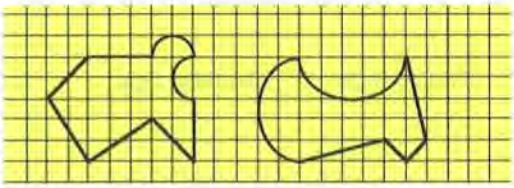


On peut bien sûr faire une démarche analogue en considérant que f_5 est construite à partir de f_4. Ce même type de raisonnement s'applique également aux autres figures.

En classe

Afin de laisser une importante part de travail aux élèves et de ne pas trop les guider dans les apprentissages visés, le maître peut par exemple leur demander d'effectuer les tâches successives suivantes :

- paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre (ou d'une autre qui convient) ;
- décrire les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- générer une figure permettant de paver le plan par rotations d'un quart de tour.



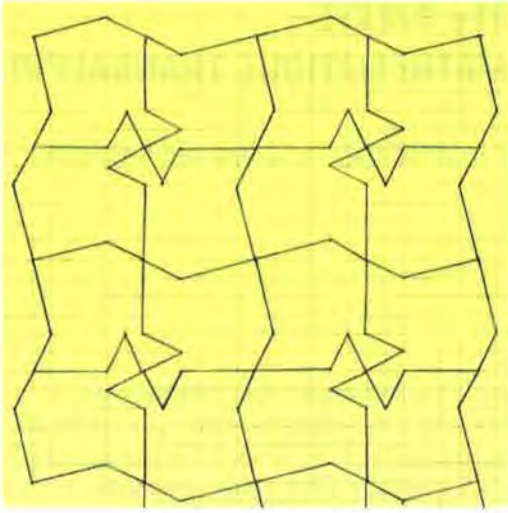
Du papier quadrillé, des ciseaux, les instruments traditionnels de géométrie ou pourquoi pas un logiciel de dessin géométrique sont nécessaires pour mener à bien une telle séquence d'apprentissage, pour laquelle deux périodes de 45 minutes ne seront sans doute pas superflues. Si les deux premières tâches sont à la portée des élèves dès le degré 7, l'élaboration d'une figure (non élémentaire) susceptible de recouvrir le plan par rotations d'un quart de tour s'adresse plutôt à des élèves de 8e et de 9e années, car elle exige de bonnes capacités d'observation et de déduction ainsi qu'une certaine familiarité avec les isométries.

Présentons quelques ébauches d'élèves de 14 ans pour clore ce premier épisode.

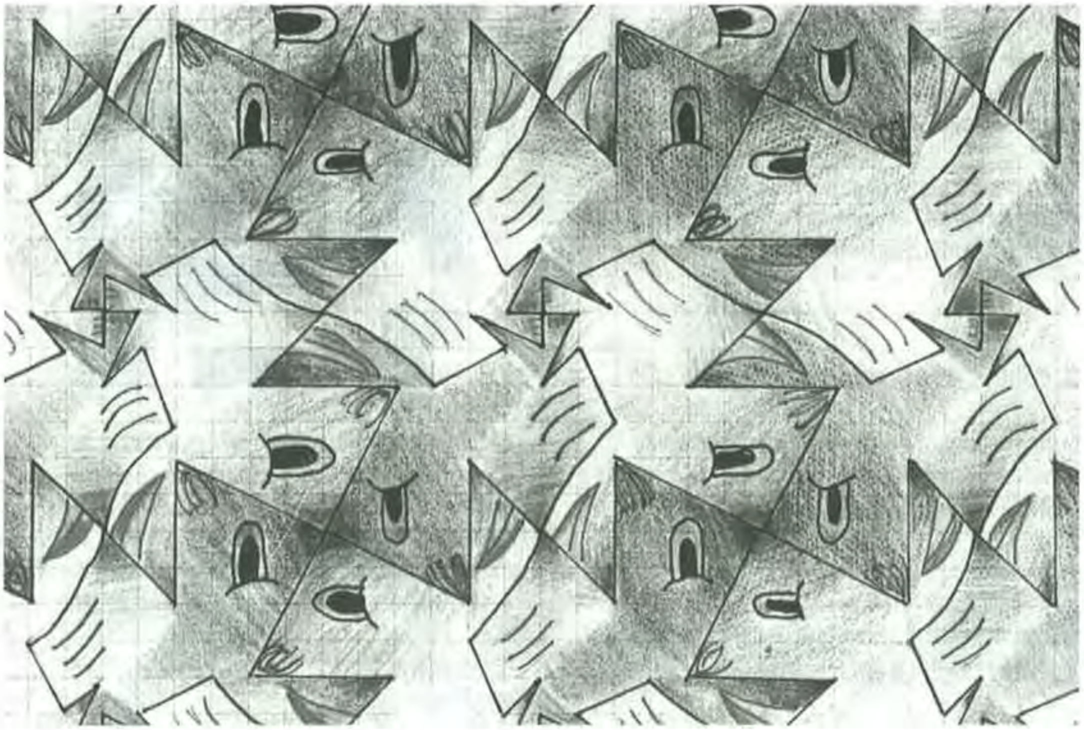
- Ce collage rappelle que la manipulation physique de pavés est une étape dont certains élèves ne peuvent se passer. En effet, « la main » et « la tête » travaillent souvent de concert lors des premiers pas dans ce genre de situations.

- Ces deux figures laissent entrevoir la composante créative de l'activité, qui est une source de motivation pour bien des élèves... mais aussi pour les adultes qui se prennent au jeu !

- La réalisation de ce motif périodique a passé par des phases d'analyse (pour dégager les caractéristiques des figures permettant de paver le plan par rotations d'un quart de tour), d'imagination (pour créer une figure qui convient) et de construction (pour juxtaposer les pièces du puzzle). Elle a en outre nécessité rigueur et concentration, car le risque de « ne plus y voir clair » est omniprésent au cours de la dernière phase.



Note : L'illustration ci-dessous, ainsi que celles des pages 4 et 56 complètent cet article. Elles témoignent du haut degré d'engagement des élèves qui les ont réalisées.



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Virginie, 14 ans.

11e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la deuxième épreuve

[ndlr] Voici les problèmes de la deuxième épreuve du 11e Rallye mathématique transalpin, qui s'est déroulée en mars 2003 en Suisse romande. Ces énoncés sont suivis de commentaires et résultats, en pages 44 à 56.

1. TU JOUES AVEC MOI? (Cat. 3)

Thomas va chez François pour jouer aux billes. Thomas a 27 billes. Lors de la première partie, il en gagne 15.

Après la deuxième partie, sa mère lui téléphone et lui demande de rentrer tout de suite à la maison. Thomas compte alors ses billes. Il en a 51.

Thomas a-t-il perdu ou gagné des billes lors de la deuxième partie? et combien?
Expliquez votre raisonnement.

2. COURSE D'OBSTACLES (Cat. 3, 4)

Mario s'est inscrit à une course d'obstacles qui se déroulera dimanche. Le premier jour d'entraînement, il a sauté un nombre impair d'obstacles.

Le lendemain, il saute le double du nombre d'obstacles du premier jour. Et ainsi de suite, il s'entraîne chaque jour en sautant à chaque fois le double du nombre d'obstacles sautés le jour précédent.

Lors du dernier entraînement, le jour avant la course, il saute 80 obstacles.

Quel jour de la semaine a-t-il commencé à s'entraîner? Combien d'obstacles a-t-il sautés ce premier jour d'entraînement? Expliquez votre raisonnement.

3. LE COUVRE-LIT DE GRAND-MÈRE (Cat. 3, 4)

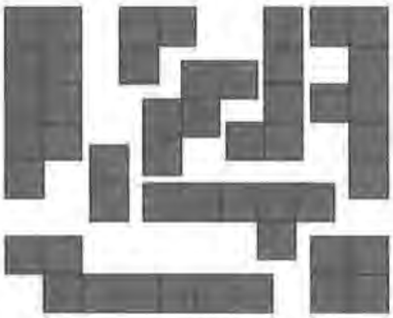
Grand-Mère a cousu un couvre-lit rectangulaire formé de carrés de même taille. Il y a 22 carrés dans la longueur et 15 carrés dans la largeur.

Grand-Mère a placé un rang de carrés bleus sur tout le bord du couvre-lit, et a fait tout l'intérieur avec des carrés rouges.

Combien y a-t-il de carrés rouges dans le couvre-lit de Grand-Mère? Expliquez votre raisonnement.

4. PUZZLES CARRÉS (Cat. 3, 4, 5)

Voici 9 pièces pour construire des puzzles carrés. Celle du bas, à droite, est déjà un carré, de 2 carreaux sur chaque côté.



En utilisant plusieurs de ces pièces, essayez de former un puzzle carré de 3 carreaux de côté.
Puis recommencez en essayant de former un puzzle carré de 4 carreaux de côté.
Puis recommencez en essayant de former un carré de 5 carreaux de côté. Puis un de 6, et ainsi de suite.

(On ne peut pas utiliser deux fois la même pièce dans un même puzzle.)

Dessinez les puzzles carrés que vous avez pu former.

5. À TABLE, AVEC MARTHE ET SES AMIS
(Cat. 3, 4, 5)

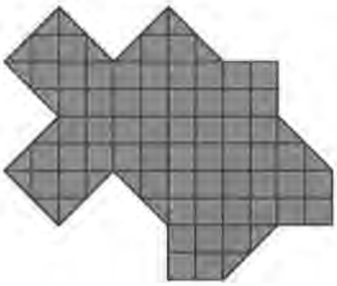
Marthe a invité pour son anniversaire ses meilleurs amis : Anne, Lucie, Georges, Aldo, Angélique, Gabriel et Martin. Ils se mettent à table pour manger la tourte et se placent de la manière suivante :

- chaque enfant est assis en face d'un autre enfant,
- Marthe et Angélique se mettent aux deux bouts de la table,
- Georges est à la gauche de Marthe,
- les prénoms de deux enfants assis l'un à côté de l'autre ne commencent jamais par la même lettre,
- chaque garçon est placé entre deux filles.

De combien de manières peuvent se placer Marthe et ses amis ?
Représentez par un dessin toutes les manières de placer les enfants que vous avez trouvées.

6. DÉCOUPAGE (Cat. 4, 5)

Catherine souhaite partager entièrement cette figure en 7 morceaux égaux. Tous les morceaux doivent être égaux, de la même grandeur et de la même forme.



Montrez où il faudrait découper la figure.
Expliquez comment vous avez trouvé votre découpage.

7. L'ÉNIGME DE MERLIN L'ENCHANTEUR
(Cat. 4, 5, 6)

Merlin l'enchanteur désire mettre à l'épreuve les compétences mathématiques du petit Semola, le futur roi Arthur. Il lui propose l'énigme suivante :

Le serrurier de notre village a trois fils.
Lorsqu'on additionne les trois âges de ces fils, on obtient 13 mais lorsqu'on les multiplie, on obtient 36. Le plus âgé des fils aide déjà son père à l'atelier.
Quel est l'âge de chacun des fils du serrurier ?

Après avoir bien réfléchi, Semola donne sa réponse. Merlin l'enchanteur est très satisfait. Semola a vraiment trouvé la bonne solution !

Résolvez vous aussi l'énigme de Merlin et justifiez votre raisonnement.

8. LA PARTIE DE DÉS (Cat. 5, 6)

Pauline et Jimmy jouent aux dés. Pour chaque partie, chacun lance son dé une seule fois.

Celui qui obtient le nombre le plus grand gagne la partie. (En cas d'égalité, on recommence.)
Ils font 5 parties. Pauline gagne 3 fois et Jimmy 2 fois. Et, chose étrange, lors de chacune des cinq parties, le dé de l'un des deux joueurs a montré « 1 ».

Mais Jimmy remarque que la somme de tous les nombres qu'il a obtenus vaut 6 de plus que la somme de tous les nombres obtenus par Pauline.

Indiquez les nombres que les deux enfants peuvent avoir obtenus dans les 5 parties.
Expliquez votre raisonnement.

9. L'ALBUM DE PHOTOS (Cat. 5, 6)

Elise a placé dans un album les photos prises durant ses vacances. Il y a 80 photos et Elise les a disposées sur 29 pages : dans certaines pages, elle a mis 4 photos et dans d'autres 2 photos.

Combien y a-t-il de pages avec 4 photos et combien avec 2 photos dans l'album d'Elise ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

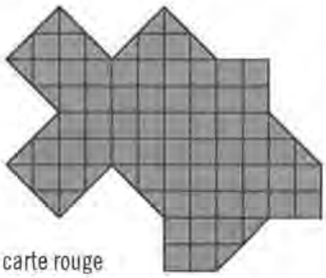
10. DES RECTANGLES, ENCORE DES RECTANGLES (Cat. 5, 6, 7)

Tracez 3 droites qui coupent un rectangle, de façon à former le maximum de nouveaux rectangles.

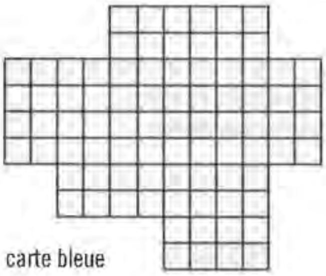
Dessinez votre rectangle et les trois droites. Combien de rectangles peut-on voir en tout dans votre figure ? Indiquez-les avec précision.

11. LES CARTES DE COULEUR (Cat. 6, 7)

Une classe de 21 élèves est divisée en groupes de trois élèves. Pour réaliser un collage chaque groupe doit recevoir un morceau de la carte rouge et un morceau de la carte bleue.



carte rouge



carte bleue

Mais attention :

- les deux cartes doivent être utilisées complètement,
- les morceaux d'une même couleur doivent être tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Comment faut-il découper les cartes ? Expliquez comment vous avez pu effectuer les découpages.

12. QUATRE A QUATRE (Cat. 6, 7, 8)

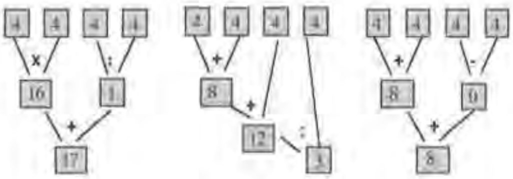
En utilisant exactement quatre fois le nombre « 4 », et en combinant ces quatre nombres avec les opérations arithmétiques (« + », « – », « x » ou « : » et en utilisant éventuellement des parenthèses) on peut former de nombreux nombres naturels.

Combien de nombres naturels impairs différents peut-on former de cette façon ?

Indiquez-les tous, clairement, comme dans les exemples suivants :

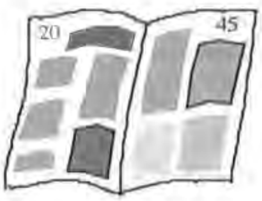
Exemples :
$(4 \times 4) + (4 : 4) = 16 + 1 = 17$
$(4 + 4 + 4) : 4 = 12 : 4 = 3$
$(4 + 4) + (4 - 4) = 8 + 0 = 8$
ce dernier exemple ne convient pas car il donne un nombre pair !

ou, sans utiliser de parenthèses :



13. UN QUOTIDIEN (Cat. 6, 7, 8)

Dans un quotidien formé d'un seul cahier, dans lequel 11 pages sont consacrées au sport, les pages 20 et 45 se trouvent sur la même face d'une feuille.



Combien ce quotidien a-t-il de pages ? Justifiez votre réponse.

14. LE NOMBRE AMPUTÉ (Cat. 7, 8)

Dans un jeu mathématique, on présente aux candidats le nombre suivant :

123456789101112131415161718192021...394041424344454647484950

On leur demande de biffer 70 chiffres de ce nombre, de manière à obtenir le nombre amputé le plus grand possible avec les chiffres qui restent, sans modifier leur ordre.

Parmi tous les candidats, la petite Génia est la seule à trouver ce nombre.

Écrivez entièrement ce nombre amputé et expliquez comment Génia a fait pour le trouver.

15. LES VACANCES (Cat. 7, 8)

Lors des dernières vacances d'été, les deux frères Dumont, les deux frères Dubois et les deux frères Dupré sont allés à l'étranger : trois d'entre eux sont allés en Grèce, deux en Angleterre et un en Allemagne.

Un de leurs amis dit : « Les frères Dumont sont allés en Angleterre et les frères Dubois en Grèce ».

Un autre dit : « L'un des frères Dumont est allé en Allemagne, les frères Dubois sont allés en Angleterre ».

Un troisième dit : « Les deux frères Dumont sont allés en Grèce et, en ce qui concerne les frères Dupré, l'un est allé en Angleterre et l'autre en Grèce ».

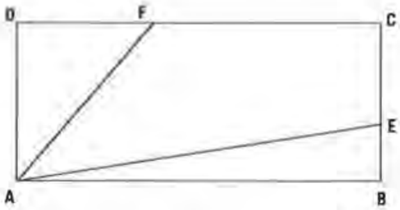
On sait que, pour chacun de ces trois amis, l'une de ses affirmations est vraie et l'autre est fausse.

Où les frères Dumont sont-ils allés en vacances ? Expliquez votre raisonnement.

16. LE TERRAIN DU PÈRE FRANÇOIS (Cat. 7, 8)

Le père François veut partager son champ rectangulaire entre ses trois fils, par deux clôtures rectilignes issues du sommet A, de manière que les trois parts soient de même aire.

Ce dessin représente un premier schéma de partage, mais le père François se rend bien compte qu'il faudra l'ajuster.



Où faudra-t-il placer les extrémités E et F des clôtures, sur les côtés BC et CD pour que le partage soit équitable ? Indiquez précisément la position de ces points et justifiez-la.

17. LA PINÈDE (Cat. 8)

Aldo possède une belle villa entourée d'un petit bois de pins. Malheureusement, ces arbres sont devenus secs pour cause de maladie et Aldo décide de les couper à la tronçonneuse. Il dit à son ami Louis qu'il réussira à effectuer ce travail en 6 heures. Louis, qui a une tronçonneuse plus puissante, affirme qu'il ferait ce travail en 4 heures.

S'ils travaillaient ensemble, combien de temps mettraient-ils pour couper tous les pins malades ? Expliquez votre raisonnement.

18. LE CHAMPIGNON (Cat. 8)

Pour représenter un champignon, Daniela a dessiné cette figure, en trois arcs de cercle :

- un quart de cercle d'extrémités A et B de centre C et de 8 cm de rayon ;
- un demi-cercle d'extrémités A et C ;
- un demi-cercle d'extrémités B et C.

Elle a ensuite colorié le « chapeau » et le « pied » du champignon.

Daniela est persuadée que le périmètre du chapeau est beaucoup plus grand que celui du pied du champignon, mais il lui semble que l'aire du pied est plus grande que celle du chapeau.

Qu'en pensez-vous ?

Trouvez les rapports entre les périmètres et entre les aires des deux parties de la figure.
Justifiez votre raisonnement.

SOLUTIONS, COMMENTAIRES ET RÉSULTATS DES PROBLÈMES DE L'ÉPREUVE II DU 11e RMT

François Jaquet
Coordinateur international de l'ARMT

Comme pour la première épreuve du 11e RMT (*Math-Ecole* 206, pp 8 à 16), nous donnons ici quelques extraits des « analyses a priori » qui, sous leur rubrique « analyse de la tâche », présentent les solutions et quelques procédures permettant de les obtenir. Ces extraits sont accompagnés de quelques commentaires issus des résultats de la section de Belluno, de l'examen des copies de la section de Cagliari[1], des remarques des correcteurs romands et des taux moyens de « réussite » attribués aux classes de Suisse romande, notés pour chaque catégorie en regard du titre du problème. (Cette « moyenne », M, se situe entre 4 et 0, où en général, 4 signifie : réponse juste avec explications et justifications », 3 : réponse dont les explications laissent à désirer, 2 : réponse sans aucune explication, juste ou avec une légère erreur de calcul, parfois incomplète selon les problèmes, 1 : début de recherche avec tentatives cohérentes, 0 : incompréhension du problème ou procédure totalement inadaptée.)

1. TU JOUES AVEC MOI ? (Cat. 3 : M = 3,56)

Excellente réussite à ce problème de billes, du genre de ceux qui illustrent le « champ conceptuel de l'addition » selon la didactique des mathématiques.

L'état initial étant connu, les élèves peuvent procéder en deux étapes :

- examiner le cas de la première partie : percevoir l'état initial (27) puis le gain (15) et en tirer le nombre des billes de Thomas à la fin de la première partie par une addition : 27 + 15 = 42
- passer à la deuxième partie et se rendre compte que l'état initial est 42 et l'état final est 51. En comparant ces nombres, déduire que Thomas a gagné des billes lors de la deuxième partie et en calculer le nombre

1. Comme les problèmes du RMT sont les mêmes pour toutes les sections qui organisent l'épreuve, il est intéressant d'analyser, parfois, d'autres copies que celles des classes de Suisse romande.

par une addition du genre $42 + \ldots = 51$ ou par une soustraction $51 - 42 = \ldots$ qui donne 9 billes gagnées.

Ils peuvent aussi considérer l'ensemble des deux parties : l'état initial est 27, l'état final est 51, en déduire qu'il y a un gain total de 24 billes, (qui se calcule par $27 + \ldots = 51$ ou $51 - 27 = \ldots$), et finalement considérer les gains de 15 lors de la première partie et de 24 pour l'ensemble et en déduire qu'il y a un gain de 9 lors de la deuxième partie par une opération avec des nombres qui représentent des transformations : $(+ 15) + \ldots = (+ 24)$ ou $(+24) - (+15) = \ldots$.

Mais cette deuxième démarche, prévue a priori, n'a pas été repérée dans les copies analysées des classes de Cagliari.

Voici un exemple de la première procédure, avec soustraction :

– (Trad.) *Réponse : dans la 2e partie Thomas en gagne 9.*
  Opérations[2] *: 27 + 15 = 42 ; 51 – 42 = 9*
  Raisonnement : On a vu que Thomas avait 27 billes et il en a gagné 15 et en tout il en avait 42, mais à la fin, il en avait 52 et nous avons compris qu'il avait de nouveau gagné, on a fait une soustraction 51 – 42 = 9, les billes gagnées sont 9. (Classe de troisième)

Dans deux cas sur douze (relevés par les correcteurs de Cagliari), les élèves ont remplacé la soustraction par une addition. Par exemple :

> (Trad.) *Opérations : 27 + 15 = 42 + 9 = 51*
> *Données : 27 : billes, 15 : gagnées dans la première partie, 51 : les billes en tout*
> *Solution : Dans la 2e partie, il a gagné parce que avant il avait 42 billes. Il en a gagné 9, parce que 42 + 9 font 51 (Classe de troisième)*

2. Pour des raisons de place et de facilité, nous reproduisons toutes les opérations des élèves « en ligne », dans cet exemple et les suivants, alors qu'elles sont systématiquement disposées « en colonnes », dans les protocoles des classes de Cagliari, selon les algorithmes habituels.

Dans le champ conceptuel de l'addition, les deux opérations « addition » et « soustraction » sont placées sur un même plan. Chronologiquement, pour passer de 42 à 51, il s'agit bien d'une addition de 9 (transformation « + 9 »). La recherche du nombre inconnu à partir des données 42 et 51 ($41 + ? = 51$) se fait formellement par la soustraction $51 - 42 = 9$. La question est de savoir si, dans un cas simple comme celui-ci où le « 9 » peut se trouver mentalement, sans opération écrite, il faut absolument exiger des élèves qu'ils effectuent une soustraction par écrit au moyen d'un algorithme en colonnes ? Dans une perspective socio-constructiviste, on aurait tendance à laisser la responsabilité du choix de l'opération à l'élève ; dans un enseignement qui s'appuie sur une construction linéaire des savoirs, « brique par brique », on fait entraîner la procédure « experte » dès le moment où elle peut être utilisée. Il s'agit d'une question de didactique dont les réponses diffèrent d'un pays à l'autre, d'une région à l'autre, ou même d'un maître à l'autre, selon ses conceptions de l'apprentissage.

2. COURSE D'OBSTACLES

(Cat. 3 : M = 2,00 ; Cat. 4 : M = 2.94)

Ce problème demande de savoir remonter dans le temps, selon les jours de la semaine, et d'effectuer simultanément une série de divisions par 2 : comprendre que si la course a lieu un dimanche, le jour du dernier entraînement est un samedi, prendre la moitié de 80 pour déterminer les 40 obstacles du vendredi, les 20 du jeudi, et ainsi de suite. À ce moment, il faut encore prendre en compte une donnée de l'énoncé : le nombre « impair » d'obstacles permettant de dire que c'est le mardi que Mario a commencé à s'entraîner car il a sauté 5 obstacles ce jour-là. C'est beaucoup pour des élèves de 3e année, ce qui explique le résultat moyen. C'est plus facile en 4e année, où les élèves sont capables de maîtriser simultanément toutes les relations nécessaires ainsi que la lecture du texte.

Lors de l'élaboration du problème, la contrainte de l'énoncé : « un nombre impair d'obstacles », ne s'est pas imposée d'office face à la première version qui mentionnait seulement « un certain nombre d'obstacles ». Il paraissait implicite à de nombreux lecteurs que, puisque la moitié de 5 n'est pas un nombre naturel, on s'arrête à ce moment. Il a fallu préciser que, si l'on n'exprimait pas clairement l'idée qu'il fallait aller le plus loin possible dans le compte à rebours, les solutions « mercredi 10 sauts ou « jeudi, 20 sauts » auraient aussi été acceptables. Ceci montre la force des habitudes ou des non-dits dans la rédaction des énoncés.

À la suite de cette rectification, on ouvrait une voie pour une stratégie non prévue initialement, mais que plusieurs classes ont utilisé. Elles ont procédé par essais successifs, à partir des nombres impairs 1, 3, 5, ... comme dans l'exemple suivant :

> *1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, non*
> *3, 6, 12, 24, 48, 96, non*
> *5 mardi, 10 mercredi, 20 jeudi, 40 vendredi, 80 samedi, oui.*

Pour ce problème, les moyennes des classes de Cagliari et de Belluno (Cat. 3 : M = 2,8 ; Cat. 4 : M = 3,6), sont significativement plus élevées que celles de Suisse romande. Cette différence est vraisemblablement due aux programmes scolaires. En effet, la division et les nombres impairs sont étudiés beaucoup plus tard en Suisse romande qu'en Italie.

3. LE COUVRE-LIT DE GRAND-MERE

(Cat. 3 : M = 1,81 ; Cat. 4 : M = 3,10)

Un premier énoncé de ce problème faisait état de deux rangs de carrés dans chaque sens mais sans préciser qu'il s'agissait des bords :

« ... Il y a 22 carrés dans la longueur et 15 carrés dans la largeur.

Les carrés bleus forment quatre lignes qui traversent toute la couverture : deux dans le sens de la longueur et deux autres dans le sens de la largeur.

Les carrés qui ne sont pas dans ces quatre lignes sont rouges ... »

Lors de la consultation, plusieurs sections ont trouvé cette version trop difficile pour des élèves de 3e année et ont demandé de placer les carrés sur les bords pour la version définitive. Le dénombrement des carrés bleus, et rouges, a en effet été laborieux pour certaines classes de catégorie 3, dans les régions où la multiplication n'est encore qu'abordée à ce degré.

Selon l'analyse de la tâche, les élèves pouvaient procéder par dessin et comptage des carrés rouges, ce qui ne s'est produit que quelquefois, en 3e année. Ils pouvaient aussi calculer le nombre total de carrés, par 22 x 15 = 330 et soustraire les carrés bleus par un calcul plus délicat, ce qu'un tiers des classes a fait. Mais, plus simplement, avec la version finale de l'énoncé, ils pouvaient constater que les carrés rouges forment un rectangle de 20 par 13 et que le nombre de carrés rouges était 13 x 20 = 260.

Cette procédure a été choisie par la moitié des classes, en général accompagnée d'un dessin et, souvent, du calcul du nombre total de carrés et des carrés bleus. Exemple d'une classe de troisième qui a procédé par la soustraction, délicate, des carrés bleus et a compté deux fois les carrés des angles :

> *22 x 15 = 330, 15 x 2 = 30, 22 x 2 = 44, 30 + 44 = 74, 330 – 74 = 256)* [3]
> (Trad.) *Raisonnement : En premier, nous avons trouvé l'aire puis nous avons trouvé le bord en multipliant le nombre des carrés de chaque côté par 2, puis en additionnant les résultats des 2 opérations nous avons trouvé combien il y a de carrés dans le bord. Enfin nous avons enlevé de l'aire le nombre de carrés du bord et trouvé le nombre de carrés rouges.*

Exemple de la dernière procédure mentionnée, avec de nombreux calculs non nécessaires mais vraisemblablement comme preuve (classe de troisième) :

> (Trad.) *Réponse : Nous avons dessiné la couverture en tenant compte des mesures que l'énoncé donne et en comptant les carrés qui se trouvent au centre de la couverture.*
> *Opérations : 13 x 20 = 260 nombre des carrés rouges, 22 x 15 = 330* – 70 = 260*
>
> (* écrit à côté de 330 : *nombre des carrés de toute la couverture*)

3. Opérations en colonnes, Voir note 2 précédente

(Sur le dessin de la couverture, les carrés bleus du bord sont tous numérotés, de 1 à 69, avec trois erreurs : absence du 8 sur le premier côté et répétition du 36 et 37 au passage du sommet opposé au départ.)

Exemple d'une procédure très complète d'une classe de quatrième :

a (22 x 15) = 330 *b (13 x 20) = 260*
c (330- 260) = 70 *d (15 + 15 + 20 + 20) = 70*

(C'est la seule copie où les opérations « en colonnes », sont précédées d'une écriture « en ligne, avec parenthèses.)
(Trad.) Raisonnement : *Nous avons dessiné la couverture comme c'est écrit dans l'énoncé. Nous l'avons coloriée en bleu et en rouge. Nous avons compté les carrés bleus et nous avons fait trois opérations mathématiques.*

(Les carrés bleus sont numérotés sur le dessin, de 1 à 15 sur les deux côtés de la largeur, de 1 à 20 sur les deux longueurs restantes)

Comme prévu lors de la demande de simplification de l'énoncé, l'influence des programmes semble déterminante sur la réussite. En Suisse romande, la réussite passe de 1,81 en 3e année, où la multiplication n'est qu'abordée, à 3,10 en 4e année, où elle devient plus instrumentale. (Les correcteurs romands relèvent que sur les 16 classes de 3e, 7 classes ont « 0 points » et 4 classes ont « 4 points » alors qu'en 4e, aucune classe n'a « 0 points » et 23 classes sur 37 ont « 4 points ». Ils n'ont pas attribué le maximum de points aux procédures par comptage seul). Les classes italiennes, qui étudient la multiplication, par le modèle de l'aire du rectangle, et son algorithme beaucoup plus tôt arrivent déjà à une réussite, pour les sections de Cagliari et Belluno de plus de 3,1 en 3e (ils ont attribué « 4 points » à la procédure par dessin et comptage) et de 3,75 en 4e.

4. PUZZLES CARRÉS

(Cat. 3 : M = 0,46 ; Cat. 4 : M = 1,03 ; Cat. 5 : M = 1,02)

Ce problème était inspiré de « Pièces en trop », de la finale du 10e RMT, moyennement réussi par les classes de 3e et mieux réussi par celles de 4e :

Aurélie a formé un carré avec les cinq pièces de son puzzle.

Malheureusement, son petit frère Théo a mélangé certaines pièces et il a encore ajouté une sixième pièce, venant d'un autre puzzle.

Voici les cinq pièces du puzzle et la pièce ajoutée :

Indiquez la pièce que Théo a ajoutée et reconstituez le puzzle carré d'Aurélie avec les cinq autres pièces. Comment avez-vous fait pour trouver la pièce en trop ?

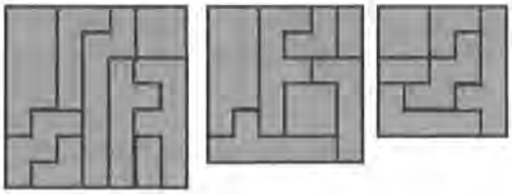
La plupart des classes avaient alors reconstitué le puzzle après découpages des pièces, mais quelques-unes seulement avaient pu justifier que la pièce en trop était l'une des deux de 6 carrés (différence entre l'aire totale des pièces, 31, et l'aire d'un puzzle de 5 x 5 : 25).

L'ambition était, pour le problème de « Puzzles carrés », de voir si les élèves étaient en mesure de passer du registre géométrique au registre numérique par certaines considérations sur les nombres de carrés des pièces.

L'analyse de la tâche prévoyait ceci :

- Découper les pièces ou les reproduire.
- Chercher à construire les puzzles demandés par manipulation des pièces, éventuellement après avoir vérifié numériquement que la solution est possible.
- Se rendre compte qu'il n'est pas possible de construire le carré 3 x 3 (si l'on part du carré 2 x 2 on ne peut le compléter par les pièces à disposition ou, en cherchant des pièces dont la somme des aires est 9, on n'en trouve pas qui permettent de réaliser un carré de 3 x 3). Pour le carré de 4 x 4, il n'y a que les cinq « plus petites » pièces qui conviennent, dont la somme des aires est 19 (en carreaux). Il faudrait donc ne pas utiliser celle de 3 carreaux et l'on constate après quelques essais que la construction n'est pas possible.

– Dessiner une solution pour, 5 x 5 et 6 x 6 et 7 x 7, par exemple :



Selon les expériences de plusieurs régions, la correction a été très difficile. On ne trouve presque pas de « 4 points » et plus de la moitié des classes obtiennent « 0 point ».

La seule stratégie utilisée (et aussi prévue) a été le découpage des pièces et le réassemblage par essais successifs. Mais cette procédure prend du temps et n'est pas très précise, surtout en cas de collage, où il y a des superpositions et, parfois, des « trous ».

En incluant un quadrillage sur la feuille-réponse ou en augmentant la dimension des 9 pièces, en améliorant la qualité des photocopies pour que le quadrillage des neuf pièces apparaisse clairement, on aurait sensiblement facilité la tâche des élèves [4].

Une seule classe romande, de 5e, a explicitement dit ne pas avoir essayé avec 8, 9 et 10 car « il n'y a que 49 petits carreaux dans les pièces et 7 x 7 = 49. »
Voici les critères d'attribution des points, retenus par la section de Suisse romande :

4 Trois carrés dessinés précisément (un de 5 x 5 un de 6 x 6 et un de 7 x 7), il y a plusieurs arrangements pour chaque taille de carré, un suffit)
3 Deux carrés dessinés
2 Un seul carré dessiné
1 Quelques tentatives non abouties, ou réponse « le 3 et le 4 sont impossibles », ou formation de carrés en utilisant deux fois la même pièce ou une autre que les 9 pièces données, ou en superposant des pièces
0 Incompréhension du problème (réponse du style « on a cherché mais on n'a pas trouvé », « c'est impossible », solutions rectangulaires, ...)

En conclusion, par rapport au problème « Pièces en trop » de l'an dernier, les dimensions des carrés et le nombre de pièces ont augmenté, les questions se sont multipliées, les pièces étaient plus petites. Tout cela a contribué à faire de « Puzzles carrés » un problème inadapté aux classes de 3e à 5e, comme en témoignent les résultats. L'analyse a priori a évidemment sous-estimé les difficultés de dessin et la durée de la recherche.

5. À TABLE, AVEC MARTHE ET SES AMIS

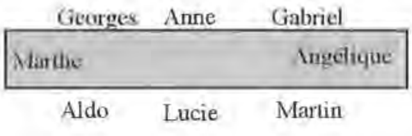
(Cat. 3 : M = 0,56 ; Cat. 4 : M = 1,89 ; Cat. 5 : M = 2,36)

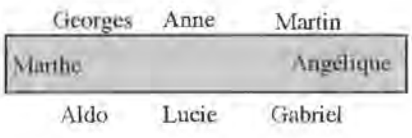
On touche ici aux positions relatives, en géométrie.

Les élèves devaient comprendre que la table est rectangulaire et placer Marthe et Angélique aux deux bouts, puis, se rendre compte que, sur chaque long côté de la table, il y a de la place pour trois enfants.

Georges étant déjà placé à gauche de Marthe, en tenant compte que les garçons et les filles doivent être alternés, Aldo ne peut être qu'à la droite de Marthe (car il ne peut être à côté d'Angélique).

Dans la suite des enchaînements logiques, les élèves devaient encore comprendre qu'il n'y a que Lucie qui peut être assise à côté d'Aldo (Anne ne peut y être). Finalement, ils devaient constater que Martin ou Gabriel (2 possibilités) sont à côté de Lucie, puis compléter l'autre côté avec les enfants qui restent :



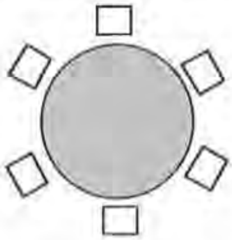


4. Le cas s'est effectivement présenté pour plusieurs écoles d'une section où les maîtres avaient copié le problème sur papier quadrillé de maille 1 cm x 1 cm. La réussite de leurs classes (plus de 2 points en moyenne) a été très nettement supérieure à celles des autres (moins de 1 point en moyenne), ce qui a posé un grave problème d'équité pour le classement.

Un problème tout à fait analogue avait déjà été posé dans un des premiers rallyes, et mieux réussi (Cat. 3 : M ≈ 1,7 ; Cat. 4 : M ≈ 1,9 ; Cat. 5 : M ≈ 2,9 en résultats convertis, d'une échelle de 0 à 3 points à l'échelle actuelle de 0 à 4 points) :

Rencontre internationale

Six chefs d'état, Australie, Belgique, Chine, Danemark, Estonie et France sont assis autour d'une table ronde. L'Australien n'est pas à côté du Belge ni du Chinois, le Belge est en face du Danois, l'Estonien est à la gauche de l'Australien, le Français n'est pas en face de l'Australien.



Disposez ces six chefs d'état autour de la table. Comment avez-vous fait pour trouver ?

Il n'y avait qu'une solution et 6 personnages au lieu de 8, mais surtout, la table était ronde, et dessinée.
Les correcteurs ont remarqué que dans le problème « A table, avec Marthe… » de nombreuses classes ont proposé quatre solutions : les deux ci-dessus et leurs symétriques, car une table rectangulaire dessinée horizontalement avec Angélique à gauche et Marthe à droite (du côté de la fenêtre comme l'a dit un groupe) représente une disposition différente de celles qui sont proposées ci-dessus. (Le barème d'attribution des points acceptait cette manière de voir). Pour la table ronde, ce problème ne s'était pas présenté, les élèves n'avaient pas « latéralisé » les dispositions car il n'y a pas de bouts de table.

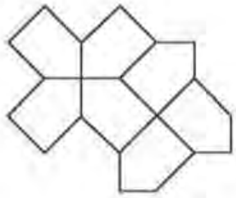
Une autre difficulté de la table rectangulaire est, pour les élèves de 3e année, le fait que les positions relatives ne sont pas du même genre lorsqu'on est sur un côté ou à une extrémité. Celui qui est au milieu d'un côté est vraiment « entre » ses deux voisins (sur un même segment) alors que celui qui est à un bout est « décalé » par rapport à ses deux voisins (avec lesquels il forme les sommets d'un triangle).

Les correcteurs ont aussi constaté des confusions de sexe à propos des prénoms de Marthe et d'Aldo.

Donc, ici comme pour le problème précédent, un petit changement d'énoncé (variables didactiques : nombre et forme de la table) peut produire des obstacles nouveaux dans la résolution.

6. DÉCOUPAGE (Cat. 4 : M = 2,70 ; Cat. 5 : M = 2,80)

Ce partage d'une figure en parties isométriques n'a pas posé de difficultés aux classes, qui ont parfaitement compris que la figure doit être partagée en 7 parties « égales » (isométriques) et qui ont procédé par essais pour trouver la solution :



7. L'ÉNIGME DE MERLIN L'ENCHANTEUR
(Cat. 4 : M = 2,02 ; Cat. 5 : M = 2,31 ; Cat. 6 : M = 2,77)

Il s'agit ici de rechercher tous le triplets de nombres dont le produit est 36 ou tous les triplets dont la somme est 13. L'analyse de la tâche prévoyait que les élèves pouvaient :

- procéder de manière systématique, par exemple, à partir de la décomposition multiplicative de 36, et trouver les triplets suivants : (1 ; 1 ; 36), (1 : 2 ; 18), (1 ; 3 ; 12), (1 ; 4 ; 9), (1 ; 6 ; 6), (2 ; 2 ; 9), (2 ; 3 ; 6), (3 ; 3 ; 4) et éliminer ceux dont la somme est différente de 13 pour ne conserver que (1 ; 6 ; 6) et (2 ; 2 ; 9). En conclure que le triplet qui détermine l'âge des fils du serrurier est (2 ; 2 ; 9) à cause de la dernière information faisant état de l'existence d'un fils aîné ; ou, en commençant par les sommes, déterminer de manière systématique les triplets dont la somme est 13 et aboutir à la même conclusion que précédemment.

- Rechercher au hasard des triplets de nombres et trouver les âges de 2, 2 et 9, sans pouvoir certifier que c'est la seule solution.

Les inventaires systématiques de l'analyse de la tâche sont apparus très rarement, et de manière la plus souvent incomplète. La grande majorité des classes ont trouvé le triplet (2 ; 2 ; 9) après quelques essais, « par chance » le plus souvent, mais elles n'ont obtenu que « 3 points ». Les « 4 points » étaient réservés aux réponses faisant apparaître l'unicité de la solution. Pour cela, il fallait envisager aussi le triplet (1 ; 6 ; 6) et le rejeter, comme l'ont fait certaines classes.

Dans le cas où les deux triplets étaient donnés comme réponse possible, les correcteurs romands l'ont acceptée pour les deux raisons suivantes : on peut envisager un enfant né en janvier, l'autre en décembre, (selon la réponse d'une classe de 4P) et les jumeaux peuvent être fille et garçon, donc l'aîné peut exister, (également proposé par une classe).

Mais plusieurs classes romandes, comme à Cagliari, ont écarté la solution (1 ; 6 ; 6) trouvée mathématiquement par avec des justifications pertinentes du genre :

- *C'est impossible car c'est des jumeaux et il n'y a pas d'aîné.*

- (Trad.) *Nous avons aussi trouvé une possibilité* $6 + 6 + 1 = 13$, $6 \times 6 \times 1 = 36$. *Nous l'avons écartée parce que le fils majeur doit être le seul et avoir, dans ce cas, 6 ans.*

- (Trad.) $6 \times 6 \times 1 = 36$, *il n'y a pas de fils majeur.*

Cette énigme était largement inspirée du 3e problème de la finale du 10 RMT :

3. Bonbons aux fruits (Cat. 3, 4)

Il y a trois sortes de bonbons dans le paquet de Grand-mère : à l'orange, au citron et à la fraise.

- *Il y a un nombre impair de bonbons dans le paquet.*
- *Les bonbons à la fraise sont les plus nombreux.*
- *Le nombre des bonbons à l'orange est le même que celui des bonbons au citron.*
- *Le produit des trois nombres est 36.*

Combien y a-t-il de bonbons de chaque sorte dans le paquet de Grand-mère ?

Même pour des finalistes, ce problème s'était révélé trop difficile en raison de l'incompréhension de la phrase : *Le produit des trois nombres est 36.* Les concepteurs des problèmes du 11e RMT ont donc renoncé à proposer « L'énigme de Merlin » en catégorie 3 et ont remplacé la phrase difficile par : lorsqu'on les multiplie, on obtient 36. Avec cette version simplifiée, on rencontre cependant encore, dans les réponses, des triplets du genre (3 ; 6 ; 6), (2 ; 9 ; 9), (18 ; 18 ; 1)… conçus par certains élèves comme des triplets dont le produit est 36 car, disent-ils : $3 \times 12 = 36$, $2 \times 18 = 38$, $36 \times 1 = 36$.

Il y a, derrière ces confusions, toutes les difficultés, souvent sous-estimées, des produits de plus de deux facteurs. Il s'agit là de faire intervenir une propriété extrêmement délicate : l'associativité de la multiplication qui crée encore de sérieux obstacles à l'école secondaire, en calcul littéral en particulier.

8. LA PARTIE DE DÉS

(Cat. 5 : M = 1,50 ; Cat. 6 : M = 2,50)

Après quelques essais, les élèves se sont convaincus que Jimmy doit gagner avec les plus grands écarts possibles, de 5 (le maximum) ou de 4, et perdre avec des écarts petits, de 1 (le minimum) ou de 2.

L'inventaire des différentes possibilités est le suivant :

> si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 5, les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 2 et l'on a alors des scores de 6 – 1, 6 – 1 contre, par exemple (1 – 2), (1 – 3) et (1 – 2)
>
> si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 4, les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 1 et l'on obtient les scores de (6 – 1) et (5 – 1) contre les trois scores : (2 – 1), (2 – 1), (2 – 1)

Dans plusieurs cas, les essais ont été organisés en tableaux des résultats de 5 lignes (une par partie) et de 2 colonnes (une par joueur).

Pour obtenir le maximum de points, il fallait donner les deux possibilités « (6 – 1), (6 – 1) pour Jimmy, (2 – 1), (2 – 1), (3 – 1) pour Pauline et (6 – 1), (5 – 1) pour Jimmy, (2 – 1), (2 – 1), (2 – 1) pour Pauline », avec description de la démarche et vérification. Les deux possibilités, sans explications sur la démarche avec seulement une vérification, ou une seule possibilité bien expliquée ne donnaient que 3 points. On relève une nette progression de la réussite de la 5e à la 6e année.

9. L'ALBUM DE PHOTOS

(Cat. 5 : M = 2,24 ; Cat. 6 : M = 3,00)

Il s'agit d'une variation sur un thème bien connu du RMT consistant à résoudre sans algèbre un « système de deux équations à deux inconnues ». La majorité des groupes ont suivi l'une ou l'autre des procédures prévues a priori par l'analyse de la tâche :

- Comprendre que toutes les pages doivent contenir au moins 2 photos (ce qui fait qu'il y a au moins 58 = 2 x 29 photos).
- Comprendre qu'il faut retirer du nombre total des photos le nombre (58) de celles qui sont utilisées pour remplir les 29 pages avec 2 photos (80 – 58 = 22) pour trouver le reste, qui, divisé par 2 donnera le nombre (11) de pages avec 4 photos. En déduire que le nombre de pages avec 2 photos est 18 (29 – 11 = 18).
- Ou déterminer des nombres cherchés par essais (simple liste des essais successifs, essais progressifs en forme de tableau… jusqu'à une préfiguration de l'équation « experte » $4x + 2(29 - x) = 80$).

D'autres ont cependant trouvé des stratégies non prévues comme :

- *29 x 4 = 116 ; 116 – 80 = 36 ; 36 : 2 = 18 ; 80 – 36 = 44 ; 44 : 4 = 11 ; et 44 + 36 = 80*, c'est-à-dire : faire l'hypothèse que toutes les pages ont 4 photos, constater qu'il y en aurait 36 de trop – soit 18 pages à 2 photos – puis trouver qu'il y a 44 photos sur les pages à 4 photos, c'est-à-dire sur 11 pages, avec une vérification du total des photos.
- dessin de 29 rectangles représentant les pages, puis de 2 petits carrés dans chaque rectangle représentant les photos et, par complément à 80, dessin de 2 petits carrés supplémentaires dans les 11 premiers rectangles, avec explications claires de la démarche.

Ces procédures ne sont certainement pas les plus simples, mais elles sont rigoureuses et efficaces dans le cas de ce problème. Elles méritent donc pleinement les « 4 points » des critères d'attribution : « Réponses justes (11 et 18) avec justification ». Les classes, nombreuses, qui ont trouvé la réponse juste mais qui se sont contentées de la vérifier, sans expliquer comment ils y étaient arrivés ont été créditées de « 3 points ».

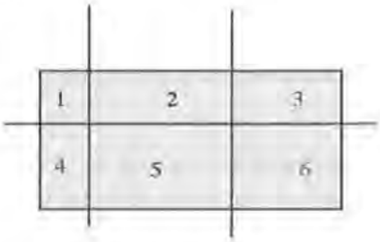
10. DES RECTANGLES, ENCORE DES RECTANGLES

(Cat. 5 : M = 1,54 ; Cat. 6 : M = 2,00, Cat. 7 : M = 3,26)

Il s'agit ici d'un inventaire « classique » dans les problèmes de concours, mais original toutefois, du fait que les élèves doivent placer eux-mêmes les droites avant de compter les rectangles de manière rigoureuse.

La grande majorité des classes a compris que les trois droites doivent être parallèles à un côté ou à l'autre du rectangle initial, mais pas les trois au même côté, parce que, dans ce cas on n'obtient pas le maximum de rectangles.

C'est au moment de déterminer les différentes catégories de rectangles et de dénombrer les rectangles de chacune d'entre elles que la t'ache s'est révélée plus délicate :



Les 18 rectangles
seuls : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 ;
par deux : 1-2 ; 2-3 ; 4-5 ; 5-6 ; 1-4 ; 2-5 et 3-6 ;
par trois : 1-2-3 et 4-5-6 ;
par quatre : 1-2-4-5 et 2-3-5-6 ;
l'ensemble : 1-2-3-4-5-6

En 5e, une majorité de classes n'a vu que les 6 rectangles de la partition, elles n'ont reçu qu'un seul point. Les « 4 points » correspondant aux 18 triangles deviennent nombreux en 6e, et majoritaires en 7e année.

11. LES CARTES DE COULEUR

(Cat. 6 : M = 2,00, Cat. 7 : M = 3,56)

La deuxième figure à partager, par rapport au problème 8, n'a pas posé trop de problèmes. C'est plutôt la consigne qui n'a pas semblé très claire dans ce cas où il y a deux figures en jeu.

12. QUATRE À QUATRE

(Cat. 6 : M = 2,83 ; Cat. 7 : M = 3,20 Cat. 8 : M = 2,88)

De nombreuses classes indiquent TOUS leurs calculs d'une manière peu conventionnelle. Ceci provient peut-être de l'usage de la calculatrice qui gère les priorités des opérations sans les parenthèses. En effet, en tapant « 4 + 4 : 4 + 4 = » certaines machines affichent 9 c'est-à-dire 4 + (4 : 4) + 4 d'autres 6 à savoir ((4 + 4) : 4) + 4. Enfin certains élèves écrivent 4 x 4 = 16 – 4 = 12 : 4 = 3 (succession des touches pressées et des résultats affichés à l'écran). Dans les attributions des points du RMT, la recherche prévaut sur la présentation des résultats. Les correcteurs de Suisse romande ont donc décidé de ne pas pénaliser ces entorses à « l'orthographe » mathématique.

La correction était rendue d'autant plus délicate que 2 réponses figuraient déjà dans les exemples, sur les 7 nombres impairs qu'on peut exprimer avec 4 « 4 ».

L'attribution des points de Suisse romande est la suivante :

4 Réponse complète (les **7** nombres 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17) avec détails des calculs (16 classes de 6e, 15 de 7e et 11 de 8e)
ou les **5** nombres impairs autres que les exemples avec détails des calculs. (2 classes de 6e et 2 de 7e)

3 Réponse complète avec le détail des calculs, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés conduisant au même nombre impair (doublons). (2 classes de 6e et 2 de 8e)
ou les **5** nombres impairs autres que les exemples, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés conduisant au même nombre impair (doublons). (3 classes de 6e et 2 de 7e)
ou **4** nombres impairs différents des exemples, avec détails des calculs (17 classes de 6e, 5 de 7e et 3 de 8e)

2 **4** nombres impairs différents des exemples avec détail des calculs, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés conduisant au même nombre impair. (4 classes de 6e, 1 de 7e et 2 de 8e)
ou **2** à **3** nombres impairs différents des exemples avec erreurs et doublons ou sans erreur (10 classes de 6e, 4 de 7e et 4 de 8e)

1 **1** nombre trouvé (différent des exemples) avec ou sans erreurs ajoutées (3 classes de 6e)
ou plusieurs nombres trouvés mais nombreuses réponses fausses laissant supposer une incompréhension du problème (1 classes de 6e et 1 de 8e)

0 Incompréhension du problème (2 classes de 6e, 2 de 7e et 3 de 8e)

Malgré l'attention portée aux critères d'attribution des points lors de l'analyse a priori, il y a toujours des imprévus et, par conséquent, des débats délicats entre les correcteurs. C'est le prix à payer pour la crédibilité des résultats des épreuves du RMT et de leur valeur pédagogique. D'autres compétitions procèdent plus simplement, par dichotomie entre réponses « entièrement justes » et les autres, sans relever toutes les erreurs ou réponses partielles.

13. UN QUOTIDIEN

(Cat. 6 : M = 2,59 ; Cat. 7 : M = 3,03 ; Cat. 8 : M = 3.00)

Analyse de la tâche :

– Découvrir que les 11 pages consacrées au sport n'ont pas d'influence sur la solution du problème.

- Observer, sur un journal ouvert ou sur un modèle, les paginations des feuilles lorsqu'elles sont séparées: (pages impaires à droite, « sauts » de 2 en 2 d'une feuille à l'autre...). En déduire que le recto de la feuille « 20 et 45 » est suivi du recto des feuilles « 18 et 47 »; « 16 et 49 », « 14 et 51 » jusqu'à « 2 et 63 ». Découvrir qu'au verso de cette dernière feuille, on a les pages 1 et 64 et que, par conséquent, le quotidien a 64 pages.

- Ou découvrir, toujours par des observations, que dans un quotidien ou une revue, la somme des deux numéros de page disposés sur le même côté d'une feuille est constante et vaut un de plus que le nombre de pages de la revue. Dans le cas présent: $20 + 45 - 1 = 64$.

- Ou calculer le nombre des pages intérieures qui précèdent la feuille indiquée, de 21 à 44, c'est-à-dire 24 pages, et calculer le nombre des autres pages, jusqu'à 20 y compris et dès 45 y compris, c'est-à-dire $40 = 20 \times 2$ et finalement faire la somme pour arriver au nombre total de pages: $24 + 40 = 64$.

- Ou observer qu'il y a 19 pages qui précèdent la page 20 et, par conséquent, 19 pages aussi qui suivent la page 45 et donc que le nombre total des pages du journal est $45 + 19 = 64$.

Voici les commentaires des correcteurs des classes romandes:

1. Le taux de réussite totale (« 4 points ») varie peu d'un niveau à l'autre: 48 % en 6e et 7e, 51 % en 8e.

2. La majorité des classes (46 au total) ayant réussi utilisent la résolution de la pagination, avec presque toujours la liste complète des pages d'un feuillet jusqu'à 1 – 64 et souvent également jusqu'à 32 – 33.

3. Seules 14 classes (dont 10 de 6e, 3 de 7e et 1 de 8e) utilisent une résolution basée sur le nombre de pages ($45 + 19$ ou plus rarement $20 + 24 + 20$). Il est étonnant de constater que cette résolution est plus prisée en 6e ! 4. Seules 5 classes (4 en 6e et 1 en 7e) se laissent abuser par les 11 pages de sport. À noter: la quasi-totalité des classes ayant réussi le problème passe sous silence la non-influence de ces 11 pages !

14. LE NOMBRE AMPUTÉ
(Cat. 7: M = 1,10; Cat. 8: M = 1,33)

Ce problème s'est révélé très difficile et a déconcerté les élèves. Les calculs eux-mêmes ne sont pas compliqués, mais c'est l'appropriation qui présente des obstacles et, surtout, les connaissances de notre système de numération qui ne sont pas disponibles. On s'en rend compte à la lecture de l'analyse de la tâche:

- Observer le nombre donné et comprendre qu'il a $9 + (41 \times 2) = 91$ chiffres ou l'écrire complètement (ce que de nombreuses classes ont fait). Comprendre ensuite que le problème consiste à choisir les 70 chiffres à biffer, pour n'en conserver que 21.

- Se rendre compte que, parmi les nombres de 21 chiffres, le plus grand est composé de chiffres « 9 » uniquement, mais que, dans le cas présent, il faut se contenter de celui qui a le plus grand nombre possible de chiffres « 9 » au début (ce qui n'a pas été perçu par la grande majorité des classes).

- Comprendre alors qu'il faut biffer successivement les 8 premiers chiffres, laisser le « 9 », biffer la suite des chiffres « 10111213...1617181 » (il y en a 19) et conserver le « 9 » (de « 19 »), biffer la suite des chiffres « 021222324...27282 » (il y en a de nouveau 19) et conserver le « 9 » (de « 29 »), etc.

- Calculer que, en atteignant le « 9 » de « 39 », on a déjà biffé $8 + (3 \times 19) = 65$ chiffres et qu'il n'en reste plus que 5 à biffer, ce qui ne permet pas d'aller jusqu'au « 9 » de « 49 ». Il reste maintenant le nombre 9999404142434445...

- Comprendre que Génia a trouvé sa solution en biffant encore les quatre chiffres « 0 », « 1 », « 2 », « 3 » – dont la valeur est inférieure à 4 – qui apparaissent après la séquence « 9999 » et l'un des chiffres « 4 » qui se présente après cette séquence.

- Noter le nombre amputé le plus grand possible: 999944444454647484950.

L'incompréhension d'un problème de ce genre est générale. Les taux de réussite sont encore significativement plus bas dans les autres sections qu'en Suisse romande. Il semble que, dans les programmes scolaires de tous les pays, la numération et ses principes sont considérés comme « acquis » lors des premières années de l'école primaire et qu'on ne s'y intéresse plus du tout au-delà. Cette constatation rejoint celles qui concernent les problèmes des épreuves précédentes sur le même thème, par exemple « Le vieux compteur » (problèmes 3 et 9 de l'épreuve I du 11e RMT, commentés dans *Math-Ecole* 206), « La chasse aux trois » (problème 3 de l'épreuve I du 10e RMT, commenté dans *Math-Ecole* 201)... Il paraîtrait judicieux de laisser la numération à l'étude tout au long de la scolarité pour renforcer les connaissances bien superficielles que les élèves ont de notre système de base dix.

15. LES VACANCES
(Cat. 7 : M = 2,33, Cat. 8 : M = 2,85)

En italien, les noms des frères étaient « Monti », « Collina » et « Prati » – qui n'ont pas pu être traduits littéralement par « Desmontagnes », « Descollines » et « Delaprairie ». Cette suggestion topographique nous a valu une belle réponse, d'une classe italienne :

> *I fratelli Monti sono andati in vacanza in Grecia.*
> *Per risolvere questo problema ci siamo affidati alla cartina fisica dell'Europa.*
> *Dalla nostra ricerca è risultato che in Inghilterra c'è maggioranza di pianure, in Germania prevalgono le colline e in Grecia vi sono soprattutto monti con una bassa percentuale di colline,*
> *Quindi : Inghilterra : 2 Prati, Germania : 1 Collina ; Grecia : 2 Monti + 1 Collina'*
>
> (Trad. *Les frères Dumont sont allés en vacances en Grèce.*
> *Pour résoudre ce problème, nous nous sommes référés à la carte de géographie physique de l'Europe.*
> *D'après nos recherches, il s'avère que l'Angleterre est en majorité composée de plaines, en Allemagne ce sont les collines qui sont les plus nombreuses, alors qu'en Grèce il y a surtout des montagnes, avec un faible pourcentage de collines. Donc, en Angleterre : les 2 « Delaprairie », en Allemagne : 1 « Descollines », en Grèce : 2 « Desmontagnes » et 1 « Descollines ».)*

Au-delà de cette anecdote on peut relever la bonne réussite des classes de Suisse romande qui ont su analyser chacune des phrases, émettre des hypothèses et éliminer celles qui étaient contredites par d'autres affirmations de l'énoncé, selon l'analyse de la tâche :

– Analyser chacune des phrases sachant qu'une donnée est exacte et l'autre fausse. Si on suppose que dans la première phrase, la première information est exacte, sur les frères Dumont, la seconde est fausse, sur les frères Dubois. L'hypothèse serait alors : « Les Dumont sont allée en Angleterre, les Dubois ne sont pas allés en Grèce ». Dans ce cas, les informations de la seconde phrase seraient les deux fausses, parce qu'un des Dumont ne pourrait être allé en Allemagne et les deux Dubois en Angleterre.

  Il faut donc changer d'hypothèse dans la première phrase et considérer comme vraie l'information sur les frères Dubois (les deux en Grèce) et fausse celle qui concerne les frères Dumont. Dans la deuxième phrase, l'information sur les Dubois est donc fausse et celle disant qu'un des frères Dumont est allé en Allemagne est vraie.

  Dans la troisième phrase, l'information sur les frères Dumont est alors fausse et celle qui concerne les frères Dupré vraie (l'un en Angleterre et l'autre en Grèce) est vraie.

  À ce point, il ne manque que l'autre frère qui est allé en Angleterre. Par exclusion, on en déduit que c'est un des frères Dumont.

Certes, les « 4 points : réponse exacte (l'un en Angleterre et l'autre en Allemagne) avec explications claires et correctes » ne sont pas majoritaires car la rigueur des déductions logiques n'est pas toujours suffisante, mais la solution juste est presque toujours présente.

16. LE TERRAIN DU PÈRE FRANÇOIS
(Cat. 7 : M = 1,12 ; Cat. 8 : M = 1,33)

L'analyse de la tâche prévoyait des méthodes générales (algébriques) de résolution ou des stratégies s'appuyant sur des exemples numériques :

- Comprendre que les deux clôtures (deux segments) sont disposées de façon que les trois parties ainsi formées soient équivalentes, c'est-à-dire que leur aire soit le tiers de l'aire du rectangle.

- Désigner par a et b les dimensions du rectangle (respectivement base et hauteur ou vice-versa), exprimer l'aire (ab) et calculer l'aire que doit avoir chaque partie : $(ab)/3$)
  Comprendre que b est un côté du triangle ADF et a un côté du triangle ABE.
  Calculer $DF = 2\left(\frac{ab}{3}\right) : b = \frac{2}{3}a$ et $EB = 2\left(\frac{ab}{3}\right) : a = \frac{2}{3}b$
  et conclure que le point E doit être à une distance 2/3b du sommet B et le point F à une distance 2/3a du sommet D.

- Ou mesurer les dimensions du rectangle de la figure, à la règle (cm.7,8 et cm.3,6) et en calculer l'aire (28,08), puis l'aire de chaque partie (9,36) ; calculer la mesure de BE (18,72 : 7,8 = 2,4) et la mesure de DF (18,72 : 3,6 = 5,2), et placer ensuite les segments.

- Ou choisir pour le rectangle des mesures hypothétiques (par exemple : dimensions 15 et 6), faire un dessin sur papier quadrillé ou un schéma et les calculs correspondants comme précédemment, pour en conclure que les points E et F sont aux deux tiers des côtés correspondants, à partir de B et de D respectivement.

Mais il faut bien l'avouer, même si la formule de l'aire du triangle est bien connue en 7e et 8e, elle reste limitée aux problèmes « d'application directe » où la figure est donnée et il ne reste qu'à mesurer et appliquer l'algorithme de calcul « base fois hauteur, divisé par 2 ».

17. LA PINÈDE (Cat. 8 : M = 1,81)

Ce type de problème était « classique », avant les réformes de l'enseignement des mathématiques de la deuxième partie du XXe siècle. On le résolvait selon des méthodes bien rodées – mais aussitôt oubliées après l'étude du chapitre des « baignoires et des rencontres de cyclistes ou autres personnages mobiles ». L'algèbre qui s'est substituée à l'arithmétique à l'école secondaire, ne semble pas fournir aux élèves des instruments plus efficaces, comme le disent les correcteurs de Suisse romande :

« Aucune classe ne résout ce problème par équation ! Cela est normal car en 8e l'outil équation ne leur est pas encore très familier ! . Autre commentaire : problème juste ou faux !!! Réponses justes (4 points) Réponses fausses (0 et 1 pt) Il n'y a pas de milieu, aucune classe n'a obtenu 2 ou 3 points ! »

Il paraissait pourtant, selon l'analyse de la tâche faite a priori (ou la pinède complète est représentée par 12 carrés, plus petit commun multiple de 6 et 4) que les élèves avaient les moyens de s'en tirer, pour autant qu'ils aient quelques rudiments de calcul des fractions ou une bonne maîtrise de la linéarité :

- En une heure, Aldo couvre 2 carrés et Louis en couvre 3, donc, ensemble, 5 carrés ; si 5 carrés correspondent à 60 minutes, 1 carré correspond à 12 minutes et, par conséquent, ils mettront 2 heures et 24 minutes.

- Ou utiliser des fractions et une équation du premier degré pour rechercher la solution, en choisissant l'heure comme unité de temps :
  1/4+1/6 = 5/12 du travail effectué en 1 heure ;
  1/12 correspond à 12 minutes, c'est-à-dire 1/5 d'heure, et ainsi les deux amis mettent ensemble 2 heures et 24 minutes.

18. LE CHAMPIGNON (Cat. 8 : M = 1,96)

Résultats mitigés à ce problème[5] qui requiert la connaissance des relations entre le rayon, la longueur de la circonférence et l'aire du disque ainsi que la maîtrise des

5. Même pour la Suisse romande où les classes des degrés 7 et 8 participantes au RMT sont en majorité issues des sections prégymnasiales des différents cantons, par rapport aux classes italiennes totalement hétérogènes, où les taux de résussite à ce genre de problème, à exigences cognitives ambitieuses, sont nettement inférieurs.

calculs avec le nombre π (et non pas 3,14 ou la valeur donnée par la calculatrice).

- Observer la figure, la redessiner ou la subdiviser pour comprendre comment s'articulent ses différentes parties, que le rayon de chacun des deux demi-cercles est la moitié du rayon du quart du « grand » cercle, AB, que les deux demi-cercles se divisent chacun en deux parties égales, AI et IC d'une part, BI et IC d'autre part, que le triangle ABC est rectangle en C, …

- Le calcul des périmètres peut se faire algébriquement ou en prenant la valeur du rayon.
  si r est le rayon des « petits » cercles, le périmètre du « pied » est $2(2\pi r/4) = \pi r$, le périmètre du « chapeau » est $\pi r + 2\pi(2r)/4 = 2\pi r$, c'est-à-dire le double de celui du « pied ». Avec une valeur de $r = 4$, on trouve 4π et 8π ou des approximations comme $\approx 12{,}56$ et $\approx 25{,}12$ (à ne pas confondre avec les nombres réels)

- La comparaison des aires peut se faire par soustraction. Celle d'un demi-pied (segment de disque) est la différence entre l'aire d'un quart de disque et celle d'un triangle (fig. 1). L'aire du pied est $2\pi r^2/4 - 2r^2/2 = \pi r^2/2 - r^2$

  L'aire du chapeau est celle d'un quart de « grand disque » à laquelle on soustrait successivement le triangle et les deux « petits » segments de disque (v. fig. 2) : $\pi(4r^2)/4 - 4r^2)/2 - (\pi r^2/2 - r^2) = \pi r^2/2 - r^2$ et l'on constate ainsi l'équivalence des deux figures. Avec la valeur de $r = 4$, on trouverait $8\pi - 16$ ou, avec l'approximation scolaire de π par 3,14 l'aire de chaque partie serait $\approx 9{,}12$.

- On peut aussi ne pas effectuer les calculs en affirmant de manière explicite que, par exemple, les « petits » segments de disque valent le quart du « grand » étant donné que le rayon de ce dernier est le double de celui des premiers.

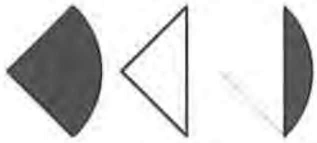
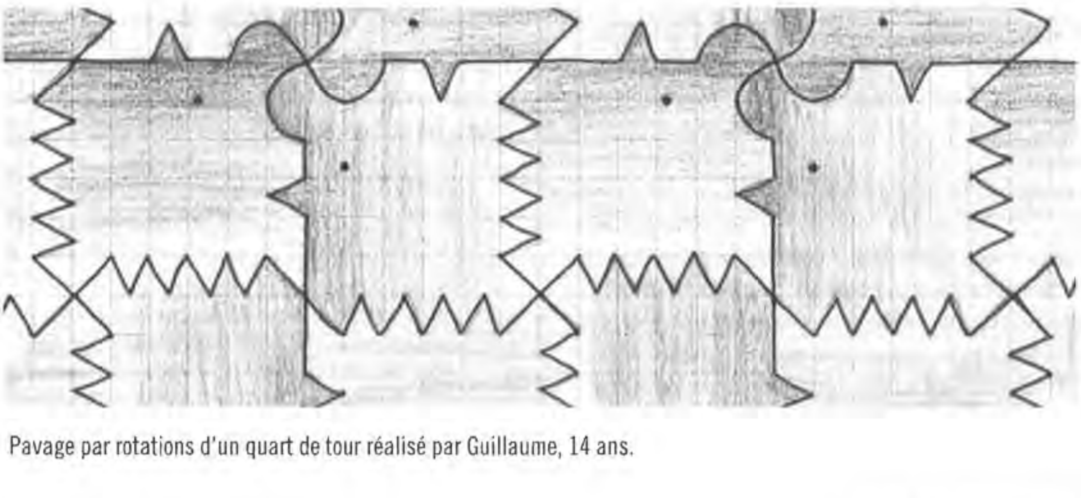


fig. 1

fig. 2



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Guillaume, 14 ans.

DES PISTES DE RÉFLEXION DIDACTIQUES POUR CONSTRUIRE LA DROITE NUMÉRIQUE EN ÉQUIPE ÉDUCATIVE

(2e PARTIE)

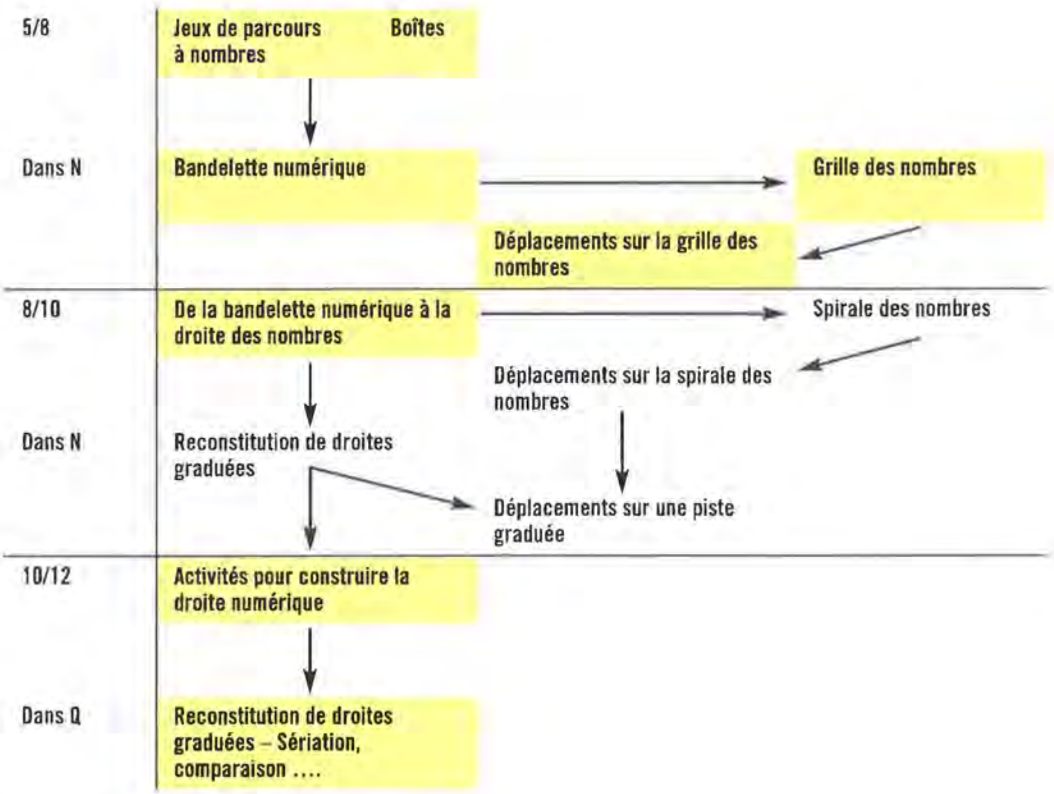
Pierre Stegen et Annick Sacré
Équipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques, Université de Liège

[ndlr] Voici le dernier d'une série de quatre articles sur la droite numérique, qui contient encore de nombreuses propositions pratiques, pour des élèves de 8 à a0 ans cette fois-ci. Merci à nos collègues de Liège de cette contribution et à la revue belge, *Ecole des années 2000*, de nous autoriser à reproduire cet article.

Introduction

Dans de précédents articles, nous nous sommes intéressés à la construction de la droite numérique à l'école primaire, au niveau spécifique du cycle 10/12 (*Math-Ecole*, 202 et 203, juin et août 2002), puis à l'échelle plus globale de l'école primaire au départ de la question : ***« quelles activités mettre en place pour permettre aux élèves de construire, en cycles d'apprentissage, la droite numérique ? »*** (*Math-Ecole*, 205 janvier 2003).

A cette occasion, nous avons proposé la progression didactique suivante :



- Les cases colorées renvoient aux activités présentées dans les articles précédents.

- La première colonne de ce tableau situe les cycles dans lesquels s'inscrivent nos propositions d'activités. On rappelera que nous avons choisi de travailler dans N aux cycles 5/8 et 8/10, et de réserver au cycle 10/12 le travail de positionnement de nombres rationnels sur une droite numérique.

- La deuxième colonne présente la manière dont nous envisageons la construction de la bandelette numérique puis son évolution : le passage de la bandelette numérique à la droite numérique.

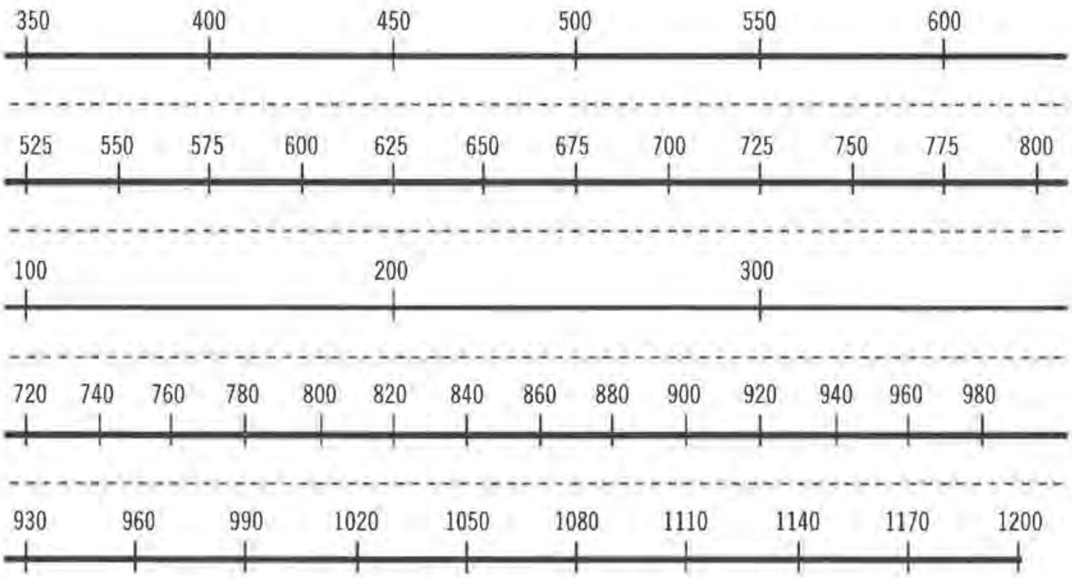
- La quatrième colonne détaille des activités qui permettent aux élèves de construire et d'utiliser deux autres types de référents. Nous faisons l'hypothèse que ceux-ci sont plus utiles aux élèves (du cycle 5/8 et du début du cycle 8/10) pour structurer l'univers des nombres entiers.

- Dans la troisième colonne, on trouve des activités de déplacements sur les référents construits par les élèves. Ces activités leur seront utiles pour effectuer des opérations (additives et soustractives) au départ des référents.

Reconstitution de droites graduées

Cette activité peut être menée avec l'ensemble de la classe, les enfants effectuant la recherche seuls ou par groupe de deux. Chaque enfant (ou chaque groupe de deux enfants) reçoit une feuille sur laquelle sont représentés cinq segments d'une partie de droite graduée. Tous les segments sont construits sur la base d'une même échelle, mais présentent des graduations différentes (de 50 en 50, de 25 en 25, de 100 en 100, etc.).

Exemple :



Il s'agit de reconstituer la portion de droite correspondant à ces segments (dans l'exemple ci-dessus, elle va de 100 à 1200).

Pour ce faire, les enfants procèdent comme ils l'entendent, certains vont choisir de découper et éliminer les parties de segments qui se révèlent superflus (certains segments se chevauchant partiellement), d'autres vont procéder par recouvrement.

Lors de l'expérimentation de cette activité, certains enfants « complétaient » les segments de droite en indiquant les nombres sur toutes les graduations (ou en sous-graduant certains segments), avant de procéder aux raccords.

Lorsque la portion de droite est reconstituée, l'enseignant peut inviter les enfants à la graduer de 10 en 10, ou leur demander d'y situer différents nombres, de manière plus ou moins précise selon les nombres demandés (par exemple, 150, 310, 825, 1001, etc.).

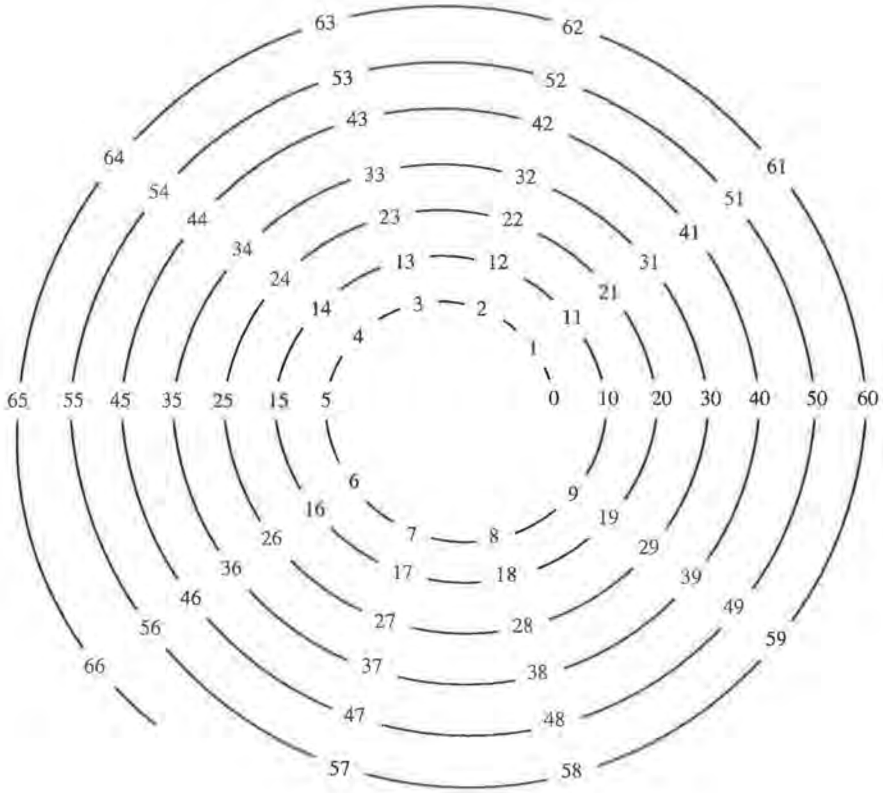
Lors de la synthèse, l'enseignant fera porter la discussion sur les graduations, leur régularité et leur importance.

La spirale des nombres

La grille des nombres permet d'organiser la bandelette numérique pour faire apparaître les régularités de la suite des nombres (jusque 100). La spirale des nombres permet d'organiser la chaîne numérique (en allant au-delà de 100) et de constater que les régularités déjà observées sur la grille des nombres se prolongent au-delà de celle-ci.

Étape 1 : découverte et appropriation du matériel

Cette première étape est individuelle : chaque enfant reçoit une spirale, vierge, et a pour tâche d'y écrire la suite des nombres de 1 en 1.



Dans un premier temps, on peut laisser les enfants commencer la suite à 0 ou à 1, mais lors d'une reprise de cette activité, il sera intéressant d'imposer que le nombre de départ soit supérieur à 100. Les enfants ont ainsi la possibilité d'aller de plus en plus loin dans l'écriture de la suite des nombres. Une première mise en commun permet de vérifier que chacun a complété correctement la spirale (en partant de 0, on arrive à 137 ; en partant de 1, on arrive à 138).

Les enfants sont alors invités à repasser en rouge chacun des « rayons » de la spirale (ou à utiliser une couleur différente pour repasser chaque « rayon »). Ce faisant, ils vont faire différents constats, tels que « le long d'un rayon, on avance de 10 » ou encore « sur un même rayon, le nombre d'unités est toujours le même ».

Des observations menées dans des classes font apparaître qu'il est très important de laisser du temps aux élèves pour s'approprier ce référent.

Étape 2 : le jeu de la spirale

Une fois que la spirale est construite et que les enfants ont observé les régularités qu'elle faisait apparaître, l'enseignant peut proposer le jeu suivant. Les enfants sont groupés par trois autour d'une spirale : deux joueurs et un vérificateur. Chaque joueur place son pion sur le premier nombre de la spirale. Ils tirent ensuite, chacun à leur tour, un carton nombre (la pile de cartons comprend des cartons verts, portant les nombres de 5 à 25, qui permettent d'avancer, et des cartons rouges, portant les nombres de 1 à 15, qui font reculer, mais pas en deçà du premier nombre de la spirale). Le premier joueur qui tire un carton vert commence la partie. Le gagnant est celui qui atteint la fin de la spirale en premier.

Ce jeu permet à l'enseignant d'observer et aux élèves d'expérimenter les différentes stratégies adoptées :

- *certains choisissent de compter leurs pas sur la spirale un à un,*
- *d'autres commencent par compter les dizaines (en progressant, ou en reculant, de rayon en rayon) avant de compter les unités,*
- *d'autres encore commencent par compter les unités (en avançant ou reculant sur la ligne) avant de compter les dizaines,*
- *d'autres enfin effectuent le calcul et se placent directement sur la case d'arrivée.*

La mise en évidence de procédures peut aider les enfants à choisir celle qui semble la plus efficace.

A cette occasion, la phase de mise en commun et de découverte des différentes procédures utilisées sera facilitée par la présence au tableau d'une spirale géante, sur laquelle chacun pourra visualiser les démarches.

Étape 3 : la spirale, outil de calcul

La spirale (comme la grille des nombres) constitue également un support intéressant pour le calcul mental. Ainsi, on peut poser aux élèves le problème suivant : « Je suis sur la case 48. Je tire un carton vert marqué 24 et un carton rouge marqué 8. Sur quelle case vais-je arriver ? ».

L'intérêt de cette activité réside dans les formalisations mathématiques qu'elle va permettre lors de la validation des réponses formulées par les élèves :

- *Tout d'abord la transcription mathématique de ce défi prend la forme suivante : « (48 + 24) – 8 = ». Cette formalisation peut déboucher sur une réflexion sur le rôle et l'utilité des parenthèses…*
- *Ensuite, selon les déplacements effectués*

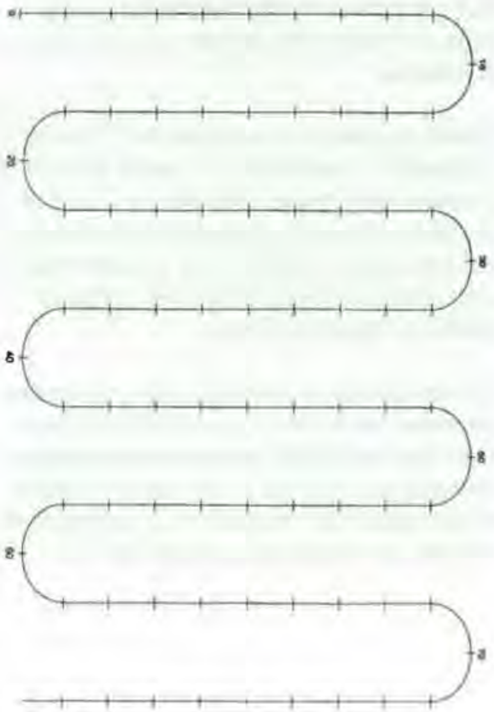
par les élèves sur la spirale, le résultat partiel de la somme de 48 et 24 va pouvoir se traduire, soit en « 48 + 20 + 4 » ; soit en « 48 + 4 + 20 ».

– *Pour soustraire 8 de ce résultat partiel, deux stratégies sont possibles : soustraire directement 8 ou soustraire 10 puis ajouter 2. Ces deux dernières opérations peuvent constituer l'amorce d'une réflexion sur des stratégies de calcul mental (d'un point de vue opératoire).*

La spirale se prête également à d'autres défis, comme la recherche des écarts (« Quel est l'écart entre la case 23 et la case 107 ? »).

Déplacements sur une piste graduée

Cette activité nécessite la participation de trois enfants : un secrétaire et deux joueurs. Le matériel mis à leur disposition se compose d'une piste (graduée de 1 en 1, avec marquage de tous les nombres), de 30 cartes (sur lesquelles sont écrits des nombres, inférieurs à 10, qui indiquent de combien il faut avancer – nombres verts – ou reculer – nombres bleus) et, pour chaque joueur, d'un jeton et d'une feuille où noter ses positions successives.



Feuille de route d'un joueur

Départ 30

Feuille de secrétaire

	Joueur A	Joueur B
1er coup		
2e coup		
3e coup		
4e coup		
5e coup		

Au début de la partie, chaque joueur place son pion sur la position 30 (par exemple). Le premier joueur tire alors une carte et déplace son pion selon les indications de celle-ci. Le deuxième joueur fait de même. A chaque tour, les joueurs notent la position atteinte après leur déplacement, tandis que le secrétaire note les déplacements effectués par les deux joueurs. A la fin de la partie (après 5 coups, par exemple), le gagnant est celui qui occupe la position la plus proche (ou la plus éloignée, selon ce qui a été décidé en début de partie) de 0.

L'intérêt de cette activité réside dans le moment de synthèse qui la prolonge. A ce moment, les différents groupes de 3 élèves sont invités à échanger leurs feuilles de notation. Chaque groupe a ainsi l'occasion de mettre en relation les positions indiquées par les feuilles des joueurs et les déplacements indiqués par la feuille du secrétaire.

Une mise en commun suit cette phase de vérification. Elle permet aux différents groupes d'exprimer les incohérences qu'ils ont éventuellement pu observer. Elle permet également de constater les différentes notations utilisées par les secrétaires pour coder les déplacements :

Soit en utilisant les couleurs	Soit en utilisant des mots	Soit en utilisant des signes
3 vert	avancer de 3	+ 3
8 bleu	reculer de 8	-8

Lors de la vérification et de la mise en commun, on privilégie les écritures additives et soustractives ($30 + 3 = 33$; $33 - 8 = 25$).

Variante

L'activité est proposée une deuxième fois, avec une piste graduée de 1 en 1 et allant, par exemple, de 90 à 240. Cette fois, seuls les multiples de 10 sont marqués sur la piste et les cartes servant à indiquer les déplacements portent des nombres inférieurs à 30. La position de départ est 130 (par exemple). La présence d'un secrétaire n'est plus nécessaire, chaque joueur note sa position de départ, son déplacement et sa position d'arrivée. En fin de partie, les joueurs échangent leurs feuilles de notation et vérifient, sans piste, les déplacements effectués par leur adversaire.

Le fait que seuls les multiples de 10 soient indiqués sur la piste devrait inciter les enfants à abandonner le (dé)comptage par 1 et à se déplacer par bonds. Ils devraient ainsi anticiper leur position d'arrivée (et, s'ils décomposent le déplacement à effectuer, certaines positions intermédiaires).

Lors de la mise en commun, il est intéressant de mettre en évidence les positions intermédiaires par lesquelles certains enfants atteignent leur position d'arrivée et de montrer l'intérêt du passage par les multiples de 10 ou des déplacements par bonds de (multiples de) 10.

NOTES DE LECTURE

FAIRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE MATERNELLE

Alain Pierrard, CRDP de l'Académie de Grenoble (11, Av. Général Champon, F – 38032 Grenoble) 2002. (15 x 25, 244 p, 18 €)

« Faire », « Mathématiques », « Ecole maternelle », chacun des trois mots-clés qui composent ce titre exige une réflexion et des commentaires trop souvent esquivés par les auteurs de plans d'études ou de moyens d'enseignement. Alain Pierrard, inspecteur pédagogique, engagé depuis de nombreuses années dans la formation des enseignants en mathématiques, a choisi d'y consacrer de nombreuses pages avant de passer aux propositions d'activités.

Sa réponse à la question « fait-on aujourd'hui des mathématiques à l'école maternelle ? » intervient déjà dans l'introduction de l'ouvrage et en détermine ensuite tout le contenu :

Non, si l'on fait référence à la discipline elle-même, qui nécessite postulats, axiomes, théorèmes, déductions.

Non, si l'on pense aux « cours de mathématiques » qui supposent que soit défini explicitement l'objet de l'apprentissage et que soit mise en place une progression démonstrative.

Non, si l'on considère que faire des mathématiques, c'est essentiellement faire des calculs.

Oui, si l'on évoque la construction progressive de compétences permettant à l'élève d'agir sur le monde en mobilisant les nombres, en articulant des formes, en organisant des collections...

Après avoir ainsi donné le ton de l'ouvrage, le premier chapitre poursuit une réflexion pédagogique et didactique sur les démarches et les méthodes propres à mettre en place des situations d'enseignement/apprentissage à dominante mathématique à l'école maternelle. L'importance du langage mathématique comme objet à acquérir très progressivement est soulignée, comme celle de la langue commune qui est à la fois outil de construction des connaissances, outil de communication et outil de coopération dans le groupe social. L'importance de l'imprégnation et de la répétition est également évoquée, mais l'accent est mis sur la résolution de problèmes en tenant compte des pré acquis des élèves, de l'attribution de sens à la situation, de la contextualisation puis de la décontextualisation des connaissances, des rythmes de chacun et de différentes modalités didactiques allant des situations de vie de classe, aux « projets » de longue durée, en passant pas les situations ritualisées et les jeux.

Un deuxième chapitre présente les différents domaines dans lesquels se construisent les compétences mathématiques, en référence aux apports de la psychologie et de la didactique et en illustrant leur approche dans les trois degrés de l'école maternelle : petite section, moyenne section et grande section (respectivement 3, 4 et 5 ans).

Le premier de ces domaines est intitulé « classification, sériation, mise en relation ». On y trouve quelques pages intéressantes et originales sur les suites, leurs différents types, la nature et le nombre des règles qui les régissent : de quoi déterminer une progression bien étayée dans ce domaine d'activités où l'on a souvent du mal à discerner les tâches effectives de l'élève.

Dans le deuxième domaine, « l'espace et le temps », on trouve aussi une démarche explicite sur les trois ans d'école maternelle, qui s'appuie sur l'espace vécu, puis sur l'espace manipulé, l'espace représenté, pour aboutir, en grande section, à l'espace schématisé.

Le troisième domaine est celui des « formes et grandeurs ». Là encore, les formes et grandeurs, comme les mesures, sont envisagées selon les apports de la psychologie, en fonction du développement de l'élève au cours des trois sections d'école maternelle.

Le quatrième domaine, « approche des quantités et des nombres à l'école maternelle » donne lieu à un survol historique des instructions et programmes officiels et à un développement important sur la construction du nombre ainsi qu'au sens que les élèves peuvent y donner. On y trouve de nouveau une proposition d'organisation des apprentissages numériques à l'école maternelle, parfaitement en accord avec d'autres ouvrages déjà présentés dans nos notes de lecture comme *Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8*, de Pierre Stegen et Annick Sacré de l'Université de Liège [1] ou *Apprentissages numériques, Cycle des apprentissages fondamentaux, grande section de maternelle*, de la collection ERMEL [2].

Le troisième chapitre présente de nombreuses activités à dominante mathématique. Il s'organise en trois parties :

- rituels (présents et absents, la date, la météo, le goûter), qui en raison de leur usage dans des pratiques répétitives, permettent l'incorporation de connaissances mathématiques ;
- jeux (du répertoire, géométriques, numériques, de déplacements), qui favorisent l'intégration de connaissances et développent le raisonnement logique ;
- « projets pour apprendre » ou ateliers dirigés, où les élèves font évoluer leurs procédures personnelles en résolvant des problèmes.

Cette dernière partie est particulièrement développée. Elle propose 18 projets ou ateliers, de longue durée. Ils sont tout d'abord présentés dans un tableau à double entrée, en regard des compétences à développer et des sections de l'école maternelle pour lesquelles ils sont prévus. On y lit par exemple que « la boîte au trésor » figure en face de la compétence logique « coder des objets » pour la petite section et qu'elle figure également dans les compétences spatiales et géométriques sous « repérer des cases » en grande section.

La description de chacun des projets est ensuite reprise par le détail sous différentes rubriques : présentation générale, compétences visées, variables de la situation, appropriation par les élèves, suivies des problèmes proprement dits, avec de nombreux commentaires et observations sur les procédures des élèves [3].

C'est dans cette constante référence des activités aux savoirs mathématiques en jeu et au niveau de développement des élèves que réside l'intérêt de cet ouvrage, à conseiller à tous ceux qui cherchent à répondre à la question : à quoi sert l'activité que je conduis avec ma classe dans l'optique d'une construction de connaissances à caractère mathématique ?

Destinataires : les maîtres de l'école maternelle et primaire, formateurs et didacticiens

Mots-clés : activité mathématique, jeu, école maternelle, construction des connaissances mathématiques

F.J.

1. Editions Labor, Tournai, BE. 2000
2. Hatier, Paris. 1990
3. Un de ces projets , «Les habits de carnaval» est développé en pages 13 à 17.

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s):

Encyclopédie du kangourou, ACL ...	...	(ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL ...	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL ...	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des comptes, ACL ...	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL ...	...	(ex à Fr. 14.-)
Faites vos jeux ! ACL ...	...	(ex à Fr. 16.-)
La magie du calcul, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Pythagore et Thalès, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Pliages et mathématiques, ACL ...	...	(ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL ...	...	(ex à Fr. 22.-)
100 défis mathématiques du « Monde », POLE ...	...	(ex à Fr. 27.-)
100 jeux mathématiques du « Monde » : Affaire de logique, POLE ...	...	(ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33) ...	...	(ex à Fr. 20.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM ...	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM ...	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM ...	...	(ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (Tangente HS 10) ...	...	(ex à Fr. 20.-)
Puzzle Pythagore et Euclide ...	...	(ex à Fr. 55.-)
Problèmes de rallyes et concours:		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98) ...	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00) ...	...	(ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)* ...	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)* ...	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)* ...	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)* ...	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...) ...	...	(ex à Fr. 14.-)

Nom et prénom: ❑ Mme / ❑ M. ...

Adresse (rue et numéro): ...

Code postal et localité: ... Tél.: ...

Date: ... Signature: ...

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à:
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel