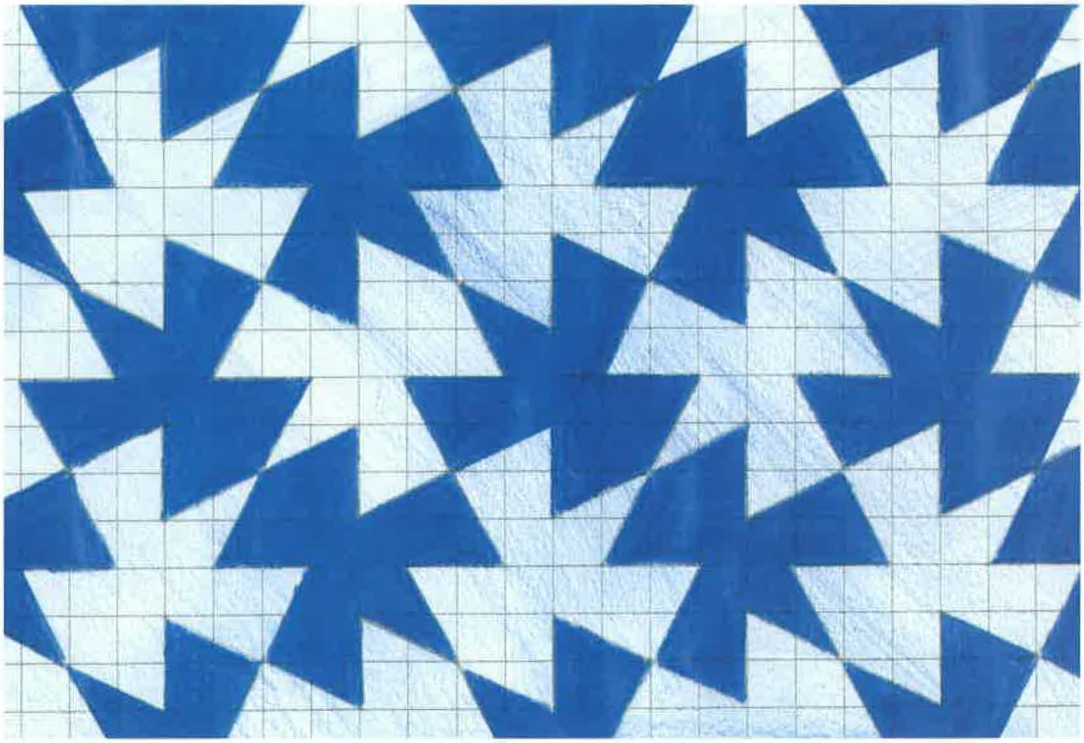
MATH-ÉCOLE 208

Septembre 2003

Polydron
et la modélisation
en mathématiques

Mathématiques 7-8-9

Evaluation
en 2e primaire



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :
- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électronique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 30.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 35.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 8.50
Anciens numéros : CHF 3.– /pièce (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 5 à 9 CHF 22.– par abonnement
de 10 à 50 CHF 20.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Rachel Habegger
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex

Maquette
Raphaël Cuomo

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH – 1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Amélie, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

42e année, quatre numéros par an

208

Septembre 2003

ÉDITORIAL

LES MOYENS D'ENSEIGNEMENT *MATHÉMATIQUES 7-8-9*[1] AU QUOTIDIEN

Michel Brêchet

En Suisse romande, l'année scolaire 2003-2004 constituera une étape supplémentaire du processus de renouvellement des moyens d'enseignement de mathématiques à l'école obligatoire. Le premier pas de cette vaste opération a été franchi en août 1997, avec l'introduction en 1ère année primaire de la nouvelle collection de *Mathématiques 1P-4P*, ouvrages élaborés par de nombreux auteurs et mûris de longue date. En 2001, soit quatre ans plus tard, les classes de 5e année ont été équipées de la dernière version de *Mathématiques 5P*, suivie une année plus tard par *Mathématiques 6P*, ces deux moyens étant des adaptations des éditions précédentes qui avaient déjà pris en compte certains résultats de la recherche en didactique des mathématiques. Et cette année, à la rentrée scolaire, tous les élèves de 7e année ont reçu la première génération de *Mathématiques 7-8-9*. Par la suite, au fil des années, cet ouvrage sera distribué à tous les élèves romands des trois derniers degrés de la scolarité obligatoire, quelles que soient leurs compétences en mathématiques. L'utilisation quotidienne d'un moyen d'enseignement couvrant trois années scolaires et destinés à l'ensemble des élèves – deux nouveautés majeures – n'ira sans doute pas de soi. Elle sera facilitée si les enseignants ne perdent pas de vue quelques principes fondamentaux, dont ceux-ci :

Les activités de *Mathématiques 7-8-9* sont classées en deux groupes. Dans l'un, accompagnés de commentaires méthodologiques : des situations problèmes, des recherches, des jeux, des problèmes ouverts, des « points de départ ». Dans l'autre : des activités dites d'entraînement, non commentées, mais pour lesquelles il existe un corrigé déposé sur le support informatique du maître. Cette répartition laisse imaginer que le premier groupe contient des activités riches, qui incitent l'élève à mettre en œuvre une démarche de type scientifique, à collaborer avec ses camarades, à construire de nouvelles notions mathématiques, et que le second rassemble des activités permettant d'asseoir les notions fraîchement découvertes. Autrement dit, que l'on va de l'un à l'autre, que toute progression pédagogique débutera par quelques activités du premier groupe pour se terminer par des activités du second groupe. Il n'en est toutefois pas ainsi et il serait regrettable de procéder systématiquement de la sorte. Tout problème peut revêtir des fonctions différentes, selon la gestion mise en place par le maître et les connaissances des élèves. Un problème bien consistant pour les uns, nécessitant alors un long temps de résolution, peut être un « simple » exercice de révision pour les autres. Il y a bien quelques exceptions, certes, mais elles sont plutôt rares. A l'inverse, certaines activités d'entraînement peuvent aussi être utilisées à des fins de recherche, par exemple pour faire émerger de nouvelles notions. C'est donc au maître de choisir ses itinéraires, selon ses objectifs, ses conceptions et bien entendu ses élèves. Les choix qui ont conduit à la répartition des activités dans le livre, aussi réfléchis et bien-fondés soient-ils, n'ont pas à déteindre à tout prix sur ceux que le maître effectue lorsqu'il élabore une séquence d'apprentissage. La logique du livre n'a pas à devenir celle de la classe. Au-delà du cas particulier présenté ici, on assiste ainsi à une évolution importante du moyen

1. M. Brêchet, J.-A. Calame, M. Chastellain, *Mathématiques 7-8-9*, CIIP/LEP, 2003

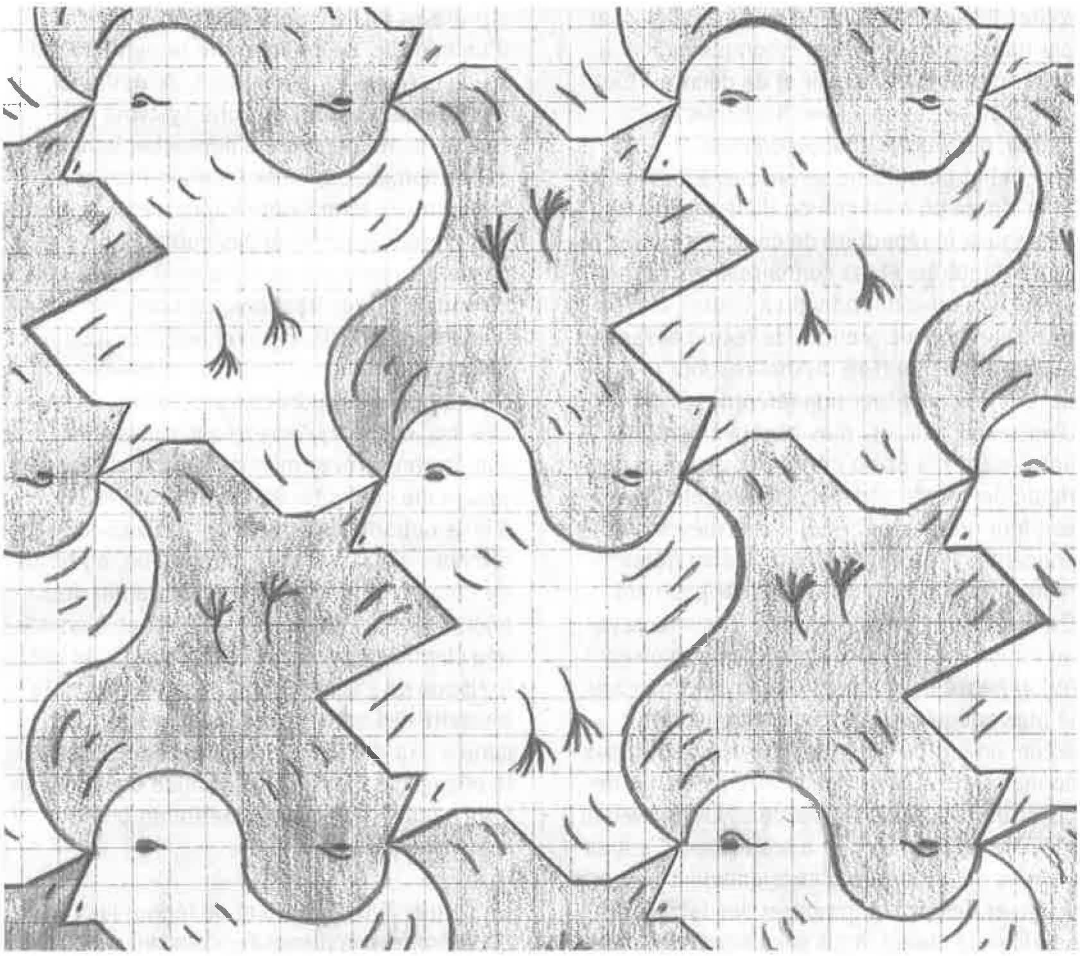
d'enseignement de mathématiques, déjà présente dans les ouvrages romands des degrés précédents. L'image du « manuel – guide – programme – progression – livre de recettes » s'estompe au profit de celle « d'ouvrage-ressource ». Le « prêt-à-porter » est supplanté par le « do-it-yourself ».

Ensuite, les nombreuses informations méthodologiques qui figurent dans le livre du maître – elles concernent entre autres le déroulement des activités, le temps à leur consacrer, le(s) degré(s) scolaire(s) concerné(s), le matériel à utiliser, la gestion de la classe, les difficultés rencontrées par les élèves – méritent d'être examinées avec un regard critique et circonstancié. Pour deux raisons. A l'instar de toutes les informations de ce type, elles sont par nature réductrices et incomplètes, car il est impossible de prévoir et de décrire « tout ce qui va se passer » avec les élèves d'une classe, dans une situation donnée. D'autre part, ici et là, elles ne seront pas adaptées à telle classe ou à tel groupe d'élèves, car les stratégies, le répertoire de comportements, le profil d'intérêts et les connaissances varient sensiblement d'un individu à l'autre. L'enseignant devra donc prendre du recul par rapport aux contenus du livre du maître, dont la finalité est de constituer une référence parmi d'autres. D'ailleurs, plus généralement, un enseignant n'a pas à interposer de manière rigide des écrits pédagogiques, quelle que soit leur qualité, entre lui et ses élèves. Les conceptions de l'apprentissage sont déterminantes pour la conduite de l'enseignement. On n'enseigne pas selon des idées imposées ou importées, on conduit sa classe selon ce qu'on pense intimement être la méthodologie la plus adéquate. Comme il est courant actuellement de dire que l'élève construit ses connaissances, il est aussi vrai que le maître construit ses rapports avec le savoir et avec la manière de le présenter à ses élèves. C'est en ce sens qu'un moyen d'enseignement peut suggérer des pistes, proposer des façons de conduire la classe, mais sans empiéter sur le libre choix du maître.

Si *Mathématiques 7-8-9* décrit au fil de ses pages des objectifs noyaux, des finalités, des savoirs fondamentaux, des objectifs spécifiques, des outils mathématiques de base, des environnements de travail ou encore des progressions possibles, c'est bien pour mettre en évidence les multiples façons d'exploiter l'ensemble des activités proposées. Et non pour se substituer aux plans d'études cantonaux, car, rappelons-le, les objectifs de l'enseignement des mathématiques sont l'apanage des cantons, fédéralisme oblige. Avant d'aborder l'étude d'un thème avec des élèves, il y a donc lieu de bien définir les intentions que l'on poursuit et de déterminer en conséquence un parcours approprié. Par exemple, les activités consacrées aux nombres rationnels permettront aux élèves de connaître différentes écritures d'un nombre, de comprendre la signification d'une écriture mathématique, de renforcer leurs connaissances de notre système positionnel de numération, d'approcher la notion de fraction, de passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale et réciproquement, de s'intéresser à l'écriture des nombres dont la partie décimale est périodique, d'amplifier et de simplifier des fractions, de comparer des nombres rationnels, d'opérer avec des fractions, de pratiquer le calcul réfléchi, d'estimer des résultats, de résoudre des problèmes...
Dès lors, en tant qu'enseignant, quels objectifs vais-je choisir avec ma classe ? Par ailleurs, vais-je me contenter de sensibiliser les élèves à telle notion mathématique ? Ou vais-je attendre d'eux qu'ils soient à même, au terme de l'étude, de la mobiliser en situation décontextualisée ? La nuance est de taille et là encore une clarification préalable s'impose. On le voit, le risque de s'égarer parmi la multitude et la diversité des activités est bien présent. Des cadres – qui laissent cependant libre cours à la pédagogie différenciée, prônée depuis longtemps mais si délicate à mettre en pratique – sont donc indispensables.

En dernier lieu, il convient de relever la pluralité des sources à disposition des enseignants : Les problèmes de concours (Rallye Mathématique

Transalpin, Mathématiques Sans Frontières, Fédération Française des Jeux Mathématiques et logiques...) sont de véritables mines d'or pour construire ou renforcer telle compétence, pour pratiquer la différenciation pédagogique ou pour diversifier son enseignement. Les revues spécialisées sur l'enseignement des mathématiques présentent régulièrement des activités pour nos élèves étayées par d'intéressantes suggestions méthodologiques. Les publications des centres de recherche apportent des éléments essentiels à la compréhension des phénomènes didactiques. De nombreux sites Internet proposent une vaste panoplie de problèmes de recherche et d'exercices d'assimilation. Sans oublier toutes les bonnes activités imaginées par chaque enseignant et celles qui figurent dans les moyens d'enseignement existant. Ainsi, *Mathématiques 7-8-9* n'est pas à utiliser en tout temps et par tous les temps, mais à considérer comme l'ouvrage de base et de référence pour les leçons, qui méritent cependant d'être enrichies à intervalle régulier par d'autres sources. L'occasion est belle pour relever le rôle particulier de *Math-Ecole*, qui ouvre bien volontiers ses lignes aux enseignants, qui est disposée à accueillir des témoignages, des propositions et qui est prête à servir d'espace de débat et de réflexion pour soutenir ceux qui utilisent *Mathématiques 7-8-9* au quotidien.



Pavage par symétries centrales réalisé par Nina (14 ans). Voir article « Le coin des pavages », en pages 31 à 36.

POLYDRON, LA MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES

UN PARCOURS MATHÉMATIQUE

Paul Gratwohl, Vivishop, Lausanne[1]

« Nul n'entre ici qui ne soit géomètre. Cette inscription, gravée sur le fronton de l'Académie de Platon pourrait bien être à nouveau inscrite à l'entrée des universités : après des siècles de division, la géométrie reprend peu à peu sa place au cœur des mathématiques. L'algèbre et l'analyse deviennent les deux versants du même édifice géométrique »

Sciences & Vie, 2/2000.

Apprendre, à prendre par les mains

Notre parcours mathématique, en géométrie et algèbre élémentaires, s'appuie sur la modélisation et la démonstration. Il montre l'interdépendance des formes géométriques et des formules algébriques, la cohérence du savoir mathématique, un savoir merveilleux aux applications infinies.

Notre parcours nous conduit à la découverte des rapports entre les formes géométriques : du cube à la pyramide, au tétraèdre, au prisme, à l'octaèdre (figure duale du cube) puis à l'octaèdre étoilé.

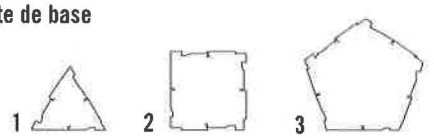
Les polygones de *POLYDRON*

Voici les 10 « modules » du matériel « *POLYDRON* 1, 2 et 4 » :

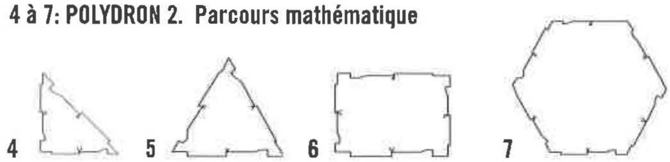
1. Le triangle équilatéral « 1 » (mesure des côtés : 1)
2. Le carré (mesure des côtés : 1)
3. Le pentagone régulier (mesure des côtés : 1)
4. Le triangle rectangle isocèle (mesure des côtés : 1, 1 $\sqrt{2}$)
5. Le triangle équilatéral « $\sqrt{2}$ » (mesure des côtés : $\sqrt{2}$)
6. Le rectangle (mesure des côtés : 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
7. L'hexagone régulier (mesure des côtés : 1)
8. Le triangle isocèle (mesure des côtés : 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
9. Le losange (mesure des côtés : 1, rapport entre la grande et la petite diagonale : $\sqrt{2}$)
10. L'octogone régulier avec carré évidé (mesure des côtés : 1)

1. [ndlr] *Math-Ecole* accueille généralement dans ses colonnes des textes d'enseignants, de mathématiciens ou de chercheurs en didactique. Aujourd'hui, nous sommes heureux de publier un article d'une personne qui a consacré le plus clair de son temps à diffuser et créer du matériel pédagogique en Suisse romande et au-delà. Chacun, ou presque, connaît la boutique Vivishop, près de la cathédrale de Lausanne, ou en a entendu parler. La plupart des enseignants romands utilisent les *Multicubes*, *Polydron*, *Construmath*... dans leur classe, matériels sur lesquels s'appuient de nombreuses propositions d'activités des moyens d'enseignement officiels. (En particulier, toutes les activités sur les polyèdres de *Mathématiques 7-8-9*, du domaine « Géométrie », au chapitre « Constructions » où l'usage du matériel *Polydron* est parfois mentionné explicitement.) Au travers des lignes qui suivent, nos lecteurs comprendront qu'un bon promoteur de matériel didactique doit dépasser le niveau de la gestion d'entreprise pour faire valoir les potentialités et les finalités profondes des objets qu'il élabore ou diffuse. Il suffit d'aller, par exemple, dans l'Encyclopédie Universalis, sous le terme « modélisation » et de constater qu'on y trouve une cinquantaine d'articles de référence sur le sujet pour percevoir la profondeur et la richesse du concept. M. Gratwohl qui n'est pas mathématicien au départ, sait communiquer son enthousiasme, avec lyrisme parfois, pour ses modèles d'objets géométriques et montre qu'il va bien au-delà des simples données techniques de ses matériels.

1 à 3: POLYDRON 1. Boîte de base



4 à 7: POLYDRON 2. Parcours mathématique



8 à 10: POLYDRON 4.

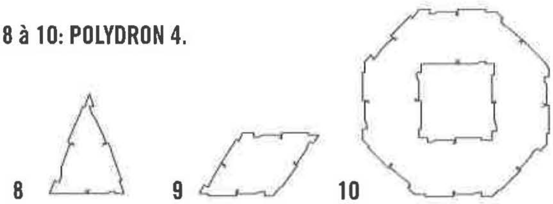


figure 1

Interactions géométriques-numériques

Dans l'inventaire précédent, les côtés des polygones de *POLYDRON* ont comme mesure 1 ou $\sqrt{2}$, en prenant comme unité de longueur le côté du carré.

Exprimée en cm, cette unité de mesure est 7 (cm). L'épaisseur des pièces est 0,3 (cm), ce qui fait que, par exemple, l'objet « cube » formé par 6 carrés a une arête extérieure de 7,3 cm et une arête intérieure de 6,7 cm. Du point de vue géométrique, on assimilera cet objet à un cube d'arête 1 (en unité de mesure de longueur) et de volume 1 (en cube unité).

On peut aussi exprimer les deux mesures des côtés de ces polygones par des lettres, comme nous le ferons par la suite, où a est la mesure du côté du carré et d celle de sa diagonale.

Avec ces notations, a^2 représentera l'aire du carré et d^2 celle d'un carré de côté d.

Le relation entre a et d est très importante en mathématiques, elle s'exprime ainsi : $d = a\sqrt{2}$. On peut l'expliquer facilement en observant les figures 2 :

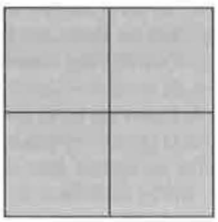


figure 2a)

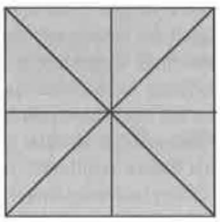


figure 2b)

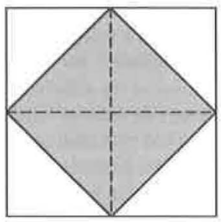


figure 2c)

La figure 2a) est un carré formé de quatre carrés unités, son côté mesure $2a$ et son aire mesure $4a^2$; on peut le recouvrir par huit triangles rectangles isocèles comme sur la figure 2b). En plaçant différemment ces triangles, on remarque que quatre d'entre eux peuvent former un carré, comme sur la figure 2c). La mesure du côté de ce dernier carré central est d. La mesure de l'aire de ce carré est d^2, c'est aussi la moitié de celle du grand carré d'aire $4a^2$, on en déduit que $d^2 = 1/2\ (4\ a^2) = 2a^2$ et que $d = a\sqrt{2}$.

Toute proportion gardée, nous pourrions ici citer Descartes : « ... Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné l'occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. »

Le nombre $\sqrt{2}$ qui exprime le rapport entre les mesures de la diagonale du carré et de son côté est un nombre irrationnel (qu'on ne peut pas exprimer par une fraction). Voici quelques-une de ses approximations par des nombres décimaux : 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421356237 (donnée par une calculatrice qui affiche douze chiffres)... Ces approximations sont toutes différentes entre elles et aussi du nombre – prononcé en français – « racine carrée de deux ». Les mathématiciens leur préfèrent l'écriture $\sqrt{2}$, plus courte et, surtout, exacte.

Les constructions géométriques à la règle et au compas permettent de représenter $\sqrt{2}$ et de nombreux autres nombres irrationnels par des segments. On s'est intéressé, depuis les Grecs, à la représentation d'un segment de même longueur qu'un cercle donné, mais sans succès. Il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour qu'on démontre que cette construction n'est pas possible (Lindeman 1882) et que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution au compas et à la règle.

Par des raisonnements un peu plus poussés, nous pourrions aussi représenter le nombre irrationnel $\sqrt{3}$, que nous rencontrons dans le triangle équilatéral. Ce serait, selon la figure 3, le rapport entre la hauteur d'un triangle équilatéral composé de quatre modules 1 « triangle équilatéral de côté a » et le côté d'un carré unité. (Si le carré de côté $2a$ peut être construit avec 4 modules carrés du matériel, le carré de côté $\sqrt{3}$ n'est qu'hypothétique, il ne figure pas dans les pièces de *POLYDRON*. On se réfère ici à la relation de Pythagore.)

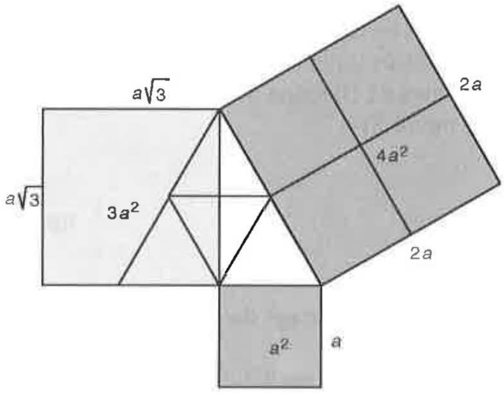


figure 3

Notre parcours va permettre d'illustrer encore quelques applications des transformations géométriques que sont la symétrie et les similitudes (agrandissements ou réductions) qu'on retrouve aussi dans d'autres domaines que les mathématiques, en architecture, en optique, en musique et plus généralement dans de nombreuses lois de l'Univers.

Une première de ces transformations est l'agrandissement de facteur 2 : pour le carré, du « petit » carré unité au « grand », la mesure du côté double, (de a à $2a$), l'aire quadruple, comme nous l'avons vu précédemment, (de a^2 à $4a^2$) et le volume, lui, est multiplié par 8 (de a^3 à $8a^3$), comme le montre la figure 4.

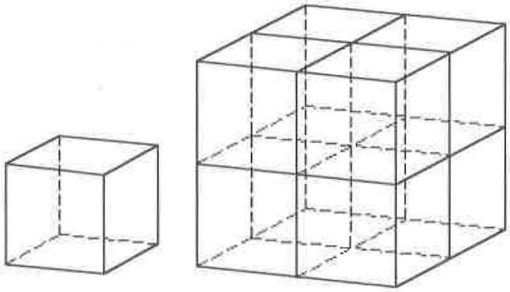


figure 4

Etape 1 : une construction du cube (a^3 et A^3)

Nous formons un « petit » cube (que nous désignerons par la suite par a^3) avec 4 ensembles de 3 triangles rectangles isocèles (module 4) : 3 de chacune des trois couleurs des modules *POLYDRON* (jaune, rouge, bleu vert). Ce cube unité pourrait aussi être construit avec 6 carrés, (figure 4) mais nous désirons mettre en évidence la structure sur laquelle nous allons nous appuyer par la suite.

Nous construisons ensuite un grand cube (que nous désignerons par A^3 ou $8a^3$) en utilisant 3 carrés unités (module 2) et 6 triangles rectangles de chacune des quatre couleurs. (Voir figure 5)

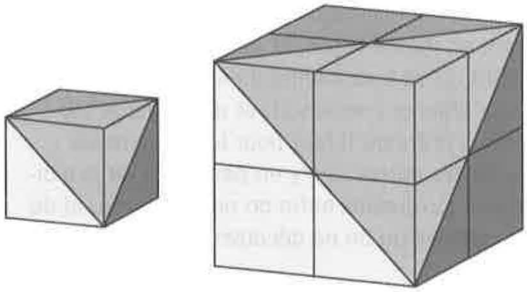


figure 5

Etape 2 : le découpage du cube (a^3)

Nous enlevons au petit cube de l'étape précédente un « coin » formé de 3 triangles d'une même couleur. Nous fermons les faces ouvertes par des triangles équilatéraux de côté $d = a\sqrt{2}$ » (module 5). (voir figures 6)

L'aire d'une base de la petite pyramide détachée mesure $1/2a^2$, la hauteur correspondante mesure a. Le volume de cette pyramide est $1/3(a)(1/2a^2) = 1/6\ a^3$

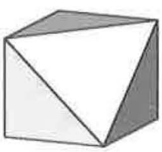


figure 6 a)
La partie restante
($5/6\ a^3$)

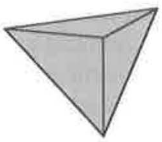


figure 6 b)
la pyramide détachée
($1/6\ a^3$)

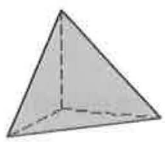


figure 6 c)
la pyramide détachée
dans une autre position ($1/6\ a^3$)

Nous construisons un nouveau solide en assemblant quatre parties identiques à la partie restante du cube précédent (figure 6a) selon le modèle décrit à la figure 7.

Nous utiliserons ce solide ultérieurement.

...

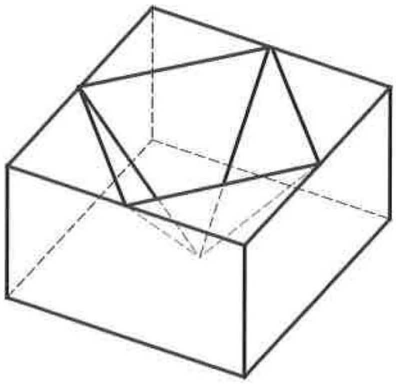
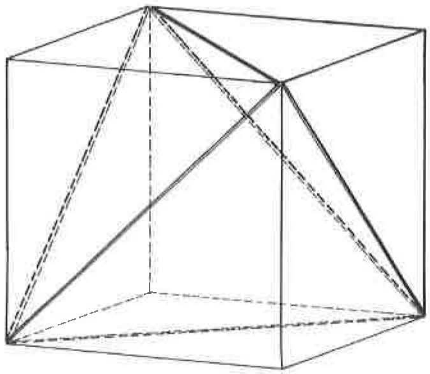


figure 7

Etape 3 : du cube au tétraèdre

Nous retirons du grand cube de l'étape 1, 4 pyramides de base $A^2/2$ et de hauteur A. Inscrit dans le cube, nous découvrons un tétraèdre. Nous le construisons avec 16 triangles équilatéraux « $\sqrt{2}$ » (module 6) : 4 pour chacune des faces. Le cube A^3 est ainsi décomposé en quatre pyramides, dont le volume total est $4(1/6\ A^3) = 2/3\ A^3$ et un tétraèdre régulier inscrit dans le cube, dont le volume vaut donc $A^3 - 2/3\ A^3 = 1/3\ A^3$.

figure 8



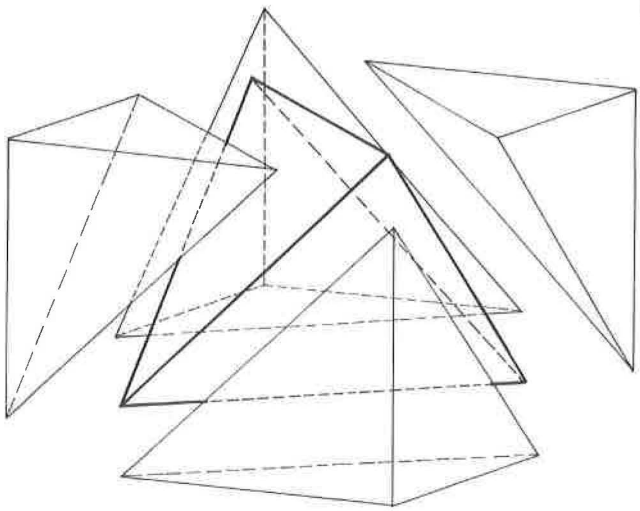


figure 9

Etape 4 : pyramide à base carrée

En assemblant les 4 pyramides de base $A^2/2$ et de hauteur A, nous formons une pyramide à base carrée D^2, de hauteur A, de volume 2/3 A^3, comme nous l'avons vu aux étapes 2 et 3.

Nous assemblons aussi 4 petites pyramides de base $a^2/2$ et de hauteur a.

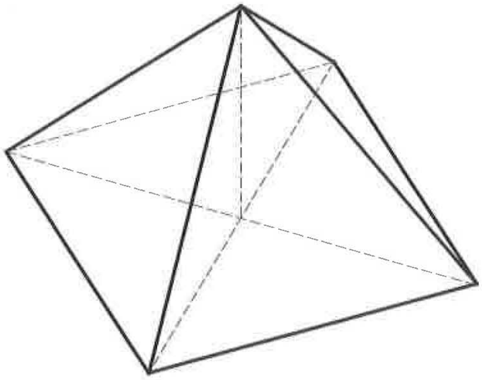


figure 10

Etape 5 : de la pyramide au prisme oblique

En assemblant la pyramide à base carrée (étape 4) et le tétraèdre (étape 3), nous formons un prisme de base triangulaire équilatérale (constituée de 4 triangle équilatéraux « $\sqrt{2}$ »), dont la hauteur est celle du tétraèdre. Une des faces obliques de ce prisme oblique est la « base » carrée de la pyramide de l'étape 4, les deux autres faces obliques sont des losanges, constitués de deux triangles équilatéraux : faces du tétraèdre. Comme ce prisme est constitué des cinq mêmes solides que ceux du grand cube de l'étape 3, son volume est le même que celui du cube : A^3.

Si on calcule l'aire de la base du prisme ($d^2\sqrt{3}$) et sa hauteur ($2\sqrt{6}/3d$) ou si on les tire d'un formulaire, la formule du volume d'un prisme (base x hauteur) permet de retrouver le volume précédent, par un calcul algébrique, à partir du modèle géométrique.

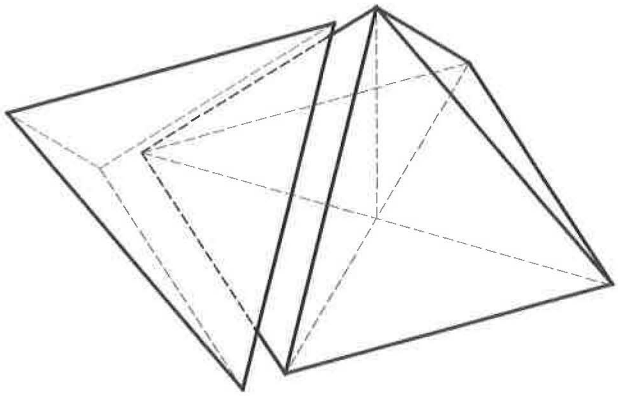


figure 11

Etape 6 : du tétraèdre à l'octaèdre

Du tétraèdre de l'étape 3, nous pouvons extraire 4 petits tétraèdres et découvrir **l'octaèdre, inscrit dans le cube et dans le tétraèdre**. Ce passage du cube à sa figure duale, l'octaèdre, par l'intermédiaire du tétraèdre a quelque chose de « merveilleux » et certains pourraient y voir une préfiguration des « symétries continues » des physiciens de la relativité.

Plus modestement, on peut ici constater que la dualité entre le cube et l'octaèdre se constate par l'identité de leurs axes et plans de symétrie et de leurs axes de rotation, par le fait que chaque face du cube correspond à un sommet de l'octaèdre et, réciproquement, que chaque face de l'octaèdre correspond à un sommet du cube. On peut aussi penser à une répétition à l'infini de la chaîne : cube – tétraèdre – octaèdre – cube – tétraèdre – octaèdre – ... en imaginant le petit cube (a^3), maillon suivant, qu'on pourrait inscrire dans l'octaèdre de la figure 12.

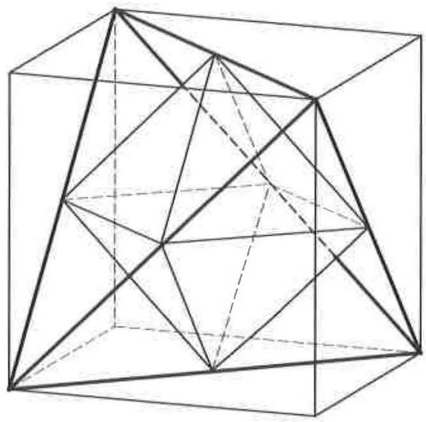


figure 12

Pour le calcul du volume, on retrouve les similitudes et les facteurs correspondant aux dimensions : chacun des quatre petits tétraèdres extraits est l'image du grand par une similitude de facteur 1/2 : entre la longueur des arêtes, le rapport est 1/2, entre les aires, le rapport est 1/4 et entre les volumes, le rapport est 1/8.

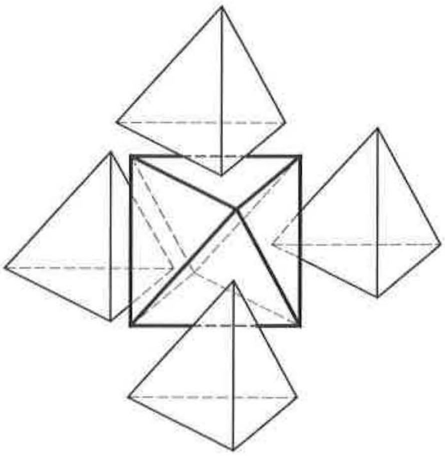


figure 13

Le volume du tétraèdre est le 1/3 du volume du grand cube (étape 3) : $1/3A^3$

On retire 4 petits tétraèdres dont le volume est, pour chacun, 1/8 du grand, il n'en reste donc que la moitié : $1 - 4(1/8) = 1 - 1/2 = 1/2$

La moitié du tiers est le sixième : $(1/2)(1/3) = 1/6$.

Le volume de l'octaèdre est donc égal à 1/2 de celui du tétraèdre et à 1/6 de celui de l'octaèdre : $1/6A^3$.

Etape 7 : de la pyramide au « sablier »

Nous reprenons l'assemblage de l'étape 2 de notre parcours mathématique. Cet assemblage se présente sous forme de parallélépipède avec, en négatif, une pyramide à base carrée.

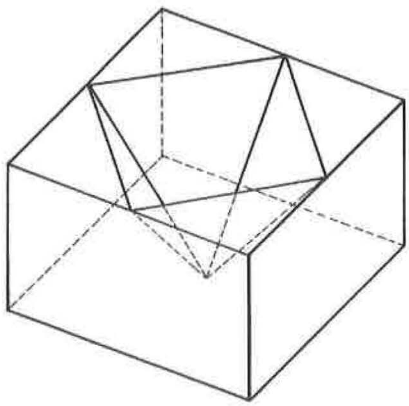


figure 14

Nous construisons cette pyramide en positif. Elle comprend 4 petites pyramides, base $a^2/2$, hauteur a. Son volume correspond à 2/3 a^3 4 (1/6 a^3).

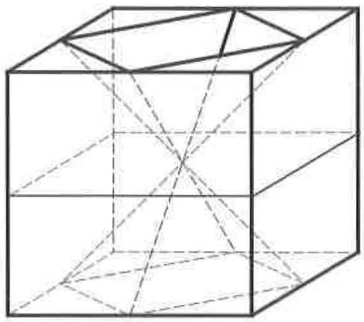


figure 15

Etape 8 : rapport de volumes

Nous avons déjà vu que 8 cubes a^3 forment un grand cube A^3.

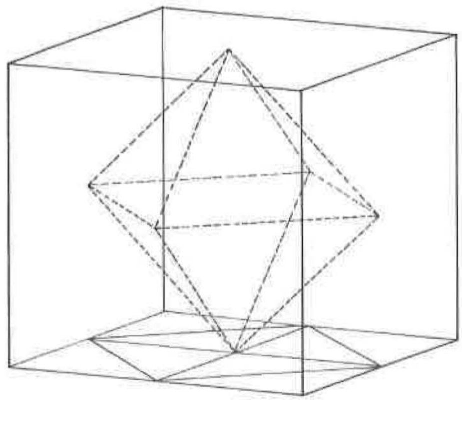
En détachant de chaque petit cube 1/6 de son volume (étapes 2 et 7), nous créons un octaèdre en négatif (figure 16).

Les 8 pyramides enlevées au cube de volume 1/6 a^3 forment un octaèdre régulier. Son volume est $8(1/6\ a^3) = 8/6\ a^3 = 1/6(8\ a^3) = A^3$.

Nous retrouvons ici le résultat de l'étape 6 :
le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans le cube est le 1/6 du volume du cube.

On remarque aussi sur la figure 16, comme on l'avait vu dans la figure 12, que les 6 sommets de l'octaèdre sont les milieux des 6 faces du cube, et que, si on imaginait un petit cube inscrit dans l'octaèdre, les 8 sommets de ce cube seraient les milieux des 8 faces de l'octaèdre, illustrant la dualité de ces deux polyèdres réguliers.

Nous construisons un parallélépipède de base carrés ($d^2 = 2a^2$), de hauteur A, avec 8 triangles rectangles isocèles et 8 rectangles (modules 2 et 4 *POLYDRON*). Son volume est $A\ 2a^2 = 2a2a^2 = 4a^3$. L'octaèdre dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux « $\sqrt{2}$ » (module 5) est inscrit dans le parallélépipède. Le volume de l'octaèdre, considéré ici comme celui de deux pyramides à bases carrées, est le 1/3 du volume du parallélèpipède.



figures 16

Une fois encore, un calcul nous permet de retrouver les résultats précédents: $1/3(4a^3) = 1/6(8a^3) = 1/6A^3$.
La modélisation géométrique vient de nous donner une nouvelle illustration du calcul algébrique.

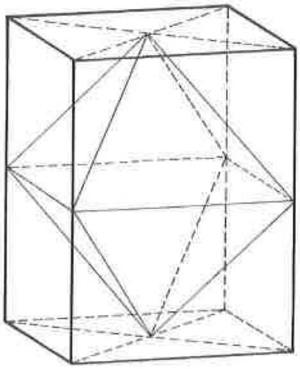


figure 17

Etape 9: l'interdépendance des formes

Le volume de l'octaèdre étoilé inscrit dans le cube est égal à 1/2 du volume du cube.

En ajoutant à chacune des 8 faces de l'octaèdre régulier un tétraèdre, nous formons l'octaèdre étoilé, un polyèdre d'une beauté et d'une conception géométrique parfaites. Ce polyèdre, un ensemble de deux tétraèdres imbriqués, s'inscrit merveilleusement dans le cube.

Les 8 petits tétraèdres ajoutés à l'octaèdre ont ensemble le même volume que le grand tétraèdre inscrit dans le cube: $1/3\ A^3$ (étape 6). Nous y additionnons le volume de l'octaèdre, $1/6\ A^3$: $1/6\ A^3 + 1/3\ A^3 = 1/2\ A^3$ pour le volume de l'octaèdre étoilé.

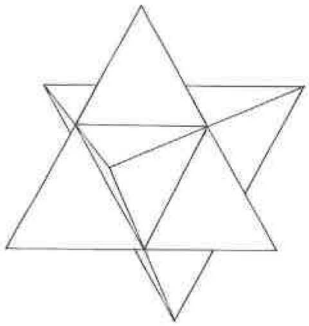


figure 18

Une démonstration complémentaire donne la preuve du rapport entre les volumes du cube et de l'octaèdre étoilé. Pour recréer un cube A^3 à partir d'un octaèdre étoilé, nous devons y ajouter 24 pyramides de volume $1/6a^3$ (voir étape 2), l'équivalent de 4 cubes a^3.

Les quelques lettres de l'alphabet suffisent à exprimer un savoir universel. Il en est de même de quelques principes mathématiques, de quelques formes géométriques élémentaires.

L'importance que nous y accordons est donc pleinement justifiée.

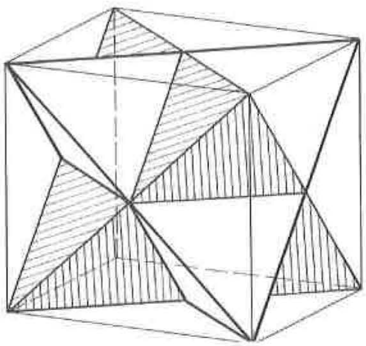


figure 19

11e RMT, LA FINALE

La Finale romande du onzième rallye mathématique transalpin s'est déroulée le 21 mai 2003, à l'école cantonale de langue française (ECLF) de Berne. Tous les records de participation ont été battus puisqu'on est arrivé à réunir 27 classes (près de 650 élèves) en utilisant tous les locaux à disposition. Et cette année toutes les classes sont venues avec deux accompagnants.

A la même époque, 17 autres rencontres ont permis à des centaines de classe de se réunir sur le même thème, avec les mêmes problèmes, à Bourg en Bresse, au Luxembourg, au Tessin, en Italie : à Parme, Gênes, Milan, Sienne, Cagliari, Riva del Garda... et en Israël.

Le temps était froid et pluvieux à Berne. Les premières classes sont arrivées vers 13h et les dernières vers 14h seulement, suscitant un brin d'inquiétude parmi les organisateurs, soucieux de respecter les délais impératifs du programme. A la pause, le soleil était de la partie ainsi que l'eau... de la fontaine.
Pour l'ambiance, aucune influence météorologique ne s'est fait sentir, elle fut chaleureuse du début à la fin.

Une organisation de professionnels

Le programme d'une finale est quasi immuable, que l'on soit en Suisse romande ou dans d'autres régions. Il faut faire vite car les classes viennent souvent de loin et les trains n'attendent pas.

Les copies doivent être corrigées rapidement, pendant le goûter pour que la distribution des prix puisse se faire dans les délais. Les animateurs et maîtres présents s'en chargent : deux ou trois personnes par problème, en se fondant sur des critères d'attribution des points établis minutieusement au préalable, au plan international.

Cette année, en plus, les maîtres disponibles suivaient le déroulement de l'épreuve dans chaque classe, selon une grille d'observation préparée d'avance. Ils devaient chercher à décrire par le détail les échanges et interactions d'un des groupes lors des différentes phases de résolution d'un problème, de la lecture et l'appropriation à la rédaction des explications et justifications de la solution.

Il y a donc tout un travail de préparation : répartition des classes, épreuves, critères d'analyses, liste des résultats... pour les animateurs et les organisateurs locaux.
Les collègues de l'ECLF (soutenus par Antoine Gaggero et Isabelle Torriani) n'en sont pas à leur première expérience, ils ont parfaitement dominé leur matière. Voyons plutôt :

- Réception des classes, dès 13h30.

- A 13h45, les élèves se rendent dans les salles prévues, sous la conduite de leur maître.

- A 13h55, les maîtres quittent leurs élèves, les classes reçoivent les énoncés des problèmes.

- Les élèves sont seuls, les portes des classes restent ouvertes, un surveillant par étage exerce un contrôle discret de la régularité de l'épreuve. Les visiteurs et maîtres peuvent passer de salle en salle sans déranger les élèves ni intervenir.

- A 14h35 on annonce aux classes qu'il reste 10 minutes pour rédiger leurs solutions.

- L'épreuve se termine à 14h45. Les maîtres retrouvent leurs élèves et les conduisent dans le préau où une boisson et un goûter léger sont offerts aux élèves pendant la correction des épreuves.

- Proclamation des résultats et distribution des prix différenciée :
de 15h30 à 16h pour les classes
de 3ème, 4ème et de 5ème
et de 16h à 16h30 pour les classes
de 6ème, 7ème, et 8ème

- Fin de la rencontre : 16h30.

Le palmarès

Le RMT est évidemment un concours, mais dans lequel il n'y a que des gagnants. Les prix sont les mêmes pour tous. Cette année il s'agissait d'un porte-mines et d'un certificat de participation avec, au verso, un découpage-pliage à thème topologique [1]. Les finalistes recevaient, en plus, un souvenir de cette « course d'école mathématique » : en l'occurrence, un pot à crayons marqué du signe « 11e RMT ». Mais, pour tous les participants, finalistes ou non, la récompense essentielle est de s'être creusé la tête, ensemble, d'avoir transpiré, d'être arrivé à dompter ces satanés problèmes et d'avoir acquis un autre regard sur les mathématiques.

Avant de recevoir leur prix, les classes ont remercié avec applaudissements tous les maîtres, correcteurs et organisateurs qui ont rendu possible ce bel après midi.

Bien sûr, au cours des épreuves, certains obtiennent quelques points de plus que les autres ; puis, lors de la proclamation des résultats de la finale une seule classe par catégorie – parfois deux – se retrouve sur la plus haute marche du podium. Mais, en redescendant du podium, chacun se retrouve au même stade : heureux d'avoir fait un peu de mathématiques, dans une ambiance stimulante.

Voici les résultats de cette finale romande du 11e RMT :

Classe de Mme, M. :	**venant de :**	**catégorie :**	**points [2] :**	**rang :**
Danièle Marbach	Favargny (FR)	3	13	1
JocelyneTorriani	ECLF Berne (BE)	3	12	2
Sylvie Trolliet	Montagny (VD)	3	10	3
Françoise Troenli	Montagny (VD)	4	20	1
Chantal Houlmann	Porrentruy (JU)	4	16	2
Nadine Werder	Denens (VD)	4	15	3
Sylvie Charrière	Valangin (NE)	4	13	4
André Nguyen	Lausanne (Elysée) (VD)	5	21	1
Viviane Bourquin	Corsier (VD)	5	18	2
Yan Althaus	Monthey (VS)	5	15	3
Marie-Louise Gerber	ECLF Berne (BE)	5	11	4
Michel Vacheron	Thônex (GE)	5	11	4

1. Voir page 29

2. voir page suivante, sous le tableau des résultats

Bertrand Gagnebin	Nods (BE)	6	25	1
Claude Genilloud	Bulle (FR)	6	24	2
Jacques Marmy	Morges (Beausobre) (VD)	6	21	3
Denis Straubhaar	La Chaux-de-Fonds (NE)	6	15	4
Claude Chevalley	Bex (VD)	6	13	5
Roland Jost	Bellevue (GE)	6	9	6
Margrit Ritter	Grandson (VD)	7	26	1
Viviane Bourquin	Corsier (VD)	7	24	2
Antoine Gaggero	ECLF Berne (BE)	7	23	3
Brigitte Roh	Conthey*	7	23	3
Dominique Le Roy	Cossonay (VD)	7	20	5
Margrit Ritter	Grandson (VD)	8	24	1
Pascal Michel	Tour de Peilz (VD)	8	24	1
Patrick Romailler	Payerne (VD)	8	18	3
Xavier Wibin	Conthey*	8	17	4

* classes invitées, gagnantes du concours valaisan « Espace mathématique »

Les points indiqués sont le total des points reçus pour chaque problème. Les classes en avaient 7 à résoudre, sauf en catégorie 3 et en catégorie 4 ou ils n'en avaient respectivement que 5 et 6. A raison de 4 points par problème au maximum, les classes pouvaient espérer en obtenir 20 en 3e, 24 en 4e et 28 dans les autres catégories. A la lecture de ces résultats, on constate que certaines classes n'étaient pas loin du « sans fautes avec justifications parfaites ».

LES PROBLÈMES ©ARMT 2003

Voici les problèmes de la finale, préparés par la section de Suisse romande, en coopération étroite avec les autres sections et les coordinateurs internationaux, avec quelques éléments d'analyse a priori

1. LES BOUTONS D'ERNEST (Cat. 3, 4)

Pour son prochain spectacle, Ernesto le clown doit se faire un nouveau costume.

Il veut coudre 3 boutons aux emplacements indiqués sur son costume.

Il a dans son armoire une boîte pleine de boutons bleus et de boutons rouges.

Il a commencé par placer un bouton rouge en haut, un bouton bleu au milieu et un bouton rouge en bas. Mais il aurait pu faire autrement.

De combien de manières différentes Ernest peut-il décorer son costume avec 3 boutons? Dessinez ou décrivez les solutions que vous avez trouvées.

Domaine de connaissances

- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que les différentes manières de choisir les boutons concernent la disposition des couleurs sur les trois emplacements.
- Comprendre que les trois boutons peuvent être de la même couleur.
- Comprendre que bleu-bleu-rouge est différent de bleu-rouge-bleu et de rouge-bleu-bleu, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs dispositions pour un même choix des couleurs.
- Établir un inventaire organisé des huit dispositions, sans oublis ni répétitions, par exemple:

1	2	3	4	5	6	7	8
R	R	R	R	B	B	B	B
R	R	B	B	R	R	B	B
R	B	R	B	R	B	R	B

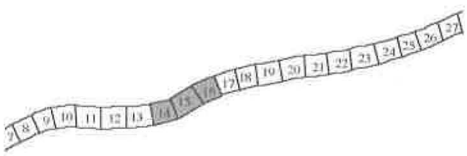
Attribution des points

4 Les 8 dispositions différentes dessinées ou décrites
3 6 à 7 solutions correctes dessinées ou décrites ou les 8 solutions avec 1 ou 2 solutions répétées (doublons)
2 4 à 5 solutions différentes dessinées ou décrites, ou 6 à 7 avec doublons
1 2 à 3 solutions différentes dessinées ou décrites, ou 4 à 5 avec doublon
ou solution ne prenant en compte que deux boutons RR, RB, BR et BB
0 1 solution dessinée ou incompréhension, ou 2 à 3 avec doublon

Origine: Suisse romande

2. LE RUBAN DE MARIE (Cat. 3, 4)

Marie a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 40. Elle colorie la partie du ruban avec les trois nombres 14, 15 et 16 qui se suivent.



Elle additionne ces trois nombres et trouve la somme de 45, qui est justement l'âge de sa mère!

Pourrait-elle aussi obtenir 45 en additionnant d'autres nombres qui se suivent sur une partie du ruban?

Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

Domaine de connaissances

- Arithmétique: numération, addition, division, diviseurs

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et s'approprier les deux conditions «nombres qui se suivent sur le ruban» et «somme 45»
- Essayer des sommes d'autres groupes de 3 nombres consécutifs, constater que leur somme est plus petite ou plus grande que 45. Imaginer alors que les nombres consécutifs ne sont pas forcément 3 (comme dans l'exemple), mais qu'ils pourraient être 2, 4, 6, ...
- Organiser une recherche par essais, au hasard, ou par essais organisés en commençant par 2 nombres (22 et 23) en continuant par 3 (exemple), par 4 (sans solution), par 5 (7, 8, 9, 10, 11), par 6 (5, 6, 7, 8, 9, 10) par 7 et par 8 (sans solution) par 9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) qui est la dernière solution puisque la suite commence à 1,
  ou essayer d'additionner les nombres des suites commençant par 1 (ça marche), puis par 2, par 3, par 4 etc.
  ou diviser 45 par ses différents diviseurs (rechercher des divisions de 45 qui marchent» pour obtenir un «nombre moyen» de la suite).

Attribution des points

4 Les cinq solutions ou les quatre nouvelles (22-23; 14-15-16; 7-8-9-10-11; 5-6-7-8-9-10; 1-2-3.-...-9), avec les calculs correspondants
3 Les cinq solutions (ou quatre nouvelles) sans le détail des calculs ou trois nouvelles solutions avec les calculs
2 Trois nouvelles solutions sans calculs ou deux nouvelles avec calculs
1 Une solution nouvelle avec calculs, ou deux nouvelles

solutions sans calculs, ou solutions avec erreurs de calcul

0 Incompréhension du problème ou une solution nouvelle sans calculs

Origine : C.I + Suisse romande + Siena

3. GUIRLANDE DE BALLONS (Cat. 3, 4)

Pour son anniversaire, Charles décore son salon en plaçant le long d'une paroi une guirlande de ballons. Il achète 5 ballons jaunes et beaucoup de ballons rouges. Il prépare la guirlande de la façon suivante :

- en partant de la gauche, le douzième ballon est rouge et porte l'inscription BON ANNIVERSAIRE ;
- en partant de la droite, le douzième ballon est aussi rouge et porte l'inscription MEILLEURS VOEUX.

Entre les deux ballons qui portent une inscription, Charles ne place que les 5 ballons jaunes.

Combien de ballons peut contenir la guirlande de Charles et de quelles manières a-t-il pu placer ses ballons ?

Dessinez ou décrivez les guirlandes possibles et expliquez votre raisonnement.

Analyse de la tâche

- Arithmétique : addition, dénombrement
- Géométrie : latéralisation, dispositions spatiales relatives

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et commencer à dessiner la suite des ballons. La solution la plus « naturelle » qui satisfait les consignes est la suivante : R R R R R R R R R R R R (BON ANNIV.) J J J J J R (MEILLEURS VOEUX) R R R R R R R R R R R pour laquelle il faut 29 (12 + 5 + 12) ballons.
- Imaginer, sous la sollicitation des questions de l'énoncé, qu'il pourrait y avoir une autre possibilité et découvrir qu'on peut construire une seconde suite de ballons satisfaisant aussi toutes les consignes, sans se fixer la contrainte imaginaire que les 12 ballons comptés de la gauche ou de la droite devraient être tous rouges. On arrive ainsi à la suite R R R R R R (MEILLEURS VOEUX) J J J J J R (BON ANNIV.) R R R R R pour laquelle il faut 17 (12 + 5) ballons.

Attribution des points

4 La réponse juste et complète (2 dispositions, de 17 ou 29 ballons) avec dessins et couleurs, et explications

3 La réponse juste et complète avec dessins, sans explications

2 Une des deux réponses juste et complète, avec dessin et explications
ou confusion entre douze et douzième (le ballon avec texte serait le treizième) conduisant à 31 et 18 ballons

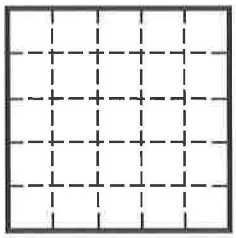
1 Une ou deux solutions qui ne tiennent pas compte de toutes les consignes ou erreur de comptage

0 Incompréhension du problème

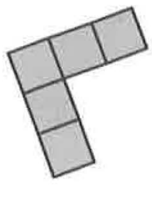
Origine : Siena

4. LE DÉFI (Cat. 3, 4, 5)

Anna lance un défi à Georges et lui dit :
« Le vainqueur sera celui qui arrivera à placer dans ce carré…



… le plus de pièces de ce genre :



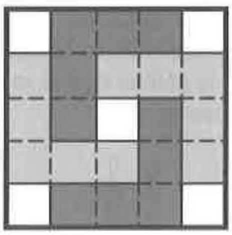
sans les superposer. (Les pièces ne doivent pas être l'une sur l'autre.)

Et vous, combien de pièces de ce genre arriverez-vous à placer dans ce carré?

Dessinez votre solution en marquant bien chaque pièce.

Domaine de connaissance
- Géométrie: isométries, pavages
- Arithmétique: dénombrement

Analyse de la tâche
- Comprendre que pour pouvoir placer le plus de pièces possible, il faut les placer proches les unes des autres pour limiter les espaces vides.
- Essayer de placer une première pièce dans un angle et les autres à la suite et voir qu'on ne peut en placer que trois de cette manière, par dessins ou par manipulations de pièces découpées.
- Se rendre compte qu'il y a 25 cases dans le carré et que trois pièces n'en occupent que 15, et chercher d'autres dispositions où il ne reste pas 10 cases inoccupées. Trouver ainsi la configuration suivante, la plus compacte, où l'on peut disposer quatre pièces dans le carré.



Attribution des points

4 Solution optimale (4 pièces) avec distinction claire des quatre pièces

3 Solution optimale (4 pièces) avec dessin peu clair

2 Solution avec 3 pièces et un dessin clair

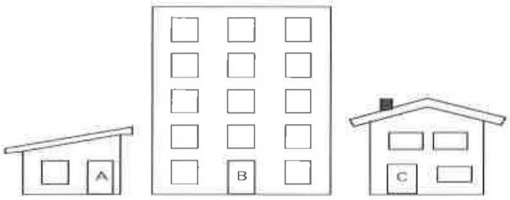
1 Réponse « 4 pièces » sans dessin ou réponse « 5 pièces » avec l'opération « 25 : 5 = 5 »

0 Incompréhension, pièces superposées...

Origine: Coordinateurs internationaux Adaptation du problème 9 du 2e RMT II et d'une question du « Kangourou des mathématiques ».

5. LA PLANÈTE DES MENTEURS (Cat. 3, 4, 5)

Jules vient d'arriver dans le pays des menteurs où les habitants ne disent jamais la vérité.
Il rencontre trois enfants Jean, Paul et Marie qui habitent chacun dans l'une de ces trois maisons:



Les trois enfants lui disent:

Jean: *Ma maison a plus de deux étages.*
Paul: *Ma maison a une cheminée.*
Marie: *Ma maison n'est pas à côté de celle de Jean.*

Trouvez dans quelle maison habitent Jean, Paul et Marie.

Expliquez comment vous avez trouvé.

Domaine de connaissances
- Logique

Analyse de la tâche
- Prendre la négation des trois affirmations:
  Jean dit que sa maison a plus de deux étages, mais ce n'est pas vrai, il n'habite pas en B mais en A ou en C.
  Paul dit que sa maison a une cheminée, mais ce n'est pas vrai, il n'habite pas en C, mais en A ou en B.
  Marie dit: ma maison n'est pas à côté de celle de Jean, mais ce n'est pas vrai, sa maison est à côté de celle de Jean. Si Jean est en A, Marie sera en B et si Jean est en C, Marie sera aussi en B.
  Marie sera donc en B et par conséquent ni en A et ni en C.
  Il ne reste alors qu'une possibilité pour Paul: la maison A et, alors, Jean doit être en C.

– Ou établir un tableau en suivant le raisonnement précédent :

maisons	A	B	C
Jean		non	
Paul			non
Marie	non	oui	non

– Ou travailler par hypothèses et vérifications.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Jean en C, Paul en A et Marie en B) avec explication des négations ou un tableau
3 Réponse correcte avec explications incomplètes (ou avec une vérification seulement)
2 Réponse correcte sans aucune justification
1 Début de résolution qui témoigne de la compréhension de la situation
0 Incompréhension du problème

Origine : Belluno

6. L'ÉQUIPE DE FOOTBALL (Cat. 4, 5, 6)

L'entraîneur regarde son équipe entrer sur le terrain. Il additionne les numéros des maillots de ses 11 joueurs et il obtient la somme de 66. Il fait deux changements à la mi-temps : les joueurs qui ont les maillots No 12 et 14 prennent la place de deux camarades. L'entraîneur additionne à nouveau les numéros de tous les maillots et obtient 86. (Les joueurs ont tous des numéros différents, et il n'y a pas de maillot 0.)

Quels peuvent être les numéros des deux joueurs qui se font remplacer?

Expliquez votre raisonnement et notez toutes les réponses possibles.

Domaine de connaissances

– Arithmétique : additions

Analyse de la tâche

– Comprendre que la somme 66 s'obtient avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, … 11.
– Comprendre que la nouvelle somme 86 s'obtient par l'addition de 11 nombres, dont 12 et 14.
– Comprendre par conséquent que la somme, 26 (12 + 14) des deux nouveaux nombres vaut 6 de plus que l'augmentation de 20 et que la somme des nombres à retirer doit être 6.
– Considérer les couples de nombres naturels différents et supérieurs à 0 dont la somme est 6 : (1 ; 5), (2 ; 4). ou faire l'inventaire des couples de nombres naturels dont la somme et 6 et éliminer (0 ; 6) et (3 ; 3).

Attribution des points

4 Les deux solutions (1 ; 5) et (2 ; 4) avec explications de la procédure
3 Les deux solutions sans explications
2 Une des deux solutions avec justification ou les deux solutions et un ou deux couples (3 ; 3) ou (0 ; 6)
1 Une des deux solutions sans justification ou les deux couples (3 ; 3) et (0 ; 6)
0 Incompréhension du problème

Origine : Suisse romande

7. ÉCONOMIES DE BOUGIES (Cat. 5, 6)

Sylvie vient de préparer un gâteau pour l'anniversaire de son père qui fête ses 85 ans. Elle constate, avec surprise : « Tiens, je pourrai utiliser les deux mêmes bougies, à la fin du mois, pour le gâteau que je vais préparer pour mon anniversaire ! »

Y a-t-il déjà eu des années où, pour le gâteau de Sylvie et pour celui de son père, on a pu utiliser les deux mêmes bougies? Est-ce que ça pourra arriver encore dans le futur?

Expliquez votre raisonnement et indiquez les âges de Sylvie et de son père pour lesquels les deux gâteaux d'anniversaire ont les deux mêmes bougies.

Domaine de connaissances
- Arithmétique: calcul d'écarts, valeur positionnelle des chiffres
- Raisonnement logique: stratégie de recherche des possibilités

Analyse de la tâche
- Observer et comprendre que Sylvie a 58 ans et qu'elle aura toujours la même différence d'âge (27 ans) avec son père.
- Mettre en évidence (en gras dans le tableau suivant) la correspondance des âges de Sylvie et de son père où les deux chiffres sont les mêmes, intervertis. (la recherche peut se faire à partir de 0 et 27 ou à partir de 58 et 85);

Sylvie	0	3	**14**	**25**	**36**	**47**	...	56	57	**58**	59	...	**69**	80
père	27	30	**41**	**52**	**63**	**74**	...	83	84	**85**	86	...	**96**	107

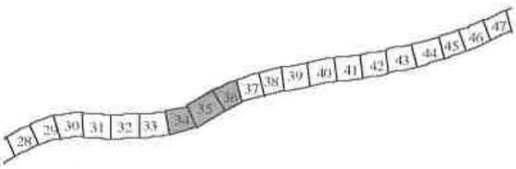
ou constater que le phénomène se reproduit tous les 11 ans; (14; 41), (25; 52), (36; 63), (47; 74), (58; 85), (69; 96).
Exclure (3; 30) qui n'utiliserait qu'une seule bougie sur l'une des tourtes,

Attribution des points
4 Réponse correcte avec les 5 nouvelles combinaisons, avec explications détaillées (par exemple tableau)
3 Réponse correcte avec les 5 nouvelles combinaisons, sans explications
ou 4 nouvelles combinaisons correctes, ou 6 combinaisons comprenant (03; 30), avec explications détaillées
2 2 à 3 nouvelles combinaisons correctes avec explications; ou 4 nouvelles combinaisons sans explications
1 Début de recherche organisée, avec une seule combinaison trouvée et expliquée, ou 2 à 3 solutions sans explications
0 Incompréhension du problème

Origine: Riva del Garda

8. LE RUBAN DE NOÉ (Cat. 5, 6)

Noé a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 100. Il colorie la partie du ruban avec les trois nombres consécutifs 34, 35 et 36.



Il additionne ces trois nombres et trouve la somme de 105, qui est justement son âge!

Pourrait-il aussi obtenir 105 en additionnant d'autres nombres consécutifs du ruban? Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

Domaine de connaissances
- Arithmétique: numération, addition, division, diviseurs

Analyse de la tâche
- Lire l'énoncé et s'approprier les deux conditions « nombres consécutifs » et « somme 105 »
- Imaginer que le nombre des « consécutifs » pourrait être 2, 3 (comme dans l'exemple) 4, 5, 6...
- Organiser une recherche d'autres « consécutifs » par essais, au hasard,
ou par essais organisés en commençant par 2 nombres (52 et 53) en continuant par 3 (exemple) par 4 (sans solution) par 5 (19, 20, 21, 22, 23), par 6 (15, 16, 17, 18, 19, 20) par 7 (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18), par 8 et par 9 (sans solution) par 10 (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) par 11, 12 ou 13 (sans solutions), par 14 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) qui est la dernière solution puisque la suite commence à 1.
- ou essayer d'additionner les nombres des suites commençant par 1 (ça marche), puis par 2, par 3, par 4 etc.

ou diviser 105 successivement par 2, 3,... et accepter les quotients entiers qui donnent le nombre «central» ou les «moitiés d'entiers» qui donnent la moyenne des deux nombres «du centre». (La calculatrice est un outil essentiel pour ces recherches).

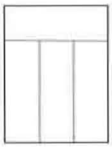
Attribution des points

4 Les sept solutions ou les six nouvelles (34-35-36, puis 52-53; 19-20-21-22-23; 15-16-17-18-19-20; 12 à 18; 6 à 15; 1 à 14), avec les calculs correspondants
3 Les sept solutions (ou les six nouvelles) sans calculs ou quatre à cinq nouvelles solutions avec calculs
2 Quatre à cinq nouvelles solutions sans calculs ou deux à trois nouvelles avec calculs
1 Une solution nouvelle avec calculs, ou deux à trois solutions sans calculs, ou solutions avec erreurs de calcul
0 Incompréhension du problème

Origine: Coordinateurs internationaux + Suisse romande

9. LA BOÎTE (Cat. 5, 6, 7)

La boîte représentée sur la figure a quatre compartiments de mêmes dimensions.



Si le périmètre de la figure est 112 cm, quelle est son aire, en cm^2?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.

Domaine de connaissances

- Géométrie: périmètre et aire du rectangle
- Arithmétique: les opérations

Analyse de la tâche

- Observer que la largeur de la boîte, à la base, est constituée de trois segments isométriques, qui se répètent 4 fois dans la longueur.
- Comprendre par conséquent que le demi-périmètre est constitué de 7 segments isométriques (ou le périmètre de 14)
- Passer au registre numérique (112 : 2) : 7 = 8. La largeur correspondra à 8 x 3 = 24 et la longueur à 8 x 4 = 32. L'aire sera donc de 768 cm2.

Attribution des points

4 Réponse juste (768 cm2 ou 768) avec explications détaillées (la division 112 : 14, 24 et 32 apparaissent explicitement, ou un dessin avec toutes les mesures indiquées)
3 Réponse juste avec explications partielles ou réponse «768 cm» (erreur d'unité) avec explications détaillées
2 Réponse juste sans autre explication ou réponse fausse due à une erreur de calcul qui apparaît dans les détails
1 La solution respecte le périmètre, mais pas l'égalité des pièces et l'aire est calculée de manière cohérente
0 Incompréhension du problème

Origine: Perugia

10. TARTE AU CITRON (Cat. 5, 6, 7, 8)

Pascal est fier de sa belle tarte au citron, de forme rectangulaire, qu'il a préparée pour partager avec ses cinq amis. Il leur dit:

– *Vous voyez, il est possible de partager entièrement cette tarte en six carrés égaux. J'aime bien les parts carrées. Qui en veut aussi une, comme la mienne?*
Catherine: – *Moi!*
Daniel et Marianne: – *Nous préférerions des parts rectangulaires, non carrées!*
Martine et François: – *Nous aimerions des parts triangulaires!*

Comment Pascal pourra-t-il partager sa tarte, équitablement, en respectant les souhaits de chacun?

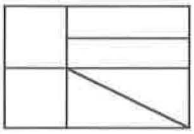
Dessinez le rectangle et une manière de le partager, avec un nombre minimum de découpages (découpages au couteau, en ligne droite).

Domaine de connaissances

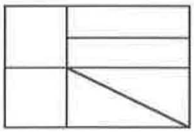
- Géométrie : polygones élémentaires
- Mesure : figures d'aires équivalentes

Analyse de la tâche

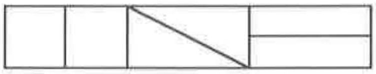
- S'approprier l'énoncé en concevant le rectangle comme un pavage de 6 carrés isométriques, et le dessiner selon l'une des deux configurations possibles : 6 x 1 ou 3 x 2.
- Choisir deux carrés et partagez les autres, par groupes de deux, en rectangles et en triangles puis chercher celle qui demande le moins de découpages (coups de couteau) : 4 coups et non 5 coups ou plus



4 coups



5 coups



5 coups

- Ou travailler en partant de deux carrés et en complétant la figure par des rectangles et des triangles pour obtenir un rectangle.

Attribution des points

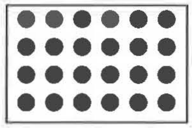
4 La solution avec le nombre minimum de découpages (4 coups), avec dessin précis
3 Une solution en 5 coups et dessin clair
2 Une solution avec un rectangle différent de 6 x 1 ou 3 x 2 (par exemple 4 x 1,5) ou solution en 4 coups mais le dessin n'est pas précis
1 Une solution qui ne respecte pas le fait que les parts doivent être équivalentes
0 Incompréhension du problème

Origine

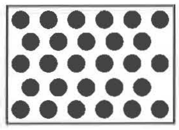
Développements du problème « Tarte carrée » 4RMT, par Coordinateurs internationaux

11. TRUFFES AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

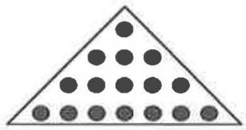
Voici quelques emballages de la maison Truffardi, qui contiennent tous le même type de truffes au chocolat :



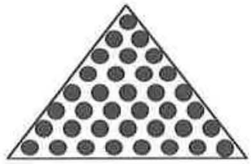
Classique



Quinconce



Piccolo



Tribu

Et voici les étiquettes qui indiquent le poids des truffes, à coller sur les emballages :

540 g	630 g	810 g

Mais elles sont en désordre et il en manque une.

Trouvez l'emballage pour lequel il n'y a pas d'étiquette et indiquez son poids.

Expliquez comment vous avez trouvé.

Domaine de connaissance

- Arithmétique : dénombrement et proportionnalité, multiples et diviseurs

Analyse de la tâche

- Constater qu'il y a deux types de grandeurs qui interviennent dans le problème : la quantité de truffes par boîte et la masse, et qu'il faudra établir une correspondance entre les nombres de truffes et les masses indiquées sur les étiquettes.
- Dénombrer les truffes dans les boîtes et ordonner ces quatre nombres : 16 – 24 – 28 – 36.
- Ordonner les trois étiquettes données, envisager (plus ou moins explicitement) les quatre hypothèses du placement de la quatrième :

? – 540 – 630 – 810 540 – ? – 630 – 810

540 – 630 – ? – 810 540 – 630 – 810 – ?

puis, pour chacune de ces hypothèses, vérifier si la relation « nombre de truffes – poids » est « acceptable » (c'est-à-dire proportionnelle) pour trouver que la correspondance est 540 – 24; 630 – 28 et 810 – 36 qui donne pour chaque couple un facteur de 22,5 (540 : 24 = 630 : 28 = 810 : 36) pour les masses.

- ou, à partir des multiples de 4 et de 90, supposer que le poids de 4 truffes est de 90 grammes et trouver que l'étiquette manquante correspond au couple 16 – 360 de l'emballage « Piccolo ».
- En déduire que l'étiquette qui manque est celle de l'emballage de 16 truffes (Piccolo) et en calculer sa masse: 360g (par multiplication par 22,5 ou par une autre procédure « pas à pas » 540 – 24, 180 – 8, 360 – 16).

Attribution des points

4 Réponse juste (emballage « Piccolo, de 360g) avec démarche détaillée et vérification du poids des autres emballages

3 Réponse juste (emballage « Piccolo, de 360g) avec vérification incomplète de la proportionnalité

2 Réponse juste pour l'emballage seulement, sans la masse, mais avec justifications ou « 360 g » seulement

1 Début de recherche, cohérente où deux couples sont proportionnels (dont celui où figure la masse inconnue), mais où la vérification n'est pas faite pour les deux autres couples

0 Incompréhension du problème

Origine: Adaptation du problème « Décoration » du 9e RMT II

12. LE TRIANGLE À DÉCOUPER (Cat. 6, 7, 8)

Marc a en main un triangle de carton.
Il le coupe en deux parties d'un seul coup de ciseaux en ligne droite. À l'aide de ces deux morceaux, il reconstitue un carré de 16 cm².
Maria a en main un triangle de carton différent de celui de Marc. Elle le coupe en deux parties d'un seul coup de ciseaux en ligne droite, avec lesquelles elle reconstitue aussi un carré de 16 cm².

Dessinez les triangles de Marc et de Marie et les carrés obtenus.

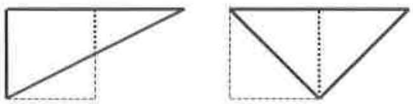
Pour chaque dessin, marquez la ligne de découpage.

Domaine de connaissances

- Géométrie: triangle et carré, partage d'une figure

Analyse de la tâche

- Comprendre que la recherche peut partir soit du carré de 4 cm de côté, soit d'un triangle, et que les deux figures doivent être équivalentes.
  Se persuader que le triangle doit être rectangle pour qu'une des pièces puisse se placer dans un angle du carré ou inversement, que le carré doit être découpé en deux parties qui ont au moins un côté de même longueur pour être juxtaposées.
- Calculer les dimensions du triangle permettant de conserver un côté comme côté du carré (4cm)
- Dessiner les deux triangles, l'un rectangle avec les côtés de l'angle droit de 4 et 8 cm, l'autre rectangle et isocèle, de 4 cm de hauteur et de base 8 cm, et dessiner aussi, éventuellement le carré reconstitué.



Attribution des points

4 Les deux solutions correctes avec dessin (ou découpage) précis

3 Les deux solutions correctes mais dessins imprécis (côtés non perpendiculaires, proportions non respectées...)

2 Une seule solution correcte trouvée, avec dessin précis

1 Présentation d'essais avec une solution imprécise avec, cependant le passage d'un triangle à un quadrilatère

0 Incompréhension du problème

Origine: Suisse romande

13. LES BONBONS (Cat. 7, 8)

Joseph est confiseur et aime les jeux mathématiques. Un jour il propose le défi suivant à trois enfants gourmands qui observent sa vitrine :

Vous voyez, il y a 5 boîtes de bonbons sur ce rayon. Je peux vous dire que :
- la première et la deuxième contiennent, ensemble, 24 bonbons,
- la deuxième et la troisième en contiennent, ensemble, 27,
- la troisième et la quatrième en contiennent, ensemble, 23,
- la quatrième et la cinquième en contiennent, ensemble, 16.

Je peux encore vous dire que la somme des bonbons de la première boîte, de la troisième et de la cinquième est 32. Celui d'entre vous qui, le premier, devinera le nombre exact de bonbons de chacune des boîtes, les recevra en cadeau.

Cherchez, vous aussi, le nombre de bonbons de chaque boîte.

Expliquez votre raisonnement et donnez le détail de vos calculs

Domaine de connaissances
- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : système d'équations du premier degré

Analyse de la tâche
- Organiser les données et observer que le nombre de la troisième boîte apparaît 3 fois dans l'inventaire, alors que toutes les autres ne figurent que deux fois.

Cas	Boîtes
a	I + II = 24
b	II + III = 27
c	III + IV = 23
d	IV + V = 16
e	I + III + V = 32
f	Total : 122

  Le total de 122 représente donc deux fois les boîtes I, II, IV et V et trois fois la boîte III. Donc, en soustrayant de 122 le double des sommes des lignes a et d, on obtient le triple du nombre de la troisième boîte :
  {122 – [(24 + 16) x 2]} : 3 = 14. De cette valeur, on remonte facilement aux autres : I = 11 ; II = 13 ; III = 14 ; IV = 9 ; V = 7.
- L'approche algébrique est moins intuitive. Les cinq lignes du tableau constituent un système de 5 équations du premier degré qui peut se résoudre de plusieurs façons, dont celle décrite précédemment (2a + 2d – e = 3 x III) ou encore, par substitutions successives : III = I + 3, V = III – 7 ou V = I – 4. L'équation e devient alors I + I + 3 + I – 4 = 32, d'où l'on obtient 3 x I = 33 et I = 11. On remonte alors aux autres valeurs : II = 13 ; III = 14 ; IV = 9 ; V = 7.
- On peut aussi procéder par essais et adaptations successives par exemple à partir de a) en fixant une valeur de la boîte I, en calculant les autres et adaptant vers le haut ou vers le bas.

Attribution des points
4 Réponse juste (I = 11 ; II = 13 ; III = 14 ; IV = 9 ; V = 7), avec les explications adéquates et cohérentes
3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires
2 Réponse partiellement correcte avec une erreur de calcul mais avec explications
1 Début de raisonnement correct (réponse avec erreurs de calculs)
0 Incompréhension du problème

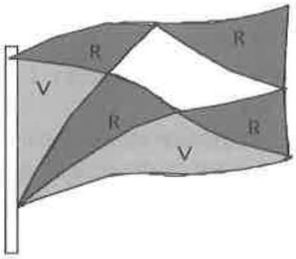
Origine : Riva del Garda

14. LA BANNIERE DE TRANSALPIE (Cat. 7, 8)

La bannière flotte fièrement au-dessus du château de Transalpie.

C'est un rectangle de 90 cm x 120 cm, partagé en sept zones par quatre segments de droite :
- une diagonale,
- un segment parallèle à cette diagonale dont les extrémités sont deux milieux de côtés,

– deux segments joignant ces deux milieux de côtés au sommet du rectangle, opposé à ces deux côtés.



Dans le pays, certains disent que l'aire de la partie blanche en forme de quadrilatère est le quart de celle de la bannière.

D'autres disent que les deux parties vertes (V) réunies couvrent un tiers de la bannière.

D'autre enfin prétendent que les quatre parties rouges (R), ensemble, constituent la moitié de la bannière.

Une de ces affirmations est vraie. Laquelle? Justifiez votre raisonnement.

Domaine de connaissances

– Géométrie: aire du triangle, similitude (homothétie)
– Arithmétique: fractions

Analyse de la tâche

– Redessiner exactement la bannière, à l'échelle, par un rectangle partagé par des segments, puis mesurer les dimensions et effectuer les calculs correspondants, numériquement, avec des mesures approximatives relevées sur la construction (fig. 1) sans avoir conscience que « 30 » et « 40 » sont les tiers respectifs de « 90 » et « 120 »;
(en cm^2):
aire totale: 120 x 90 = 10800, aire verte
120 x (30/2) + 90 x (40/2) = 3600,
aire rouge ≈ 60 x (30/2) + 60 x (45/2) + 45 x (40/2) + ((120 x (90/2) – aire verte) = 4950
aire blanche ≈ 120 x 90 – aire verte – aire rouge = = 10800 – 3600 – 4950 = 2250.

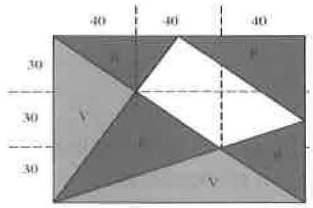


fig. 1

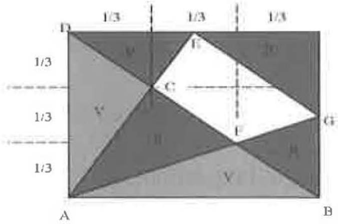


fig. 2

– Ou s'apercevoir – et chercher à justifier – que les points d'intersection C et F (fig. 2) sont au tiers exactement des segments qui les supportent (par exemple, le rapport d'homothétie entre les triangles ABC et EDC est 1/2 puisque DE est la moitié de AB, donc EC est la moitié de AC et le tiers de AE…)
On trouve les aires suivantes:
partie verte: 1/6 + 1/6 = 1/3; partie rouge: 1/12 + 1/12 + 1/6 + 1/8 = 11/24, partie blanche: 5/24.
– Comparer les aires et en conclure que seule la deuxième affirmation est vraie (la partie verte est le 1/3 du tout)

Attribution des points

4 La réponse correcte: l'aire verte est le tiers, avec justifications géométriques, découverte du facteur 1/3…
3 La réponse correcte avec justification numérique seulement, à partir des approximations mesurées ou démarche précédente (calculs et justification) sans conclusion
2 Réponse correcte avec des justifications partielles ou peu claires, ou justification numérique sans conclusion
1 Début de recherche, avec calculs de quelques parties seulement
0 Incompréhension

Origine: Coordinateurs internationaux + Suisse romande

15. QUE DE PAIRS! (Cat. 7, 8)

Anne a écrit tous les nombres naturels pairs, de trois chiffres (entre 100 et 999), formés uniquement avec les chiffre 0, 1, 2, 3 et 4.

Elle a ensuite calculé la somme de tous ces nombres.

Combien de nombres a-t-elle trouvés? Quelle est leur somme?

Expliquez votre raisonnement.

Domaine de connaissances
- Arithmétique
- Combinatoire

Analyse de la tâche
- Comprendre que les nombres à considérer ont trois chiffres, sont inférieurs à 445, se terminent par 0 ou 2 ou 4...
- Chercher une méthode systématique pour obtenir tous les nombres, par exemple en écrivant dans l'ordre les nombres de la première centaine correspondant aux contraintes:
  100, 102, 104, 110, 112, 114, 120, 122, 124, 130, 132, 134, 140, 142, 144 et reproduire cette liste de 15 nombres trois fois avec 2, 3 et 4 comme chiffres des centaines.
- Calculer la somme de ces nombres pour la première liste, par exemple en regroupant le premier et le dernier (100 + 144 = 244), le deuxième et l'avant dernier (102 + 142 = 244)... comme dans la somme des termes d'une progression arithmétique: 244 x 15 / 2 = 1830; ajouter ensuite 15 x 100 = = 1500 pour la deuxième liste (de 200 à 244), puis 1500 pour la troisième liste et encore 1500 pour la dernière et obtenir la somme de tous les nombres: 1830 + 3330 + 4830 + 6330 = 16320;
  ou calculer la somme des 60 nombres par d'autres regroupements, voire un à un.

Attribution des points

4 Réponses justes et complètes (60 et 16320) avec des explications claires, une procédure correcte et les détails des calculs

3 Réponses justes et complètes sans explication de la procédure mais avec les 60 nombres à retenir
ou réponse avec une erreur de calcul avec des explications claires et les détails des calculs

2 Procédure correcte, mais oubli ou excès de nombres à considérer
ou réponse avec une « petite » erreur de calcul sans explications
ou réponse correcte à la première question (60) avec explications, sans la somme

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

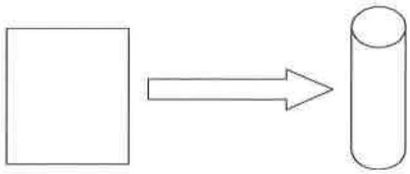
Origine: Israël

16. LES CANNELLONI (Cat. 8)

Chaque dimanche, Madame Pasta prépare les cannelloni. Elle découpe des rectangles de pâte de 16 cm x 12 cm.

Puis, pour chacun d'eux, elle colle les deux côtés les plus longs en les superposant sur une bande de 2 cm de large. Elle obtient ainsi des cylindres qu'elle remplit avec une farce de ricotta et d'épinards.

Après de nombreuses années d'expérience, elle sait qu'elle remplit exactement tous ses cannelloni avec un demi-kilo de farce.



Un beau jour, avec le même nombre de rectangles de mêmes dimensions, elle décide de confectionner ses cannelloni en collant les petits côtés de ses rectangles de pâtes, toujours en les superposant sur une largeur de 2 cm.

Trouvez quelle quantité de farce sera nécessaire pour remplir ses nouveaux cannelloni. Expliquez votre raisonnement.

Domaine de connaissances

- Géométrie: solides (développement, surface latérale et volume du cylindre), cercle (circonférence)
- Arithmétique: rapports et proportions
- Algèbre: approche du calcul littéral

Analyse de la tâche

- Comprendre que le rapport entre les quantités nécessaires de farce ne dépend pas du nombre de cannelloni mais du rapport entre les volumes des deux cylindres dont les surfaces latérales sont des rectangles de (12 – 2) cm x 16cm et de (16 – 2) cm x 12 cm.
- Comprendre que, en construisant les cylindres, un des côtés du rectangle de pâte, raccourci de 2 cm, (dans le premier cas le plus court, dans le second le plus long) devient la circonférence de base du cylindre, dont on peut trouver le rayon avec la formule inverse $r = c/2\pi$.
- Calculer les volumes des cylindres, de préférence sans approximation de p, pour pouvoir ensuite simplifier: Volume 1 = $400/\pi$ cm³ Volume 2 = $588/\pi$ cm³
- Calculer la quantité de farce nécessaire par une proportion: 500 : x = ($400/\pi$) : (588/p), d'où x = 735 (en grammes), ou en utilisant le rapport entre les volumes: le Volume 2 est 147/100 de Volume 1, donc il faudra 147/100 de la quantité habituelle (500 g) de farce.

Attribution des points

4 Réponse correcte (735 g) avec explications complètes
3 Réponse correcte, mais avec explications peu claires ou incomplètes
2 Procédure correcte mais non conclue ou avec une erreur de calcul ou procédure correcte mais qui ne tient pas compte des 2 cm de superposition
1 Début de raisonnement correct (ex. calcul du volume d'un cylindre, tenant compte ou non des 2cm de superposition)
0 Incompréhension du problème

Origine: Parma (d'après un problème de Galilée)

Bon appétit!

Notre ami Thibault entre dans un restaurant pour étudiants en chantant à tue-tête: « Ba moin en ti bo, dé ti bo, twa ti bo, doudou... ». Le chef lui présente la carte:

Entrées	Accras de morue	15 F
	Quiche lorraine	18 F
Plats principaux	Poisson grillé	35 F
	Colombo de poulet	40 F
Desserts	Flan au coco	15 F
	Glace (trois boules)	20 F
Boissons	Eau	8 F
	Jus de fruit	12 F

Combien de menus différents peut-il commander, chaque menu devant comporter une entrée, un plat principal, un dessert et une boisson, sachant qu'il n'a que 85 francs en poche?

Solutions dans le prochain numéro

[ndlr] Ce problème est tiré de *Panoramath 3* (Voir p. 3 de couverture), il vient du « Rallye mathématique des Antilles et de la Guyane », il est destiné à des élèves du CM1 et CM2 (4e et 5e primaire). Outre son petit air des mers du Sud, il nous apporte une idée originale: au lieu de se contenter de dresser la liste des combinaisons de tous les menus (problème « ultra classique » dès les années soixante), il faut tenir compte de la contrainte des prix, ce qui rompt la monotonie de l'inventaire.

Ecriture topologique
Scrittura topologica

Archimedes' Laboratory
www.archimedes-lab.org

• Reproduisez et découpez le rectangle avec les inscriptions selon les pointillés, puis formez un carré en le pliant et en collant les volets (fig. 1). Votre mission: découper ce carré au cutter selon les pointillés et, en le pliant judicieusement, faire apparaître l'inscription **RMT 2003** foncée sur fond clair ou claire sur fond foncé! (solution sur www.archimedes-lab.org/rmt2003)

• Riproducete e ritagliate il rettangolo con i graffiti seguendo la punteggiatura, poi piegandolo e incollandone le alette formate un quadrato (fig. 1). In seguito, ritagliate l'interno di questo quadrato seguendo la punteggiatura e piegandone le parti fate apparire la scritta **RMT 2003**! (soluzioni: www.archimedes-lab.org/rmt2003)

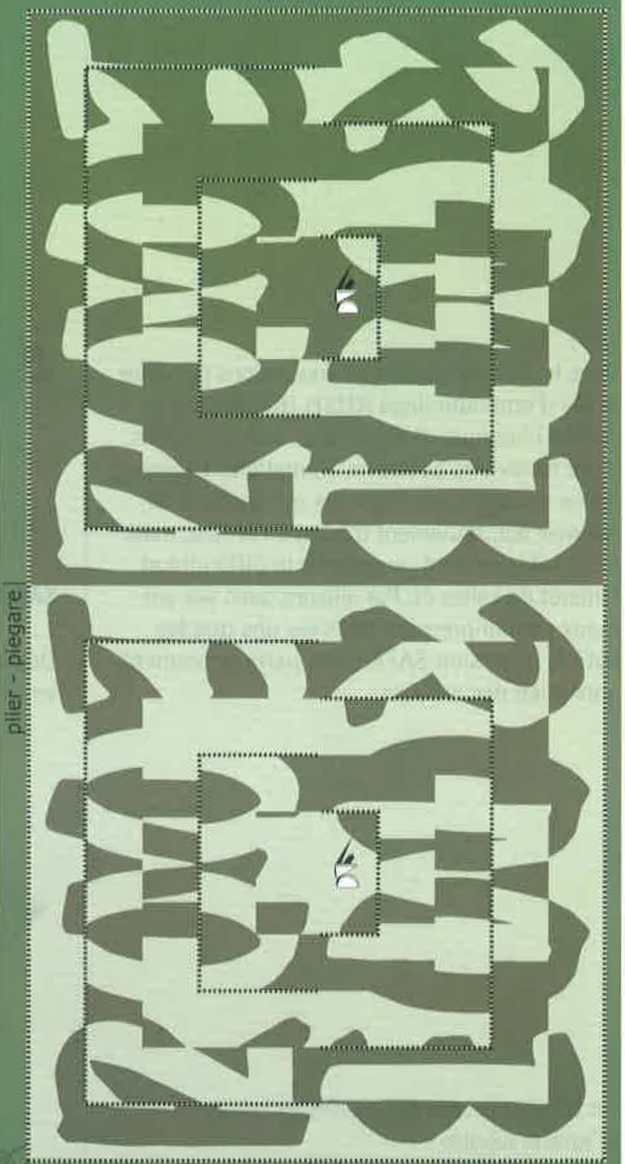


fig. 1

INFORMATION « JEUX »

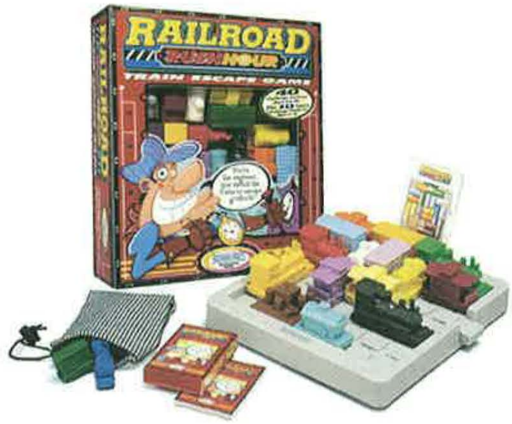
Dans le numéro 206, nous vous avions présenté le jeu d'embouteillage RUSH HOUR dans sa version classique. Il existe deux autres versions, l'une ferroviaire et l'autre animalière. La présence de quelques éléments qui peuvent se mouvoir non seulement d'avant en arrière, mais aussi latéralement, augmente la difficulté et l'intérêt de celles-ci. Par ailleurs, avec ses animaux plus impressionnants les uns que les autres, la version SAFARI est particulièrement appréciée des enfants.

Ces deux jeux peuvent être obtenus, en Suisse, à l'adresse suivante :

LA TOUPIE – Jeux éducatifs
CH-1324 Premier
Tél : 024 453 10 11
E-mail : jouetspre@hotmail.com

RAILROAD RUSH HOUR – Art. 40.0670

Des locomotives, des wagons et des plates-formes à bagages bloquent votre locomotive rouge. Déplacez tous ces obstacles de manière à faire sortir votre locomotive rouge.

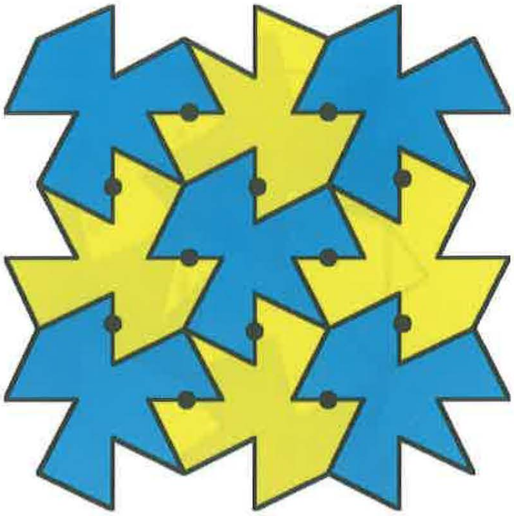


SAFARI RUSH HOUR– Art. 40.0665

Déplacez-moi ce zèbre ! Entourés d'animaux, vous cherchez la sortie avec votre Jeep Safari.

LE COIN DES PAVAGES (2)

Michel Brêchet

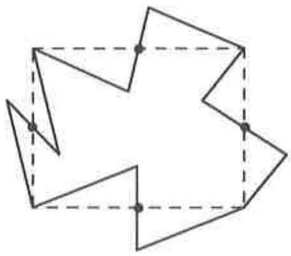


Dans le numéro précédent [1], nous avons examiné les caractéristiques d'une figure permettant de recouvrir le plan sans trou ni chevauchement par une suite de rotations d'un quart de tour. Dans cet article, ce sont les pavages par symétries centrales qui retiendront notre attention. Des pavages qui laissent libre cours à l'imagination et qui conduisent à des «œuvres» surprenantes. Et de surcroît très esthétiques, ce qui ne gâche rien.

La page de couverture de ce numéro montre un pavage par rotations d'un quart de tour ou par symétries glissées. Cependant, la figure de base est à ce point particulière qu'elle conviendrait également pour paver le plan par des symétries centrales (voir ci-dessus, à droite) dont les centres seraient les nœuds d'un réseau quadrillé. Mais comment s'y prendre pour générer un motif susceptible de recouvrir une feuille de papier à l'aide de cette seule isométrie?

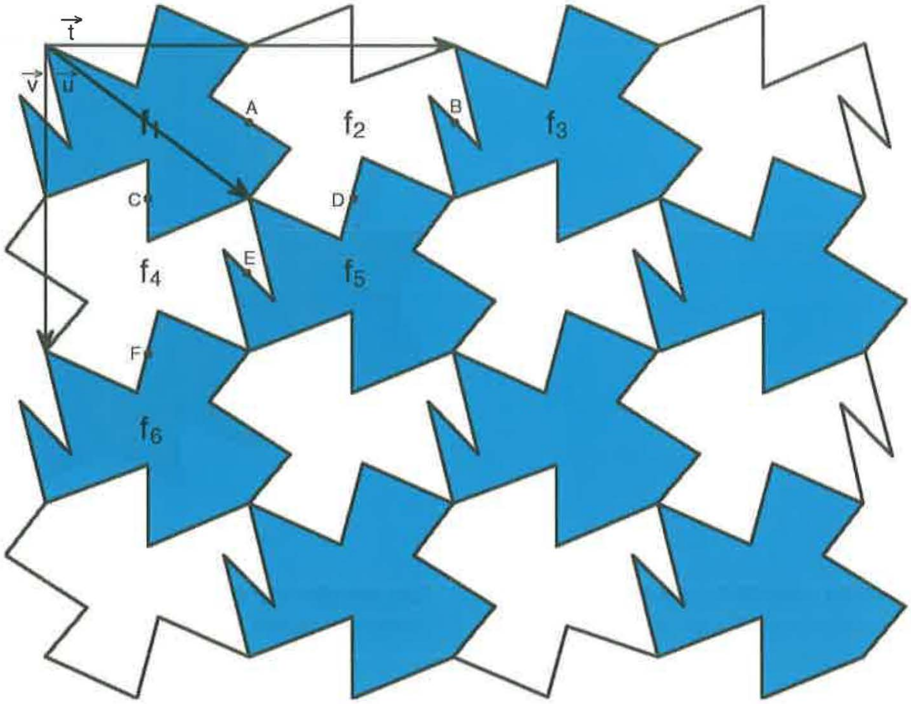
Les pavages par symétries centrales : comment faire ?

- Construire un rectangle, ou plus généralement un quadrilatère.
- Tracer une ligne (ligne brisée, courbe...) possédant un centre de symétrie et dont les extrémités sont deux sommets consécutifs de ce rectangle (ou de ce quadrilatère).
- Faire de même avec les autres couples de sommets consécutifs.
- Paver le plan par symétries centrales.



1. *Math-Ecole* 207, *Le coin des pavages (1)*, par le même auteur

Motif obtenu



Analyse du motif

Deux isométries apparaissent dans ce motif périodique. Par construction, les figures ayant des côtés communs sont images l'une de l'autre par une symétrie centrale :

Première ligne	Deuxième ligne	...	Première colonne	Deuxième colonne	...
$f_1 \xrightarrow[S(A)]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[S(E)]{} f_5$	...	$f_1 \xrightarrow[S(C)]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[S(D)]{} f_5$	...
$f_2 \xrightarrow[S(B)]{} f_3$	...	...	$f_4 \xrightarrow[S(F)]{} f_6$	...	...
...	...	...	...	...	...

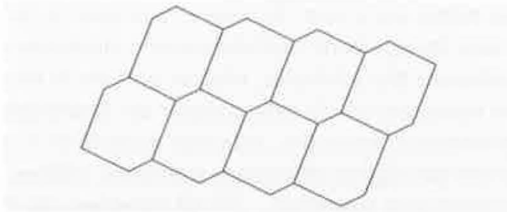
En conséquence, comme la composée de deux symétries centrales est une translation définie par un vecteur de même direction et de même sens que celui qui joint les centres de symétrie, mais de longueur double, on a :

$f_1 \xrightarrow[T(\vec{t})]{} f_2$ $\quad$ $f_1 \xrightarrow[T(\vec{u})]{} f_5$ $\quad$ $f_1 \xrightarrow[T(\vec{v})]{} f_6$ $\quad$ ...

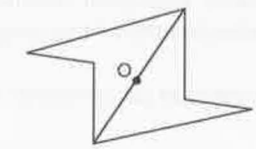
(avec $\vec{t} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$) $\quad$ (avec $\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AD}$) $\quad$ (avec $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{CF}$)

Pourquoi ça marche?

Remarquons tout d'abord que tout hexagone ayant des côtés opposés parallèles et isométriques pave le plan par translations successives (un hexagone ayant une seule paire de côtés opposés parallèles et isométriques pave aussi le plan, par translations et symétries centrales dans ce cas).



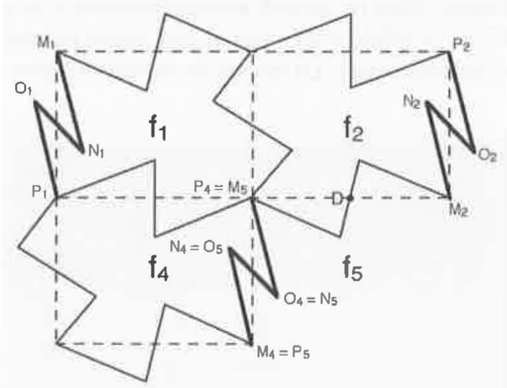
Par suite, deux copies d'un même quadrilatère convenablement juxtaposées formant un tel hexagone, on en déduit que tout quadrilatère (convexe ou non) pave le plan.



Hexagone constitué de deux quadrilatères images l'un de l'autre par la symétrie de centre O.

Revenons au motif de la page précédente. Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux car chaque ligne brisée est image d'elle-même par symétrie centrale.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, la figure initiale est construite à partir d'un quadrilatère (ici un rectangle), et tout quadrilatère permet de paver le plan par symétries centrales, comme on vient de le voir. Ainsi, le sommet M_5, image de M_2 par la symétrie de centre D, sera confondu avec le sommet P_4. De même, P_5 (image de P_2) et M_4 seront confondus. En outre, comme la symétrie centrale est une isométrie qui conserve les directions et que chaque ligne brisée possède un centre de symétrie (d'où $P_1O_1 = M_1N_1$, $P_2O_2 = M_2N_2, ...$) , les lignes $M_5N_5O_5P_5$ et $P_4O_4N_4M_4$ seront confondues.



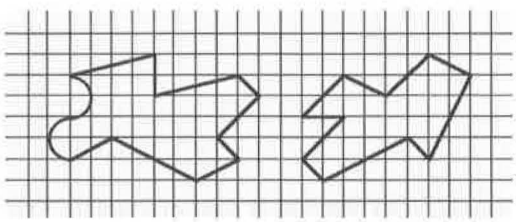
Cette démarche peut également être menée en considérant que la figure f_5 est l'image de la figure f_4 par symétrie centrale. Ce même type de raisonnement s'applique par ailleurs aux autres figures.

En classe

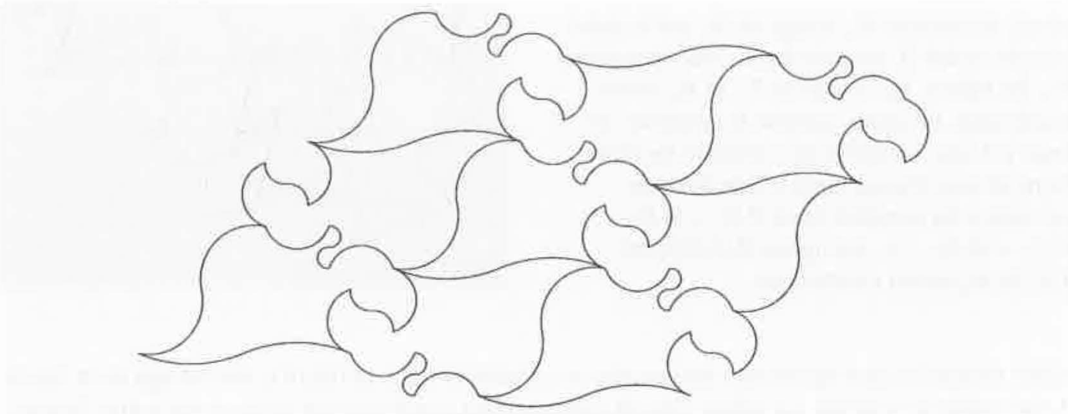
L'étude des transformations du plan figure dans tous les programmes romands des degrés 5 à 9, et même dans ceux des degrés précédents parfois. La réalisation de pavages trouve donc sa place dans les leçons de mathématiques. Outre des connaissances spécifiques, elle développe des compétences très générales, liées de près ou de loin à l'apprentissage des mathématiques : reconnaître et reproduire des formes, analyser des figures géométriques pour en extraire mentalement les différents éléments constitutifs, anticiper la position d'une figure déplacée par une isométrie, imaginer puis créer des figures répondant à certains critères, adapter des essais successifs, tenir compte de ses erreurs pour progresser... On dit volontiers que l'enseignement des mathématiques doit aussi contribuer à l'épanouissement de la personnalité des élèves et au renforcement de la confiance qu'ils ont en eux-mêmes. La confection de motifs périodiques est une piste tout à fait intéressante pour œuvrer dans cette direction, car elle permet aux élèves d'agir sur les problèmes qu'ils résolvent (ils inventent, testent, observent, expliquent, rectifient, optimisent...), d'agir en fait sur les mathématiques. Et donc de conduire consciemment leurs progressions, attitude fondamentale requise par tout apprentissage.

A propos des pavages par symétries centrales, le maître pourra demander aux élèves :

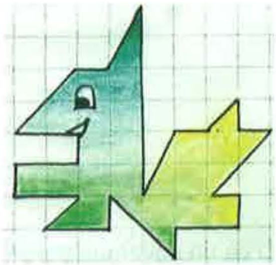
- de paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre (ou d'une autre qui convient) ;
- de décrire ensuite les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- de générer enfin une figure permettant de paver le plan par symétries centrales.



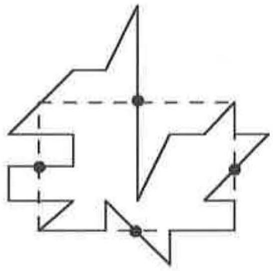
Selon ce scénario, la figure initiale proposée aux élèves ne doit être ni trop simple, ni trop complexe. On peut par exemple partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme dont les côtés ont été déformés (voir ci-dessus). Les élèves pourraient certes sans trop de difficultés recouvrir une feuille quadrillée à partir d'un quadrilatère quelconque déformé (en utilisant si nécessaire des ciseaux ou un logiciel de dessin). Mais ils seraient alors probablement incapables de retrouver les propriétés de la figure initiale, et par là même d'en inventer une, étape cruciale pour ne pas dire incontournable de cette séquence d'apprentissage. La recherche du quadrilatère de base du pavage suivant illustre ces propos :



Et maintenant place aux travaux d'élèves, qui allient persévérance, créativité et connaissances mathématiques bien entendu (voir également à la page 4).

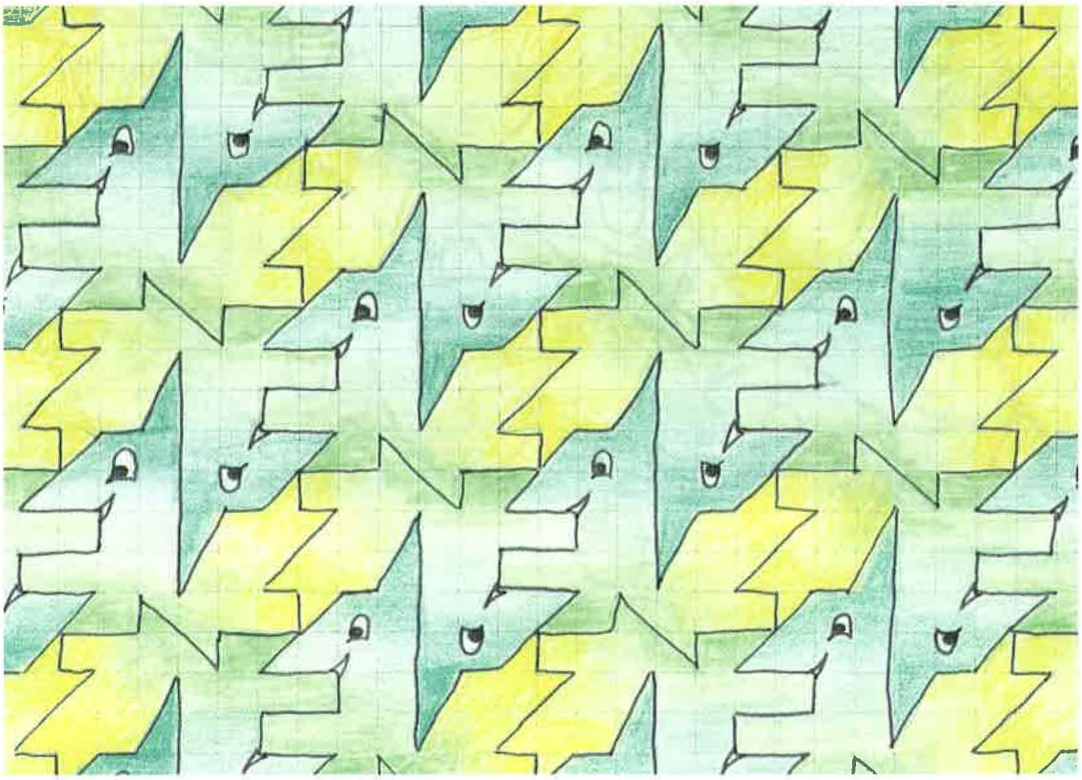


Ce joli dessin, imaginé par Fanny (14 ans), pave-t-il le plan par symétries centrales successives ?

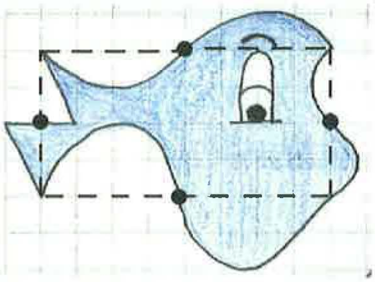


Oui, car il a été élaboré à partir d'un rectangle dont les côtés déformés possèdent un centre de symétrie !

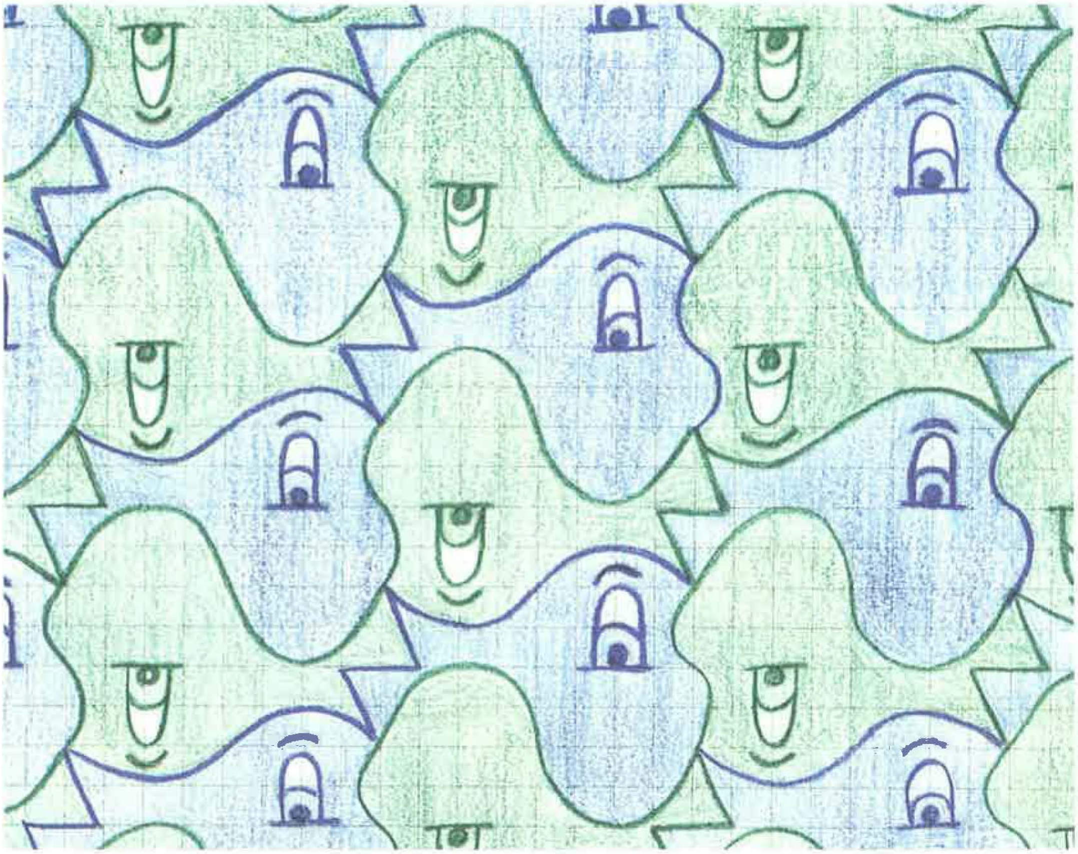
Il mène en conséquence à une « œuvre » toute empreinte de régularités :



Ici, la déformation est plus évidente, mais non moins figurative (Arlinda, 14 ans) :



D'où un aquarium peuplé de poissons semblables :



APPRENDRE LES MATHÉMATIQUES SANS PARLER L'ESPÉRANTO

Jean-Philippe Antonietti
IRDP

Introduction

En 1997, de nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques sont introduits dans les classes de Suisse romande. Ces nouveaux moyens n'apportent pas de grandes modifications sur le plan des contenus mathématiques. Les notions d'ensembles et de relations ne sont plus enseignées en tant que telles, l'apprentissage de la numération se fait sans recourir à d'autres bases que celle de dix, les rudiments de la topologie ne sont plus abordés directement. Mais à part la suppression de ces quelques objets épineux (Conne, 1986; Perret, 1985), l'accent est toujours mis sur la logique et le raisonnement, sur le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés, l'espace et la géométrie ainsi que sur la mesure et le mesurage.

L'innovation est d'ordre didactique. Les contenus à enseigner sont les mêmes, en revanche la manière d'enseigner qui est proposée est fondamentalement différente. Selon cette nouvelle conception, très inspirée par la didactique des mathématiques française (Brousseau, 1998), l'enseignant a comme tâche de proposer à l'élève des situations dans lesquelles le savoir à enseigner puisse émerger:

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des «problèmes» qu'il propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. (Brousseau, 1998, p. 59).

L'enseignant a donc la responsabilité de créer dans sa classe les conditions qui permettent à ses élèves de vivre à leur échelle les tribulations d'une société mathématicienne. L'approche proposée est donc résolument socio-constructiviste. Les élèves vont être les bâtisseurs de leurs connaissances qu'ils acquerront en interagissant avec leur milieu ainsi qu'en se confrontant à leurs pairs. L'IRDP suit depuis le début l'introduction généralisée de ces nouveaux moyens en Suisse romande. Deux recherches complémentaires ont été entreprises. La première, qui est en voie d'achèvement, a pour objet d'observer dans une perspective didactique, les réactions qu'une telle innovation provoque dans la classe et l'établissement (Tièche Christinat, 2001). La deuxième, réalisé par un consortium romand, vise à cerner les compétences et connaissances en mathématiques mobilisables par les élèves de 2e et 4e primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens.

L'évaluation des compétences des élèves de 2e primaire vient de faire l'objet d'une publication de l'IRDP (Antonietti et al., 2003). Dans cet ouvrage (disponible sur le site de l'IRDP: <http://www.irdp.ch/publicat/publicd.htm>), nous montrons qu'après deux années d'école primaire, les élèves manifestent des compétences qui attestent que les objectifs fixés par le nouveau plan d'étude romand sont atteints. Les écoliers savent à la fin de leur premier cycle dénombrer une collection, comparer des nombres entiers, compléter une séquence de la suite numérique, décomposer des nombres en centaines, dizaines et unités, reconnaître la valeur positionnelle des chiffres ou encore résoudre des problèmes simples en utilisant des écritures additives et soustractives... Dans le domaine arithmétique, les écoliers ont dépassé le temps de la sensibilisation et manifestent déjà de bonnes compétences. Dans le domaine géométrique, leurs acquis sont moins homogènes. Si certains semblent très à l'aise lorsqu'il s'agit de découvrir des invariants, de se représenter des transformations, de construire un pavage ou de comparer des mesures, d'autres semblent éprouver d'assez grandes difficultés dans des situations qui requièrent ces compétences. Ce domaine des mathématiques est donc pour un certain nombre d'écoliers encore en friche. L'investissement des enseignants en géométrie est probablement inégal et les différences que nous avons pu observer entre les élèves reflètent vraisemblablement souvent des décalages dans le développement spontané de notions spatiales élémentaires.

Bien que sans surprise, ces résultats sont réjouissants. Une observation vient néanmoins les ternir : les performances des élèves allophones sont systématiquement moins bonnes que celles des élèves francophones. Il est donc légitime de se demander si ces différences, attendues certes, ne sont pas accentuées par l'emploi de la nouvelle méthodologie. Dans la suite de cet article, nous allons approfondir cette interrogation à travers l'examen de l'une des tâches mathématiques proposée dans l'enquête Mathéval.

Analyse d'une tâche

La tâche que nous allons analyser s'intitule *Les mouches de Hébus*. En voici l'énoncé :

Les mouches de Hébus

Hébus est un troll. Comme tous les trolls, il est absolument dégoûtant. Un nuage de mouches le suit donc en permanence. Chaque matin son ami Lanfeust lui pose quatre questions afin d'estimer le nombre de mouches qui lui tournent autour. Lanfeust propose un nombre et Hébus répond en lui disant s'il est trop grand, trop petit ou si c'est le nombre exact.

lundi matin

- Lanfeust propose 78, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 29, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 17, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 6, Hébus répond trop grand.

Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ? Enumérez toutes les possibilités ?

mardi matin

Proposition de Lanfeust	Réponse de Hébus
45	trop grand
23	trop petit
39	trop grand
27	trop petit

Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ? Enumérez toutes les possibilités ?

Pour ne pas trop pénaliser les élèves ayant des difficultés de lecture, les enseignants étaient invités à lire le problème à haute voix et à expliciter les termes difficiles si nécessaire.

Les mouches de Hébus fait référence à la relation d'ordre qui existe dans l'ensemble des entiers naturels ainsi qu'aux notions de minorant, de majorant, de bornes inférieure et supérieure. Ce problème s'apparente à *L'échelle* ou plus encore à *Qui suis-je?* ou à *Chaud, froid* qui sont proposés comme activités dans les nouveaux moyens (Ging, Sauthier, & Stierli, 1996).

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de:

- comprendre un énoncé;
- faire des hypothèses et les vérifier;
- chercher un ensemble de solutions;
- comprendre et utiliser l'ordre qui existe dans l'ensemble des entiers naturels pour approximer un ensemble de nombres.

Beaucoup d'activités des nouveaux moyens sont prévues pour être réalisées à deux. Rappelons que l'un des credos de la nouvelle méthodologie est que la communication entre pairs fait partie intégrante du processus de construction des connaissances. C'est pour cette raison que nous avons concocté aussi, en plus des épreuves individuelles, des épreuves collectives. *Les mouches de Hébus* est l'un de ces problèmes que les élèves durent résoudre en duo.

Avant d'examiner le rôle que joue la composition des duos sur leur réussite, décrivons brièvement les différentes solutions proposées ainsi que leur fréquence.

Première partie du problème *(lundi matin)*

Cette première partie est beaucoup plus facile que la seconde. Les propositions de Lanfeust forment une suite ordonnée et décroissante de majorants qui rétrécissent à chaque fois l'ensemble des solutions possibles. La dernière proposition est ainsi, à une unité près, la borne supérieure de l'ensemble recherché. La borne inférieure est quant à elle, le premier élément de l'ensemble des entiers naturels (nous avons admis comme solution aussi bien 0 que 1).

L'ensemble des solutions fournies par un duo peut être caractérisé par sa borne inférieure et par sa borne supérieure. A priori les réponses peuvent donc être catégorisées de la manière suivante:

Niv0 Les élèves ne répondent pas.
Niv1 Ni la borne inférieure, ni la borne supérieure de l'ensemble des solutions proposées n'appartient à l'ensemble des solutions possibles.
Niv2 L'une des bornes de l'ensemble des solutions proposées est une solution possible.
Niv3 Les solutions proposées sont toutes correctes mais il en manque.
Niv4 L'ensemble des solutions proposées est exhaustif.

Donnons quelques exemples de réponses et catégorisons-les (voir Tableau 1).

Tableau 1. Quelques exemples de réponses fournies au problème *Les mouches de Hébus* et leur catégorisation. Les bonnes solutions sont indiquées en gras.

lundi matin

Niv1 :	{16}
	{6}
	{6, 29}
Niv2 :	{**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, 6,}
	{**2**, **3**, **4**, **5**, 6}
	{**3**, **4**, **5**, 6}

Niv3 : **{1, 2, 3, 4}**
{0, 1, 2, 3}
{5}
Niv4 : **{1, 2, 3, 4, 5}**
{0, 1, 2, 3, 4, 5}

mardi matin

Niv1 : {39, 40, 41, 42, 43, 44, 55}
{21, 22, 23, 24, 25, 26}
{22, 23, 24, 25, 26, 27, **28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**, 39, 40, 41, 42, 43, 44}
Niv2 : {25, 26, 27, **28**}
{**30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**, 39}
{27, **28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**}
Niv3 : **{29, 39, 30}**
{30}
{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38}
Niv4 : **{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38}**

Le nombre et la fréquence des différents types de réponses fournies par les duos à la première partie du problème (lundi matin) sont rapportés dans le Tableau 2.

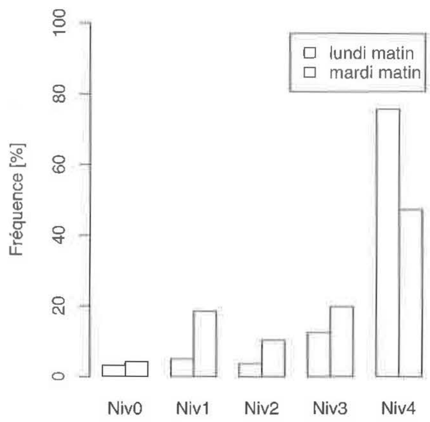
Tableau 2. Répartition des différents types de réponses à la première partie du problème (lundi matin).

	Niv0	Niv1	Niv2	Niv3	Niv4	Total
Effectif	12	19	14	47	287	379[1]
Fréquence [%]	3.2	5.0	1.7	12.4	75.7	100.0

Plus de trois quarts des duos fournissent l'ensemble de toutes les solutions attendues. Les autres, pour la plupart, omettent quelques solutions : ils répondent donc correctement mais ne sont pas exhaustifs (voir Figure 1).

1. Pour ces analyses nous n'avons pris en considération que le travail des duos. Nous avons donc exclu celui des trios, ainsi que les solutions fournies par des élèves ayant travaillé seuls à ce problème.

Figure 1. Distribution des réponses à la première (lundi matin) et à la seconde partie (mardi matin) du problème *Les mouches de Hébus.*



Seconde partie du problème *(mardi matin)*

Caractérisons les réponses des duos à la partie du problème selon le même principe que précédemment (pour quelques exemples de réponses, voir Tableau 1).

La répartition des réponses fournies par les duos à cette seconde partie est rapportée dans le Tableau 3.

Ici un peu moins de la moitié des duos répond parfaitement. Pour le reste, une moitié *grosso modo* répond correctement mais sans être exhaustif et l'autre se fourvoie complètement (voir Figure 1).

Tableau 3. Répartition des différents types de réponses à la seconde partie du problème (mardi matin).

	Niv0	Niv1	Niv2	Niv3	Niv4	Total
Effectif	16	70	39	75	179	379
Fréquence [%]	4.2	18.5	10.3	19.8	47.2	100.0

Dépendance entre la première et la deuxième partie du problème

Il est probable que les élèves se soient déjà attelés à la première partie du problème et n'aient abordé la seconde partie qu'après avoir réussi la première. Ceci peut être étayé statistiquement : la réussite à la seconde partie de la tâche n'est pas indépendante de la réussite à la première partie [2] (voir Tableau 4). La réussite à la première partie du problème est même une condition nécessaire à la réussite à la seconde partie, quasiment aucun duo n'a réussi la seconde partie après avoir raté la première !

2. Si l'on effectue dans cette situation un test du khi carré, l'on est conduit à rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse statistique nulle selon laquelle la réussite à la seconde partie est indépendante de la réussite à la première partie.

Tableau 4. Réussite conjointe à la première et à la seconde tâche du problème. La réussite correspond à une solution de niveau 4 (Niv4), l'échec à une solution d'un niveau inférieur (Niv0, Niv1, Niv2 ou Niv3).

		mardi matin		
		Réussite	Echec	Total
lundi matin	**Réussite**	173	114	287
	Echec	6	86	92
	Total	179	200	379

Voyons maintenant dans quelle mesure la composition des dyades influence leur performance.

Impact de la composition des duos

Pour les épreuves collectives, les enseignants purent former les paires à leur guise. Caractérisons les dyades en fonction de la langue maternelle des élèves. Les dyades sont ainsi de trois sortes: soit les deux élèves sont allophones (AA), soit l'un des élèves est allophone et l'autre francophone (AF), soit les deux élèves sont francophones (FF).

Pour évaluer le rôle de la composition des duos sur la réussite, nous allons comparer le tableau des effectifs observés au tableau des effectifs théoriques que l'on devrait obtenir si la composition des duos n'avait aucune influence sur la réussite (voir Tableaux 5 et 6).

Tableau 5. Rôle de la composition des dyades sur la réussite à la première partie du problème (*lundi matin*).

Tableau des effectifs observés

	AA	AF	FF
Réussite	19 (53 %)	82 (73 %)	186 (81 %)
Echec	17 (47 %)	30 (27 %)	45 (19 %)

Tableau des effectifs attendus en cas d'indépendance

	AA	AF	FF
Réussite	27 (76 %)	85 (76 %)	175 (76 %)
Echec	9 (24 %)	27 (24 %)	56 (24 %)

Tableau 6. Rôle de la composition des dyades sur la réussite à la seconde partie du problème (*mardi matin*).

Tableau des effectifs observés

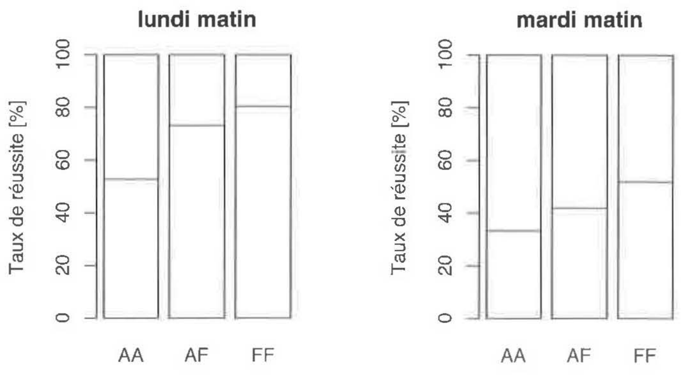
	AA	AF	FF
Réussite	12 (33 %)	47 (42 %)	120 (52 %)
Echec	24 (67 %)	65 (58 %)	111 (48 %)

Tableau des effectifs attendus en cas d'indépendance

	AA	AF	FF
Réussite	17 (47 %)	53 (47 %)	109 (47 %)
Echec	19 (53 %)	59 (53 %)	122 (53 %)

Il apparaît très clairement que la composition des dyades a une influence sur le taux de réussite[3]. Les duos formés de deux élèves allophones réussissent moins bien que ceux formés de deux élèves francophones. Les duos formés d'un élève allophone et d'un élève francophone occupent une position intermédiaire (voir Figure 2).

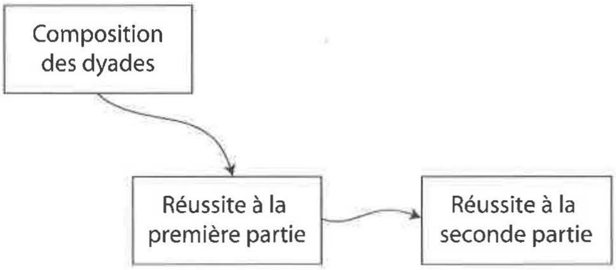
Figure 2. Taux de réussite en fonction de la composition des dyades. AA : les deux élèves sont allophones ; AF : l'un des élèves est allophone, l'autre est francophone ; FF : les deux élèves sont francophones.



3. L'effet est statistiquement significatif au seuil de 5% aussi bien pour la première que pour la seconde partie du problème.

Une analyse, à peine plus sophistiquée (Agresti, 1990), montre que la composition des dyades n'a un effet direct que sur la première partie du problème, la plus simple. Sur la seconde partie, l'effet n'est qu'indirect et s'exerce par l'entremise de la réussite à la première partie. Le schéma causal complet est donc celui présenté dans la Figure 3. Ce résultat suggère que les difficultés rencontrées par les duos constitués d'élèves ne partageant pas la même langue maternelle sont principalement langagières. Ces duos ont plus de peine à comprendre ce qui leur est demandé mais cet obstacle surmonté, lorsque enfin le problème fait sens pour eux, ils sont capables d'agir, de coordonner leurs actions et de réfléchir comme les dyades francophones.

Figure 3. Influence de la composition des dyades sur la réussite du problème *Les mouches de Hébus.*



Les soi-disantes compétences mathématiques que nous avons évaluées ne portent donc pas exclusivement sur la pertinence et la profondeur des réflexions mathématiques des élèves mais aussi sur leur compréhension de la langue française. Espérons qu'en classe les enseignants réussissent à rendre les tâches mathématiques compréhensibles et faire ainsi en sorte que la langue ne soit pas une embûche car « comme tout se tient en une discipline entièrement déductive, l'échec ou l'incompréhension portant sur tel ou tel chaînon entraîne une difficulté croissante dans la suite des enchaînements, de telle sorte que l'élève désadapté sur un point ne comprend plus la suite et en vient à douter de plus en plus de lui : des complexes affectifs, souvent renforcés par l'entourage, finissent alors par bloquer une initiation qui eût pu être toute différente » (Piaget, 1969, p. 65).

Discussion

Nous disions en introduction que les élèves allophones étaient systématiquement moins performants que les élèves francophones. Comme la réussite à une tâche de groupe dépend, dans une certaine mesure, des compétences de ses membres, il se pourrait que les résultats que nous venons de décrire soient biaisés et ne soient finalement que le reflet des compétences mathématiques individuelles. Dans cette optique, les duos d'élèves allophones seraient moins performants simplement parce qu'en moyenne les compétences des élèves allophones sont moins bonnes. Nous avons donc refait les analyses en contrôlant le niveau des compétences individuelles (Long, 1997) mais les conclusions restent les mêmes. Les élèves allophones sont doublement désavantagés : non seulement lorsqu'ils ont à résoudre des problèmes individuellement, mais aussi lorsqu'on leur demande de travailler en groupes.

Conclusion

Les nouveaux moyens impliquent souvent une très bonne maîtrise de la langue française et valorisent les comportements et les attitudes plus fréquemment rencontrés parmi les écoliers d'origine sociale plus favorisée, ils nuisent ainsi peut-être à l'établissement d'une plus grande équité à l'école. Nous ne pouvons que souhaiter qu'à l'avenir ces inégalités s'atténuent. Rappelons que l'école et l'enseignement des mathématiques en particulier doivent permettre à tous de s'approprier les formes symboliques et les connaissances nécessaires au jugement et au raisonnement et devraient, selon les idéaux de l'école émancipatrice, viser à améliorer pour le plus grand nombre les conditions d'assimilation et d'acquisition des connaissances indispensables à une vie intellectuelle, esthétique et sociale aussi riche et variée que possible.

Bibliographie

Agresti, A. (1990). *Categorical data analysis.* New York: Wiley.

Antonietti, J.-Ph. (Ed.). (2003). *Evaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire: Résultats de la première phase de l'enquête Mathéval.* Neuchâtel: IRDP.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Conne, F. (1986). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Lausanne: Couturier-Noverraz.

Ging, E., Sauthier, M.-H., & Stierli, E. (1996). *Mathématiques 1-2P.* Neuchâtel: Commission romande des moyens d'enseignement.

Long, J. S. (1997). *Regression models for categorical and limited dependent variables.* Thousand Oaks: Sage.

Perret, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne: Lang.

Piaget, J. (1969). *Psychologie et pédagogie.* Paris: Denoël.

Tièche Christinat, C. (2001). « L'innovation en mathématiques et ses priorités: Le regard des enseignants de Suisse Romande », *Math-Ecole,* 196, 13-16.

LE TANGRAM, UN JEU À FACETTES

Valentina Celi
IUFM de Créteil – Équipe Didirem Paris 7 (France)

Résumé. En commençant par un aperçu sur les origines du Tangram, cet article propose une esquisse des problèmes qui ont été soulevés et résolus par des mathématiciens et des spécialistes de mathématique récréative. Connu surtout en tant que solitaire, nous essayons d'attirer l'attention du lecteur sur les différentes possibilités de jeu que ce vieux casse-tête peut effectivement offrir.

En 1903, Sam Loyd – un véritable expert de mathématique récréative – publia un petit livre intitulé *The Eighth Book of Tan, Part 1*, dont le sujet portait sur les origines d'un jeu chinois qui, d'après l'auteur, était âgé de 4000 ans.

Des publications postérieures à ce bouquin nous apprennent que la richesse de détails bizarres qui l'accompagnaient attira l'attention de quelques érudits sur un jeu qui, par sa nature, avait déjà son charme à soi.

Et bien, les recherches jetèrent une lumière sur les sources du jeu et le coquin fut démasqué : il s'agissait d'une tromperie, l'une de plus singulières dans l'histoire des casse-tête. Le jeu au centre de cette anecdote est le Tangram. Les études menées ensuite ont mis d'accord la plupart des experts : ils estiment qu'il a été inventé en Chine au début du 19e siècle et qu'après être devenu célèbre en Orient, il a été diffusé en Occident. La légende nous dit que, pendant son exil, le Tangram fut le *compagnon* préféré de l'empereur Napoléon. Par contre, il est certain qu'Edgard Allan Poe en était très passionné : l'ensemble de pièces en ivoire gravées qu'il importa et qui sont aujourd'hui en possession de la *New York Public Library*, en sont un témoignage.

Le Tangram est constitué de sept pièces, nommées *tan*, découpées dans un carré : deux grands triangles, un triangle de taille moyenne, deux petits triangles, un petit carré et un parallélogramme (fig. 1).

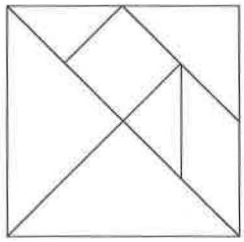


fig.1

Ces pièces peuvent être assemblées de manière à réaliser beaucoup de figures : le tangram[1] de la figure 2 en est un exemple. Dans ce cas-là, le jeu consiste à découvrir la disposition des pièces en tenant compte que celles-ci sont utilisées dans leur totalité et qu'elles ne doivent *jamais* se chevaucher. Il peut arriver qu'une figure admette plus d'une solution[2] : pour réaliser la *flèche* de la figure 2, par exemple, plusieurs dispositions des pièces sont possibles.

1. Avec ce terme on désigne une figure constituée des sept tan tandis qu'avec le terme Tangram on sous-entend le casse-tête lui-même.

2. Ce terme désigne une figure où la disposition des pièces est en évidence (cf. fig.7).

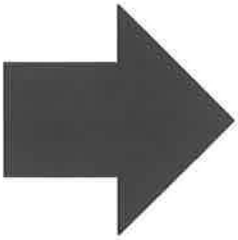


fig.2

Bien qu'il existe des exemplaires en bois et en ivoire, la manière la plus simple pour fabriquer un Tangram est d'utiliser du papier ou du carton (cf. encadrement ci-après).

Si l'on pose égale à μ la longueur du côté du tan carré, on remarquera que :

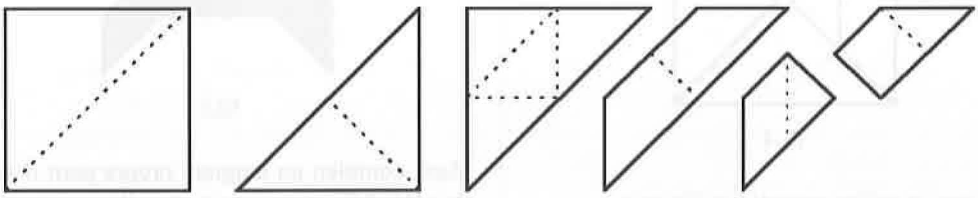
- les longueurs des côtés des divers tan sont comprises parmi les valeurs suivantes : μ, 2μ, $\mu\sqrt{2}$, $2\mu\sqrt{2}$;
- les rapports des aires de chaque tan avec celle du carré constitué des sept parties, sont des puissances de 1/2 : 1/4, 1/8, 1/16.

En outre :

- les angles des tan sont multiples de 45 : 45°, 90° et 135°.

Comment réaliser un Tangram

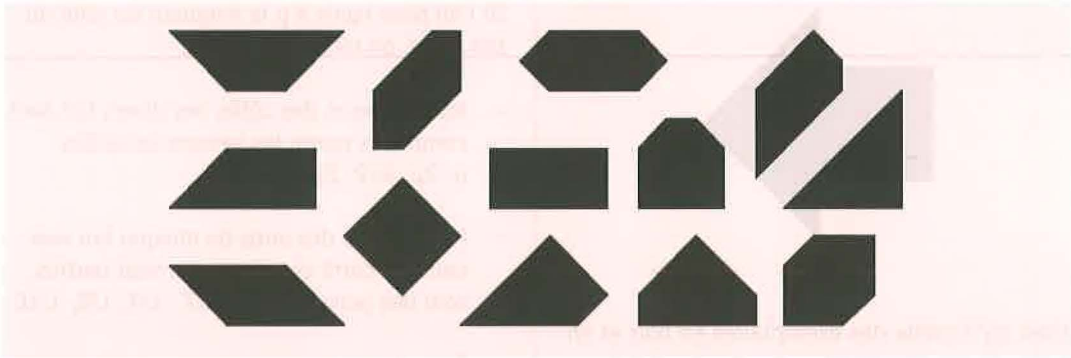
Se procurer une pièce de papier (ou de carton) en forme de carré et des ciseaux. Plier et découper le carré selon la diagonale de manière à obtenir des triangles (1). Plier et découper l'un de ceux-ci selon la hauteur relative à son hypoténuse (2) : on aura, ainsi, les deux premiers tan.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Plier, maintenant, l'autre triangle – la moitié du carré donné – de façon que le sommet correspondant à l'angle droit touche le milieu de l'hypoténuse (3) : en découpant, on obtiendra un autre triangle (troisième tan) et un trapèze. Plier et découper celui-ci afin d'avoir deux trapèzes rectangles (4). Plier l'un de ces trapèzes en superposant la hauteur sur la petite base (5) : on aura, ainsi, un petit triangle et un parallélogramme (quatrième et cinquième tan). Plier et découper l'autre trapèze en divisant à moitié la grande base (6) et de manière à obtenir un petit carré et un petit triangle (sixième et septième tan).

Les particularités du Tangram continuèrent, au fil des années, à séduire les spécialistes. En 1942, les deux mathématiciens chinois *Fu Triang Wang* et *Chuan Chih Hsiung* prouvèrent qu'**au moyen du Tangram il est possible de réaliser exactement treize polygones convexes**



(fig.3).

fig.3

La démonstration se fonde sur l'idée que seize petits triangles de la même taille que les petits tan triangulaires, peuvent être assemblés pour constituer les sept tan (fig.4).

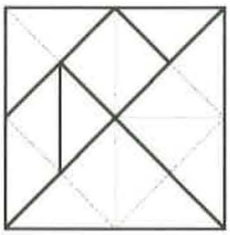


fig.4

A travers un raisonnement heuristique, les deux auteurs ont traduit le problème en termes algébriques en le reconduisant à la recherche des solutions entière d'un système d'équations.

Puisque les côtés des tan ont des longueurs précises, les résultats établis par les deux mathématiciens chinois nous ont permis de reconnaître que **le carré est l'unique polygone régulier réalisable au moyen des sept tan**.

Pour sa part, *Ronald C. Read* – spécialiste de la théorie des graphes auprès de l'Université de Waterloo – a étudié l'ensemble des *tangram propres*. Avec cet adjectif, on désigne les tangram dont le contour est *topologiquement* équivalent à un cercle. La figure 2 est un exemple de tangram propre ; par contre, celui de la figure 5 ne l'est pas puisque deux tan sont connexes seulement par un point.

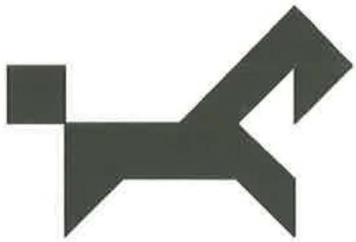


fig.5

Mais, **combien un tangram propre peut-il avoir de côtés ?** Read a répondu à cette question grâce au recours à la *géométrie combinatoire*, en considérant la solution d'un tangram propre comme un *graphe plan connexe*. Sans entrer dans le détail, nous disons seulement que sa démonstration prouve que les côtés qui constituent le contour d'un tangram propre, sont au plus vingt-trois.

Read a aussi étudié le sous-ensemble des tangram propres constitué de ceux qu'on définit *tangram compacts*. Supposons que, dans le Tangram, les longueurs des côtés de l'angle droit du petit triangle mesurent 1 ; par conséquent, la longueur de son hypoténuse est $\sqrt{2}$. Automatiquement, quel que soit le tan, les côtés n'auront qu'une de ces longueurs ou le double ; on pourra, ainsi, affirmer que les côtés de toute pièce sont constitués d'un ou de deux segments dont la longueur est 1 ou √2 (fig.6).

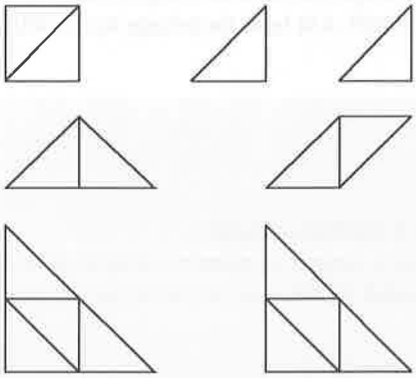


fig.6

Donc, en réalisant un tangram, si les segments de longueur 1 ou √2 coïncident respectivement avec des segments de longueur 1 ou √2, on dira que ce tangram-là est compact. Le tangram de la figure 7 en est un exemple.

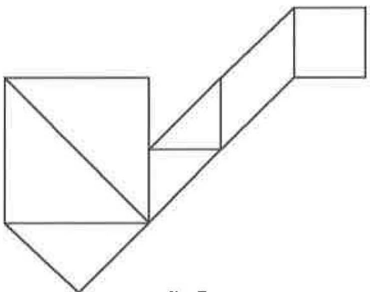


fig.7

En sachant que le tangram de la figure 8 est compact, essayez de trouver sa solution.

fig.8

Même les 13 polygones convexes sont compacts *mais* – attention ! – le contraire n'est pas vrai : pour vous convaincre, observez le tangram de la figure 9, plus loin.

Une des questions concernant ce genre de tangram est la suivante : **combien un tangram compact peut-il avoir de côtés, au plus ?** En posant égale à 1 la longueur du côté du tan carré, les longueurs des côtés des six autres tan seront égales à 1, 2, √2, 2√2. Il est possible, alors, d'envisager le périmètre total des tan comme la somme de vingt segments de longueur unitaire et dix segments dont la longueur est égale à √2 de façon qu'il soit constitué, dans sa totalité, de trente segments. Toutefois, si l'on assemble les tan, les côtés contigus sont perdus et, comme le tangram doit être connexe, il y a au moins six lignes selon lesquelles les pièces coïncident ; par conséquent, il faudra soustraire au périmètre au moins douze segments. C'est ainsi qu'on déduit qu'**un tangram compact peut avoir au plus 18 côtés** (fig.9).

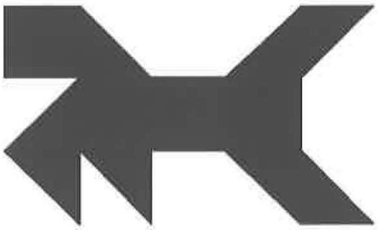


fig.9

Martin Gardner – l'un des plus célèbres spécialistes en matière de jeux mathématiques – a réussi à tirer partie des spéculations intellectuelles de Read : en exploitant les propriétés des tangram compacts, il a conçu trois jeux qui se différencient par rapport à la manière la plus commune de jouer avec le Tangram. Il s'agit de jeux de compétition qui demandent la connaissance de quelques-unes des caractéristiques exposées plus haut.

Les deux premiers jeux se terminent très tôt : vu qu'un tangram compact ne peut avoir moins que trois et plus que dix-huit côtés, une manche ne se déroule qu'en quinze coups. En plus, puisqu'il s'agit de réaliser des tangram compacts, il est interdit de déplacer des pièces qui laissent un trou ou qui divisent la figure en parties connexes seulement par des points.

Une variation applicable à ces deux jeux consiste, avant chaque coup, à choisir quelle pièce l'adversaire va déplacer. Cela obligera à suivre non seulement sa propre stratégie mais aussi à tenir compte de celle de l'autre joueur et, éventuellement, à la tenir davantage sous contrôle.

PLUS DE TROIS

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer un triangle[3].
Règles du jeu: chacun à leur tour, les joueurs choisissent une pièce à déplacer. La nouvelle position de celle-ci doit être telle que le nouveau tangram obtenu a plus de côtés qu'avant. Le joueur qui, en premier, ne peut plus jouer, échoue.

MOINS DE DIX-HUIT

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer le chien de la fig.9, ou bien un autre tangram compact de dix-huit côtés.
Règles du jeu: chacun à leur tour, les joueurs déplacent une pièce de manière que le nouveau tangram obtenu ait moins de côtés qu'avant. Le premier à se trouver dans l'impossibilité de jouer, échoue.

De plus longue durée, le jeu décrit ci-après, est tel que des coups de théâtre sont possibles: il peut arriver qu'à son tour, un joueur – sûr d'effectuer le coup décisif – ne puisse plus jouer.

PLUS OU MOINS

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer un tangram de dix ou onze côtés (par exemple celui de la fig.8).
Règles du jeu: chacun à son tour, le joueur déplace une pièce de façon à obtenir un tangram ayant un nombre supérieur de côtés tandis que l'autre joueur doit procéder à l'inverse. Il est interdit de déplacer deux fois consécutives le même tan. Si le premier joueur (celui qui doit augmenter le nombre de côtés) réussit à réaliser un tangram ayant dix-huit côtés, il gagnera. L'adversaire gagnera s'il arrive à constituer un tangram ayant trois côtés. Si l'un des deux joueur ne peut plus jouer, il échoue.

3. Pour constituer un triangle, les sept pièces peuvent être assemblées de deux manières différentes!

Pour les débutants, il vaut mieux jouer en utilisant des tan tels que ceux de fig.7 : cela facilitera la recherche d'une disposition compacte des tan. A chaque coup, il vaut mieux aussi noter le nombre de côtés de chaque nouvelle figure.

Bien que les possibilités d'assemblage des sept tan soient innombrables, il existe des figures qu'on ne peut pas effectuer au moyen du Tangram. Donc, maintenant, c'est à vous de résoudre le problème suivant : parmi les tangram de la figure 10, lequels ne peut-on pas réaliser ?

Et, pour conclure, voici une dernière question : en utilisant les sept tan du Tangram (c'est-à dire le casse-tête complet), est-ce qu'on peut réaliser deux carrés superposables ? Une petite suggestion : examinez attentivement la disposition des tan dans la figure 1 et si cela ne vous aide pas du tout, essayez de résoudre le problème en recourant à quelques petits calculs. Pour ce faire, souvenez-vous des caractéristiques numériques mentionnées au début. Bonne chance et surtout ne vous découragez pas : le Tangram, comme tout casse-tête, est aussi un jeu de patience !

fig.10

Références bibliographiques

CELI V. (1994), *Dal Tangram all'Equivalenza : aspetti storici e matematici*, Mémoire de maîtrise, Université « La Sapienza », Rome

FU TRAING WANG, CHUAU CHIH HSIUNG (1942), *A Teorem on the Tangram*, The American Mathematical Monthly, pp. 596-599

GARDNER M. (1988), *Time Travel and Others Bewilderments*, Freeman Reprint, New York

READ R.C. (1970) *Il tangram, Rompicapo Cinese*, Del Poligramma, Torino

RUPTURE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : L'AVÈNEMENT DU SOCIO-CONSTRUCTIVISME ? [1]

Aldo Dalla Piazza [2]

Des nouveaux moyens d'enseignement pour la scolarité obligatoire

La coordination romande aboutira en 2005 à une réalisation concrète très forte : à partir de cette année-là, les élèves de Suisse romande, de la 1ère à la 9ème année, vivront un enseignement des mathématiques basé sur des moyens d'enseignement communs. L'introduction systématique des nouveaux moyens 1P-4P s'est réalisée à partir de 1997, celle des nouveaux moyens de 5ème en 2001 puis, en 2002, sont venus ceux de 6ème. Les moyens 7-8-9 ont suivi cette année, à la rentrée 2003. Les équipes d'auteurs ont changé d'un ouvrage à l'autre. Les conceptions des auteurs successifs, la compréhension de la didactique et la didactique elle-même ont évolué en cours de parcours. Mais malgré cela, un même esprit devrait envelopper dès 2005 l'entier de la formation mathématique des élèves, à travers l'ensemble des degrés.

Une telle réalisation est évidemment conditionnée par un jeu de contraintes et de choix fondamentaux qui la compliquent considérablement. En ce qui concerne les moyens 7-8-9, il convient notamment de relever les aspects suivants :

- Le moyen d'enseignement 7-8-9 est commun **à tous les élèves**, quelle que soit leur orientation. Ce choix relève d'une volonté de ne pas installer de discrimination en considérant qu'il y aurait des mathématiques pour les uns différentes de celles valables pour les autres. Cela ne revient toutefois pas à nier l'existence de différences liées au développement de la personnalité, au rythme d'apprentissage, à l'aisance dans le raisonnement ou encore à l'histoire ou au degré de maturité de chaque individu. Ainsi, le moyen d'enseignement doit offrir un vaste choix d'activités pouvant être traitées à différents niveaux d'approfondissement et être exploitées de diverses manières.

- Le moyen d'enseignement est commun aux élèves **des trois degrés** : 7, 8 et 9. Il doit donc couvrir les programmes des trois années, sans découpage annuel. Ce choix est lié au précédent : offrir des opportunités de différenciation pédagogique. Mais il est aussi lié à une conception d'un apprentissage peu cloisonné, basé sur une progression en spirale dans laquelle une même notion doit être reprise, graduellement approfondie, abstraite, enrichie de facettes et de connexions à un réseau de plus en plus étendu de notions sœurs, dans une démarche d'élargissement graduel du champ de concepts dans lequel elle s'inscrit. Ainsi, certaines activités doivent pouvoir être reprises et approfondies successivement, dans une diversité d'approches et de regards.

1. Texte repris et remanié d'un article paru dans *Gymnasium Helveticum.* Le texte se base sur deux exposés tenus lors de l'ouverture de la formation continue préparant l'introduction de ces moyens d'enseignement dans la partie francophone du Canton de Berne.

2. Aldo Dalla Piazza était professeur de didactique des mathématiques à l'Université de Berne (à l'époque des travaux de rédaction des moyens d'enseignement) et expert au sein de la commission de lecture 7-8-9, responsable des aspects relevant spécifiquement des mathématiques. Il est aussi membre du comité de rédaction de *Math-Ecole*

- Le moyen d'enseignement est commun aux élèves de **toute la Suisse romande.** Pour tenir compte des habitudes locales, il doit contenir des éléments très divers, qui peuvent surprendre là où ils ne sont pas coutumiers : vecteurs pour satisfaire les demandes des uns, trigonométrie ou développement de la rigueur et de la démonstration dans le cadre de la géométrie pour satisfaire celles des autres. Bien que commun, le moyen d'enseignement ne sera cependant utilisé d'une manière identique ni partout ni par tous. Chacun mènera son cours selon sa propre représentation, selon l'esprit de son école ou de son canton et les exigences de son plan d'études.

Au-delà de moyens communs, une méthode et un credo communs

Derrière des moyens communs, c'est bien dans une certaine mesure une méthodologie et une application communes de certaines théories didactiques qui s'imposent, des degrés 1 à 9. La fin des années soixante avait vu l'arrivée des mathématiques modernes, une représentation, voire une idéologie commune des mathématiques, issue du cercle des mathématiciens. Aujourd'hui ce serait le tour du socio-constructivisme, une méthode, voire une idéologie commune de l'enseignement des mathématiques. Elle nous viendrait du cercle des didacticiens des mathématiques.

Le fait socio-constructiviste serait incontournable. Ce conditionnel ne marque donc pas des doutes quant au bien-fondé des choix effectués mais vise à mettre en garde face à une schématisation abusive de la situation. Le parallèle avec les mathématiques modernes n'est pas évoqué par hasard. Il y a bien à apprendre d'un tel échec, ne serait-ce qu'au sujet des risques liés à toute application d'une doctrine.

De fait, la méthodologie qui sous-tend ces moyens n'est ni le socio-constructivisme ni son application directe et unique. Elle reste sujette au débat et comporte probablement des excès. La lecture du livre du maître 7-8-9 frappe par exemple par la répétition de certains termes : situation, situation-problème, problème ouvert, jeux, dévolution du problème, institutionnalisation, stratégie de résolution, démarche scientifique des élèves, activités, activités de recherche, activités de structuration, activités de consolidation, activités d'entraînement, etc. Ainsi même les exercices, au sens usuel, sont présentés sous l'étiquette « activités », avec la volonté claire d'éviter de trop mettre en évidence les aspects répétitifs liés à l'entraînement des techniques. Certes, les théories didactiques donnent de nombreux arguments pour aller dans cette direction et centrer la démarche sur le questionnement par l'élève. Mais sans en faire une systématique absolue. Parce que les choses sont subtiles et complexes. Contradictoires aussi. Il est aisé de trouver des textes qui montrent leur ambiguïté, comme l'illustrent les quelques exemples suivants :

- **Apprentissage à partir d'activités ou activisme pédagogique?** Bkouche[3] relève (p. 18-19) : *Il est vrai qu'en opposition à cette illusion du bon langage [les maths modernes] s'est développé depuis quelques années un activisme pédagogique tout aussi illusoire. Devant les difficultés rencontrées dans l'enseignement, on a inventé ce qu'on appelle aujourd'hui des* ***activités*** *considérées comme préparatoires à l'acquisition de la connaissance, l'activité mathématique réduite aux activités, avec le vague espoir qu'à force d'activités plus ou moins bien choisies, les élèves atteindraient le* ***savoir vrai*** *[...]. Mais que représentent de telles activités dont les élèves ne voient pas toujours la signification [...], où sont*

3. Bkouche, R., Charlot, B., Rouche, N.: *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, 1991.

les problèmes, c'est-à-dire les questions fondatrices qui conduisent à penser le besoin d'une construction rationnelle? Et plus loin (p.179-180): *Pour expliquer [l'échec scolaire], on dit que les mathématiques sont difficiles parce qu'elles sont abstraites et l'on en déduit qu'avec les élèves en difficultés scolaires il faut enseigner les mathématiques en partant du concret. [...] On élabore à cet effet du matériel, des situations, des stratégies qui, à l'analyse, se révèlent en fait comme pseudo-concrètes [...] Il y a là une confusion entre pédagogie* ***active*** *et pédagogie* ***concrète*** *[...] Ce qui est important c'est l'activité intellectuelle de l'élève [...]: la pensée part d'un problème, pose des hypothèses, opère des rectifications, des transferts, des généralisations, des ruptures, etc., pour construire peu à peu des concepts, et, à travers cette construction des concepts, pour édifier ses propres structures intellectuelles.*

- **Construction de compétences au travers de situations: savoir inerte?** Prenzel [4] (p. 23-24) décrit un courant prônant et développant un apprentissage réalisé au travers de situations vraies ancrées dans un contexte social. L'attrait de cette approche tient en ce qu'on imagine que la construction du savoir au travers d'une situation développe des compétences qui pourront être transférées dans de nouvelles situations, plus ou moins similaires. Il cite cependant de nombreux auteurs qui ont mis en évidence le fait que le savoir acquis de cette façon en milieu scolaire reste souvent inerte et qu'il n'est pas réinvesti par les sujets dans des situations extra-scolaires, contre tout espoir.

- **Apprentissage centré sur la résolution de problèmes?** Prenzel (p. 28-29) présente une approche particulière d'apprentissage par résolution de problèmes et rappelle les caractéristiques évoquées par ses défenseurs pour la fonder. Celles-ci sont en tout point compatibles avec les thèses socio-constructivistes. Il rapporte cependant aussi des résultats qui mettent en évidence le fait que l'apprentissage réel et le transfert des connaissances acquises ne se corrèlent pas de manière significative avec la richesse et la diversité des outils mis à disposition pour résoudre les problèmes. Alors que, par contre, la présentation de solutions toutes faites, à titre d'exemple ou d'illustration, provoque sur ces points un effet clairement marqué.

Ces remarques ne sont nullement destinées à condamner l'approche préconisée dans les nouveaux moyens d'enseignement. Elles ne signifient surtout pas qu'il faudrait renoncer à l'apprentissage par la résolution de problèmes et passer plutôt par une série de présentations de solutions toutes font! Elles montrent seulement que les choses méritent d'être nuancées.

Quatre interprétations à nuancer

- La méthodologie préconisée relèverait du socio-constructivisme. L'accent est volontairement mis sur l'article «du» parce que celui-ci marque l'unicité. Or un congrès s'est tenu à Genève en l'an 2000 sous le titre «Les socio-constructivismes». Il s'agissait de faire le point sur les théories et les multiples courants qui peuvent raisonnablement être rangés sous cette bannière. A lui seul l'article de Prenzel, déjà évoqué plus haut, recense, explique et oppose au moins trois variantes fondamentales de socio-constructivisme, avant d'en développer une multitude de sous-catégories. Des différences entre les conceptions apparaissent au fil des années à travers les textes

4. Prenzel, M. et al: *Computereinsatz im naturwissenschaftlichen Unterricht- Ein Überblick über die pädagogisch-psychologischen Grundlagen und ihre Anwendung,* à paraître.

constituant l'ensemble des moyens, de la 1ère à la 9ème, que ce soit dans les livres du maître ou dans les commentaires des exercices et des problèmes proposés. Différences d'un ouvrage à l'autre. Différence d'un auteur ou d'un groupe d'auteurs à l'autre. Il n'y a pas unité. Il semble bien au contraire que toute avancée dans la compréhension des mécanismes de l'apprentissage résulte en un foisonnement de théories partiellement concurrentes. C'est probablement d'ailleurs une caractéristique de la science : toute théorie qui n'est pas idéologie doit porter en elle les mécanismes qui permettent de la mettre en question.

- Cette méthodologie relèverait des **derniers** développements des théories de l'apprentissage, de la didactique et de la psychologie. Mais il faut savoir que si le(s) socio-constructivisme(s) ont eu le vent en poupe depuis la fin des années 80, les fondements en sont anciens et se trouvent déjà chez Dewey (1916[5]), Piaget (1954), Bruner (1966) et Wygotski (1974) pour ne citer que ceux qui sont restés les plus connus. La méthodologie proposée est donc avant tout actuelle parce qu'elle est proposée aujourd'hui. Et non parce que les théories sur lesquelles elle se fonde datent tout juste d'hier. Le savoir théorique le plus actuel est sûrement plus développé et, probablement, moins convergent.

- Cette méthodologie serait **la** concrétisation du socio-constructivisme. Au risque de décevoir, il faut insister sur le fait que la théorie didactique n'est jamais conçue pour s'appliquer directement dans la pratique. Elle est là pour comprendre la pratique, pour tenter de l'expliquer, éventuellement pour la modéliser. Mais pas pour fonder une pratique d'une manière univoque. Même si elle influe bien entendu sur les pratiques. Du moins est-ce à espérer. L'interprétation pratique qu'on peut vouloir faire des théories n'est pas nécessairement unique. On pratique d'ailleurs de manière assez différente dans d'autres régions du pays ou dans d'autres pays, tout en se fondant sur les mêmes bases théoriques qu'ici. On peut s'en rendre compte en étudiant les propositions développées en Suisse alémanique par Wieland/Jaggi ou en Allemagne par Wittmann. Le fait que les travaux de Piaget aient été une des justifications du discours sur les mathématiques modernes en est une autre illustration. Les mêmes théories de base, les mêmes textes fondamentaux peuvent être invoqués par des courants très différents et, surtout, il y a parfois loin, ensuite, du discours produit à sa réalisation !

- L'introduction de cette méthodologie constituerait **une rupture** et remplacerait les paradigmes antérieurs. Dans un travail portant sur la mise en œuvre des nouveaux moyens 1P/2P, Kupfer[6] met en évidence une répartition assez uniforme entre les enseignantes adoptant une attitude de conformité, celles appliquant la nouvelle méthode de manière pragmatique, celles qui en font une application libre et celles qui en font une application pour le moins distancée. Pourquoi en irait-il autrement au degré secondaire ? En outre, cette catégorisation porte sur ce qui est observable de l'extérieur, sur la façon formelle d'appliquer la méthode et sur les intentions annoncées face à cette application.

5. les années sont liées à des publications caractéristiques qui revêtent un caractère fondateur

6. Kupfer, C., avec la collaboration de C. Tièche Christinat : *Nouvel enseignement des mathématiques. Analyse des entretiens conduits auprès des enseignantes 1P/2P*, IRDP, 2000.

Mais le fait qu'elle soit appliquée fondamentalement, et pas seulement en apparence, dépend étroitement de la représentation que se fait l'enseignant de sa discipline et de la façon de l'enseigner. Ces représentations, issues du parcours personnel de chacun, s'avèrent très individuelles. Souvent implicites, elles n'évoluent généralement que lentement. Lors d'une défense de travail de diplôme, à l'Université de Berne, un candidat s'étonnait de la coexistence de représentations très diverses observées chez la plupart des personnes qu'il avait interviewées. Ce qui lui paraissait contradictoire, voire incohérent, constitue probablement plutôt une marque propre au professionnel qui sait tirer parti d'influences et d'apports variés pour développer une approche adaptée aux circonstances. Quoi qu'il en soit, ce travail montrait la persistance de courants divergents, remontant parfois à des racines lointaines, au sein même des individus. Les nouveaux moyens d'enseignement doivent compter avec cela. Outre que ce serait insultant pour ce qui se fait aujourd'hui et que cela reviendrait à nier la valeur de l'expérience et des savoir-faire actuels, il serait illusoire d'imaginer que ce qui se fera demain ne comportera plus rien de ce qui se fait aujourd'hui et que ce qui se fait aujourd'hui ne comporte rien de ce qui se faisait hier !

Au-delà des critiques, des raisons d'y croire

Passées ces critiques, il n'en reste pas moins que les moyens d'enseignement qui nous arrivent sont porteurs de grands espoirs et de qualités bien réelles.

D'abord, ils comportent une richesse mathématique profonde et susceptible de stimuler la pensée de tous les élèves, indépendamment des capacités et des niveaux de connaissance individuels. Ensuite, les diverses représentations des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement, les formes et les méthodes qui conviennent pour telle notion, tel domaine ou telle phase de l'apprentissage peuvent y trouver un terrain d'application. Ils ne sont pas unilatéraux et n'imposent nullement une démarche particulière à suivre en classe, même si les commentaires méthodologiques qu'on y trouve privilégient ouvertement une approche spécifique. Le pari, c'est que celle-ci s'affirmera dans les faits comme une de celles permettant le mieux, en général et pour la plupart des contenus et des objectifs poursuivis : l'apprentissage des mathématiques ainsi que le développement du savoir et de la personnalité des élèves. Pas question cependant de se saisir de la méthodologie proposée comme d'une panacée contre la difficulté des mathématiques et l'échec scolaire. Ce type d'attitude a montré ses effets avec les mathématiques modernes. La réforme ne peut pas réussir simplement par l'affirmation de la supériorité des méthodes préconisées et par leur application formelle. Elle ne peut réussir que si ses principes sont compris, si les divers principes sur lesquels se basent les pratiques d'aujourd'hui sont explicités, si la façon dont ils peuvent co-exister est clarifiée et si chacun conserve la liberté de choisir ceux à appliquer, de cas en cas. Cela nécessite une mise en œuvre basée sur une formation continue intégrant l'expérience des enseignants et développant une culture de la réflexion sur le quoi, le pourquoi et le comment des actions en classe. Une culture de la réflexion menée a priori sur les actions qu'on prépare, de l'observation de l'action durant son déroulement et de la réflexion portée a posteriori, en confrontant action préparée et action observée.

C'est là que servent les théories didactiques, dans la pratique !

MATH-ÉCOLE ET LA FORMATION DES MAÎTRES EN SUISSE ROMANDE, LE CAS DES DEGRÉS 7 À 9

M. Brêchet et F. Jaquet
pour le comité de rédaction de *Math-Ecole*

Les innovations successives de l'enseignement des mathématiques sont de plus en plus exigeantes

Au cours de ces six dernières années, la Suisse romande a réédité ses moyens d'enseignement de mathématiques pour les degrés 1 à 6. Avec la sortie de *Mathématiques 7-8-9*, elle étend la coordination de la discipline sur toute la scolarité obligatoire.

Ces rééditions et cette extension ont été précédées de réflexions didactiques et de l'adoption d'un nouveau plan d'études à l'école primaire, elles ont été accompagnées d'intenses séquences de formation des maîtres, fondées à l'origine sur un « concept romand » et développées au sein des cantons ou plus largement parfois. Il s'agit donc d'un mouvement important que nous pouvons qualifier d'innovation.

En effet, derrière les nouveaux moyens d'enseignement, leur travail d'élaboration et la formation des maîtres, il y a un changement sensible de conception de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques, par rapport à la réforme précédente des années soixante à quatre-vingts, que l'on associe encore – de manière un peu stéréotypée, mais non sans raison toutefois – aux « mathématiques modernes ».

Pour l'histoire, la période de notre innovation romande actuelle débute au début des années nonante par les premières décisions officielles, elles-mêmes précédées de plusieurs années d'analyses, de lectures, d'expérimentations locales, sous l'influence des premières données de la recherche en didactique des mathématiques. Comme la précédente, on y associera quelques stéréotypes, comme « socio-constructivisme », « apprentissages par le jeu », « résolution de problèmes »...

Au-delà des appellations, il faut constater que chaque nouvelle réforme est, pour l'enseignant, plus exigeante que la précédente, que ce soit à propos des contenus mathématiques ou à propos de la gestion des rapports entre l'enfant et les savoirs. La didactique des mathématiques met en lumière et cherche à décrire scientifiquement des phénomènes très complexes dans la construction des connaissances. Mais la discipline est jeune et n'est pas encore en mesure de proposer au maître des actions pour diriger les apprentissages de chaque élève au sein de la classe. Le sera-t-elle jamais?

L'importance du rôle de la formation est reconnue, mais celle-ci doit élargir son éventail et son champ d'action

Devant l'ampleur de la tâche, la formation ne peut être que permanente et continue, et son rôle ira en s'amplifiant. Il faut donc y consacrer toujours plus d'énergie, tout en sachant que le temps et les disponibilités des maîtres sont limités. Les structures traditionnelles des cours ou séquences de formation se développent, mais elles sont coûteuses et gourmandes en temps.

Mais il n'y a pas que la formation structurée officiellement, il y a celle de toujours : celle de la pratique d'enseignement où il est nécessaire de distinguer le rituel de l'innovation. Les pratiques ne sont « formatives » que dans la mesure où l'on ressent le besoin de les changer. Un nouveau manuel peut déclencher ce besoin, mais si on le prend au pied et à la lettre, il ne fera que modifier les automatismes, certitudes, principes, et autres éléments caractéristiques du rite. Dans ce type de changement, le bénéfice est bien faible. Pour que le moyen d'enseignement soit porteur d'une innovation qui va au-delà des adaptations de pratiques, il doit être accompagné de réflexions sur le pourquoi des changements qu'il propose. Cette réflexion doit pouvoir s'appuyer sur des données, elles-mêmes résultats de recherches, celles de la didactique des mathématiques en ce qui nous concerne.

Ces données peuvent être apportées lors d'une séquence de formation institutionnellement organisée, avec présentation de propositions d'action, d'expérimentations. Mais si l'on en reconnaît la valeur et la nécessité, on en connaît les limites et les contraintes : la durée tout d'abord (quelques périodes alors qu'il en faudrait le double, le triple... ou plus encore) ; le moment (qui doit bien être déterminé longtemps à l'avance, mais qui se trouve parfois loin de celui où il serait vraiment opportun) ; l'adéquation entre l'offre et la demande (un titre de module de formation et ses commentaires sont parfois différents des représentations du celui qui lit le programme) ; l'adéquation des conceptions didactiques (celles d'un formateur ne sont pas celles de tous les participants ; quelqu'un qui attend qu'on lui dise comment faire ne sera certainement pas satisfait si on lui propose de remettre en cause ses convictions pour en construire de nouvelles) ; ...
Alors, pour élargir l'éventail, au-delà des manuels, du livre du maître et de ses commentaires, des modules de formation offerts par l'institution, il faut regarder du côté des lectures pour enrichir ses pratiques et y réfléchir. Celles-ci existent, nombreuses, diverses et très souples dans leur utilisation : on est libre de les choisir, d'en retenir ce qui correspond à ses besoins, de les lire au moment opportun.

La documentation écrite est abondante. Un premier choix, pour les degrés 7 à 9

Parmi ces lectures, il y a des exposés méthodologiques, des textes critiques, des articles de recherche, des comptes rendus de pratiques qui vous incitent à les reproduire où à les rejeter, des propositions multiples de thèmes, problèmes et situations mathématiques.

On les trouve, sur papier, en librairie, dans les bibliothèques ou centres de documentation, par abonnement lorsqu'il s'agit de revues et, sous forme électronique, sur Internet ou sur disques. Mais il faut connaître leur existence, savoir où les trouver, et surtout, avant de se les procurer, avoir quelques idées sur leur contenu. On est là devant le problème épineux de la pléthore d'information ou de documentation.

Nous en arrivons à *Math-Ecole* qui occupe une place privilégiée en Suisse romande, par la proximité de ses thèmes, de ses auteurs et de ses lecteurs. Depuis plus de 40 ans maintenant, cette revue précède, accompagne et suit les réformes de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. Elle le fait en particulier pour l'innovation actuelle, par la présentation des nouveaux moyens d'enseignement, des informations, des propositions et descriptions d'activités, des développements, des commentaires, des apports didactiques complémentaires... Alors, pourquoi pas y regarder de plus près.

Voici un extrait de la liste des articles publiés ces six dernières années qui concernent les degrés 7, 8 et 9 [1]. Ce choix peut intéresser tous les maîtres utilisant les nouveaux moyens

1. Les anciens numéros, ou des photocopies de ces articles pour les numéros épuisés, peuvent être obtenus auprès de la rédaction de *Math-Ecole*.(Voir p. 2 et 3 de couverture)

d'enseignement de ces degrés, comme leurs formateurs et leurs conseillers pédagogiques. Près de 500 pages en six ans, entre articles spécifiques et rubriques, dont quelques centaines de bons problèmes pour le niveau secondaire inférieur, la contribution de *Math-Ecole* n'est pas négligeable ! Et la liste s'allongera encore au fur et à mesure de la parution des prochains numéros, pour autant que des lecteurs, enseignants, formateurs ou chercheurs, veuillent bien l'alimenter de leurs propositions et comptes rendus.

Numéros	*Titres et auteurs*	*pages*
176 (1997)	**Un point... c'est tout !** – M. Brêchet examen des conceptions des élèves à propos de notions mathématiques fondamentales : point, droite, nombre... suivi de quelques suggestions pour faire évoluer ces conceptions	4 – 7
	Mathématiques pascales ! – D. Odiet par le biais de constructions « d'œufs géométriques », on rencontre la longueur du cercle, l'aire du disque, la relation de Pythagore, l'aire du triangle, la linéarité, au travers de travaux d'élèves	35 – 38
177	**Bordures** – M.-G. Rinaldi analyse d'un problème du RMT sur l'aire et le « bord » d'un quadrillage rectangulaire, description de sa résolution pas à pas ou par équation et approche de la fonction rationnelle	8 – 11
	Voyage au centre de la géométrie – G. Sarcone et M.J. Waeber puzzles paradoxaux (avec disparition ou apparition d'une pièce) dans le plan et dans l'espace, conduisant aux nombres rationnels et aux approximations	21 – 27
	Expo-atelier – F. Jaquet présentation de l'exposition-atelier romande pour les degrés 7 à 9	28 – 32
178	**Construire des images mentales** – A.-M. Damiani et al. séquence didactique sur l'emploi des modèles concrets dynamiques en géométrie (quadrilatères avec tiges articulées) – hypothèses de travail – expérience – conclusions	3 – 11
179	**Voyage au centre de la géométrie** – G. Sarcone et M.J. Waeber puzzles et illusions géométriques dans le plan, nombres rationnels et approximations	3 – 9
	Agrandissement et échelle : quelles difficultés pour les élèves ? – M. Brêchet dans une perspective d'évaluation formative : description d'une séquence d'apprentissage et analyse de travaux d'élèves	10 – 14
	Découpage de carrés en triangles semblables – F. Jaquet inventaire des décompositions d'un carré en six triangles semblables – rapports de similitude (suites dans 181 et 182)	35 – 40
180	**Le potager d'Aloïs** – M. Chastellain problème de la recherche d'une aire rectangulaire maximale où apparaissent le conflit aire-périmètre et la fonction quadratique, (complété par une résolution avec *Cabri-géomètre*, pp. 21 – 23)	8 – 10
	Étonnantes égalités arithmétiques – A. Calame étude des triplets de nombres naturels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ et que $a + b + c = d + e + f$	13 – 20

CABRidées – M. Chastellain
cette rubrique sur l'utilisation de «Cabri-géomètre» aux degrés 7 à 9, avec comptes rendus d'activités et travaux d'élèves, figure dans les numéros 176 à 188

Les problèmes du Rallye mathématique transalpin
les trois épreuves annuelles de cette confrontation par classes proposent chacune de 7 à 10 problèmes destinés aux degrés 7 et 8, accompagnés parfois d'analyses; elles sont présentées dans les numéros 181 à 183, 186 à 188, 190 à 192, 195 à 197, 201 à 203, 206 à 208

Les problèmes du championnat international de la FFJM
les problèmes des éliminatoires de ce championnat et des quarts de finale du Valais, dont une majorité peuvent intéresser les degrés 7 à 9 de l'enseignement, sont présentés chaque année, avec en général les solutions et des commentaires dans les numéros suivants: 190, 194, 195, 199, 200, 204, 205, 206

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Encyclopédie du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Mathématiques du kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	...	(ex à Fr. 26.-)
Histoire de Maths, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Kangourou au pays des comptes, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	...	(ex à Fr. 14.-)
Faites vos jeux ! ACL	...	(ex à Fr. 16.-)
La magie du calcul, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pythagore et Thalès, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Le monde des pavages, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et découvertes mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Jeux et mathématiques pour tous, ACL	...	(ex à Fr. 18.-)
Pliages et mathématiques, ACL	...	(ex à Fr. 17.-)
Apprivoiser l'infini, ACL	...	(ex à Fr. 22.-)
100 défis mathématiques du « Monde », POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
100 jeux mathématiques du « Monde » : Affaire de logique, POLE	...	(ex à Fr. 27.-)
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	...	(ex à Fr. 20.-)
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	...	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	...	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	...	(ex à Fr. 29.-)
Mille ans d'histoire des mathématiques, (Tangente HS 10)	...	(ex à Fr. 20.-)
Puzzle Pythagore et Euclide	...	(ex à Fr. 55.-)
Problèmes de rallyes et concours :		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	...	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	...	(ex à Fr. 25.-)
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	...	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour l'école (degrés 4, 5...)	...	(ex à Fr. 14.-)*
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	...	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	...	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	...	(ex à Fr. 14.-)

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués. *derniers exemplaires disponibles

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à retourner et photocopier à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à :
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel