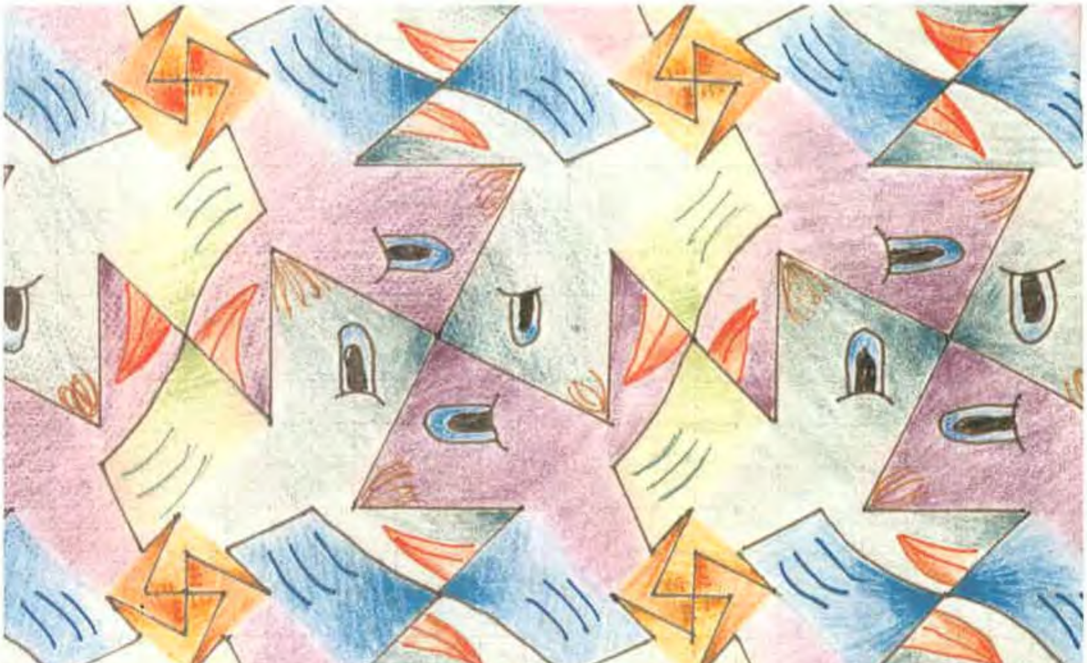
MATH-ÉCOLE 211

Juin 2004

Évaluation: avec des baguettes

Une évaluation des procédures pour une remédiation ciblée

12e Rallye mathématique transalpin: Épreuve 2



MATH-ÉCOLE, POUR CEUX QUI ENSEIGNENT LES MATHÉMATIQUES !

On trouve dans *Math-Ecole*, pour chaque degré d'enseignement, de l'école primaire au secondaire :

- des comptes rendus et propositions d'activités pour la classe,
- des problèmes et jeux,
- des notes de lecture,
- des suggestions d'évaluation des connaissances des élèves,
- des éléments d'histoire des mathématiques,
- des articles de didactique,
- des actualités : expositions, congrès et rencontres, cours de formation continue, concours de mathématiques, des reflets sur la mise en pratique de l'outil informatique au service de l'enseignement des mathématiques,
- des réflexions pédagogiques, etc.

Chacun est invité à proposer des textes, témoignages, comptes rendus, en rapport avec l'enseignement des mathématiques. Ces articles doivent parvenir en version papier et en version électronique (par disquette, ou par e-mail à l'adresse de la rédaction, ci-dessous). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et un ou deux membres du comité.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction, qui peut accepter les articles avec ou sans demande de modification ou les refuser. En cas de publication, les auteurs reçoivent de 2 à 20 exemplaires gratuits, selon leurs souhaits, du numéro dans lequel leur article est édité.

Adresse
Rédaction de *Math-Ecole*, Institut de Mathématiques,
11, rue Emile-Argand, CH – 2007 Neuchâtel
Courrier électonique : admin@math-ecole.ch
Site internet : http://www.math-ecole.ch
Bulletin d'abonnement et de commandes sur internet ou en page 3 de couverture

Abonnement annuel (4 numéros) :
Suisse : CHF 35.– compte de chèque postal 12-4983-8
Etranger : CHF 45.– par mandat ou virement postal international au compte CCP 12-4983-8
Prix au numéro : CHF 9.–
Anciens numéros : CHF 7.– /pièce dès le 200, du 150 au 199, CHF 5.– (n°136, 152 et 153, 178, 179, 186 épuisés)

Abonnements collectifs (livraison à une même adresse) :
de 2 à 4 ex. CHF 33.– par abonnement
de 5 à 14 ex. CHF 28.– par abonnement
de 15 à 50 ex. CHF 24.– par abonnement
(Tarifs particuliers pour des commandes collectives supérieures, sur demande.)

Fondateur
Samuel Roller

Rédacteur responsable
François Jaquet

Comité
Michel Brêchet
Aldo Dalla Piazza
Jean-Paul Dumas
Antoine Gaggero
Denis Odiet
Luc-Olivier Pochon
Hervé Schild
Martine Simonet
Michèle Vernex
Laura Weiss

Maquette
Raphaël Cuomo
Stéphanie Fiorina Jordan

Imprimerie
Fiorina, rue de la Lombardie 4
CH–1950 Sion
Tél (027) 322 14 60
Fax (027) 322 84 09

Couverture
Détail d'un œuf géométrique pavé réalisé par Virginie, Collège de Delémont

MATH-ÉCOLE

43e année, quatre numéros par an

211

Juin 2004

ÉDITORIAL

GUY BROUSSEAU À L'HONNEUR

ICMI

La Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI), fondée à Rome en 1908, a, pour la première fois de son histoire, créé deux médailles pour récompenser des contributions majeures à la recherche en didactique des mathématiques. La médaille Felix Klein, du nom du premier président d'ICMI (1908-1920), récompense l'œuvre d'une vie. La médaille Hans Freudenthal, du nom du huitième président d'ICMI (1967-1970), récompense un ensemble de travaux d'intérêt majeur sur un thème précis. Ces médailles seront décernées chaque année impaire et elles seront remises aux lauréats lors du congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME)[1] suivant, les lauréats étant par ailleurs invités à faire une conférence à ce congrès.

Ces prix, qui récompensent un accomplissement majeur en didactique des mathématiques, ne visent pas uniquement à encourager la recherche didactique, ils veulent aussi contribuer au développement de standards de haut niveau pour cette recherche, à travers la reconnaissance publique de modèles. Ils sont attribués par un jury anonyme d'éminents chercheurs internationalement reconnus, présidé par Michèle Artigue, professeur à l'Université Paris 7.

La **médaille Hans Freudenthal** pour 2003 est décernée à **Celia Hoyles**, professeur à l'Institut d'Éducation de l'Université de Londres, pour l'ensemble de ses travaux concernant les usages de la technologie au service de l'enseignement des mathématiques.

La première **médaille Felix Klein** de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques est décernée au professeur **Guy Brousseau**. Cette médaille récompense la contribution essentielle que Guy Brousseau a apportée au développement de la didactique des mathématiques comme champ de recherche scientifique, à travers les travaux théoriques et expérimentaux qu'il a menés dans ce domaine pendant une quarantaine d'années. Elle récompense aussi les efforts permanents qu'il a déployés tout au long de sa carrière pour que ces recherches contribuent à l'amélioration de la formation mathématique des élèves et des enseignants.

Guy Brousseau, né en 1933, a commencé sa carrière comme instituteur en 1953. À la fin des années 60, après avoir obtenu une licence de mathématiques, il est entré à l'université de Bordeaux. En 1986, il a obtenu un doctorat d'état es sciences et, en 1991, il est devenu professeur d'université à l'IUFM d'Aquitaine qui venait d'être créé, où il a travaillé jusqu'en 1998. Il est actuellement professeur émérite à l'IUFM d'Aquitaine. Il est aussi docteur Honoris Causa de l'université de Montréal et de Genève.[2]

Dès le début des années 70, Guy Brousseau s'est imposé comme l'un des principaux chercheurs dans le champ tout nouveau de la didactique des mathématiques, et aussi comme l'un des plus originaux, affirmant avec conviction que ce champ devait être développé comme un champ de recherche spécifique, avec à la fois une recherche fondamentale et une recherche appliquée, mais aussi qu'il devait rester proche des mathématiques.

Sa contribution théorique essentielle au champ didactique est la théorie des situations didactiques, une théorie initiée au début des années 70 et qu'il a continué à élaborer avec une énergie sans faille et une exceptionnelle créativité jusqu'à aujourd'hui. À un moment où la vision

1 Cette année, le 10e congrès ICME, se tiendra à Copenhague, du 5 au 11 juillet

2 Cette dernière distinction est récente, Guy Brousseau, sur proposition de la Faculté des Sciences de l'Éducation, a également reçu le 4 juin 2004, le titre de, docteur honoris causa de l'Université de Genève.

dominante était une vision cognitive, fortement influencée par l'épistémologie piagétienne, il a affirmé avec force que ce dont le champ didactique avait besoin, ce n'était pas d'une théorie purement cognitive mais d'une construction qui permettrait de comprendre les interactions sociales entre élèves, enseignant et savoirs mathématiques qui se nouent au sein de la classe et conditionnent ce que les élèves apprennent et comment ils l'apprennent. Ce fut l'ambition de la théorie des situations didactiques qui a progressivement mûri pour devenir l'impressionnante et complexe construction qu'elle est aujourd'hui. Cette construction fut bien entendu un travail collectif mais chaque fois qu'il y eut des avancées notables, Guy Brousseau en fut la source.

Cette théorie, visionnaire par la façon dont elle sut intégrer, dès ses débuts, les dimensions épistémologiques, cognitives et sociales de l'apprentissage des mathématiques, a été une source constante d'inspiration pour de nombreux chercheurs, partout dans le monde. Ses principaux concepts, comme ceux de situations a-didactique et didactique, de contrat didactique, de dévolution et d'institutionnalisation, sont devenus largement accessibles, à travers la traduction des principaux articles de Guy Brousseau dans de nombreuses langues et, plus récemment, à travers la parution en 1997 chez Kluwer du livre intitulé « Theory of didactical situations in mathematics - 1970-1990 ».

Bien que les recherches que Guy Brousseau a inspirées concernent aujourd'hui l'ensemble des niveaux d'enseignement, de l'école maternelle à l'université, ses contributions personnelles majeures concernent, elles, l'enseignement élémentaire, couvrant à ce niveau tous les domaines, du numérique et du géométrique jusqu'aux probabilités. Elles doivent beaucoup à la structure spécifique qu'est le COREM (Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques), une structure qu'il a créée en 1972 et dirigée jusqu'en 1997. Le COREM a en particulier permis une organisation tout à fait originale des rapports entre recherche théorique et expérimentale.

Guy Brousseau n'a pas été seulement un chercheur inspiré et exceptionnel dans le champ de la didactique des mathématiques. Il a été aussi une personne qui a dédié sa vie professionnelle à ce champ, travaillant sans relâche à son développement, en France mais aussi dans de nombreux pays, soutenant la création de programmes doctoraux, aidant et dirigeant les travaux de nombreux chercheurs (il a ainsi dirigé plus de 50 thèses), contribuant de façon essentielle au développement des connaissances mathématiques et didactiques des étudiants et des enseignants. Il s'est impliqué fortement jusque dans les années 90 dans les activités de CIEAEM (Commission Internationale pour l'Eude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) dont il a été secrétaire de 1981 à 1984. Sur le plan national, il a été, dès ses débuts, à la fin des années 60, un des piliers de l'expérience des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et il a eu une influence décisive sur les activités et les ressources que ces instituts ont développées, depuis plus de trente ans, pour améliorer la formation mathématique des enseignants de l'école élémentaire.

[ndlr] *Parmi les objectifs de* Math-Ecole, *il y a, entre autres, celui de faire connaître en Suisse romande les contributions de la recherche en didactique des mathématiques. La tâche est de longue haleine, nous le savons. La théorie des situations didactique, en particulier, considérée comme outil d'analyse et d'action, est difficile à faire entendre car elle ne se présente pas comme un ensemble de recettes simples qui permettraient à peu de frais de faire réussir tous nos élèves. C'est en continuant de servir de support et de lien entre des travaux comme ceux de Guy Brousseau et la réalité quotidienne de la classe qu'une revue comme la nôtre peut rendre le meilleur hommage à celui qui est, justement, fêté ces jours-ci. Au nom de la rédaction de* Math-Ecole *et de ses lecteurs : bravo et merci à Guy Brousseau !*

12e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la deuxième épreuve

La deuxième épreuve du 12e RMT s'est déroulée en mars et avril 2004, dans près de 250 classes de Suisse romande et 1800 autres en Italie, France, Luxembourg, Israël et Tessin. Les problèmes ont été préparés par les sections de Bourg-en-Bresse et de la Vallée d'Aoste, sur la base de sujets proposés par chacune des sections, puis ils ont repassé en consultation générale pour aboutir aux énoncés suivants dont certains sont fort éloignés des textes d'origine. Certaines analyses de ces problèmes figurent dans ce numéro, en pages 46 à 50. D'autres suivront dans les prochains numéros. Au cas où des lecteurs de *Math-Ecole* souhaiteraient proposer ces sujets à leurs classes, ils peuvent obtenir les analyses a priori auprès de la rédaction.

1. À LA FONTAINE (Cat. 3)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l'eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.

Leurs deux seaux contiennent ensemble 24 litres. Avec le seau de Laure on peut remplir exactement 3 fois le seau de Pauline.

Combien de litres contient le seau de Pauline?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

2. D'UN ÉTAGE À L'AUTRE (Cat. 3)

Six amies habitent dans le même immeuble de la rue Pythagore, chacune à un étage. Caroline habite au rez-de-chaussée ; Angeline habite au premier étage; Marie habite au deuxième étage, puis il y a Céline, Doris et enfin Joséphine qui habite au cinquième étage. Il y a toujours le même nombre de marches entre deux étages.

Caroline se rend d'abord chez Marie en montant 28 marches.

Puis, accompagnée de Marie, elle reprend l'escalier pour aller chez Joséphine.

Combien de marches Caroline et Marie doivent-elles monter pour aller de l'étage de Marie à celui de Joséphine?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

3. L'ÂGE DES GRANDS-PARENTS (Cat. 3, 4)

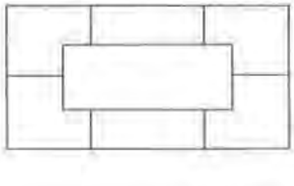
- Dis-moi, Camille, quel âge ont tes grands-parents?
- Je peux te dire que si j'additionne leurs âges, je trouve 132.
- Donne-moi un renseignement de plus.
- Mon grand-père a 6 ans de plus que ma grand-mère.
- Et ils vivent ensemble depuis longtemps?
- Ils se sont mariés, il y a exactement 42 ans.

Quel âge avaient les grands-parents de Camille le jour de leur mariage?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

4. COLORIAGE (Cat. 3, 4, 5)

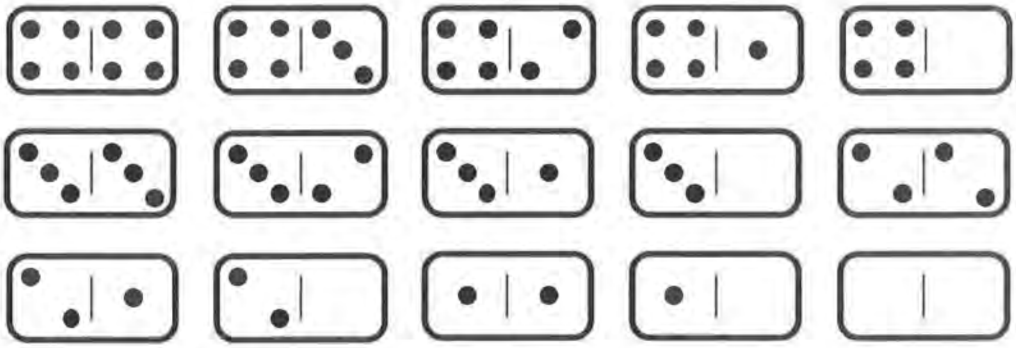
Léa veut colorier un pavage comme celui-ci, en respectant les conditions suivantes:
- chaque partie doit être d'une seule couleur;
- le bleu touche toutes les couleurs;
- le rouge et le jaune sont dans les coins gauches;
- le rouge, le violet et le noir ne touchent pas le vert;
- l'orange touche le noir.

Dessinez tous les coloriages différents que peut trouver Léa, en respectant toutes ces conditions.
Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.



5. LES DOMINOS DE DOMINIQUE (Cat. 3, 4, 5)

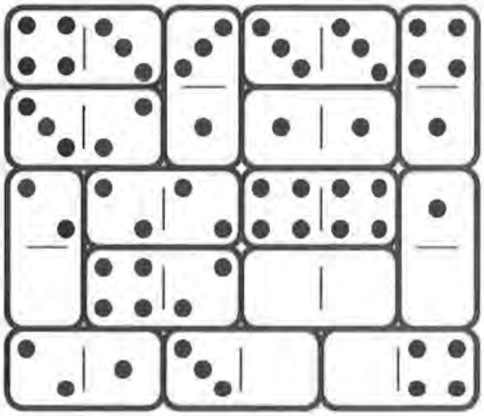
Voici les 15 pièces du jeu de domino de Dominique:



Dominique doit les placer sur ce tableau, selon le nombre de points indiqué dans chaque case.

4	3	3	3	3	4
3	2	1	1	1	1
2	2	2	4	4	1
0	4	2	0	0	0
2	1	3	0	0	4

Voici son travail!



Voici maintenant un autre tableau:

Dominique a déjà marqué la place de l'une des pièces sur ce tableau.

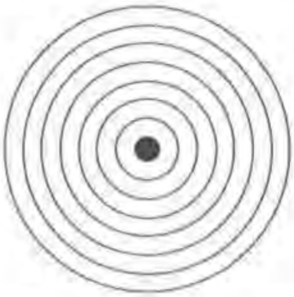
Comment Dominique va-t-elle placer ses 14 autres pièces sur ce nouveau tableau?

Pour répondre, vous pouvez soit dessiner le contour de chaque pièce, soit découper les 15 pièces et les coller à la bonne place.

1	3	1	4	0	2
3	2	2	4	0	3
0	3	2	4	0	4
2	3	1	4	1	1
0	0	1	3	4	2

6. DES FLEURS DEVANT L'ÉCOLE (Cat. 4, 5, 6)

Monsieur Belplante décide d'aménager un massif de fleurs devant l'école. Il partage le massif en 7 anneaux, comme sur ce dessin.



Puis, il procède en suivant toujours une même règle pour les tulipes et une autre pour les roses, de la façon suivante :

- dans le premier anneau, en partant du centre, il plante 2 tulipes et 3 roses ;
- dans le deuxième anneau, il plante 5 tulipes et 7 roses ;
- dans le troisième anneau, il plante 8 tulipes et 15 roses ;
- dans le quatrième anneau, il plante 11 tulipes et 27 roses ;
- et ainsi de suite jusqu'au septième anneau.

Selon vous, combien de fleurs plantera-t-il en tout dans le septième anneau ?
Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

7. LE TEMPLE GREC (Cat. 4, 5, 6)

Mario veut réaliser une maquette de temple grec avec des blocs d'un jeu de construction. Il a lu que les temples grecs étaient de forme rectangulaire et qu'ils étaient entourés de colonnes. Le temple que veut construire Mario doit avoir ces caractéristiques :

- le nombre de colonnes disposées sur une longueur du rectangle vaut un de plus que le double du nombre de colonnes disposées sur une largeur ;
- il y a une colonne à chaque coin du temple ;
- il y a toujours plus de deux colonnes sur une largeur.

Sur ce schéma, est représenté le plus petit temple qu'il est possible de construire.
Mario dispose de 35 pièces en forme de colonnes. Il essaie de construire tous les temples possibles. Lorsqu'il en a construit un, il le dessine, puis le détruit pour essayer d'en réaliser un autre.

Combien de temples Mario peut-il réaliser ?
Combien chaque temple aura-t-il de colonnes sur sa longueur et sur sa largeur ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

8. À LA FONTAINE (Cat. 4, 5, 6)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l'eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.
Leurs deux seaux contiennent ensemble 26 litres. Avec l'eau contenue dans le seau de Laure on peut remplir 3 fois le seau de Pauline et il reste encore 2 litres d'eau dans le seau de Laure.

Combien de litres contient le seau de Pauline ?
Et celui de Laure ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

9. DRÔLE DE PIZZA (Cat. 5, 6)

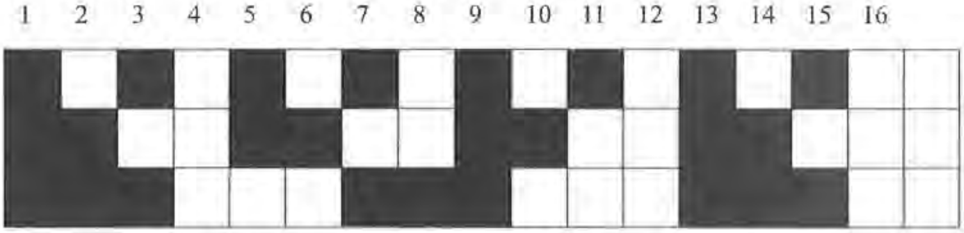
Pour battre un record, les habitants d'un village décident de faire une très grande pizza de forme rectangulaire. Elle doit mesurer 4 m de long et être composée de quatre parties : une aux champignons, une au jambon, une aux olives et une au fromage. Pour tenir compte des goûts de chacun, les habitants décident que :

- la longueur de la partie au jambon doit être le double de celle aux champignons et la moitié de celle aux olives ;
- la longueur de la partie au fromage doit être le quart de celle de la partie la plus longue.

Quelle sera la longueur de chaque part ?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

10. COLORIAGE BIZARRE (Cat. 5, 6, 7)

Maxime colorie un quadrillage en respectant, pour chaque ligne, une règle de coloriage différente :



Il a déjà colorié correctement les 15 premières colonnes. Il constate que les colonnes 1, 9 et 13 sont complètement coloriées. Il continue le coloriage en allant bien après la colonne 16.

La colonne 83 sera-t-elle entièrement coloriée ? Et la colonne 265 ?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

11. LA FEUILLE DE TIMBRES (Cat. 6, 7, 8)

Jean est collectionneur de timbres. Il a devant lui une feuille rectangulaire de 24 timbres dont il a déjà détaché les bords blancs. Il a décidé de la partager avec les 23 camarades de sa classe.
Pour séparer les timbres sans les abîmer, un collectionneur commence toujours par plier fermement la feuille en suivant les lignes de dents avant de la séparer en deux parties. Puis ainsi de suite, il continue, toujours avec une seule partie à la fois, en la pliant et la séparant pour obtenir deux nouvelles parties.

Combien de plis, au minimum, Jean devra-t-il faire pour obtenir 24 timbres isolés ?
Expliquez votre raisonnement

12. VOYAGES (Cat. 6, 7, 8)

Paul, Jacques et Marie habitent dans trois villes de Transalpie, situées à égales distances de la capitale, Equalia. Ils se donnent rendez-vous à la gare d'Equalia, un jour à 11 h 00.
Chacun d'eux part le jour du rendez-vous à une heure sonnante (lorsque l'aiguille des minutes est sur le « 12 ») et arrive exactement à l'heure prévue, en utilisant un moyen de transport différent.

- Paul voyage à bicyclette, à la vitesse moyenne de 20 km/h.
- Jacques se déplace en train, à la vitesse moyenne de 60 km/h.
- Marie voyage en autobus, à la vitesse moyenne de 40 km/h.

À quelle heure chacun d'eux est-il parti et quelle distance a-t-il parcourue pour se rendre à Equalia ?
Justifiez vos réponses.

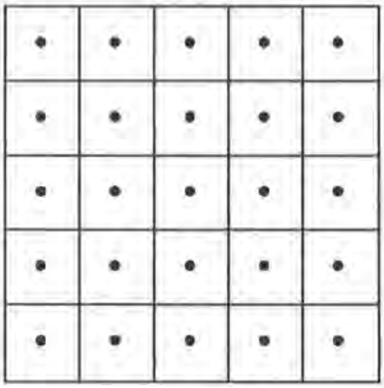
13. CHIFFRES ÉGAUX (Cat. 7, 8)

Richard découvre que lorsqu'il multiplie 12345679 par 0,45 il obtient un nombre qui ne s'écrit qu'avec neuf chiffres 5, et une virgule.
Intrigué, il se demande s'il peut trouver des nombres qui, lorsqu'il les multiplie par 12345679, ne s'écrivent qu'avec neuf chiffres 7 et une virgule éventuellement.

Richard pourra-t-il y arriver ? De combien de manières ?
Écrivez les nombres que vous avez trouvés et expliquez votre raisonnement.

14. COMBIEN DE DISTANCES? (Cat. 7, 8)

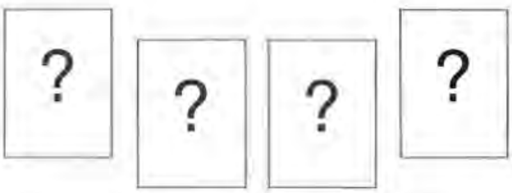
Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin. Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question : *« Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation ? »*



Répondez vous aussi à cette question.
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

15. JEU DE CARTES (Cat. 7, 8)

Luc et ses amis jouent avec un jeu de 52 cartes, composé de quatre séries de cartes numérotées de 1 à 13. À ce jeu, on retourne quatre cartes, faces visibles et l'on forme un « talon » avec les autres, faces cachées.



À tour de rôle, chaque joueur tire la carte supérieure du talon et, lorsque c'est possible, prend les cartes retournées dont la somme correspond au nombre de la carte tirée.

Par exemple, si on tire un « 8 », on peut prendre un « 8 » retourné ou deux, trois ou quatre cartes retournées dont la somme est 8.
C'est à Luc de jouer. Il observe les quatre cartes retournées et dit, avant de tirer la carte supérieure du talon : « J'ai de la chance, je suis sûr de pouvoir prendre au moins une des cartes retournées ! »

Quels peuvent être les nombres écrits sur les quatre cartes retournées?
Expliquez comment vous les avez trouvés.

16. CHIFFRES MOBILES (Cat. 7, 8)

Un nombre est composé de quatre chiffres tous différents et différents de 0.
En mettant le chiffre des unités à la place de celui des milliers, celui des dizaines à la place de celui des centaines, celui des centaines à la place de celui des unités et celui des milliers à la place de celui des dizaines on obtient un nouveau nombre qui, additionné au nombre de départ, donne 9613.

Quels sont les nombres de quatre chiffres qui satisfont ces conditions ?
Expliquez comment vous les avez trouvés.

17. GÂTEAUX : GROS OU PETITS? (Cat. 8)

Chaque dimanche, Mme Boulanger prépare sa pâte et en remplit à ras-bords un moule cylindrique. Une fois cuit, ça lui donne un excellent gâteau.

Mais aujourd'hui, avec la même quantité de pâte, elle fait plusieurs petits gâteaux au lieu d'un seul grand gâteau, en utilisant des moules dont le diamètre et la hauteur sont la moitié de celui qu'elle utilise habituellement.

Combien de petits gâteaux obtiendra-t-elle avec la même quantité de pâte ?
Expliquez votre raisonnement.

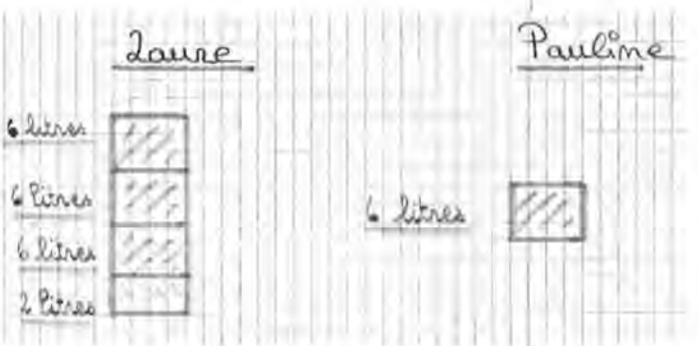
QUELQUES RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

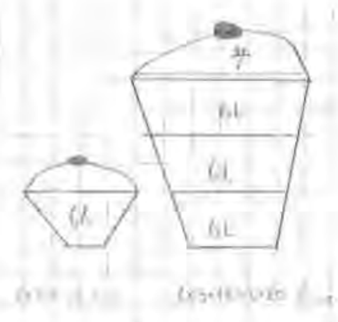
8. A LA FONTAINE (135 classes, 34 de cat. 4, 49 de cat. 5, 52 de cat. 6)

Du point de vue algébrique, ce problème se traduit par le système de deux équations: $26 = P + L$ et $L = 3P + 2$, où P représente la contenance du seau de Pauline et L celle du seau de Laure, en litres. Une des méthodes les plus simples pour résoudre ce système est la substitution de L par $3P + 2$ permettant d'arriver à une équation d'inconnue P; $26 = P + (3P + 2)$ se réduisant à $26 = 4P + 2$. Pour l'élève qui ne dispose pas de l'outil algébrique, le cheminement le plus naturel semble être l'un de ceux prévus par l'analyse a priori du problème:

- Comprendre que la contenance du seau de Laure, diminuée de 2 litres est trois fois celle du seau de Pauline.
- Comprendre que 26 l est la somme des contenances des deux seaux.
- Chercher à obtenir 26 comme somme de trois nombres: l'un est le triple de l'autre et le 3e est 2, par essais et réajustements.
- Enlever 2 à 26 et chercher à obtenir 24 comme somme de deux nombres dont l'un est le triple de l'autre;
- ou: comprendre que la contenance du seau de Pauline est le quart de 24 l, et déterminer cette contenance, c'est-à-dire 6 l, soit par essais additifs ou multiplicatifs, soit par reconnaissance du fait que le nombre qui, multiplié par 4 donne 24, est 6 ou par division.

En effet, nous avons trouvé souvent ces procédures, comme par exemple celle-ci:
Nous avons commencé par faire 26-2, puis nous avons divisé le résultat (24) par 4. Cela nous a donné 6. Il y a donc 6 litres dans le seau de Pauline. Nous avons multiplié 6 par 3, puis nous avons ajouté 2. Cela nous a donné 20. Il y a donc 20 litres dans le seau de Laure.
Parfois, les élèves ont illustré leurs solutions de dessins de seaux, souvent purement décoratifs (6 en 4e, 8 en 5e, 10 en 6e) mais quelques fois avec l'intention de représenter les proportions correctes (2 en 4e, 4 en 5e, 4 en 6e), comme ci-dessous:





Nous avons ainsi pu attribuer «4 points» à un grand nombre de réponses correctes et bien expliquées, mais de très nombreux «1 point» témoignent de l'ambiguïté (?) de la consigne. Malgré un contrôle rigoureux, il arrive en effet que les énoncés des problèmes du RMT - comme aussi ceux des manuels - offrent des interprétations différentes. Nous l'expliquons ainsi: en voulant donner un habillage plaisant au problème mathématique, «trouver deux nombres dont la somme est 26 et dont l'un vaut 2 de plus que le triple de l'autre» on a mis en scène deux fillettes et une histoire d'eau, de seaux et de fontaine. Cette situation

fictive introduit, dans ce cas, deux concepts que l'énoncé ne distingue pas : les « capacités » des seaux, indépendamment du contexte, et les « quantités d'eau » rapportées de la fontaine.
Voici un exemple d'une classe (la seule sur 136) qui a une réponse « fausse » du point de vue des « capacités » des seaux, mais dont la compréhension du problème nous a paru correcte et qui, manifestement, a pensé aux « quantités » d'eau prises à la fontaine :

Pauline a 0 litre dans le seau
Laure a 26 litres dans son seau
Chaque fois Laure met 8 litres
dans le seau de Pauline
nous avons fait : 3 x 8=24, 24+2=26
Il y a plus de solutions parce qu'il y a
que 3 x 8 qui font 24

Notre explication de leur démarche est la suivante)
Deux amies... vont chercher... avec un seau... (donc l'autre seau n'est pas utilisé pour prendre l'eau et reste vide).
Elles reviennent donc avec un seau plein de 26 l (Laure) et un seau vide d'une capacité de 8 l (Pauline). Après avoir versé à trois reprises le contenu du grand seau dans le petit, il reste 2 l dans le seau de Laure.
26+0=26 et 26-(3x8)=2
Certes, l'interprétation est inattendue car, si l'on va chercher de l'eau à deux à la fontaine, ce n'est, en principe, pas pour revenir avec un seau vide. L'expression « ... chercher de l'eau avec un seau » peut-elle avoir suggéré la possibilité qu'un seul soit utilisé ? Aurait-il fallu dire « ... chacune avec un seau » ou simplement « ... chercher de l'eau » puisque la suite de l'énoncé est claire sur la présence de deux seaux ?
Dans une résolution en classe, en présence du maître, ces incertitudes sont immédiatement levées par une courte intervention d'un élève, d'un groupe ou du maître. Dans les conditions du RMT, les groupes travaillent sur des problèmes différents, le maître est absent pour la régularité de l'épreuve, le « surveillant » n'a évidemment pas le droit d'intervenir ; c'est au sein du groupe que doit s'interpréter l'énoncé et, parfois le leader impose sa représentation sans laisser une discussion se développer.
Au bénéfice du doute, l'équipe des correcteurs a été généreuse et fait une exception aux critères d'attribution des points[1]. Nous avons ainsi attribué « 4 points » à cette classe.
Ce petit épisode montre que la tâche des équipes de correcteurs des problèmes du RMT va bien au-delà d'une attribution mécanique de points. On entre ici dans l'interprétation de la pensée des élèves, seuil caractéristique dans le passage d'une évaluation sommative - au sens restrictif du terme - vers une évaluation plus formative.
Parmi les « 1 point », il y a beaucoup (4 en 4^{e}, 9 en 5^{e} , 13 en 6^{e} soit au total 1 classe sur 5 !) de groupes qui ont compris que le seau de Laure était plus petit et qu'il fallait le remplir 3 fois pour obtenir la contenance de celui de Pauline. Cette interprétation erronée entraînant une multiplication est vraisemblablement due à l'expression « trois fois » qui figure dans l'énoncé.
Un élève écrit : « *... le seau de Pauline contient le triple du seau de Laure...* »
Il est probable également à la lecture des explications, que certains élèves ont compris qu'il y avait un transvasement à effectuer et que l'on demandait d'indiquer ce qu'il restait dans les seaux à la fin de l'opération : « et ils nous disent que dans le seau de Laure on peut mettre 3 fois son contenu dans celui de Pauline... » ou encore « ... on met 3 fois le contenu du seau de Laure chez Pauline... ».

Voici un aperçu de la grande diversité des erreurs.
Réponse : Pauline = 4, Laure = 14 ; justifications : 3 x 4 = 12 et 12 + 2 = 14
Réponse : Pauline = 4, Laure = 14 ; justifications : 26 – 2 = 24 et 24 : 2 = 12

1 Les règles du RMT accordent une autonomie relative aux équipes régionales dans l'interprétation des critères d'attribution des points, pour autant que les modifications soient justifiées et communiquées aux autres sections et que toutes les classes d'une même région soient traitées avec le même barème.

puis 12 : 3 = 4 et 12 + 2 = 14
Réponse : Pauline = 5, Laure = 1 ; justifications : 26 : 2 = 13 et 13 + 2 = 15
Réponse : Pauline = 6,5, Laure = 19,5 ; justifications : 26 : 4 = 6,5 et 6,5 x 3 = 19,5
...

Certaines classes inscrivent exactement les mêmes calculs et parviennent à des réponses totalement différentes, le reste de 2 litres posant visiblement problème.
26 – 2 = 24 et 24 : 3 = 8 avec les réponses P = 24 L = 8 , P = 8 L = 16, P = 12 L = 14, P = 16 L = 10
26 – 2 = 24 et 6 x 4 = 24 (ou 24 : 4 = 6) avec les réponses P=18 L=6 , P=6 L=18 , P=8 L=18 , L=8 P=18

Les critères d'attribution des points définis dans l'analyse a priori ont été légèrement affinés, en fonction des procédures observées. Les voici, avec les résultats, sur 136 classes :

4 56 classes (41%) : 7 de 4e (21%) ; 19 de 5e (39%) ; 30 de 6e (57%)
Réponses correctes (Pauline 6 litres, Laure 20 litres), avec argumentation détaillée →

3 6 classes (4%) : 1 de 4e (3%) ; 5 de 5e (10%) ; 0 de 6e (0%)
Réponses correctes sans justification ou absence de la justification des 2 litres restant ou réponse totalement correcte mais inversion des prénoms (Pauline 20 litres et Laure 6 litres)

2 4 classes (3%) : 1 de 4e (3%) ; 2 de 5e (4%) ; 1 de 6e (2%)
Une seule réponse correcte ou 20 l et 6 l mais absence des prénoms

1 48 classes (35%) : 12 de 4e (35%) ; 16 de 5e (33%) ; 20 de 6e (38%)
Essais de recherche de la solution par le calcul (avec total cohérent de 24 l ou 26 l pour les deux seaux), ou schéma incomplet

0 22 classes (16%) : 13 de 4e (38%) ; 7 de 5e (14%) ; 2 de 6e. (4%)
Incompréhension du problème (réponse fausse et pour un seul enfant ; total des contenances de 78 l ; ...)

Analyse, corrections et commentaires :
Edith, Pfander, Daniel Sauthier,
François Jaquet

9. DRÔLE DE PIZZA (102 classes : 49 de cat. 5, 53 de cat. 6)
Ce problème a réservé quelques surprises qu'il vaut la peine de raconter pour illustrer le rôle des représentations préalables d'un problème pour sa résolution.

A. Commençons par
le point de vue des adultes.

Voici tout d'abord un extrait de son analyse a priori, établie lors de l'élaboration du problème après contrôle et relecture par toutes les sections du RMT :

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie aux olives est la plus longue.
- Comprendre les différents rapports entre longueurs et les rapporter à la part la plus longue : L(j) = 1/2 L(o) ; L(c) = L(f) = 1/4 L(o) (les rapports peuvent aussi être exprimés par rapport à l'une des parts les plus courtes comme celle aux champignons ou au fromage).
- En déduire que L(o) est égale à la moitié de la longueur totale (4 m), donc 2 m, puis les autres longueurs (1 m et 50 cm).
- Ou utiliser une représentation graphique pour représenter ces rapports.

A la lecture de ces lignes, il n'y a pas eu de doute, pour une trentaine d'adultes qui ont lu et relu les projets d'épreuve, que la représentation graphique de la pizza, mentionnée en fin d'analyse de la tâche est de ce type :

Champ.	From.	Jambon	Olives

En effet, ce problème appartient à la famille des « partages proportionnels d'une longueur », bien connue et bien entraînée dans les pratiques scolaires. Dans le RMT, sa dernière occurence remonte à 2002, (10e Epr. II, Probl. 1. Cat. 3) dans un contexte de segments mis bout à bout :

Les pompiers de Transalpie ont trois échelles: une courte, une moyenne, qui mesure deux fois la courte, une longue, qui mesure quatre fois la courte. Les pompiers peuvent les accrocher les trois à la suite l'une de l'autre, pour former une très grande échelle de 42 mètres de longueur. Combien mesure chacune des trois échelles?

On peut relever, en passant, que les deux problèmes 1 et 8, « A la fontaine » présentés dans les pages précédentes appartiennent à une famille très proche, celle des « partages proportionnels d'un volume » dans le contexte des liquides et qu'ils ont aussi été souvent résolus par une représentation graphique de segments.

B. Les solutions proposées, du **point de vue des élèves**, ne s'appuient pas toutes sur le même modèle. Loin s'en faut. En voici deux catégories :

B.1) 8 classes de 5e (sur 49) et 14 classes de 6e année (sur 53) ont représenté la pizza ainsi :

<table>
<tr><td>Champ.</td><td>From.</td><td>Jambon</td></tr>
<tr><td colspan="3">Olives</td></tr>
</table>

avec la réponse : *Olives : 4 m, Jambon : 2 m, Fromage : 1 m, Champignons : 1 m*

B.2) 4 classes de 5e et 8 classes de 6e année ont présenté ce schéma :

<table>
<tr><td colspan="2">Jambon</td><td rowspan="2">Olives</td></tr>
<tr><td>Champ.</td><td>From.</td></tr>
</table>

et cette réponse : *Olives : 4, Jambon : 2, Fromage : 1, Champignons : 1.* Certaines classes de 6e ont spécifié qu'il s'agissait de m^2, dans d'autres classes, cette unité n'est pas mentionnée et ne paraît que sous-entendue.

Ces deux solutions ne sont vraisemblablement pas dues au hasard puis qu'elles sont proposées par 22 classes sur 105 (20%) pour la première et 12 sur105 (11%) pour la seconde[2].

La première (B.1), respecte parfaitement toutes les contraintes de l'énoncé : rectangle et rapports des longueurs des différentes parts. Elle respecte aussi l'idée de répartition proportionnelle émise dans la phrase « *Pour tenir compte des goûts de chacun, les habitants décident que : ...* » qui sous entend clairement que ce sont les quantités de pizza qui sont en jeu ici et donc les surfaces respectives des quatre parties, puisque celles-ci sont de même largeur, ce qui n'aurait pas été le cas si la partie aux olives avait été d'une largeur différente des trois autres.

Il n'y a donc pas lieu d'hésiter pour l'attribution des points : même si ce modèle de pizza n'est pas prévu dans le barème, c'est le maximum, 4 points qui doit être attribué.

La deuxième solution (B.2) fait état d'une confusion entre aire et longueur. Il semble que les élèves n'ont retenu que la quantité de pizza. Le partage « 4 ; 2 ; 1 ; 1 » respecte en effet les proportions de l'énoncé, mais ne fait plus allusion aux longueurs. La représentation que les élèves ont d'une pizza « coupée en 4 » est vraisemblablement plus forte que celle du partage en 4 « bandes » ou d'une « longue bande partagée en 4 ».

Pour l'attribution des points, le problème est plus délicat. Il faut développer les critères de l'analyse a priori. Nous avons décidé de considérer que le schéma de partage est conforme aux quantités données mais, vu l'absence de référence aux longueurs, cette solution ne valait qu'un point.

2 Nous avons eu l'occasion d'analyser aussi les productions de 17 classes de la section de Cagliari où nous avons observé 4 réponses du type B.1 ou B.2.

En conclusion, le fait que les adultes ne pensent qu'à une configurations de la pizza alors que les élèves en trouvent d'autres, dont une tout à fait correcte (comme B1) est sans doute à mettre sur le compte des modèles a priori dont chacun dispose. Les premiers disposent de la représentation «canonique» du partage proportionnel d'un segment; ils n'estiment donc pas nécessaire de remettre en cause leur modèle ou d'en trouver d'autres. Les seconds ont un répertoire de problèmes plus limité, non encore validé par une longue expérience; ils doivent construire leur modèle à partir du contexte réel: la pizza, un rectangle, sa répartition en quatre pour *tenir compte des goûts de chacun*, les longueurs respectives de ces quatre parties. Il y a donc plus de chances qu'apparaissent alors des pizzas différentes de celles auxquelles avaient pensé les auteurs du problème, dont la deuxième solution!

Voici les critères d'attribution des points définis dans l'analyse a priori avec les résultats des 102 classes de la section de Suisse romande:

4 47 classes (21 de 5^e, 26 de 6^e)
Réponse correcte (2 m ou 200 cm pour les olives, 1 m ou 100 cm pour le jambon, 0,5 m ou 50 cm pour les champignons et pour le fromage), avec argumentation ou schéma correct

3 14 classes (7 de 5^e, 7 de 6^e)
Réponse correcte sans justification

2 13 classes (6 de 5^e, 7 de 6^e)
Réponse partiellement correcte (au moins 2 parties correctes) ou raisonnement correct, mais erreur dans les calculs

1 16 classes (6 de 5^e, 10 de 6^e)
Début de raisonnement ou de schéma correct

0 12 classes (9 de 5^e, 3 de 6^e)
Incompréhension du problème

Analyses, corrections et commentaires:
Martine Simonet, François Jaquet

Réponses aux problèmes du numéro 210.

Problèmes du 21th Annual American Invitational Mathematics Examination 2003, tirés de *Mathématique et Pédagogie*.

2 *(210, p.8) Dans un plan, on dessine cent cercles concentriques de rayons respectifs de 1, 2, 3, ... 100. On colorie en rouge l'intérieur du cercle de rayon 1 et on colorie ou bien en rouge ou bien en vert chaque zone ayant pour frontières des cercles consécutifs, sans que jamais deux zones adjacentes ne soient de même couleur. Le rapport de l'aire totale des zones vertes à l'aire du cercle de rayon 100 peut s'écrire m/n où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver m + n.*

L'aire de la partie verte est
$\pi[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+ ... +(100^2-99^2)] =$
$= \pi(3+7+11+15+ ... +191+195+199) = 202 \times 25\pi = 5050\pi$
Le rapport est 5050/10000 = 101/200
$m = 101$, $n = 200$, $m + n = 301$

Commentaires: une belle occasion de mettre en oeuvre les connaissances sur l'aire du disque - en nombres réels et non en approximations inopportunes - sur l'associativité et la commutativité de l'addition, sur la distributivité de la multiplication amenant à une factorisation. Degrés 8, 9 et au-delà.

3. (210, p. 25) *Soit l'ensemble S = {8, 5, 1, 13, 34, 3, 21, 2}. Suzan dresse une liste comme suit: pour chaque sous-ensemble de S à deux éléments, elle écrit sur sa liste le plus grand des deux éléments de l'ensemble. Trouver la somme des nombres de sa liste.*

Il y a 28 = (8x7)/2 sous-ensembles de deux éléments de S.
Le 34 est le plus grand dans 7 cas, le 21 est le plus grand dans 6 cas, etc.
Réponse: 7 x 34 + 6 x 21 + 5 x 13 + 4 x 8 + 3 x 5 + 2 x 3 + 1 x 2 = 484.

Commentaires: Les 8 nombres de S appartiennent à la suite de Fibonacci, mais nous n'avons pas trouvé de «fonction» générale pour ce type de somme. Compétences requises: savoir dresser un inventaire ordonné de combinaisons, puis effectuer des calculs simples. Ce problème peut être résolu dès le degré 5 ou 6.

suite en page 25

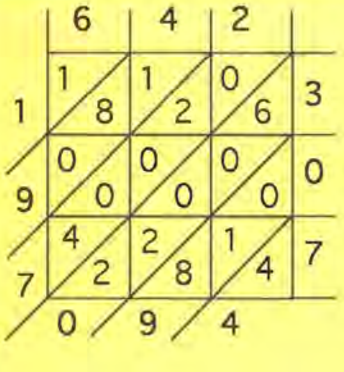
LES RÉGLETTES DE NEPER

Antoine Gaggero

Un peu d'histoire

John Napier (1550 – 1617) est né à Merchiston Castle, près d'Edimbourg en 1550 et fréquentera l'Université de Saint – Andrews en Écosse. Son nom sera francisé en Neper.
À la fin du 16ème siècle, les sciences, comme l'astronomie, la navigation maritime et les techniques bancaires sont en plein essor. Neper est sensibilisé par le fait que le progrès scientifique est en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles auxquels les savants doivent se plier pour parvenir à des résultats. Ainsi, Neper concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles d'abréger les calculs. En 1614, après 20 ans de recherche, il publie son système de logarithmes dans l'ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Cet ouvrage fut suivi par *Mirifici logarithmorum canonis constructio* qui reprend le premier traité et décrit les procédés de construction des tables de logarithmes. Des logarithmes de base e que l'on appellera en français logarithmes népériens, (« Ln(x) » sur les calculatrices), pour les distinguer des logarithmes en base dix, (« Log(x) » sur les calculatrices).

On attribue donc à Neper l'invention des logarithmes, mais il faut relever toutefois la contribution de notre compatriote Joost Bürgi dans ce domaine[1]. qui calcula une table de logarithmes entre 1603 et 1611, à Prague, mais qu'il ne publia que bien plus tard dans ses *Progress Tabulen* en 1620.
Au niveau des calculs, le passage par les logarithmes permet de remplacer les multiplications par des additions (et les divisions par des soustractions) puisque le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de chaque facteur, propriété traduite, en langage mathématique par la relation : $\ln(axb) = \ln a + \ln b$. Lorsque les nombres sont représentés par des segments, sur une échelle logarithmique, la relation précédente conduit à une addition de longueurs. C'est ce principe qui est à l'origine de la règle à calculer. Cet outil de calcul, avec une réglette centrale coulissante fut imaginé, en 1657, par Seth Patridge. Nous l'avons bien connu et utilisé, il n'y a pas si longtemps, et l'avons abandonné, vers les années 1970, dès que l'usage de la calculatrice s'est généralisé.
À l'époque de Neper, on disposait en Europe, de l'algorithme de « multiplication musulmane » ou "per gelosia". La multiplication per gelosia venait d'Orient et plus précisément du mathématicien arabe Al Kasi au 15ème siècle. Voici au travers d'un exemple : 642 x 307, comment on s'organise pour employer cet algorithme de calcul :



- On prépare une grille de 3 x 3 cases (car chacun des facteurs est un nombre de 3 chiffres).
- On inscrit les deux facteurs sur les bords de la grille, l'un en haut, de gauche à droite, l'autre à droite, de haut en bas.
- Dans les cases, on écrit les produits partiels en faisant appel à son répertoire mémorisé de multiples. On additionne les nombres des demi-cases, partagées par leurs diagonales en commençant par la droite. S'il y a une retenue, on note le chiffre des unités et l'on transfère celui des dizaines dans la diagonale de gauche.
- Le produit est le nombre formé par les chiffres en gras, d'où 642 x 307 = 197094

1 Voir *Math-Ecole* 194 (octobre 2000, pp. 24 - 31), l'article de Lucia Grugnetti : *Histoire des mathématiques en Suisse.*

Au vu de ses avantages et de sa simplicité, cet algorithme revient à la mode actuellement comme alternative à la «multiplication en colonnes». Il figure, en particulier, dans les moyens d'enseignement romands «Mathématiques 4P»[2].

Les réglettes de Neper

En 1617, Neper publie la *Rabdologia*, ouvrage dans lequel il présente, entre autres, une méthode de calcul avec des réglettes pour réduire l'effort du calculateur dans les multiplications. Cette méthode sera en usage jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle.
Neper construit un dispositif qui permet de simplifier encore plus l'algorithme de multiplication. En effet, si, par rapport à l'algorithme «en colonnes», la technique «per gelosia» affranchit son utilisateur des problèmes de retenues dans les produits partiels, elle demande à son utilisateur de connaître ses «livrets», c'est-à-dire d'avoir mémorisé les produits de la table de multiplication jusqu'à 9 x 9. Neper a l'idée de disposer sur des réglettes les neuf premiers multiples des nombres de 1 à 9. De cette manière, l'utilisateur doit juste savoir effectuer des additions de nombres d'un seul chiffre, tirés des multiples inscrits sur les baguettes, sans faire appel à des résultats mémorisés. Cette technique de calcul sera beaucoup utilisée jusqu'au début du 19ème siècle.
Pratiquement, les réglettes de Neper se présentent sous la forme de bâtonnet ou prismes à bases carrées. Sur chacune de leurs faces latérales, on peut disposer, en haut, un nombre de 1 à 9 et, au-dessous et dans l'ordre, ses neuf premiers multiples, écrits avec le chiffre des dizaines dans la partie supérieure gauche et le chiffre des unités en bas à droite. Pour la face «0» on peut écrire des chiffres «0» ou laisser les cases vides. Une réglette supplémentaire indique le rang des multiples.

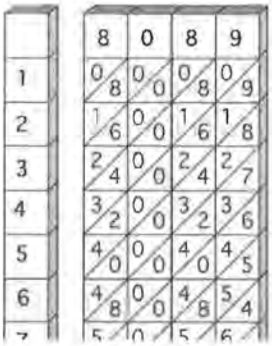
2 C. Danalet., J.-P. Dumas., C. Studer., F. Villars. *Mathématiques 4P.* (Thème 4. Livre du maître, p. 163 et 164) Corome, 1999.

Voici les réglettes de Neper dans une représentation où seule une face est remplie. (En utilisant toutes les faces des bâtonnets - avec des faces différentes pour une même réglette - on peut disposer de quatre faces «0», quatre faces «1», etc., ce qui sera utile pour

les multiplications où l'un des facteurs comprend plusieurs fois le même chiffre.)

Exemples d'utilisation
1) Calculer 295 x 7
On place côte à côte les réglettes «2», «9» et «5»
On repère la ligne «7» par la réglette des rangs des multiples.
On additionne en diagonales les chiffres repérés, en commençant par la droite:
5 devient le chiffre des unités,
3 + 3 = 6 donne le chiffre des dizaines,
6 + 4 = 10 donne «0» comme chiffre des centaines, avec une retenue de 1 pour la diagonale suivante,
1 + 1 = 2, donne le chiffre des milliers.
Résultat: 295 x 7 = 2065

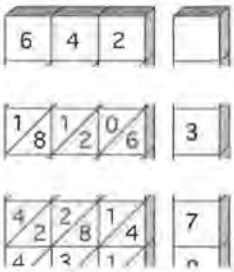
2) Calculer 6 x 8089



Le chiffre des unités est 4
5 + 8 = 13, je note 3 pour les dizaines et je retiens 1
1 + 4 + 0 = 5, chiffre des centaines
0 + 8 = 8, chiffre des milliers
4 est le chiffre des dizaines de milliers.

Résultat: 6 x 8089 = 48534

3) Calculer 37 x 642 =
La ligne «3» donne: 3 x 642 = 1926



La ligne «7» donne: 7 x 642 = 4494

Il faut rassembler ces deux résultats partiels en tenant compte que l'on a 3 dizaines et 7 unités: 19260 + 4494 = 23754
Une autre solution est de recopier les deux lignes en position adjacentes et constituer un tableau corrrespondant à l'algorithme «per gelosia». (Voir plus loin)

Utilisation des réglettes de Neper en classe

(Voici un extrait du compte rendu de deux de mes étudiants, Virginie Zwahlen et Nicolas Varin, sur une pratique des réglettes de Neper lors de leur stage dans une classe de 4e:

Le programme de mathématiques de 4P comporte un chapitre intitulé «Des problèmes pour connaître la multiplication». Une partie de ce thème prévoit d'aborder la technique dite «per gelosia», qui consiste à disposer les facteurs du produit, horizontalement et verticalement puis d'additionner, en diagonale, les cases avec les multiples correspondants.
Afin d'aborder cette nouvelle notion, nous avons décidé d'employer du matériel manipulable: les bâtons de Neper, une sorte d'ancienne calculatrice formée traditionnellement par des bâtons en bois.
Les bâtonnets de bois (20 x 2 x 2 cm) ont été découpés par les adultes, qui ont aussi tracé les diagonales et les différents traits présents sur le matériel. Les enfants se sont contentés d'inscrire les différents multiples, tout d'abord au crayon de papier, et, après vérification, ils ont pu écrire au propre par-dessus.
Ensuite, nous avons expliqué aux enfants le principe des bâtons de Neper, qu'ils ont tout de suite compris. Par groupes de 4, ils pouvaient essayer librement toutes les multiplications qui leur venaient à l'esprit.
Pour terminer, les élèves ont pu appliquer la stratégie sur des fiches entraînant la technique «per gelosia», qui est similaire à celle employée avec le matériel conçu. Cela a permis aux enfants d'acquérir rapidement cette technique et de découvrir une alternative intéressante à la multiplication traditionnelle en colonne.

Voici le genre d'exercices proposés aux élèves. Ceux qui ont choisi les réglettes de Neper ont assemblé les bons bâtons, puis copié la ligne 8 et enfin appliqué l'algorithme expliqué ci-dessus. Les autres ont compris le système et utilisé leurs connaissances du calcul réfléchi et des livrets:

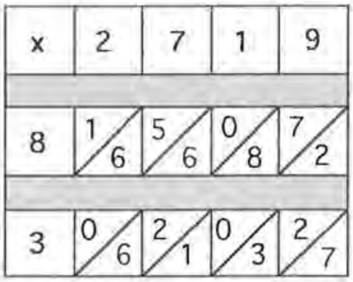
x	5	7	0	9
8	/	/	/	/

Donc
8x5709=______

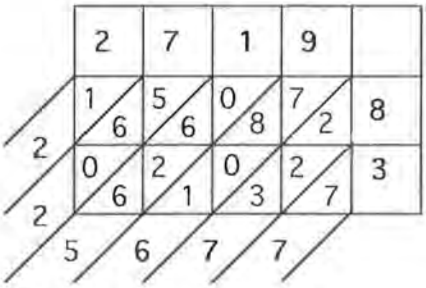
Réglettes de Neper et algorithme « per gelosia »

Effectuer le produit 83 x 2719 avec les réglettes de Neper et « per gelosia » :

avec les réglettes de Neper



« per gelosia »



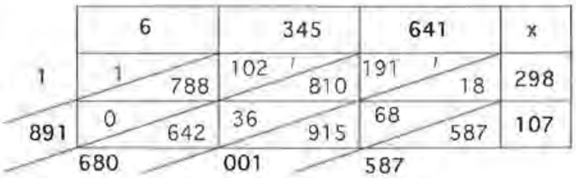
Voici la situation selon que l'élève prend l'option de calculer avec les réglettes de Neper ou avec la méthode « per gelosia ».

- S'il choisit « per gelosia », il appliquera la méthode comme le montre le tableau ci-dessus.
- S'il choisit les réglettes de Neper, il va sélectionner les bâtons 2, 7, 1, 9, puis recopier les lignes significatives 8 et 3. Que va-t-il faire ensuite ?
  - Il peut accoler ces deux lignes dans un tableau et se ramener à une situation qu'il connaît, à savoir la méthode « per gelosia ». Cette option est illustrée ci-dessus.
  - Par contre s'il prend l'option de traiter chaque ligne de manière indépendante, alors il obtiendra les deux résultats partiels suivants :
    8 x 2719 = 21752 et 3 x 2719 = 8157

  En prenant ce chemin, l'élève va devoir montrer qu'il a compris notre système de numération car il devra compléter son opération de la manière suivante :
  83 x 2719 = (80 x 2719) + (3 x 2719) = 217520 + 8157 = 225677

Calculatrice et algorithme « per gelosia »

Une extension astucieuse de la méthode « per gelosia » permet de calculer des produits de grands nombres donnant tous les chiffres du résultat alors que la calculatrice nous donne un résultat en notation scientifique dès que ce nombre compte plus de 12 chiffres.
Au lieu de prendre les deux facteurs chiffre par chiffre, on les découpe en tranches de trois chiffres. Les calculs intermédiaires sont plus simples : des multiplications de nombres de trois chiffres et des additions, faisables à la calculatrice, « per gelosia » ou « à la main ».
En voici un exemple :
Calculer 6345641 x 298107 =



On obtient ainsi :
6 345 641 x 298 107 = 1 891 680 001 587

Quelques remarques didactiques

Les réglettes de Neper ne sont pas un objet d'enseignement, mais un simple instrument de calcul qui a été largement utilisé à une certaine époque. Cet article n'a pas d'autre but que de montrer son intérêt historique, son fonctionnement et ses liens avec l'algorithme «per gelosia», comme enrichissement de la collection d'outils qui permettent d'effectuer des multiplications.

À ce propos, il faut rappeler que, en résolution de problème, c'est le choix de l'opération qui a la priorité absolue. Ce n'est que lorsque l'élève a identifié l'opération lui permettant d'arriver à la solution, lorsqu'il a déterminé quels sont les nombres à prendre en compte, qu'il peut passer à la phase de calcul et choisir l'instrument ou l'algorithme le plus adéquat: la calculatrice, l'algorithme «classique» de la multiplication «en colonne», la méthode «per gelosia», ou d'autres algorithmes personnels.

Les réglettes de Neper ne vont pas entrer en concurrence avec les autres méthodes mais, au cas où on les introduirait, comme curiosité technique, on peut y voir des liens avec les précédents.

- Il s'agit d'une «machine» au même titre que la calculatrice, pratique pour les multiplications dont un des facteurs a un seul chiffre : plutôt que de presser, sur le clavier, les touches correspondant au facteur de plusieurs chiffres, on dispose les réglettes, dans le même ordre; plutôt que de presser la touche «x» et celle du deuxième facteur, on observe la ligne correspondante sur les réglettes. La différence est dans la lecture du résultat: immédiat sur la calculatrice après la touche «=», un peu plus délicat sur les baguettes car il demande des additions intermédiaires, de deux termes, avec d'éventuelles retenues. Dans un cas comme dans l'autre, on n'utilise pas son répertoire multiplicatif. C'est la « machine » qui le fournit. La nouveauté de la manipulation de ces réglettes et l'imaginaire de l'enfant font qu'il s'imagine posséder un outil de calcul vraiment performant.

- Le lien entre les réglettes de Neper et l'algorithme «per gelosia» a été mis en évidence dans un des paragraphes précédents: lorsque les deux facteurs ont plus d'un chiffre, il suffit de reporter les lignes des réglettes - qui correspondent aux chiffres du deuxième facteur - dans un tableau, à condition de respecter l'ordre des chiffres. Ce n'est pas un gain de temps pour qui a mémorisé ses «livrets», mais ça peut être un moyen de contrôle.
  Pour la lecture, il faudra effectuer une série d'additions de plus de deux termes, qui peut nécessiter des retenues.

- Les réglettes de Neper permettent de trouver les différentes lignes de l'algorithme traditionnel «en colonnes» qui sont des produits d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre. Ces résultats partiels demandent d'effectuer mentalement les retenues d'un produit sur l'autre dans l'algorithme traditionnel, avec les réglettes, tous les chiffres de tous les produits partiels apparaissent.
  (Dans le premier exemple d'utilisation des réglettes donné précédemment:
  295 x 7 = 2065, il n'y a des retenues que dans une des additions, 6 + 4; par l'algorithme traditionnel, il y en a entre les trois produits:

  5 x 7 = 35, je retiens 3 et je note 5,
  9 x 7 = 63, j'ajoute la retenue 3,
  j'obtiens 66, je note 6 et je retiens 6,
  2 x 7 = 14, j'ajoute la retenue 6, j'obtiens 20 et je note les deux chiffres car c'est le dernier produit.)

  La question du décalage des lignes ou de l'ajout de «0» reste une difficulté, dans un cas comme dans l'autre.

D'une manière générale, la réflexion sur le fonctionnement des réglettes est une bonne occasion de revoir les propriétés de notre système de numération, de se rendre compte qu'un répertoire multiplicatif mémorisé est encore plus économe en écriture et en temps et, finalement, de faire appel au calcul réfléchi pour justifier les résultats.

ÉVALUATION : AVEC DES BAGUETTES

Michel Brêchet

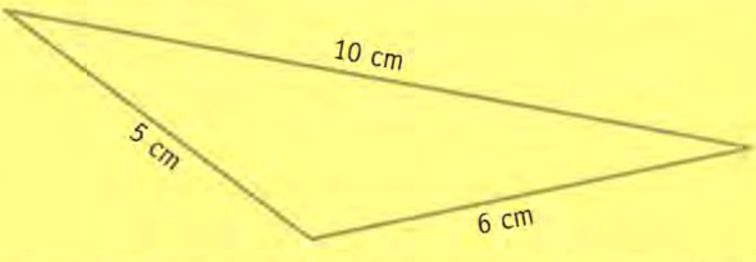
La dernière génération des moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande, introduite dès 1997, n'a pas apporté de grandes modifications des contenus de nos programmes. Elle propose en revanche un modèle d'apprentissage « socio-constructiviste » qui accorde une place importante à la résolution de problèmes. Une telle évolution suscite chez bon nombre d'enseignants des remises en question. Une interrogation parmi d'autres revient fréquemment : quels outils et démarches d'évaluation mettre en œuvre pour être en cohérence avec les situations d'enseignement quotidiennes, mais aussi en adéquation avec les pratiques cantonales en vigueur et les objectifs des plans d'études, ceux-ci n'étant pas harmonisés pour l'instant à l'échelle romande ? L'évaluation a toujours représenté un seuil crucial dans l'évolution d'une innovation pédagogique. En tous les cas, les changements sont ralentis si les pratiques évaluatives habituelles n'évoluent pas.

Math-Ecole est sensible à ce problème délicat et, dès ce numéro, ouvre une rubrique « Évaluation » où les lecteurs sont invités à apporter leur contribution. Ils pourront par exemple rendre compte d'activités vécues en classe, livrer des réflexions, proposer des grilles d'évaluation, ou pourquoi pas des textes de référence. Pour ouvrir les feux, nous nous arrêtons sur le problème *Avec des baguettes*[1], sur lequel des élèves de degré 7 du Collège de Delémont, niveau[2] B, ont travaillé 60 minutes, en décembre 2003.

Avec des baguettes

Joseph a sur sa table cinq baguettes de 5, 6, 10, 11 et 15 cm de longueur. Il en choisit trois et les dispose en triangle.

Voici par exemple ce qu'il obtient avec les baguettes de 5, 6 et 10 cm de longueur :



Combien de triangles différents pourra-t-il former avec ses cinq baguettes ? Construis précisément chaque triangle.
Joseph voudrait également former un trapèze en utilisant quatre baguettes. Y arrivera-t-il ?
Note soigneusement ta démarche et tes observations.

1 *Avec des baguettes* est une adaptation du problème *Triangles* de la 2e épreuve du 7e Rallye mathématique transalpin, dont une analyse détaillée figure dans le deuxième volume des Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, (Siena 1999 – Neuchâtel 2000) : Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, L. Grugnetti, F. Jaquet, C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone (Eds), Università di Siena, IRDP Neuchâtel, 2001. (Voir p. 3 de couverture).

2 Dans le canton du Jura, les élèves de l'école secondaire sont répartis selon trois niveaux : A (40%), B (35%) et C (25%). Ceux qui obtiennent de bons résultats en mathématiques sont en niveau A. Concernant l'évaluation, les enseignants secondaires traduisent les compétences et les connaissances de leurs élèves par des notes allant de 1 à 6.

La compétence clé mobilisée par la résolution de ce problème est d'utiliser des propriétés des figures planes pour les représenter en vraie grandeur. Plus particulièrement, au plan mathématique, l'élève doit (ou devrait):

- construire des triangles à la règle et au compas;
- s'interroger sur l'existence d'un triangle dont la somme des longueurs de deux côtés est égale à la longueur du troisième côté (cas du «triangle aplati[3]»);
- établir, explicitement ou non, tous les triplets de mesures pouvant mener à une solution;
- connaître la propriété caractéristique d'un trapèze (quadrilatère ayant au moins une paire de côtés parallèles);
- s'interroger sur l'existence d'un trapèze donné par les mesures de ses côtés;
- imaginer puis mettre en œuvre une procédure de construction d'un trapèze.

En outre, on touche ici également à des compétences transversales dont le développement est ou devrait être une des priorités de notre action éducative quotidienne: la réflexion et l'organisation d'une recherche – la consigne n'induit pas la procédure à suivre et la situation est somme toute inhabituelle – ainsi que la communication d'une démarche et de résultats – par le biais d'un compte rendu reflétant le plus fidèlement possible les étapes franchies.

Une telle évaluation ne porte pas sur des contenus pour lesquels «apprendre par cœur» suffit pour réussir et se distancie donc des problèmes d'application de règles et de formules, qui fournissent une image fragmentée et atomisée des apprentissages faits par les élèves en classe, mais qui ne sont pas à exclure pour autant. Elle fait appel à l'esprit d'analyse, de synthèse, au jugement critique et procure ainsi une image globale du développement des compétences des élèves

Solutions du problème

Avec ses baguettes, Joseph peut former sept triangles dont les mesures des côtés (en cm) sont: (5; 6; 10); (5; 10; 11); (5; 11; 15); (6; 10; 11); (6; 10; 15); (6; 11; 15) et (10; 11; 15). Chacun des deux triplets (5; 6; 11) et (5; 10; 15) conduit à un alignement de trois points, car 5 + 6 = 11 et 5 + 10 = 15 ; par convention, nous admettrons qu'ils ne permettent pas de construire un triangle. Quant aux baguettes de longueurs 5, 6 et 15 cm, elles ne peuvent être les côtés d'un triangle, car 5 + 6 < 15.

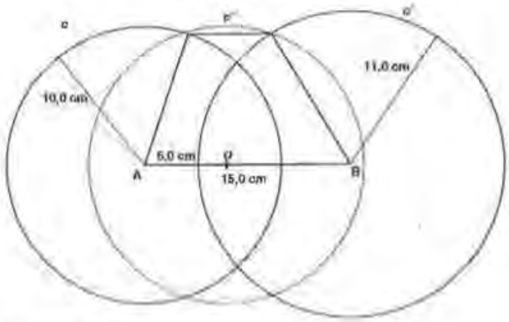
Onze trapèzes sont constructibles. Tous les cas à examiner figurent dans le tableau ci-dessous. Les cases grisées indiquent les mesures des côtés parallèles des trapèzes constructibles.

Longueurs des côtés (en cm)	Longueurs des côtés parallèles (en cm)					
5 – 6 – 10 – 11	5 – 6	5 – 10	5 – 11	6 – 10	6 – 11	10 – 11
5 – 6 – 10 – 15	5 – 6	5 – 10	5 – 15	6 – 10	6 – 15	10 – 15
5 – 6 – 11 – 15	5 – 6	5 – 11	5 – 15	6 – 11	6 – 15	11 – 15
5 – 10 – 11 – 15	5 – 10	5 – 11	5 – 15	10 – 11	10 – 15	11 – 15
6 – 10 – 11 – 15	6 – 10	6 – 11	6 – 15	10 – 11	10 – 15	11 – 15

3 Le cas du triangle aplati est longuement développé dans *Initiation au raisonnement déductif*, G. Arsac et al., Presses universitaires de Lyon, 1992

Examinons par exemple un programme de construction à l'aide des quatre plus longues baguettes (6, 10, 11 et 15 cm):

1. Tracer un segment AB de 15 cm.
2. Tracer le cercle c de 10 cm de rayon et de centre A ainsi que le cercle c' de 11 cm de rayon et de centre B.
3. Translater le cercle c parallèlement au segment AB, sur une longueur de 6 cm, pour obtenir le cercle c" de centre O.
4. Tracer le segment de 6 cm parallèle à AB dont les extrémités sont l'intersection des cercles c' et c" et un point du cercle c. Terminer ensuite la construction du trapèze.



À ce stade, il faut reconnaître que la construction d'un trapèze donné par les mesures de ses côtés est très complexe pour des élèves de 7e année. Dans la classe, personne n'y est parvenu. De rares élèves ont débuté selon la démarche ci-dessus, mais n'ont pas effectué de translation. En cas de nouvelle passation du problème, on pourrait ainsi se contenter d'écrire: «Joseph voudrait également former un quadrilatère en utilisant quatre baguettes. Y arrivera-t-il?» Cette tâche serait alors sans doute à la portée de bon nombre d'élèves.

Évaluation

Les critères d'évaluation étaient connus des élèves; ils ont en outre été explicités – au mieux – avant la recherche, en veillant toutefois à ne pas dévoiler la procédure à mettre en œuvre:

a) Présentation générale (soin, orthographe, mise en page...): 1 point
b) Clarté et rigueur de la démarche et des explications: 2 points
c) Qualité et précision des constructions géométriques: 2 points
d) Résultats obtenus (triangles: 5 points, trapèze: 2 points): 7 points
e) Appréciation personnelle du maître: 1 point

Pour la correction, ces critères ont été affinés. Concernant la clarté et la rigueur de la démarche et des explications, j'ai tenu compte de la présence ou non d'une liste de triplets de mesures, de l'examen des triangles aplatis et du cas (5; 6; 15), de l'indication des dimensions des triangles sur les dessins, de la description de la méthode de construction de chaque triangle... Concernant les résultats obtenus, j'ai attribué 1/2 point par cas analysé ou réalisé correctement (10 triangles → 5 points). Pour le trapèze, les tentatives de construction à la règle uniquement, avec le compas et la règle, les explications données... ont été la source de l'attribution de points. Pour l'appréciation globale, l'organisation de la recherche des triplets et les efforts d'explication ont été pris en considération. Mais tout cela est bien personnel et il y a fort à parier que des ajustement sont souhaitables.

De telles modalités d'évaluation clarifient dans une certaine mesure le contrat didactique, dans le sens où elles informent les élèves des attentes du maître. Mais tout n'est pas clair pour autant. Mettons-nous à la place des élèves. Quelles étapes et observations noter? Toutes, ou les plus significatives seulement? Et qu'est-ce qu'une étape significative? Quel est le degré précision exigé pour une construction géométrique et quelles traces faut-il laisser? ... On le voit, des négociations ou tout au moins des interactions entre le maître et les élèves sont nécessaires. D'autre part, certains des critères d'évaluation pris en compte ici ne sont pas entièrement dissociables. Il peut arriver qu'un élève soit doublement pénalisé ou contraire doublement récompensé. Par exemple, un élève...

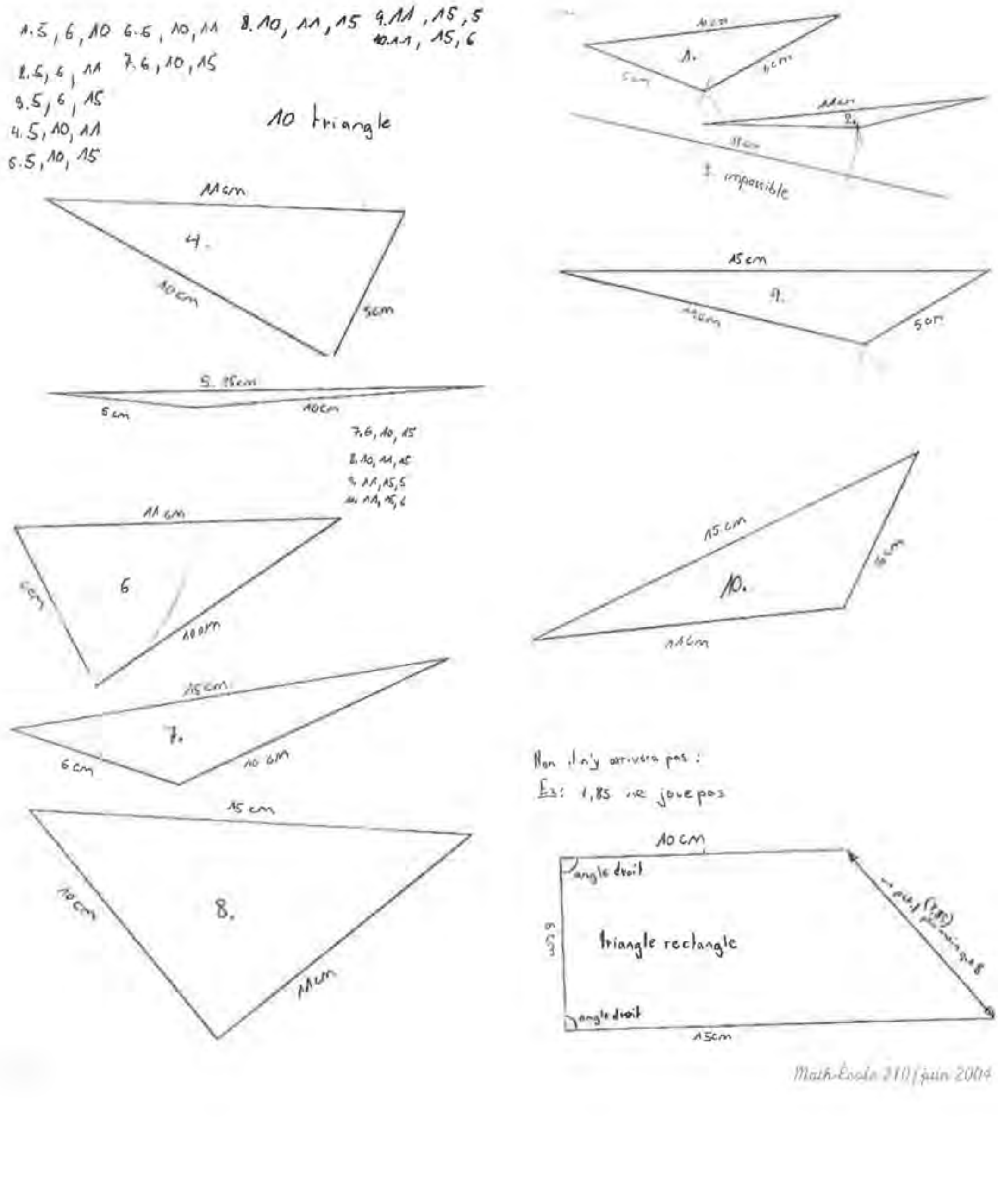
... qui n'écrit pas la liste des triplets pourrait être pénalisé à la partie b), mais aussi à la partie d), car il risque de ne pas trouver tous les triangles;

... qui recherche de manière organisée les triplets se verra attribuer des points aux parties b) et e); en outre, il est probable qu'il examinera tous les cas possibles, d'où des points supplémentaires à la partie d);

... qui explique les raisons pour lesquelles les triangles (5 ; 6 ; 11) et (5 ; 10 ; 15) ne sont pas constructibles recevra des points aux parties b) et d).

A titre d'exemples, voici trois travaux d'élèves accompagnés de leur évaluation. Ils permettront certainement de mieux percevoir les enjeux développés jusqu'à présent (pour des questions de mise en page, ils sont reproduits selon une échelle variable).

Travail 1



Evaluation

a) 1 point. Allure générale et mise en page tout à fait satisfaisantes.

b) 2 points. Le cheminement est clair; il peut aisément être reconstitué.

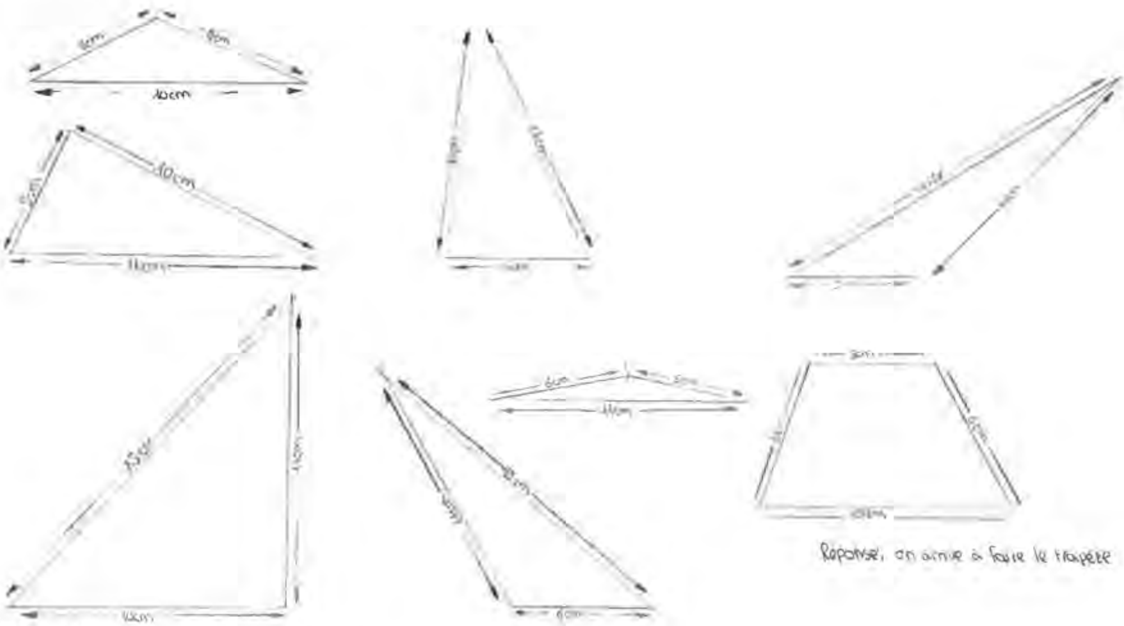
c) 2 points. Les constructions géométriques sont effectuées avec soin et précision.

d) 4 points pour les triangles. L'élève perd 1 point, car il montre par des constructions l'existence des triangles (5; 6;11) et (5; 10; 15), ce qui est erroné.
1 point pour le trapèze. Perte de 1 point donc, à cause de la seule prise en compte d'un trapèze rectangle dont trois côtés mesurent 15, 6 et 10 cm.

e) 1/2 point, pour la recherche organisée des triplets.

Total: 10,5 points

Travail 2



Evaluation

a) 1 point. La présentation est tout à fait satisfaisante.

b) 1/2 point. Seules les mesures des côtés des triangles sont indiquées. La recherche des triangles constructibles a probablement été menée aléatoirement.

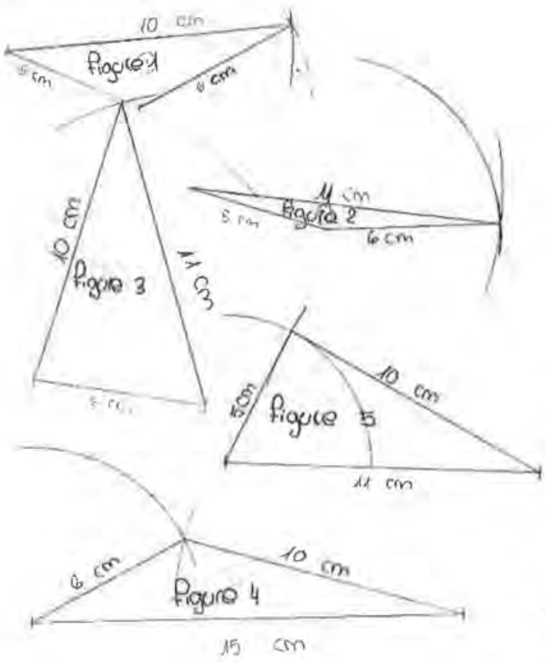
c) 2 points. Les constructions géométriques sont effectuées avec soin et précision.

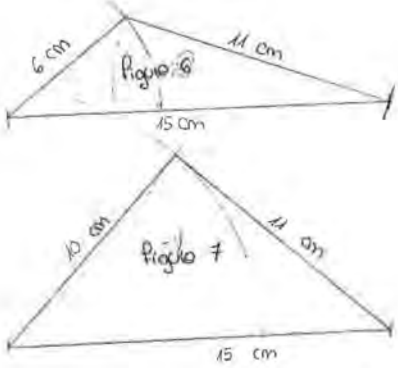
d) 3 points pour les triangles. L'élève perd 2 points: il montre par une construction l'existence du triangle (5; 6;11) et n'aborde nulle part les cas (5; 6; 15), (5; 10; 15) et (6; 10; 15).
Aucun point pour le trapèze: la construction ne respecte pas les conditions de l'énoncé; le trapèze n'est pas isocèle comme on pourrait le penser à la lecture des mesures des côtés; aucune trace de constructions ne figure sur la feuille.

e) Aucun point.

Total: 6,5 points

Travail 3





Ma démarche: Réponse: On peut faire 7 triangles.
- Au début, j'ai reproduit la figure donnée. Après j'ai pris les nombres 5, 10 et 11 et j'ai essayé de faire un triangle. Après j'ai continué 5, 10 et 15 / 6, 10 et 11 / 6, 10 et 15 / 10, 11 et 15. J'ai regardé si ça marchait ou pas.

Mes observations:
- Si l'on additionne deux côtés du triangle et que la somme fait le même nombre que le troisième côté ça ne peut pas marcher
- On ne peut pas mettre deux côtés de la même longueur!

page 2

b) Réponse: On ne peux pas faire un trapèze avec les cinq baguettes. Parce qu'il n'y a pas deux baguettes de la même longueur

Evaluation

a) *1 point. Présentation adéquate et texte lisible.*
b) *2 points. Des explications concernant la démarche suivie figurent. Le cas des triangles aplatis est abordé. Malgré une réflexion correcte (impossibilité de réaliser un triangle dont la somme des mesures des petits côtés est égale à la mesure du grand côté), l'élève construit tout de même le triangle dont les côtés sont 5, 6 et 11 cm!*
c) *2 points. Les constructions géométriques sont précises et soignées.*
d) *3,5 points pour les triangles. L'élève perd 1,5 point car il construit le triangle (5; 6;11) et n'aborde pas les cas (5; 6; 15), et (5; 11; 15).*
Aucun point pour le trapèze, car la recherche a été menée en référence au trapèze isocèle uniquement.
e) *1/2 point, pour l'effort d'explicitation.*

Total: 9 points

Synthèse des résultats

Selon ces modalités de correction, les 19 élèves de la classe ont obtenu les résultats suivants :

Nombre de points	12	11,5	11	10,5	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7	6,5	6
Nombre d'élèves	0	0	2	1	1	6	2	1	1	1	1	3	0

Une des questions cruciales qui se pose est de savoir comment caractériser la réussite à ce problème – ou à toute autre épreuve – à l'aide d'une échelle ordinaire. Dit autrement, comment déterminer le nombre de points qu'un élève doit obtenir pour avoir une note suffisante, ou pour avoir la note 5 par exemple ? La fixation de tels seuils peut reposer sur des bases scientifiques lors de la passation d'une épreuve étalonnée, c'est-à-dire une épreuve qui a été soumise à un échantillonnage significatif d'élèves et suivie d'une analyse élaborée des réponses données. Mais dans le cas qui nous intéresse, autant dire que les seuils ont été établis en référence aux résultats de l'ensemble des élèves de la classe, à savoir selon une norme et non selon des critères. Ainsi, arbitrairement j'en conviens et peut-être un peu généreusement, les élèves ont obtenu la note 4 avec 7 points, la note 5 avec 9 points et la note 6 avec 11 points.

Arrivé au terme de ce premier épisode, il convient encore de souligner qu'une évaluation centrée sur la résolution d'un problème s'inscrit immanquablement dans un registre plus aléatoire qu'une pratique traditionnelle. En effet, elle n'est pas organisée dans l'optique d'une corrélation étroite avec la matière abordée en classe et laisse en conséquence aux élèves un espace de liberté pour l'exploration personnelle et le tâtonnement. C'est là un de ses intérêts indéniables.

suite de la page 13

6. (210, p. 25) *La somme des aires de tous les triangles dont les sommets sont aussi les sommets d'un cube 1 sur 1 sur 1 est $m + \sqrt{n} + \sqrt{p}$ où m, n et p sont des entiers. Trouver $m + n + p$.*

Il y a 24 triangles isocèles rectangles (demi faces) distincts dont les mesures des côtés sont 1 ; 1 et $\sqrt{2}$, dans le cube. Leur aire totale est 12.
Il y a aussi 24 triangles rectangles dont les mesures des côtés sont 1 ; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (un côté est formé d'une arête, un autre d'une diagonale d'une face et le troisième d'une diagonale du cube). Leur aire totale est $24(\sqrt{2}/2) = 12\sqrt{2}$ ou $\sqrt{288}$.
Il y a enfin 8 triangles équilatéraux distincts, dont les côtés mesurent $\sqrt{2}$, formés par trois diagonales de faces. Leur aire totale est $8(2\sqrt{3}/4) = 4\sqrt{3} = \sqrt{48}$.
La somme des aires est $12 + \sqrt{288} + \sqrt{48}$ et la réponse demandée est $12 + 288 + 48 = 348$.

Commentaires : Comme dans le problème 2, la demande est formulée de manière à obtenir une réponse qui soit un nombre naturel. L'inventaire des triangles est un bonne activité sur le cube et le calcul des aires demande aussi de travailler en nombres réels et non avec des approximations décimales (douteuses) si chères à nos élèves. Niveau 9, et au-delà.

8. (210, p.25) *Dans une suite croissante de quatre entiers positifs, les trois premiers termes forment une progression arithmétique, les trois derniers termes forment une progression géométrique, et la différence entre le premier terme et le quatrième terme est 30. Déterminer la somme des quatre termes.*

Si l'on désigne par a, a + r et a + 2r (progression arithmétique de premier terme a et de raison r), les trois premiers nombres, la raison de la progression géométrique est (a + 2r)/(a + r) et le quatrième terme est :
$(a + 2r)(a + 2r)/(a + r) = (a + 2r)^2/(a + r)$.
La relation entre le premier et le dernier termes est :
$a + 30 = (a + 2r)^2/(a + r)$

suite en page 36

PAVAGE DE L'ESPACE 3D

Jean Bauer
Jean-Philippe Lebet

Dans cet article, nous examinons quelques solides qui pavent l'espace à 3 dimensions sans laisser de vides. A partir du réseau cubique bien connu de tous, nous en dérivons la paire tétraèdre-pyramide, ou ce qui revient au même le trio tétraèdre-tétraèdre-octaèdre pour aboutir à l'octaèdre tronqué.
Dans un article ultérieur, nous aboutirons au dodécaèdre rhombique et à d'autres solides de la même famille.

PAVAGE 3D DE CUBES

On voit bien qu'avec les cubes, il est trivial de paver l'espace. *(figure 1)*[1]
Plusieurs autres solides ont la même propriété. Certains se rencontrent en minéralogie, nous en étudions ici quelques uns.

Transformons le cube élémentaire C_1 en le coupant par 4 plans passant chacun par 3 sommets de manière à délimiter les 4 faces d'un tétraèdre régulier T_1. L'un de ces plans est visualisé en rouge. *(figures 2 et 3)*

Le volume du cube correspond à la somme du volume des 4 tétraèdres «aplatis» (qui s'assemblent en une pyramide à base carrée P_1) et du volume du tétraèdre central T_1. *(figure 4)*

Les 4 tétraèdres aplatis forment bien une pyramide P_1 *(figure 5)*

Le cube C_1 se transforme ainsi en une pyramide P_1 et un tétraèdre T_1 *(figure 6)*

Montrons géométriquement, d'une manière élégante, le rapport entre T_1 et P_1:

Comme cette pyramide P_2 a des arêtes de dimensions doubles, elle a un volume de $8P_1$. *(figure 7)*

D'autre part elle contient $4T_1$ et $6P_1$. Ceci revient à dire que le volume T_1 est la 1/2 du volume P_1. Et donc aussi le 1/3 du volume du cube, puisque $T_1 + P_1$ forment le volume d'un cube C_1.

En réunissant 2 pyramides P_1 par leurs bases carrées on forme un octaèdre O_1. De ce qui précède on peut dire que le volume de O_1 vaut 4 fois le volume de T_1. *(figure 8)*

Dans les figures précédentes les solides T_1 et P_1 s'empilent sans laisser de vides, comme on le déduit des angles des faces. Il en va de même pour les solides T_1 et O_1. Nous appelons T_n, P_n, O_n, des solides dont l'arête vaut n fois celle de T_1, P_1, O_1 (n est un entier positif).
Par exemple on peut assez facilement démontrer les formules suivantes pour les volumes: (dont certaines ont déjà citées dans un article antérieur)*

$$V(T_n) = (n/3)\,(n^2 + 2)\,V(T_1) + (n/3)\,(n^2 - 1)\,V(P_1)$$

$$V(P_n) = (2n/3)\,(n^2 - 1)\,V(T_1) + (n/3)\,(2n^2 + 1)\,V(P_1)$$

En considérant des solides T_n, P_n, O_n, de plus en plus grands on est amené au passage à la limite suivant exprimant le rapport entre le nombre de T_1 et le nombre de P_1:

$$\frac{(n/3)\,(n^2 + 2)\,V(T_1)}{(n/3)\,(n^2 - 1)\,V(P_1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Et de même:

$$\frac{(2n/3)\,(n^2-1)\,V(T_1)}{(n/3)\,(2n^2+1)\,V(P_1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Ainsi il faut autant de T_1 que de P_1 pour remplir l'espace. Ces 2 types de solides sont complémentaires.

1 Les photos de cet article présentent des modèles réalisés avec le système Acrogames de TRIGAM.

* Math-Ecole N°168

A ce stade, il est légitime de se poser la question: peut-on trouver un solide autre que le cube qui conserve la propriété de remplir tout l'espace? (Bien entendu, il existe une infinité de parallélépipèdes qui satisfont cette propriété, mais on peut en trouver d'autres tout aussi intéressants).Essayons de combiner les volumes de $T_1 + P_1$, ou un multiple de ceux-ci, en un seul solide qui conserve la propriété de remplir tout l'espace.

L'octaèdre O_3 est formé de 38 P_1 et 32 T_1, mais si on lui enlève une pyramide P_1 à chacun de ses 6 sommets, on obtient un octaèdre tronqué (au 1/3 de l'arête), il reste 32 P_1 et 32 T_1, ce qui est la proportion nécessaire. Le jeu OCTIX démontre que cet octaèdre, ainsi tronqué, remplit bien tout l'espace.

Attention: il ne suffit pas d'avoir cette proportion pour pouvoir remplir tout l'espace! Contre-exemple: T_4 tronqué de T_1 à chacun de ses 4 sommets (il contient bien 20 P_1 et 20 T_1, mais ne s'empile pas sans laisser de vides)

Octaèdre tronqué

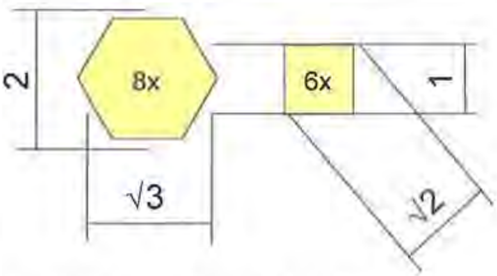
vue de dessus
vue de dessous
vue Est
vue Ouest

vue Nord
vue Sud

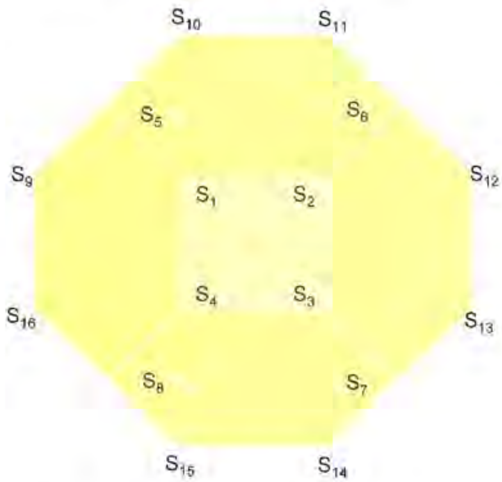
JEUX DE SOLIDES BASÉS SUR L'OCTAÈDRE TRONQUÉ.

Les professeurs de mathématiques trouveront ci-dessous, quelques idées qui les aideront à familiariser leurs élèves avec les relations de Pythagore dans l'espace.

Rappelons que l'octaèdre régulier tronqué au tiers de sa longueur d'arête est délimité par 6 facettes carrées et 8 hexagones réguliers . Toutes les arêtes ont donc la même longueur normalisée à 1.



L'octaèdre tronqué ainsi a donc toutes ses arêtes de même longueur. De plus, ses 24 sommets sont situés à égale distance du centre d'une sphère les reliant tous. Une autre caractéristique très intéressante est que la distance d'un sommet à n'importe quel autre est égale à $+\sqrt{A}$, A étant un entier entre 1 et 10, comme le montre le tableau plus loin.



Les sommets S_{19}-S_{24} sont ceux des coordonnées Z négatives

On considère 6 plans yz de coordonnées x:

$x = -\ 1.5$ pour S_9; S_{16}
$x = -\ 1$ pour S_5; S_8; S_{17}; S_{20}

$x = -\ 0.5$ pour $S_{10}; S_4; S_{10}; S_{15}; S_{21}; S_{24}$
$x = +\ 0.5$ pour $S_2; S_3; S_{11}; S_{14}; S_{22}; S_{23}$
$x = +\ 1$ pour $S_6; S_7; S_{18}; S_{19}$
$x = +\ 1.5$ pour $S_{12}; S_{13}$

On considère 6 plans xz de coordonnées y :

$y = -\ 1.5$ pour $S_{14}; S_{15}$
$y = -\ 1$ pour $S_7; S_8; S_{19}; S_{20}$
$y = -\ 0.5$ pour $S_3; S_4; S_{13}; S_{16}; S_{23}; S_{24}$
$y = +\ 0.5$ pour $S_1; S_2; S_9; S_{12}; S_{21}; S_{22}$
$y = +\ 1$ pour $S_5; S_6; S_{17}; S_{18}$
$y = +\ 1.5$ pour $S_{10}; S_{11}$

On considère 5 plans xy de coordonnées z :

$z = -\sqrt{2}$ pour S_{21} à S_{24}
$z = -\sqrt{2} / 2$ pour S_{17} à S_{20}
$z = 0$ pour S_9 à S_{16}
$z = +\sqrt{2} / 2$ pour S_5 à S_8
$z = +\sqrt{2}$ pour S_1 à S_4

Distance de
S_1 à $S_2; S_4; S_5 = \sqrt{1}$
S_1 à $S_3 = \sqrt{2}$
S_1 à $S_6; S_8; S_9; S_{10} = \sqrt{3}$
S_1 à $S_{11}; S_{16} = \sqrt{4}$
S_1 à $S_7; S_{17} = \sqrt{5}$
S_1 à $S_{12}; S_{15} = \sqrt{6}$
S_1 à $S_{13}; S_{14}; S_{18}; S_{20} = \sqrt{7}$
S_1 à $S_{21} = \sqrt{8}$
S_1 à $S_{19}; S_{22}; S_{24} = \sqrt{9}$
S_1 à $S_{23} = \sqrt{10}$

Ces distances se calculent à partir des coordonnées précédentes en réalisant les opérations:

$$(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2$$

et en en extrayant la racine. Ce solide pourra donc servir très concrètement à illustrer les relations de Pythagore dans l'espace !
En faisant pivoter doucement l'octaèdre tronqué sur l'un de ses axes de symétrie, on découvre successivement 4 directions d'empilement permettant:

1. Le montage de pyramides à base carrée :

à 0°

2. Le montage de pyramides à base rectangulaire :

à 35.264°

3. Le montage de tétraèdres aplatis :

à 54.736°

4. Le montage de tétraèdres :

ou de pyramides à base rhombique :

à 90°

Remarque :

Dans le cadre d'un cube, 3 directions d'empilement seulement sont à considérer et pas 4, comme ci-dessus.
Il en va de même pour le dodécaèdre rhombique de rapport d'axes $\sqrt{2} / 1$. Pour le dodécaèdre rhombique de rapport d'axes $\varphi / 1$ la situation est beaucoup plus complexe mais sort du cadre de notre article.

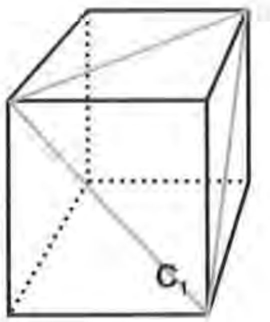


figure 2

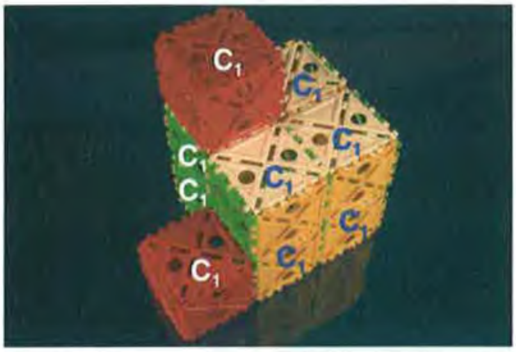


figure 1

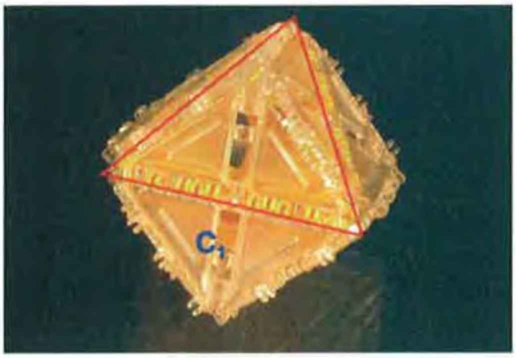


figure 3

figure 4

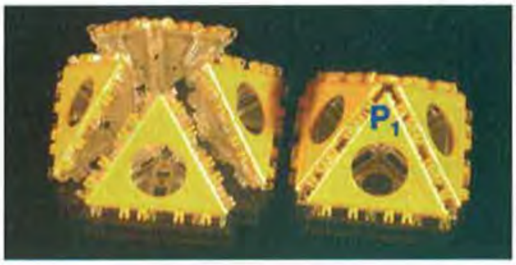


figure 5

figure 6

figure 7

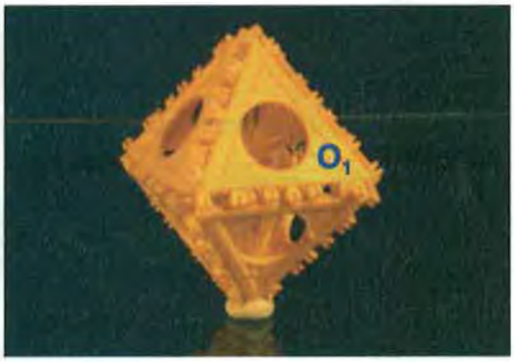


figure 8

figure 9

Nous avons développé un jeu **OCTIX**, véritable **TANGRAM à 3D**, qui illustre toutes ces possibilités d'assemblage. Il est composé de 6 pièces formées chacune de 2 à 5 octaèdres tronqués solidaires.

A B C D E F

Voici quelques configurations possibles:

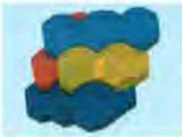

«pyramide» à base carrée


«octaèdres» à base carrée ou en losange


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre»


«demi-pyramide» à base carrée

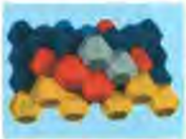

«octaèdres» à base carrée ou en losange


«demi-pyramide» à base rectangulaire


«pyramide» à base losange

Nous donnons également quelques configurations obtenues avec 2 jeux OCTIX:


«pyramide» à base carrée


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre» plat


«tétraèdre»


«octaèdres» à base carrée ou en losange


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre» plat


«tétraèdre» plat

Le jeu est en plastique injecté très agréable à manipuler et posant des énigmes bien illustrées. Vous pouvez vous le procurer auprès de
Trigam, www.trigam.ch - info@trigam.ch,
Neuchâtel CH, tél.032 7212838 au prix de CHF 12.–
ou le réaliser chez vous en carton, mais il y faut beaucoup de temps.

UN PROBLÈME RÉVÉLATEUR

Clara Bisso[1], Gênes

A Gênes, « petite » section de l'ARMT[2], 34 classes ont participé au Rallye en 2004 (dont seulement 9 de la « scuola media » (degrés 6 à 8). Par conséquent, les réponses au problème 10 de la première épreuve du 12e RMT, Le champagne de minuit (cat.5,6,7,8), constituent un échantillon restreint, mais très significatif pour l'histoire de la section génoise.
En fait, lors de notre première participation au Rallye, en 2001 notre équipe de correcteurs avait relevé des difficultés de résolution dans les travaux d'élèves concernant le domaine de la combinatoire :
Par exemple, le problème[3] Bar du parc, de la deuxième épreuve du 9e RMT, dont l'énoncé suit, n'avait été résolu correctement que par une classe sur 12.

BAR DU PARC (Cat. 3, 4)

Au Bar du Parc, Jules prépare des jus de fruits. Il a quatre sortes de fruits : des ananas, des oranges, des kiwis, des bananes.

Anne a choisi un jus « orange-ananas »,
Bertrand a choisi un jus « orange »,
Caroline a choisi le mélange des « quatre sortes de fruits », et il y a encore beaucoup d'autres choix possibles.
Avec ses quatre sortes de fruits, combien de jus de fruits différents Jules peut-il préparer pour ses clients? Indiquez lesquels.

Sur les 12 copies corrigées, huit avaient obtenu « 1 point », deux « 2 points » une « 3 points » et une seule « 4 points »[4].
C'était le cas le plus flagrant, mais d'autres problèmes où intervenait la combinatoire (par exemple : *Les brochettes* (cat. 5, 6) et (7, 8) de la première épreuve) faisaient aussi apparaître des procédures de résolution tout à fait incomplètes.
Durant l'analyse a posteriori, les correcteurs avaient relevé que la majeure partie des travaux d'élèves présentaient des combinaisons qui n'étaient pas issues d'une recherche organisée mais étaient plutôt le fruit d'essais aléatoires qui n'arrivaient pas à prendre en compte tous les cas possibles. Ceci autant dans l'un que dans l'autre des degrés scolaires auxquels le problème avait été proposé. Le fait que la combinatoire n'occupait qu'un espace restreint dans la pratique didactique de notre réalité scolaire a été considéré comme l'une des causes importante de ces lacunes, lors de l'évaluation de ces résultats.
Depuis cette première expérience, nos classes ont soit participé aux éditions successives du Rallye, soit travaillé sur des problèmes lors des activités didactiques courantes, vu que le Rallye a été inséré dans les plans de l'offre de formation de plusieurs écoles. Trois ans après, les résultats obtenus dans le domaine de la combinatoire nous permettent de constater une évolution certaine, que nous attribuons à ces pratiques nouvelles.
En effet, le problème *Le champagne de minuit* a donné les résultats suivants, quatre « 1 point », trois « 2 points » trois « 3 points » et six « 4 points » ont été attribués aux 16 copies examinées.
Par rapport à la situation précédente, l'évolution des attributions de points est sensible et les stratégies de résolution intéressantes.

1 L'auteure est enseignante à l'école primaire (de la 1e à la 5e) à Gênes et responsable de la jeune section locale de l'ARMT.
2 Association du Rallye mathématique transalpin, fondée en 2001, qui compte actuellement 19 sections en Italie, Suisse romande, Tessin, France, Luxembourg et Israël.
3 Pour une analyse détaillé de ce problème, voir : Vernex. M. Problème « Bar du parc », analyse et utilisation en classe. In *Actes des rencontres internationales du RMT*, Parma 2001 et Torre delle Stelle 2002 (Voir p. 3 de couverture), et Vernex M. : 2001, *« Croisement » et « Bar du Parc », Création et utilisation de deux problèmes de mathématiques*, IRDP.
4 Avec le même barème d'attribution des points, sur 71 copies de Suisse romande, 29 avaient obtenu « 4 points »

Voici le problème :

LE CHAMPAGNE DE MINUIT (Cat. 5, 6, 7, 8)

16 personnes fêtent ensemble le Nouvel An. À minuit précise, chacun choquera son verre de champagne contre celui de tous les autres.
Combien de tintements de verres va-t-on entendre ?
Expliquez votre raisonnement.

L'analyse a priori prévoyait que, après avoir compris que chacun devait choquer son propre verre contre celui des 15 autres personnes, on pouvait arriver à la solution selon l'une des trois stratégies suivantes :

- Chercher une représentation adéquate qui permette de compter tous les tintements, ce qui est simple si on réduit le nombre de personnes à 3, 4 et 5, ...c'est-à-dire résoudre le problème pas à pas en partant de cas élémentaires, reporter les résultats dans un tableau, trouver l'opération nécessaire et l'étendre au cas de 16 personnes.
- Ou : adopter un raisonnement du genre : « s'il y a 16 personnes et que chacun doit choquer son verre contre celui des autres, il suffit de multiplier 16 par 15 et de diviser le produit par 2, sinon chaque tintement serait compté deux fois. Conclure qu'il y a (16x15)/2 = 120 tintements.
- Ou encore : dénombrer les tintements personne par personne : la première produit 15 chocs, la deuxième 14 nouveaux chocs, ... et calculer 15 + 14 + 13 + 12 + 11 ... + 1

Au cours de la correction, on a constaté que :

- aucun groupe d'élèves n'a opté pour la première stratégie prévue par l'analyse a priori ;
- ceux qui ont utilisé la deuxième stratégie n'ont souvent pas pris en compte la double valence de chaque tintement, (n'ont pas divisé par 2) même si ils ont produit des solutions graphiques originales (*Voir figure 1*, Cat. 7, dont la traduction du texte est : *Nous avons calculé le résultat en faisant : 1 personne trinque avec 15 personnes et vice-versa. Donc on a fait 15 x 16 = 240).*
- les groupes qui ont adopté la troisième stratégie ont obtenu les meilleurs résultats. On a relevé quelques petites erreurs de calcul dans la somme des tintements (15 + 14 + 13 + ...) et des modalités diverses dont le dessin avec des représentations variées ou des tableaux à double entrée. Exemple solution de la *figure 2*, Cat. 5, dont le texte dit ceci : *Explications : En faisant les visages, et en faisant correspondre une couleur à chacun (pour le tinte-*

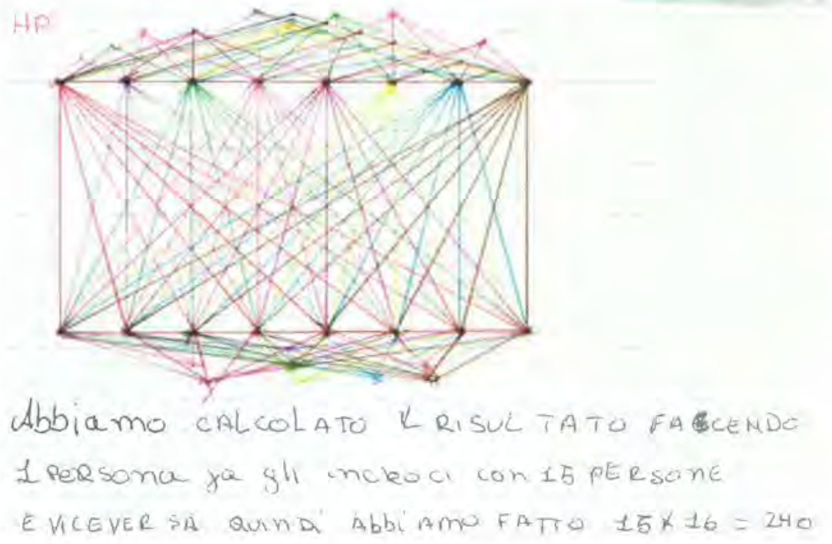


figure 1

ment), on a compté combien de tintements chacun fait et on les a additionnés. Autre exemple, à partir d'un tableau tout à fait analogue à celui de la *figure 3*, les élèves expliquent : *Chaque personne choque son propre verre avec celui des autres invités, ce qui fait 15 personnes. Une personne ne peut trinquer avec soi-même ni avec celles qui ont déjà trinqué avec elle. Par conséquent, en comptant sur le tableau, le nombre des tintements est 120.* (Cat. 7)

figure 2

- une copie (V. *figure 3*) fait apparaître une stratégie non prévue par l'analyse a priori, partant du calcul de l'aire du rectangle de dimensions 15 x 16 : *En cherchant l'aire de ce rectangle B x h) nous avons trouvé 240. Calculant que les croix occupant les espaces correspondant aux tintements entre les personnes (la moitié) nous avons divisé par 2240 et avons obtenu 120 (le nombre de tintements des verres)* (Cat. 6)

Toutes les copies témoignent, de la part des élèves qui ont résolu le problème, d'une amélioration des capacités à s'organiser dans la recherche de stratégies permettant un dénombrement le plus précis possible.

Pour de plus grands élèves, on pourrait trouver des développements didactiques intéressants de ce problème en introduisant par exemple les nombres triangulaires, puis, ensuite les factorielles, à la manière de l'ouvrage *Le démon des maths*[5].

5 H.M.Enzensberger *Le démon des maths* Ed. Seuil, 1998 (*Il mago dei numeri* Ed. Einaudi). Conte fantastique où un petit lutin s'introduit dans les rêves d'un enfant et lui fait découvrir des nombres particuliers par des pyramides, triangsympathique

figure 3

LA SEMAINE DE LA GÉOMÉTRIE DANS LES CLASSES GENEVOISES, PREMIER RETOUR

Jean-Pierre Bugnon, Pierre-Alain Cherix, Jean-Marie Delley, Laura Weiss

Pour mieux faire connaître l'enseignement des mathématiques aux différents acteurs concernés et rendre plus apparente la verticalité de cet enseignement, la Commission genevoise de l'Enseignement des Mathématiques (CEM) a proposé aux enseignants de mathématiques tous niveaux confondus une semaine de la géométrie qui s'est déroulée du 29 mars au 2 avril 2004. Le thème choisi était les pavages du plan.[1]

Répondant à cet appel, quelque 500 enseignants du primaire à l'université ont manifesté leur intérêt pour la démarche, impliquant ainsi environ 11'000 élèves dans une recherche autour des pavages. Parmi les classes participantes, on compte par exemple deux groupes d'étudiants de la FAPSE en licence mention enseignement (LME), un groupe d'étudiants de la section de mathématiques de l'université, près de 80 élèves de l'HES d'horticulture *(photo 4)*, ainsi que plusieurs classes du collège de Genève, de l'école de commerce, de l'école de culture générale (ECG) et de plusieurs collèges du cycle d'orientation (CO), et enfin près de 10'000 élèves de l'école primaire et enfantine *(photo 3)*...

La démarche proposée se voulait très ouverte. Sur le site http://hypo.ge.ch:8080/semainegeometrie, chaque enseignant pouvait choisir parmi les 16 activités proposées celles qui lui semblaient le mieux convenir à sa classe et à son enseignement. Selon sa convenance, il pouvait ainsi mettre l'accent sur un travail strictement mathématique ou plutôt profiter du thème choisi pour privilégier le côté artistique des pavages.

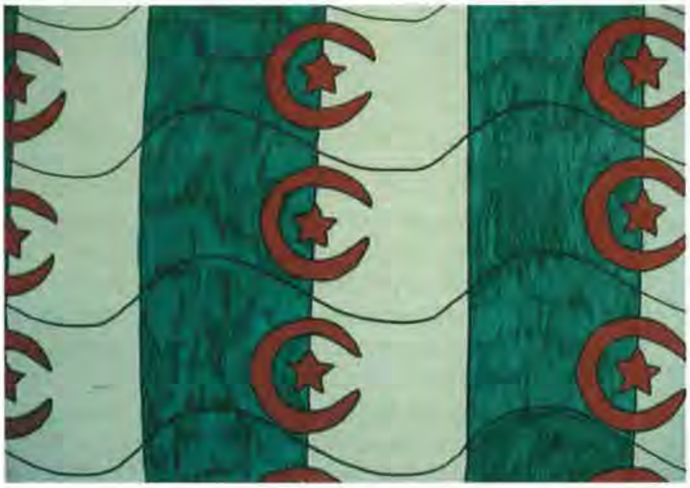


figure 1 et figure 2:
Deux sous-mains d'une classe de 7B du CO de Cayla

1 Voir Math-Ecole 210, pages 24 et 25

Quelques premiers échos de ce qui s'est passé dans certaines classes font état d'une satisfaction assez grande des enseignants par rapport à la semaine. Chez les plus petits, plusieurs enseignants avaient choisi de travailler avec les boîtes ASEN, suivant en cela une activité proposée sur le site. Il s'agissait de recouvrir sans trou ni recouvrement un grand carré avec les formes proposées. Si plusieurs enfants ont facilement compris la consigne et se sont lancés très vite dans la recherche de tous les recouvrements possibles avec les pièces mises à leur disposition, un enfant s'est contenté de placer trois rectangles sur le carré de base avant d'appeler la maîtresse pour montrer la jolie maison qu'il avait construite ! D'autres enfants avaient de la peine à sortir d'un recouvrement trouvé pour en chercher des différents. Mais tous ont absolument bien joué le jeu et finalement appris ce qu'est un recouvrement. Les maîtres ont ainsi pu travailler avec ces élèves sur les notions de formes géométriques, de résolution de problèmes, de validation des résultats, ...

Photo 3. Elèves d'une classe de 5P pendant la semaine de la géométrie.

Photo 4. Elèves d'une classe de la HES de Lullier (agronomie-horticulture).

Dans des classes du cycle d'orientation et du collège, l'utilisation des formes découpées dans des plaques d'aluminium a été un bon point de départ pour rechercher quelles figures géométriques pavent le plan. Ces formes avaient été construites par des enseignants de l'école d'enseignement technique (EET) qui, séduits par le projet, avaient accepté de mettre leur savoir faire à la disposition des participants à la semaine. Dans une classe de troisième année, niveau fort, du collège Claparède, les élèves se sont lancés dans la recherche des polygones réguliers qui pavent le plan, pour démontrer ensuite que seuls les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones répondent à la question. Dans une 7^{e}B du cycle d'orientation de Cayla, après avoir constaté que certaines figures pavent le plan et d'autres pas, les élèves ont par exemple trouvé comment paver le plan avec un quadrilatère concave, puis se sont concentrés sur les triangles et ont pu démontrer, grâce à leurs connaissances sur la somme des angles d'un triangle et les angles alternes internes, que tous les triangles pavent le plan. Ils ont ensuite vu comment modifier une figure géométrique simple pavant le plan (dans ce cas rectangle ou parallélogramme) pour construire par la « méthode de l'enveloppe » une figure plus compliquée (un chien, un poisson, ...) qui pave elle aussi le plan ![2] Ils ont ainsi pu dessiner et colorier un pavage original sur une feuille cartonnée et produire un sous-main personnalisé *(Voir figures 1 et 2)*

Lors de la semaine, les cinéastes du centre pédagogique de l'audiovisuel (CPAV) ont filmé plusieurs classes où les élèves étaient tour à tour carreleurs, architectes, artistes et surtout mathématiciens ! Dès que possible, en tant qu'organisatrice de la semaine, la CEM proposera aux participants de visionner quelques images pour découvrir ce qui s'est passé dans ces classes.

Dans un deuxième temps, un film sera produit par le CPAV, qui contiendra une présentation de la semaine de la géométrie et des séquences dans les classes des différents ordres d'enseignement ...

En marge du travail dans les classes, il s'agissait également de faire mieux connaître les mathématiques et leur enseignement auprès du grand public. Ceci a pu être réalisé au travers d'une collaboration avec la Tribune de Genève qui a publié une tribune libre du bureau de la CEM sur le sujet (voir http://hypo.ge.ch:8080/semainegeometrie/tribune_libre.html), ainsi que quelques anecdotes et « casse-tête » en lien avec les pavages (voir http://hypo.ge.ch:8080/semainegeometrie/problemes.html et anectodes.html).

Enfin, une conférence tous publics a été organisée le mardi soir 30 avril. Après que le mathématicien Stéphane Pin a rappelé aux auditeurs les principes des pavages et les 17 groupes de symétries associés, l'historien de l'art Stéphane Dubois dit Bonclaude a présenté des réalisations artistiques de pavages dans la décoration de bâtiments de lieux et d'époques très variés : carrelages de l'Alhambra, paroi intérieure d'une salle de spectacle à Dresde, nef d'une église autrichienne ; en suivant les explications du conférencier, on comprenait comment, à partir d'un quadrillage ou d'une trame en triangles équilatéraux, en modifiant ces formes de base très simples, les artistes de ces ouvrages ont pu faire naître des motifs répétitifs originaux.

2 Michel Brêchet, Le coin des pavages, in *Math-école* 207-208-209-210

suite de la page 25

Si l'on choisit de prendre le deuxième terme pour inconnue, a (dès lors les trois premiers termes de la suite sont $a - r$, a et $a + r$), l'expression du quatrième est un peu plus « légère » : $(a + r)^2/a$. L'équation devient :

$a - r + 30 = (a + r)^2/a$.

qui se simplifie et peut s'exprimer sous la forme :

$a = r^2/(3(10 - r))$

Puisque a - r, a et r sont entiers et positifs, un rapide contrôle montre que $r = 9$ est la seule valeur possible, ce qui fait que a = 27. La suite cherchée est donc 18 ; 27 ; 36 ; 48 (raison de la progression géométrique : 4/3). La réponse est 18 + 27 + 36 + 48 = 129.

Commentaires : Ici aussi, la recherche est intéressante car elle amène à une équation qui, bien qu'elle soit à deux inconnues, n'a qu'une solution dans l'ensemble des nombres naturels.

Remarque générale : Le concours *Annual American Invitational Mathematics Examination* est organisé dans de nombreux pays (pas en Suisse à notre connaissance). Il s'adresse à des étudiants de 16 à 18 ans qui ont trois heures pour résoudre 20 problèmes du genre de ceux qui sont présentés ici. Il apporte beaucoup d'idées nouvelles dans notre répertoire francophone de problèmes. Les énoncés sont très concis, le langage simple et les recherches font appel à l'ingéniosité et au bon sens, avec un minimum de savoirs formels.

[ndlr] La place nous manque dans ce numéro pour publier les nombreuses réponses reçues au problème *La forêt triangulaire* (pages 4 à 8 du numéro 210). Elles figureront dans notre numéro 212. En attendant, la rédaction de Math-Ecole reçoit toujours avec plaisir les solutions de ce beau problème.

UNE ÉVALUATION DES PROCÉDURES POUR UNE REMÉDIATION CIBLÉE

Michèle Vernex, Genève

Dans cet article, je vais tenter de montrer la nécessité d'évaluer une activité de résolution de problèmes en fonction des procédures proposées afin de pouvoir choisir des remédiations ou des développements optimaux. →

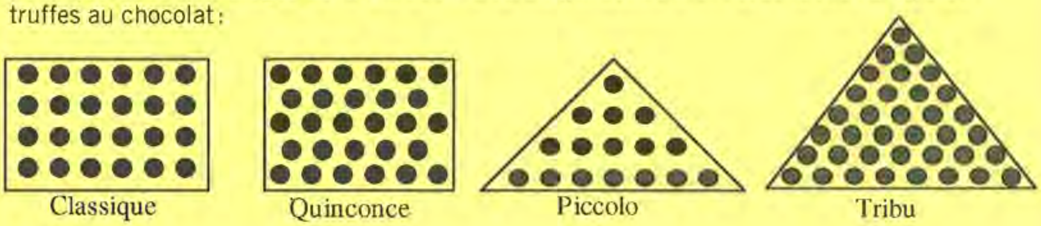
1. Un problème sur le thème de la proportionnalité

Il y a quelques années, j'avais travaillé en classe sur le problème « Décoration », tiré du 9e RMT, comme approche de la proportionnalité[1]. Ce problème s'était révélé un peu trop facile, car les élèves pouvaient le résoudre sans vraiment faire appel aux propriétés et aux opérations caractéristiques de la proportionnalité. Il a alors subi quelques transformations et est devenu « Truffes au chocolat ».

J'ai expérimenté en classe la version ci-dessous[2]:

Truffes au chocolat

Voici quelques emballages de la maison Truffardi, qui contiennent tous le même type de truffes au chocolat:



Et voici les étiquettes, indiquant le poids des truffes, à coller sur les emballages:

Mais elles sont mélangées et il en manque une. | 600 g | | 700 g | | 900 g |

Trouvez l'emballage pour lequel il n'y a pas d'étiquette. Et rédigez l'étiquette manquante. Expliquez comment vous avez trouvé.

Pour résoudre ce problème, il faut remarquer, qu'il y a deux « grandeurs » différentes: le nombre de truffes et les masses des boîtes, indiquées sur des étiquettes.
D'abord, il faut dénombrer le nombre de truffes contenues dans chaque boîte.
On obtient:

Classique	**Quinconce**
24	28
Piccolo	**Tribu**
16	36

Ensuite il faut se rendre compte que les valeurs des masses sont indiquées, mais qu'il en manque une! De plus, on ne sait pas à quelle boîte associer chaque étiquette, et par conséquent à quelle boîte correspond l'étiquette manquante.

C'est là que réside l'originalité du problème. Traditionnellement, dans la majorité des problèmes de proportionnalité, les correspondances sont données par l'énoncé[3].
Il faut donc associer les trois étiquettes - 600, 700 et 900 - à leur boîte -16, 24, 28, 36 -

1 Vernex M. 2001. Analyse et utilisation en classe du problème Décoration du 9e RMT. In *Math Ecole* 198

2 Il s'agit d'une première version issue des projets d'épreuve pour la finale du 11e RMT. La version définitive a vu encore une transformation des données : les poids (masses, pour le physicien) de 600, 700 et 900 grammes ont été remplacés par 540, 630 et 810 grammes.

3 Par exemple : Le contenu d'une boîte de 24 truffes pèse 600 grammes. Combien pèse le contenu d'une boîte de 28 truffes ? De 16 truffes ? De 36 truffes ?

puis émettre des hypothèses sur les correspondances et les vérifier.

La dernière étape consiste à rechercher le poids de la boîte de truffes qui n'a pas d'étiquette.

Pour ces deux dernières étapes, on se situe dans le champ de la proportionnalité[4] et les élèves peuvent procéder selon l'une des méthodes suivantes[5]:

a) Déterminer le «coefficient de proportionnalité»: calcul du poids d'une truffe, par essais et vérifications successifs:
   Le quotient «poids de la boîte / nombre de truffes» donne le poids d'une truffe (qui est de 25 g)
b) Utiliser la «propriété multiplicative» de la linéarité en passant par le calcul du nombre de truffes pour 100 g:
   Le quotient «nombre de truffes / poids de la boîte en centaines de grammes» donne le nombre de truffes pour 100 g (qui est de 4 truffes pour 100 g)
c) Utiliser «la propriété de différence» de la linéarité, selon laquelle «à des écarts égaux entre termes de la première suite correspondent des écarts égaux entre les termes correspondants de la de la seconde suite», ici, respectivement 4 et 100:

16	(20)	24	28	(32)	36	+4
....	(...)	600	700	(...)	900	+100

Quelle que soit la méthode utilisée, on obtient que la boîte Piccolo n'a pas d'étiquette et que son poids est de 400 g.

2. Expérimentation

Ce problème a été proposé à deux classes de 5e et deux de 6e primaire du canton de Genève; au total à 85 élèves. 29 d'entre eux ont trouvé le bon résultat; 3 ne sont pas entrés dans le problème qui leur était proposé. Ils se sont arrêtés au dénombrement des truffes. 2/3 des élèves testés rencontrent donc des difficultés face à ce problème de proportionnalité.

Dans cet article, les analyses des résultats ne tiendront pas compte de l'âge des élèves, l'intérêt résidant ici dans les différentes procédures proposées. C'est pourquoi chaque procédure différente sera généralement traitée comme celle d'un «élève – type». Le nombre d'élèves ayant proposé la procédure sera cependant noté s'il s'agit de plus d'un élève.

3. Analyse des procédures

J'ai répertorié 43 procédures différentes (voir annexe) que j'ai pu regrouper en trois groupes:

1. Procédures utilisant des règles de la proportionnalité
2. Procédures tentant d'établir une correspondance entre les 2 suites de nombres
3. Procédures utilisant des opérations sans contrôle de sens

3.1. Procédures utilisant des règles de la proportionnalité

Il faut noter que seuls les élèves utilisant les règles de la proportionnalité réussissent ce problème.

Quelques-uns[5] utilisent une division pour trouver le poids d'une truffe.

En ce qui concerne les élèves qui utilisent une multiplication pour trouver le coefficient de linéarité, (par exemple: J114, de l'annexe), on peut se demander s'ils seraient capables de trouver une solution à un problème comportant des nombres moins évidents, c'est-à-dire un rapport non entier entre les nombres ou une suite moins régulière dans les masses. Dans ce problème, le 4 apparaît facilement, par exemple, dans le rapport 36/9 et peut aider à trouver le facteur 25 qui lie 36 et 900.

Quant aux élèves qui utilisent les propriétés multiplicatives ou additives de la proportion-

4 Les problèmes de proportionnalité reposent sur l'existence de deux suites proportionnelles qui, d'un point de vue mathématique, sont du ressort de la fonction linéaire de type x –> kx.
En termes de vulgarisation, ceci revient à prendre le premier nombre et à lui faire correspondre un deuxième nombre, produit du premier par un nombre constant (désigné ici par k) appelé coefficient de linéarité ou de proportionnalité.
Une très grande majorité des problèmes de la scolarité obligatoire, dès les niveaux 4 et 5, sont de ce type: quantité – prix ou distance – durée.

5 Voir à ce propos: Jacquet, F. 2004. Raisonnement proportionnel et intuition, ou, la proportionnalité et ses pièges. *In Educazione matematica*, à paraître.
J111, J112, J113 et F111, 16 élèves en tout

nalité sans utiliser la division[6], ils auraient peut-être des difficultés à trouver le bon résultat dans le cas d'un problème comportant des nombres qui n'auraient pas un coefficient de linéarité entier.
On peut également se poser des questions à propos des élèves qui ont réussi sans vérifier toutes les possibilités.

Les élèves[7], qui échouent avec des procédures utilisant des règles de la proportionnalité, semblent avoir de la difficulté à passer de la multiplication à la division. On peut donc se demander si le concept de division est bien acquis: Est-ce que si A x B = C alors A = C : B est clair? Ceci peut expliquer l'abandon de l'élève F111.
L'élève F115 effectue des multiplications successives pour obtenir le poids donné en fonction du nombre de truffes. Il abandonne finalement suite à des erreurs de calcul. Pour ce qui est de l'élève F121, qui utilise les propriétés multiplicatives sans succès, on peut presque se demander s'il n'essaie pas de calculer pour calculer, ceci malgré le fait qu'il semble avoir une intuition de la notion de proportionnalité.

3.2. Procédures tentant d'établir une correspondance entre les deux suites de nombres

Dans cette catégorie, tous les élèves sont en échec. En effet, les élèves qui obtiennent une réponse correcte, comme J211[8], n'ont pas un raisonnement rigoureux: ils distribuent les poids en fonction du nombre de truffes en partant de la plus grande et «évaluent» le poids de Piccolo qui est, selon ce qu'ils écrivent *«beaucoup plus petite que la 600»*.
D'autre part, dans beaucoup de problèmes de 5e et 6e année primaire, les élèves sont amenés à généraliser et donc à établir des suites de nombres. Souvent cette suite est régulière et «sans trous», ce qui a pu conduire certains élèves à compléter la suite de nombres qui leur était proposée sans plus de vérification. Les élèves, qui partent sur cette voie, obtiennent le résultat 800 qui est le nombre manquant de la suite 600 – 700 – 900. 9 élèves,[9] utilisent cette procédure, même s'ils donnent ensuite des réponses différentes. Ils tombent alors dans le piège inévitable relevé lors de l'analyse du problème «Décoration»[10].
Les autres élèves-type[11] donnent les poids en fonction de l'ordre de lecture. Il n'y a pas, dans ce cas, de raisonnement mathématique.

3.3. Procédures utilisant des opérations sans contrôle de sens

Certains élèves rencontrent des difficultés dans la distribution des poids, c'est peut-être une des raisons qui les poussent à utiliser des opérations sans contrôle de leur sens. Ici nous rencontrons probablement des effets de contrat[12]. Les élèves effectuent des opérations avec les nombres donnés, car, en «maths» on calcule..., de plus, tous les nombres doivent être utilisés, toujours selon le contrat didactique.
Il faut noter que sous cette rubrique, on trouve assez souvent «16 x 2 = 32 et j'ajoute un zéro»[13]. Ces élèves viennent tous d'une même classe où, à l'époque, ils étaient en train d'apprendre des «règles» de calcul oral. Ils ont probablement appliqué à ce problème ce qu'ils venaient d'aborder en classe, ce qui est probablement encore lié à un effet de contrat.
On relève encore que certains élèves effectuent des opérations puis donnent des approximations pour les rapprocher des poids des boîtes de truffes. D'autres effectuent des additions ou des soustractions et donnent des réponses en fonction de leurs résultats.
On notera finalement que les élèves J311 et J331 obtiennent un résultat correct en effectuant des opérations (multiplication ou soustraction) et trouvent par hasard la bonne solution. Dans tous les cas de cette catégorie, on ne perçoit pas de cohérence dans les raisonnements.

6 J121, J122, J123, J131, J132, J133, J134, J135, 12 élèves en tout
7 F111, F112, F113, F114, 9 élèves en tout
8 3 élèves en tout
9 F216, F217, F221, F222 et F223, 13 élèves en tout
10 Vernex M. 2001. Ibidem, note 1
11 F221, F222 et F223
12 Selon Brousseau. G. 1990, Le contrat didactique : le milieu in RDM, Vol. 9, p. 309 à 336, Grenoble, La Pensée Sauvage
13 9 élèves en tout

4. Propositions de remédiation ou de développement

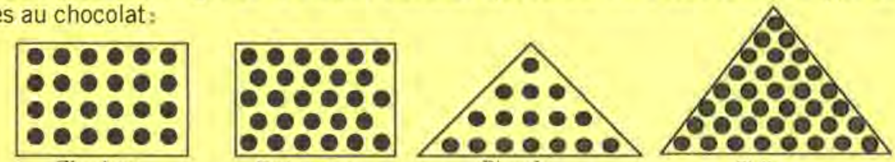
L'analyse des procédures utilisées par les élèves permet de proposer 4 remédiations ou développements différents.

4.1. Confrontation à des situations plus générales de la proportionnalité

Aux élèves qui semblent avoir compris la notion de proportionnalité[14], je proposerais le problème « Truffes au chocolat » tel qu'il a été proposé lors de la finale du 11e RMT, dont voici l'énoncé[15]:

Truffes au chocolat (Cat. 6, 7, 8)

Voici quelques emballages de la maison Truffardi, qui contiennent tous le même type de truffes au chocolat :



Classique Quinconce Piccolo Tribu

Et voici les étiquettes qui indiquent le poids des truffes, à coller sur les emballages :

540 g 630 g 900 g

Mais elles sont en désordre et il en manque une.

Trouvez l'emballage pour lequel il n'y a pas d'étiquette et indiquez son poids.

Par rapport à la précédente, cette version ne modifie que les valeurs de la variable didactique « masses » : 600, 700 et 900 deviennent respectivement 540, 630 et 810. Les élèves qui n'utilisaient que des « trucs » (ou « théorèmes en acte »[16]) qui fonctionnaient dans le cas « simple » du rapport entier, 25, devront passer à un niveau plus élevé de compréhension, par la nécessité d'expliciter les opérations permettant d'obtenir le nouveau rapport, non entier, 22,5.

Cela permettra de voir si tous ces élèves progressent dans la capacité de résolution d'un problème de proportionnalité de ce type ; spécialement les élèves qui utilisent des multiplications[17], des additions[18], ou la propriété des différences[19]. Cela me permettra peut-être également de savoir si les élèves qui ont donné peu d'explications sur leurs procédures[20] sont capables de mieux expliquer leur démarches.

14 Elèves J114, J121, J122, J123, J131, J132, J133, J134, et J135, 13 élèves en tout

15 suivi de son analyse de la tâche
- Constater qu'il y a deux types de grandeurs qui interviennent dans le problème: la quantité de truffes par boîte et la masse, et qu'il faudra établir une correspondance entre les nombres de truffes et les masses indiquées sur les étiquettes.
- Dénombrer les truffes dans les boîtes et ordonner ces quatre nombres: 16 - 24 - 28 - 36.
- Ordonner les trois étiquettes données, envisager (plus ou moins explicitement) les quatre hypothèses du placement de la quatrième:
  ? - 540 - 630 - 810 540 - ? - 630 - 810
  540 - 630 - ? - 810 540 - 630 - 810 ?
  puis, pour chacune de ces hypothèses, vérifier si la relation « nombre de truffes/poids » est « acceptable » (c'est-à-dire proportionnelle) pour trouver que la correspondance est 540 - 24; 630 - 28 et 810 - 36 qui donne pour chaque couple un facteur de 22,5 (540 : 24 = 630 : 28 = 810 : 36) pour les masses.
- En déduire que l'étiquette qui manque est celle de l'emballage de 16 truffes (Piccolo) et en calculer sa masse : 360 g (par multiplication par 22,5 ou par une autre procédure « pas à pas »).

16 Vergnaud G. 1991. La théorie des champs conceptuels in RDM, Vol. 10/23, 133-170, Grenoble, La Pensée Sauvage

17 J114, J123

18 J121

19 J131, J132, J133, J134, J135

20 J122

4.2. Reprise du problème « Truffes au chocolat » première version

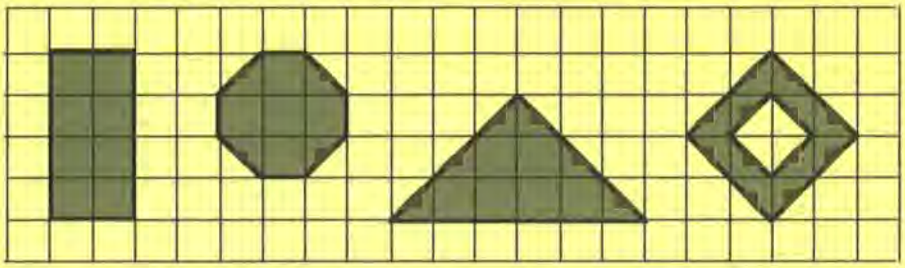
Avec les élèves[21] qui semblent avoir une intuition de la proportionnalité, je reprendrais le problème « Truffes au chocolat » - première version - et lors de mises en commun, je ferais apparaître et j'institutionnaliserais les règles de proportionnalité ainsi que les opérations que l'on peut utiliser pour résoudre ce type de problème.

Ensuite, pour vérifier leur compréhension de la notion, je leur proposerais la version définitive de « Truffes au chocolat ».

4.3. Construction du concept de proportionnalité

Avec les élèves qui semblent avoir besoin d'une reprise de l'enseignement de la proportionnalité[22], je proposerais le problème « Décoration » tiré du 9e RMT, dont voici l'énoncé[23]:

Décoration (Cat. 5, 6, 7)
Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur:
- 18 pots de rouge pour une des figures
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- des pots de noir pour la figure qui reste.

A la fin de son travail, tous les pots étaient vides.
Indiquez la couleur de chaque figure.
Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

Après avoir effectué les mises en commun nécessaires à la bonne compréhension de la notion, je demanderais de reprendre le problème « Truffes au chocolat » afin de « mesurer » l'effet de l'apprentissage.

Ici également, je ferais des mises en commun permettant d'expliciter les procédures utilisées pour résoudre ce problème. Ensuite je proposerais une institutionnalisation, dans laquelle apparaîtraient les propriétés des 2 suites : même rapport entre les termes ou propriété additive de la proportionnalité.
De plus, je soulignerais que plusieurs procédures permettent de trouver le résultat correct, ce qui permettra à chaque enfant de prendre celle qui lui convient.

4.4. Reprise du concept de multiplication / division

Avec les élèves qui semblent ne pas maîtriser le concept de division[24], je proposerais des problèmes tirés du manuel « Mathématique 5 P »[25]

21 F131, F132, 3 élèves en tout
22 Elèves F121, F131, F132, F211, F215, F216, F217, F221, F222, F223, ainsi que tous les élèves qui effectuent des opérations sans contrôle de sens
23 ibidem note 1
24 Elèves J114, F111, F112, F113, F114, F115
25 Chastellain M., Jaquet F. 2001. Mathématiques 5P COROME

du type «Moutons» (2 Thème 6), puis «Tableau» (5 Thème 6) afin de reprendre la notion ainsi que les problèmes divisifs. Ceci toujours avec des mises en commun pour que les élèves «réutilisent» ce qu'ils ont appris dans d'autres problèmes.

5. Conclusion

L'analyse des erreurs permet d'établir une «échelle» du niveau de compréhension du phénomène et donc une meilleure remédiation. Parmi les élèves, il y a ceux pour qui la notion de proportionnalité semble ne pas poser de problème, ceux qui «sentent» qu'il doit y avoir un rapport entre les nombres, sans pour autant pouvoir l'établir clairement, ceux qui par un effet de contrat utilisent les nombres et effectuent des opérations ou encore ceux qui utilisent les procédures de la dernière notion abordée en classe[26]. →

Il faut également souligner que le résultat seul ne renseigne pas sur la compréhension d'une notion. Un élève peut en effet trouver la bonne réponse avec un raisonnement erroné. Il est donc nécessaire de prendre parfois le temps d'analyser les productions des élèves avant de proposer une remédiation.
Lors de la remédiation, les mises en commun sont nécessaires. Elles permettent aux élèves de clarifier leurs démarches, aux élèves en difficulté de prendre à leur compte les procédures de leurs camarades qui leur parlent et enfin elles montrent qu'il n'y a pas qu'une seule façon de résoudre les problèmes.

26 Dumas J.-P., Jaquet F. 2001, Les tentations de la proportionnalité, In *Math Ecole* 198

ANNEXE

Relevés des procédures de résolution du problème «Truffes au chocolat» expérimenté dans sa première version (Point 1.)
Ces relevés sont codées par un nombre de trois chiffres précédé de la lettre J (réponse juste) ou F (réponse fausse ou abandon), suivi d'une parenthèse indiquant le nombre d'élèves ayant suivi la procédure et leur degré scolaire (5P ou 6P).
Les chiffres du code se réfèrent aux trois catégories de procédures analysées (point 3).
Pour chaque procédure, ont été relevées les opérations, dans l'ordre où elles apparaissent sur les copies des élèves, ainsi que les réponses.

1. Procédures utilisant des règles de proportionnalité

1.1. Recherche du coefficient de linéarité : recherche du poids d'une truffe

1.1.1. Réponse juste (17)

J111 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
600 : 24 = 25
900 : 24 = 37,5
700 : 24 = 29,16

600 : 28 = 21,428571
900 : 28 = 32,142851
700 : 28 = 25

600 : 16 = 37,5
900 : 16 = 56,25
700 : 16 = 43,75
aucun ne convient

600 : 36 = 16,66
900 : 36 = 25
700 : 36 = 19,4

Poids d'une truffe : 25 g
25 x 16 = 400
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J112 (8 ;6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
(600 : 16 = 37,5)
(700 : 24 = 29,16)
900 : 36 = 25
700 : 28 = 25
600 : 24 = 25
16 x 25 = 400 g
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO.

J113 (7 ;6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
900 : 36 = 25 g la truffe
25 x 16 = 400 g
25 x 28 = 700 g
25 x 24 = 600 g
36 x 25 = 900 g
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J114 (1 ;5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
24 truffes x 25 grammes = 600 g :
Classique (25 g la truffe)
28 truffes x 25 grammes = 700 grammes :
Quinconce (25 g la truffe)
16 x 25 = 400 grammes :
Piccolo (25 g la truffe)
36 truffes x 25 grammes = 900 :
Tribu (25 g la truffe)
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

1.1.1. Réponse fausse ou abandon (5)

F111 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
700 : 28 = 25
600 : 24 = 25
900 : 36 = 25
Classique : 24 / 600
Quinconce : 28 / 700
Tribu : 36 /900 Abandon

F112 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Une truffe vaut 25 g
Classique 24 x 25 = 600 g
Quinconce : 28 x 25 = 700 g
Tribu : 36 x 25 = 900 g
L'étiquette manquante est 600 pour PICCOLO

F113 (1 : 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
25 x 28 = 700 : Quinconce
36 x 25 = 900 : Tribu
25 x 24 = 600 : Classique Abandon

F114 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
24 x 25 = 600 : classique Abandon

F115 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600
24 x 2 = 48 ; 24 x 3 = 72 ; 24 x 4 = 96 ; 24 x 5 =
= 120 ; 24 x 7 = 168 ; 24 x 8 = 192 ; 26 x 6 = 144
24 + 48 + 72 + 96 + 120 + 144 + 168 = 672
672 – 48 = 624
624 – 24 = 600
Quinconce : 28 / 700 (Même procédure)
Tribu : Même procédure : abandon suite erreur de calcul
Piccolo : Même procédure : abandon Abandon

1.2. Utilisation de la propriété multiplicative de la proportionnalité : calcul du nombre de truffes pour 100 g

1.2.1. Réponse juste (6)

J121 (1 ;6 P)
4 truffes = 100 g
Classique :
100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 600 g
Quinconce :
100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 700 g
Piccolo : 100 + 100 + 100 + 100 = 400 g
Tribu : 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 +
100 + 100 = 900 g
L'étiquette manquante est 400 Pour PICCOLO

J122 (2 ;5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
4 truffes pour 100 g
Classique : 600
Quinconce : 700
Piccolo : 400
Tribu : 900
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J123 (3 ;5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique = 24 truffes : 600 g (6 x 4 = 24)
Quinconce = 28 truffes : 700 g (7 x 4 = 28)
Tribu = 36 truffes : 900 g (9 x 4 = 36)
Donc Piccolo = 16 : 400 g (4 x 4 = 16)
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

1.2.1. Réponse fausse ou abandon (1)

F121 (1 ; 6 P)
Classique : 24 / 600 g
Quinconce : 700 g (il y a une truffe en plus par colonne)
Piccolo : 550 g (3 truffes font 100 g)
Tribu : 900 g (4 truffes font 100 g)
L'étiquette manquante est 550 pour PICCOLO

1.3. Utilisation de la propriété additive de la proportionnalité : différence du nombre de truffes par boîte

1.3.1. Réponse juste (6)

J131 (2 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Entre 28 et 36 d'une part et 16 et 24 d'autre part il y a 8 truffes de différence. Quand il y a 8 truffes de différence, il y a 200 g.
Donc 900 – 200 = 700 et 600 – 200 = 400
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J132 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique 600 g et Quinconce 700 g.
Ils ont 4 truffes de différence et 100 g
600 g = 24 truffes
24 – 4 = 20 truffes = 500 g
500 g – 4 truffes = 400 g
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J133 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
C'est Tribu qui a le plus de truffes après c'est Quinconce, puis Classique et Piccolo
Classique et Quinconce ont 4 truffes de différence.
Classique et Piccolo en ont 8. Il a donc 400 g car il y a 100 grammes entre les deux premiers.
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

J134 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
4 chocolats = 100 g
8 chocolats = 200 g
Entre 24 et 28, il y a 4 chocolats et entre 600 g et 700 g il y a 100 g.
Entre 8 et 36, il y a 8 chocolats et entre 700 g et 900 g il y a 200 g
24 – 16 = 8, 600 – 200 = 400
L'étiquette manquante est 400 Pour PICCOLO

J135 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Piccolo et Tribu ont 8 de différence
Classique et Quinconce 4 de différence
Entre 16 et 24, il y a 8 de différence
Entre 24 et 28, il y a 4
Entre 28 et 36, il y a 8 de différence
600 / 24
700 / 28
900 / 36
De 600 à 700 il y a 4 de différence
Entre 700 et 900, il y a 8 de différence.
Donc 8 de différence a 200 g
Et 4 de différence a 100 g
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO.

1.2.1. Réponse fausse ou abandon (3)

F131 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Tribu : 36 / 900 g
Classique : 24 / 600 g (24 et 28 truffes / 600 g et 700 g)
Piccolo : 16 / 446 g
(2 x 16 = 32 et 32 + 4 = 36
450 + 450 = 900 g 450 – 4 = 446)
Quinconce 28 / 700 (proche de classique)
L'étiquette manquante est 446 pour PICCOLO

F132 (2 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Tribu : 36 / 900
Piccolo : 16 / 600
Classique 24 / 700
Quinconce : 28 / 750 car il y a une différence de 4
L'étiquette manquante est 750 pour QUINCONCE

2. Procédures tentant d'établir une correspondance entre les deux suites de nombres

2.1. En fonction du nombre de truffes

2.1.1. Réponse juste (3)

J211 (1 ; 5P , 2 ; 6P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Tribu : 36 / 900 (la plus grande)
Quinconce : 28 / 700 (la suivante)
Classique : 24 / 600 (la suivante)
Piccolo : 16 / 400 (beaucoup plus petite que la 600)
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

2.1.1. Réponse fausse ou abandon (17)

F211 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600 g
Quinconce : 28 / 700 g
Piccolo : 16
Tribu : 36 / 900 g
Abandon

F212 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600
Quinconce : 28 / 700
Piccolo : 16 / 500 g
Tribu : 36 / 900 g
L'étiquette manquante est 500 pour PICCOLO

F213 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600
Quinconce : 28 / 700
Tribu : 36 / 16
Le paquet Piccolo n'a pas d'étiquette
L'étiquette manquante est 200 pour PICCOLO

F214 (1 ; 5 P, 1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600
Quinconce : 28 / 700
Tribu : 36 / 900
Le paquet Piccolo n'a pas d'étiquette
L'étiquette manquante est 300 pour PICCOLO

F215 (1 ; 5 P, 1 ; 6 P)
Classique : 700 g
Quinconce :
Piccolo : 600 g
Tribu : 900 g
Abandon

F216 (5 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 700 g
Quinconce : 28 / 800 g
Piccolo : 16 / 600 g
Tribu : 36 / 900 g
L'étiquette manquante est 800 pour QUINCONCE

F217 (5 ; 5 P)
800 à mettre entre 700 et 900.
c'est l'étiquette manquante.
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
24 truffes / 700
28 truffes / 800
16 truffes / 600
36 truffes / 900
L'étiquette manquante est 600 pour CLASSIQUE

2.2 En fonction de l'ordre de lecture

2.2.1. Réponse fausse ou abandon (3)

F221 (1 ; 6 P)
Classique 600 g
Quinconce : 700 g
Piccolo ?
Tribu : 900 g
L'étiquette manquante est 800 pour PICCOLO

F222 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
900 ; 600 ; 700 : il manque 800.
900 : 36 = 25
600 : 24 = 25
800 : 16 = 50
700 : 28 = 25
L'étiquette manquante est 800 et appartient au PICCOLO

F223 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Tribu : 36 / 900
Piccolo : 15 / 600
Quinconce 28 / 700
Classique : 24 / 800
L'étiquette manquante est 800 et appartient à CLASSIQUE

3. Procédures utilisant des opérations sans contrôle de sens

3.1 Multiples / tables de multiplication

3.1.1. Réponse juste (1)

J311 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 / 600 (6 x 4 = 24)
Quinconce : 30 / 700 (6 x 5 = 30)
Piccolo : 16 / 400 (4 x 4 = 16)
Tribu : 36 / 900 (6 x 6 = 36)
L'étiquette manquante est 400 pour PICCOLO

3.1.1. Réponse fausse ou abandon (2)

F311 (1 ; 5 P)
Classique : 6 x 4 = 24 = 600 g
Quinconce : 4 x 7 = 28 = 700 g
Tribu : 8 x 8 = 64 = 900 g
Piccolo : 4 x 4 = 16 ; 16 + 16 = 320 g
L'étiquette manquante est 320 pour PICCOLO

F312 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique 24 (3 x 8 = 24) / 800 g
Quinconce : 28 (7 x 4 = 28) / 700 g
Piccolo : 16 / 600 g
Tribu : 36 (4 x 9 = 36) / 900 g
L'étiquette manquante est 800 pour CLASSIQUE

3.2 Approximation

3.2.1. Réponse fausse ou abandon (4)

F321 (2 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique : 24 ; 24 + 24 = 48 ; 600 g
Quinconce : 28 + 28 = 56 : 700 g
Piccolo : 16 + 16 = 32 ; j'ajoute un zéro : 320 g
Tribu : 39 + 39 = 78 ; 900 g
L'étiquette manquante est 320 pour PICCOLO

F322 (1 ; 6 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
24 x 24 = 576, arrondi = 600, Classique
28 x 28 = 784, arrondi = 700, Quinconce
36 x 36 = 1296, arrondi = 900, Tribu
16 x 16 = 256, arrondi = 200 pour Piccolo
L'étiquette manquante est 200 pour PICCOLO

F323 (1 ; 6 P)
Addition / multiplication et approximation
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Tribu : 36 / 700 (360 + 36= 720, donc 700)
Piccolo : 16 / 800 (16 x 50 = 800)
Quinconce : 28 / 900 (28 x 33 = 924, donc 900)
Classique : 24 Abandon

3.3 Additions / soustractions

3.3.1. Réponse juste (avec erreurs internes !) (2)

J331 (2 ; 5P)

Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Distribution des poids par ordre croissant
900 – 600 = 400
L'étiquette manquante est 400 et appartient à PICCOLO

3.3.1. Réponse fausse ou abandon (9)

F331 (1 ; 5 P)

Classique : 700
Quinconce : 900
Piccolo : 600
Reste Tribu : 900 – 600 = 300 g
L'étiquette manquante est 300 pour TRIBU

F332 (7 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
900 : Tribu
700 : Quinconce
600 : Classique
16 + 16 = 320 d'où 320 pour Piccolo
L'étiquette manquante est 320 pour PICCOLO

F333 (1 ;5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classique 600 g
Quinconce : 700 g
Piccolo : 500 g (600 + 900 = 1500; 1500 – 1000 = 500)
Tribu : 900 g
L'étiquette manquante est 500 pour PICCOLO

3.4. Multiplications / divisions

3.4.1. Réponse fausse ou abandon (3)

F341 (1 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
900 : Tribu
700 : Quinconce
600 : Classique
16 x 2 = 32 et j'ajoute un zéro d'où 320
L'étiquette manquante est 320 pour PICCOLO

F342 (2 ; 5 P)
Dénombrement des truffes de chaque boîte.
Classement par ordre croissant
16 x 16 = 232
L'étiquette manquante est 232 et appartient à PICCOLO

PISTES DIDACTIQUES POUR LA CONSTRUCTION DES RATIONNELS AU CYCLE 10/12

ÉQUIPE DE RECHERCHE COLLABORATIVE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Pierre Stegen
Centre interfacultaire de formation des Enseignants (CIFEN) de l'ULg
Département pédagogique de la Haute École de la Ville de Liège

Annick Sacré
Enseignement de Promotion sociale de la Ville de Liège

Un précédent article *(voir Math-Ecole 210)* a mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction des nombres décimaux. En de nombreuses occasions, des hypothèses explicatives ont été suggérées. Elles pointent des progressions didactiques qui ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles épistémologiques et didactiques liés à l'enseignement des décimaux.

L'objet de cet article est de préciser les fondements théoriques (didactiques et mathématiques) sur lesquels repose la progression didactique développée pour favoriser la construction des rationnels. Enfin, pour ne pas terminer un second article sans présenter d'activité, la troisième partie de cet article détaille l'activité : « la carte en trop pour faire 1 ».

Quels sont les obstacles didactiques et épistémologiques rencontrés dans l'enseignement des décimaux ?

Le tableau suivant détaille les hypothèses suggérées par les analyses d'erreurs commises par les élèves lors d'épreuves diagnostiques portant sur l'enseignement des décimaux.

Obstacles didactiques[1]	Obstacles épistémologiques
1. Partir des mesures de grandeurs pour introduire les décimaux? Bolon (1996) : *« L'usage des décimaux a été introduit, dans l'enseignement primaire, pour imposer un système unifié de mesures de grandeurs et en finir avec un système d'unités non décimales. L'usage des décimaux a été associé au système métrique en insistant sur les avantages qu'ils comportaient pour effectuer les opérations de conversion ».*	Comiti et Neyret (1979) mettent en évidence des liaisons possibles observées entre les erreurs commises par les élèves et ce mode d'introduction des décimaux : *« Les enfants utilisent des algorithmes qui sont pertinents pour certains décimaux (ceux de la vie quotidienne : les euros, les centimes, les kilomètres, les grammes...). Ils traitent les mètres d'un côté et les centimètres de l'autre, puis ils effectuent les conversions. Les conséquences de ces pratiques les conduisent à traiter séparément les parties entières et décimales et à poser que $0,3 \times 0,3 = 0,9$ (faux) ou que $0,3 \times 0,4 = 0,12$ (vrai) ».*

1 Les termes d'obstacles épistémologiques et didactiques ont été définis dans le précédent article.

2. Construire le concept de nombre décimal par analogie avec celui de nombre entier?

2.1. Du côté des élèves, l'enseignement des décimaux survient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entiers.

Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux décimaux. Elles ne peuvent être supprimées pour autant; elles sont donc sources d'instabilité pour les élèves:

Exemples:

- un entier est d'autant plus grand qu'il a un plus grand nombre de chiffres... ce qui entraîne souvent que plus il y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite... ce qui n'est pas toujours vrai.
- on peut fabriquer des collections de 1000 à 3000 objets développée dans le numéro de Mars/avril 2002 et les placer à côté de 3, 150, 765 objets et les comparer. Ce n'est pas vrai pour les décimaux: il est très difficile de fabriquer, en même temps, des objets dont les mesures seraient 13; 13,5; 13,05; 1,035. Les décimaux sont d'abord une construction mentale avant d'être une construction physique.

2.2. D'un autre côté, plutôt qu'aborder les obstacles liés à l'introduction des décimaux et aborder la question centrale du sens des décimaux, les enseignants préfèrent doter leurs élèves de trucs supposés leur permettre de se débrouiller avec ces nouveaux nombres.

Exemples:

Pour comparer '3,14' et '3,9', les enseignants suggèrent à leurs élèves d'ajouter un zéro à la droite de 9 dixièmes. Si l'élève ne comprend pas le pourquoi mathématique de cette consigne, il va la mémoriser ... et l'oublier très rapidement. Apprendre ce procédé sans pouvoir lui donner du sens ne lui permettra pas de reconnaître toutes les situations où ce «truc» est pertinent.

Construire les décimaux sur une analogie forte avec les naturels conduit les enseignants à laisser les élèves verbaliser les parties décimales comme s'il s'agissait de partie entières. Ainsi, 12,345 sera lu: «douze virgule 345» et 12,34: «douze virgule 34».

Ajouter des zéros inutiles aux parties décimales permet aux élèves d'étendre les règles de comparaison des nombres entiers aux décimaux. L'analyse des erreurs développées dans le numéro de Janvier/ février 2003 montre les limites de ce choix didactique. Ainsi, la partie décimale d'un nombre à virgule ne fonctionne pas de la même manière que la partie entière. En ce qui concerne le cas spécifique de l'ajout de zéros inutiles, on rappellera que, pour les entiers, ils se placent à la gauche du nombre... tandis que pour les nombres à virgule ils se placent à la droite de la partie décimale.

On trouve une autre illustration de la rupture entre les décimaux et les entiers dans l'oralisation des nombres décimaux: contrairement à ce que pensent de nombreux élèves, dans les deux nombres ci-contre, le chiffre 4 ne désigne pas tantôt le rang des centièmes, tantôt celui des dixièmes. Dans les deux expressions proposées, il représente le rang des centièmes.

Ermel (1997): une rupture essentielle entre

3. S'appuyer sur la droite numérique pour construire l'intercalation ou aborder la densité des décimaux

Bolon (1997) : « *En introduisant les décimaux par les codages de points sur une droite (ordre lexicographique), la comparaison de décimaux est facilitée ainsi que le principe d'intercalation indéfinie* ».
Toutefois, l'analyse des erreurs commises par les élèves dans le positionnement de nombres sur une droite montre que cet outil ne constitue pas toujours une aide pour les élèves. Une nouvelle fois, on constate qu'un outil introduit précocement pour permettre le repérage de grandeurs discrètes est transposé tel quel dans l'univers des grandeurs continues.

les naturels et les décimaux est marquée par les propriétés relatives à l'ordre sur ces nombres et donc à leur comparaison :

- L'idée de successeur n'a plus de sens. Un naturel a un successeur (après 7, il y a 8), alors que cette idée n'a plus de sens sur les décimaux (quel décimal vient après 2,75 ?).
- Les problèmes d'intercalation n'ont pas les mêmes solutions dans les naturels et les décimaux. Entre deux naturels, il y a un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux.

Quels axes de progression didactique ?

1. Partir des fractions pour enseigner les décimaux ?

La progression didactique proposée s'appuie sur les conclusions formulées par de nombreux didacticiens français (Brousseau, 1998 ; Douady, 1986 ; Brissiaud, 1998 ; Bolon, 1997), que l'on peut résumer ainsi : **éviter d'enseigner les décimaux au départ de mesures de grandeurs.** Les nombres décimaux ne doivent pas, dans l'esprit des élèves, être assimilés à une forme de recodage des mesures entières (exemples : 1,32 mètres c'est 132 centimètres ; 3,75 € c'est 375 centimes). Il convient plutôt d'enseigner les décimaux au départ de la notion de fraction décimale. Pour justifier ce principe, les didacticiens rappellent que les nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) ont été inventés pour permettre d'approcher le plus précisément possible n'importe quelle grandeur continue grâce à des fractionnements de plus en plus fins. «*Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc passer à côté de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent les inventer eux-mêmes*» (Brissiaud, 1998).

Partir des fractions pour enseigner les décimaux, c'est donc respecter le cheminement de l'histoire : comme le rappelle Bolon (1996), « *les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI-V^{e} siècle avant JC ; on date la naissance des décimaux quelque 20 siècles plus tard* ».

La filiation historique doit également être respectée au niveau de l'écriture. Ainsi, on commencera par présenter aux élèves des fractions en utilisant la barre de fraction comme système de notation puis en utilisant l'écriture à virgule de ces fractions décimales. L'écriture à virgule est, dans l'histoire des mathématiques, assez récente. « *Vouloir que des enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture (l'écriture décimale), alors qu'elle masque leur véri-*

table nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre-eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales. Ce parcours est, à notre sens, le seul qui puisse laisser un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels» (Brissiaud, 1998).

2. Favoriser la mise en place de dialectiques outil-objet

Poser comme choix didactique de partir des fractions décimales et de la notation fractionnaire pour aborder l'étude des décimaux n'est pas suffisant. Bon nombre d'erreurs des élèves peuvent être attribuées à une installation trop rapide de mécanismes ou de techniques au détriment d'un travail approfondi sur le sens.
Si, dans un premier temps, le recours à ces techniques peut donner l'illusion d'un apprentissage réussi, l'analyse des erreurs des élèves montre que les connaissances ainsi développées résistent mal à l'épreuve du temps ou aux changements de contexte. Trop souvent, ces techniques sont liées à des résolutions de problèmes spécifiques; l'enfant ne reconnaît pas d'autres situations dans lesquelles elles seraient également opératoires.

Dans de nombreux articles précédents, l'accent a été mis sur la dialectique outil-objet pour caractériser la manière dont se développent les connaissances mathématiques. Pour rappel, Douady (1986), distingue, pour chaque concept mathématique, son caractère «**outil**» et son caractère «**objet**». *«Par son caractère **outil**, nous entendons l'usage que l'enfant en fait pour résoudre un problème. Un concept prend d'abord son sens par son caractère outil. Par son caractère **objet**, nous entendons le concept mathématique considéré comme ayant sa place dans le savoir mathématique de référence à un moment donné de l'apprentissage* " (Douady, 1986).

Les activités d'apprentissage proposées dans la progression didactique ci-après ont pour objectif d'assurer la mise en place de dialectiques outil-objet; les situations-problèmes, les jeux, les défis posés permettent aux élèves, dans un premier temps, de rencontrer les rationnels dans leur statut d'outil. Dans un second temps, le recours au symbolisme mathématique pour formaliser le résultat des manipulations et la généralisation de leur portée permet de travailler le nombre pour lui-même, indépendamment de tout contexte et d'en faire un objet d'étude.

A titre d'exemple, au niveau de la découverte des fractions, nous avons déjà détaillé une progression élaborée par Rouche (1998). Elle a pour but de faire vivre aux élèves des situations de fractionnement les plus diversifiées possible. Elle comporte 4 étapes dont le rappel permet d'identifier les démarches d'apprentissage des fractions développées avant l'entrée au cycle10/12:

A. partager en parts égales des objets quelconques

Ces objets quelconques sont des objets pris dans la vie courante, comme un fil, une baguette, une tarte, une barre de chocolat, le contenu d'une boîte de biscuit, le contenu d'une bouteille, l'argent récolté lors de la vente d'objets, etc. Il importe de varier les objets de manière à développer un maximum de stratégies. Ainsi, pour partager un fil en deux, on peut le plier en deux et donner un coup de ciseau. Une telle technique sera inopérante s'il s'agit de partager une baguette. A ce moment, le choix d'un étalon (comme le fil dont nous venons de parler) pourra être très utile.
Comment partager en deux le contenu d'une bouteille? Un élève peut proposer le choix de deux verres identiques. Le contenu de la bou-

teille est alors réparti équitablement entre ces deux verres et l'équivalence des hauteurs permet de juger de l'équivalence des volumes. Les techniques de dénombrement seront bien utiles pour partager le contenu d'une boîte de biscuits.
Les différents objets à fractionner peuvent donc être considérés du point de vue de leur longueur, de leur volume, de leur poids ou de leur nombre, ce qui permet de faire des liens avec d'autres champs mathématiques.
Comme le montrent ces exemples, il ne s'agit pas de réduire les manipulations effectuées à des fractionnements d'objets. Au contraire, dès le départ, les élèves ont pour tâche d'effectuer des partitions d'une pluralité d'objets.

B partager en parts égales des objets standards

Cette deuxième étape constitue un pas vers une abstraction plus grande. Il s'agit ici de choisir des objets prototypiques, des représentants. De cette manière, on fait le choix de se dégager des caractéristiques particulières des objets à fractionner pour ne se préoccuper que des techniques du fractionnement.
Ainsi, la boule de plasticine remplacera avantageusement les partages d'objets pesants ou solides, tandis que des bâtonnets, par leur longueur, seront les représentants des partages de longueur. Les jetons, par leur caractère discret, permettront le partage de collections.

C. partager en parts égales des représentations dessinées

Un pas supplémentaire vers l'abstraction est à nouveau franchi. Il s'agit cette fois d'opérer non plus sur des objets concrets (naturels ou prototypiques) mais sur des représentations dessinées. C'est un passage décisif qui ne peut être opéré en une seule fois. En effet, tous les types de manipulations effectuées précédemment sont représentées à l'aide de dessins : les segments de droite permettent de fractionner des longueurs mais aussi des durées, les figures géométriques permettent de fractionner des aires. Des ensembles d'objets peuvent également être représentés par des dessins.

D. partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres

Dans ce cas, on ne fractionne plus des objets ou leur représentation mais leur mesure qui s'exprime à l'aide de nombres. Ces nombres s'écrivent avec des chiffres, dont le symbolisme est arbitraire ; il n'y a aucune ressemblance avec les objets auxquels ils renvoient. *« On travaille à ce moment avec des symboles purs, c'est-à-dire dont la signification est entièrement conventionnelle »* (Rouche, 1998).

Les trois premières étapes sont plus spécifiquement réservées aux cycles 5/8 et 8/10 ; elles permettent aux élèves de rencontrer, dans des contextes diversifiés, la notion de fraction dans son statut « outil ». Dès la fin du cycle 8/10 et au cycle 10/12, la quatrième étape permet d'assurer le difficile passage du concret à l'abstrait (de la notion de « ***fraction-outil*** » à la notion de « ***fraction-objet*** d'étude »). On notera également que la mise en place de cette progression n'est pas purement linéaire. Au contraire, elle est faite d'allers et retours entre les différentes étapes.

Un aspect intéressant de cette progression est le déséquilibre entre le nombre d'étapes abordant le concept de fraction dans son statut d'outil et l'unique étape où le statut objet est privilégié.

Pour être complet et pour diversifier au maximum les occasions de rencontres des fractions, les activités de partage se caractériseront aussi par le nombre de parts prélevées ; ainsi, partager en deux ou en trois parts équivalentes, ce n'est pas la même chose. Les fractionnements peuvent aussi se révéler plus ou moins complexes selon les caractéristiques des objets (ou collections) à fractionner. Ainsi, partager en deux une bandelette de papier ne pose pas de problème. cela s'avère plus difficile quand la consigne impose de la partager en trois. Par ailleurs, les objets présentent parfois des axes de symétrie qui facilitent les activités de fractionnement. Il y a donc lieu de diversifier la progression proposée en la croisant avec le nombre de parts prélevées.

→

3. Quelles activités pour concrétiser les axes de progression didactique?

Les différentes activités centrées sur la construction des nombres décimaux peuvent être organisées séquentiellement de la manière suivante:

Fraction « nombre mesure »	**Écriture fractionnaire**	**Écriture décimale**	
• Carré magique pour faire 1 • Carte en trop **(voir ci-après)**	• Comparaison de fractions à l'unité • Mesurer les pièces d'un tangram • Bande unité		• Sériation et comparaison de nombres à virgule

Construction de la droite numérique **(Mai/juin 2001)**

Fraction opérateur • Graduations • Bandes coloriées • Recettes • Tangram (agrandissement) • Pourcentages • Soldes		• Reconstitution de droites graduées • Feuille A3 • Construction de nombres décimaux • Rôle du zéro dans la numération de position	• Jeu de bataille avec des décimaux • Le tournoi des décimaux

• Trimino

Au centre de la progression, on trouve deux colonnes intitulées: «écriture fractionnaire» et «écriture décimale». La séquences d'activités «construction de la droite numérique» est centrale; elle permet d'assurer la jonction et l'équivalence entre les notations fractionnaires et décimales. Au terme de celles-ci, on retrouve des activités plus spécifiques de positionnement de nombres décimaux sur une droite numérique ou de comparaison de nombres décimaux; elles ont pour objet de stabiliser les connaissances des élèves et de favoriser la prise en compte des nombres décimaux en tant qu'objet d'études

A la gauche de la colonne «écriture fractionnaire», on retrouve une série d'activités privilégiant le développement du concept de fraction. La présence de cette colonne et le découpage des activités qui y sont reprises nécessitent quelques explications complémentaires. Comme le souligne Brissiaud (1998), une progression didactique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, cela fait quelques années qu'en France, des enseignants procèdent de la sorte (suite notamment aux travaux de Brousseau et de Douady) sans que les élèves conceptualisent mieux les décimaux. La raison en est simple: les élèves conceptualisent mal les décimaux parce qu'ils conceptualisent mal les fractions. L'origine de cette mauvaise conceptualisation est sans doute liée à une conception trop étroite de la notion de fraction. Trop souvent, celle-ci se réduit à l'idée du fractionnement d'une unité. Ainsi, trois quarts est vu comme le partage d'une unité en 4 parts égales dont on en prélève trois.

Cette colonne se subdivise en deux parties qui renvoient aux deux aspects complémentaires de la notion de fraction : celui de nombre-mesure et celui d'opérateur fractionnaire.

3.1 La fraction comme nombre-mesure

«*La fraction comme résultat d'une mesure apparaît souvent au travers de problèmes de partage dans lesquels l'unité doit être découpée en autant de parts égales qu'il y a de candidats*» (Maurin et Joshua, 1993).
Ainsi, par exemple, si trois tartelettes doivent être réparties entre 5 invités, on les partagera chacune en cinq parts égales (de manière à obtenir, pour chacune, des cinquièmes). Dans un second temps, ces cinquièmes sont répartis entre les 5 invités; chacun en reçoit 3 (soit trois cinquièmes). Dans ce cas précis, 3/5 constitue une mesure de la part de chacun avec pour «unité», le cinquième d'unité.

Cet exemple illustre une approche non conventionnelle de la fraction «trois cinquièmes». Contrairement à ce qui est souvent observé dans les classes, la notion de fraction «nombre-mesure» ne doit pas se construire uniquement sur des fractionnements d'unité mais bien également sur des collections d'objets prises comme unité. Brissiaud parle dans ce cas de «division partition d'une pluralité»; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité, mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction.

Au vu de ces exemples, la «fraction nombre mesure» trois cinquièmes peut donc être le résultat de deux opérations différentes:

- Une tartelette partagée en 5 portions équivalentes dont on considère la partie formée par 3 de ces portions (fractionnement d'une unité);
- 3 tartelettes partagées entre 5 personnes dont chacune reçoit l'équivalent de trois cinquièmes (partition de la pluralité).

Pour Brissiaud, il est essentiel de ne pas limiter le sens de la «fraction nombre-mesure» à celui d'un fractionnement d'une unité. Trois cinquièmes doivent aussi renvoyer à la division de trois par cinq. Dans cette perspective, la fraction devient un outil permettant de résoudre de façon satisfaisante des problèmes de partage d'entiers en n parts égales, que la division euclidienne ne parvient pas à résoudre sans qu'il y ait de reste. Comme le soulignent Maurin et Joshua (1993), « *pour partager 26 en 7 parts égales, la division euclidienne nous dit que chaque part doit comprendre 3 unités et qu'il reste 5 unités qui ne sont pas partagées. Les nombres entiers ne permettent pas de mieux faire. Si les nombres fractionnaires viennent au secours des nombres entiers, nous pourrons partager chaque unité restante en sept parts égales et, à l'issue du partage, chaque part sera alors composée de 3 unités et de 5/7 d'unité, ce qui s'écrit : 3 + 5/7* ».

On retiendra de cet exemple que les nombres fractionnaires permettent de définir une division exacte entre deux nombres entiers sans avoir à se préoccuper si le dividende est divisible ou non par le diviseur ; 5 : 3 peut alors s'écrire sous la forme de 5/3.

Pour Brissiaud, les pratiques didactiques rencontrées dans les classes ne favorisent pas la compréhension, par les élèves, de cette caractéristique de l'écriture fractionnaire. Si on demande à ces derniers d'inventer un problème habillant l'opération « 11 : 4 », il est vraisemblable que leurs propositions renverront à la partition d'une totalité et non d'une pluralité ; 4 objets d'un même prix valent 11€, quelle est la valeur d'un objet ? Ses recherches montrent que jamais un élève ne proposera un problème du type : 11 personnes mangent chacune un quart de pizza. Quel est le nombre de pizzas nécessaires ? Les élèves ne savent pas que pour rechercher la partie entière de 11/4, il suffit de diviser 11 par 4. Il ne faut donc pas s'étonner, de constater que de nombreux élèves de fin de 6P soient incapables d'établir que 56 : 100 = 56/100.

3.2 La fraction opérateur

Pour Maurin et Joshua (1993), « la notion de fraction opérateur apparaît comme la succession de deux opérations, l'une étant une multiplication et, l'autre, une division (au sens de division exacte). L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux opérations n'ayant pas une incidence sur le résulta final, l'opérateur fractionnaire est un résumé de l'enchaînement de ces deux opérations. Mathématiquement, on dirait qu'il est le composé commutatif d'un opérateur multiplication et d'un opérateur division ». Ainsi, par exemple, 2/3 de 12 = (12 : 3) x 2.

Une bonne maîtrise de cet aspect des fractions facilite la résolution de problèmes de proportionnalité.

Pour conclure ce deuxième article, la présentation de l'activité « la carte en trop pour faire 1 ».

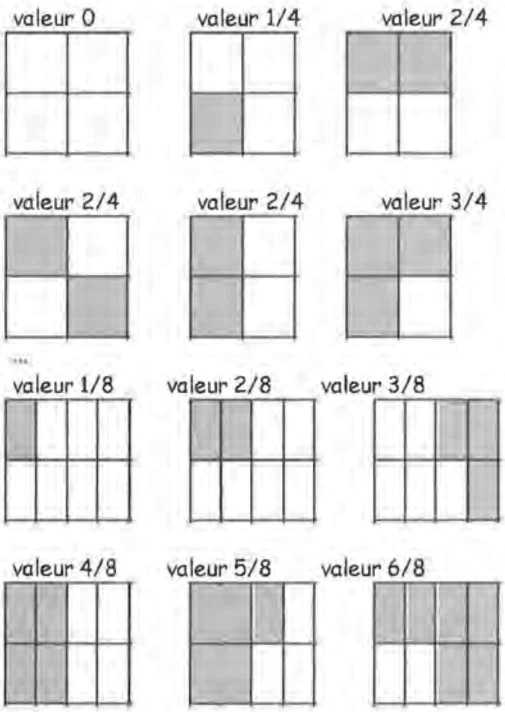
La construction des compétences numériques au cycle 10/12 se caractérise principalement par l'étude d'un nouvel univers de nombres : les rationnels. L'étude de ces nombres soulève de nombreuses questions chez les enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage de leurs élèves. L'apprentissage des décimaux va mobiliser le temps et l'énergie des élèves et de leurs enseignants. Comme le montrent les réflexions didactiques et mathématiques développées dans ces deux premiers articles, le parcours est long et semé d'embûches !
Dans les articles à venir, nous détaillerons les différentes activités reprises dans le tableau de progression didactique. Comme annoncé dans l'introduction, il reste maintenant à présenter la première activité reprise dans le tableau de progression, « la carte en trop pour faire 1 » ; soit une activité pour favoriser le développement de la fraction comme nombre-mesure.

A. Présentation de l'activité

L'introduction de cette activité est prévue en fin de cycle 8/10 ; elle peut toutefois être utilisée, en début de 5e, par un enseignant soucieux de consolider la notion de fraction en début de cycle 10/12.

Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, «Le valet noir» ou «Le puant»). Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple. Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

B. Exemples de représentations des cartes à utiliser



Sur les cartes, sont représentées des fractions. Le principe de construction des cartes à jouer est très important. Pour que les élèves puissent comparer des quarts et des huitièmes, il importe que ces fractions soient représentées de la manière suivante :

1/4 2/8

Cette représentation permet aux élèves de poser plus facilement l'équivalence : 1/4 = 2/8. Ce que n'autorise la représentation suivante :

1/4 2/8

Un tel mode de construction des cartes favorise la rencontre de la notion de « fraction-outil ». Elle permet aux élèves de construire le passage de la troisième à la quatrième étape de la progression définie par Rouche (1998). Elle autorise également des modes de validation interne ; les élèves sont autonomes dans le déroulement du jeu. Si cette activité ne pose aucun problème aux élèves, il est possible de remplacer les représentations des fractions par une notation chiffrée. Dans ce cas, le problème de validation des couples formés pour obtenir l'unité se pose. Toutefois, en cas de contestation, il est toujours possible pour l'enseignant de procéder rapidement à une vérification des paires proposées par les élèves.

C. Identification des cartes à utiliser

Avant le début du jeu, il convient de sélectionner les cartes soit selon les compétences numériques des élèves, soit selon les fractions que l'enseignant souhaite aborder. Chaque colonne du tableau ci-dessous propose une sélection de cartes pour aborder une ou deux séries de fractions lors d'une partie. Plus on va vers la droite du tableau, plus les occasions de jouer en utilisant les fractions équivalentes sont nombreuses et plus les parties peuvent devenir complexes.

Cartes représentant ...	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	1	1	1	1
1/2	8	6	6	3
1/4	6	4	/	3
2/4	8	4	/	3
3/4	6	4	/	3
1/8	/	2	/	2
2/8	/	4	/	3
3/8	/	2	/	2
4/8	/	4	/	3
5/8	/	2	/	2
6/8	/	4	/	3
7/8	/	2	/	2
1/3	/	/	4	3
2/3	/	/	4	3
1/6	/	/	2	2
2/6	/	/	4	3
3/6	/	/	6	3
4/6	/	/	4	3
5/6	/	/	2	2
Total	29	39	33	49

Références bibliographiques

- Bolon, J. (1996). **Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège.** Paris : Thèse de doctorat non publiée.
- Bolon, J. (1997). L'enseignement des décimaux à l'école primaire. **Grand N,** 52.
- Brissiaud, R. (1998). **J'apprends les maths CM1.** Paris : Retz.
- Brousseau, G. (1998). **La théorie des situations didactiques.** Grenoble : la Pensée sauvage.
- Comiti, C. & Neyret, R. (1979). A propos des problèmes rencontrés dans l'enseignement des décimaux au cours moyen. **Grand N**, 18.
- CREM. (1995). **Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans - Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.** Nivelles : CREM asbl.
- Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, 7 (2).
- Dubois, C., Fénichel, M. & Pauvert, M. (1993). **Se former pour enseigner les mathématiques - Numération, décimaux.** Paris : Armand Colin.
- Maurin, C. & Joshua, A. (1993). **Les structures numériques à l'école primaire.** Paris : Ellipses.
- Rouche, N. (1998). **Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?** Paris : Ellipses.

NOTES DE LECTURE

DES PROBLÈMES POUR LE CYCLE 3
LES MATHS, UN OUTIL POUR COMPRENDRE LE MONDE

Michèle Pome, Dominique Valentin
Coll. Mosaïque, Hatier Ed. 2003 (176 p)[1]

Dominique Valentin, une de nos fidèles lectrices et aussi auteure de plusieurs articles dans Math-Ecole, longtemps co-responsable de l'équipe Ermel, vient de publier un recueil de situations, élaborées à partir de la réalité et nécessitant un traitement d'ordre mathématique. Il s'agit de 130 fiches photocopiables, de format A4, avec corrigés, destinées aux élèves du cycle 3[2] de l'école élémentaire voire du premier cycle du collège, sans distinction de niveau. et de précieuses pages d'introduction avec tableaux de présentations. L'ouvrage n'a rien de révolutionnaire : chacun sait que, depuis toujours, les situations de la vie courante « courent les rues » et qu'il suffit de les prendre. Mais il y a un travail important d'adaptation et de recherche de documents avant de pouvoir les utiliser en classe. Ce recueil en propose près de 200, apprêtées, répertoriées, avec leurs contenus, les types de nombres et de calculs mis en oeuvre. Il est donc utile.

Il offre des situations permettant aux enseignants d'établir des passerelles entre les disciplines et aux élèves de prendre conscience que les mathématiques ne sont pas seulement « scolaires » mais qu'elles servent à quelque chose. L'ouvrage va donc au-delà de la simple utilité, vers la construction de sens. Il complète de manière harmonieuse la progression dans la discipline et aider l'enseignant à rendre les connaissances construites à l'école disponibles pour ses élèves en dehors de sa présence, de son aide, en dehors de l'école finalement.

Certains passages de l'introduction de l'ouvrage répondent à des questions plus générales. Plutôt que de les résumer, nous préférons les offrir dans leur intégralité aux lecteurs de *Math-Ecole*, vu leur intérêt pour une réflexion sur l'enseignement des mathématiques :

Mathématiques et réalité

Faire sortir les mathématiques du « livre de maths » présente donc de grandes difficultés, à beaucoup de points de vue. Sur quelle « réalité » est-il possible de faire travailler des élèves de 8 à 12 ans? Quelles sont les questions susceptibles de les intéresser? Quelles connaissances « sur le monde » nécessitent-elles? Quelles recherches demanderont un traitement de ces questions? Seront-elles à leur portée? Quels sujets pourront conserver une certaine permanence? Sur ce dernier point, nous nous sommes aperçus, par exemple, que beaucoup de jeux qui retiennent toute l'attention des enfants au moment où ils sont propulsés sur le marché, deviennent très vite caducs, voire introuvables ou simplement démodés! En travaillant toutes ces questions, nous n'avons gardé que les sujets qui nous semblaient dignes d'un peu d'avenir...

Nous avons donc organisé cet ouvrage autour de ***grands thèmes non scolaires****, ces thèmes ayant été « choisis » par des élèves du cycle 3 à partir d'une enquête préalable : les animaux, les voyages, les loisirs, le corps humain...*

Rien, à aucun moment, ne leur indique les contenus mathématiques sous-jacents. *I*

l s'agit bien, comme dans la vie courante, d'aller chercher dans sa boîte à outils de savoirs et de savoir-faire ce qui peut bien être utile pour aller au bout d'une question. Bien sûr, les « vraies situations » fonctionnelles qui pourraient se présenter dans la classe, telles que l'organisation d'une sortie en car, la gestion des comptes d'une fête d'école, etc.

1 Diffusé en Suisse par Diffulivre, 41 rue des Jordils, CH1025 Saint Sulpice, Tél 21 691 53 31 Prix librairie: Fr. 64,10 F (avec droit de reproduction pour une classe)

2 En France, le « Cycle 3 » comprend les degrés CE2, CM1 et CM2, qui correspondent aux degrés 3, 4 et 5 de Suisse romande

auraient toute leur place dans ce cadre. Mais on sait bien que de telles situations ne peuvent être prévues, programmées dans un ouvrage et que l'enseignant est seul à pouvoir les saisir au bond dans sa classe, chaque année de façon différente, en fonction des évènements, de ses élèves actuels, des centres d'intérêt des uns et des autres, etc. Philippe Meirieu[3] nous a également montré combien les situations fonctionnelles, dans le cadre scolaire, restaient répétitives et insuffisantes, aussi bien pour construire les savoirs que pour en assurer la disponibilité.

Les fichiers ou les livres utilisés habituellement par les élèves contiennent parfois des énoncés qui portent sur des sujets proches de ceux que nous avons retenus. Mais ils sont, d'une part, simplifiés pour entrer dans le cadre stéréotypé du « problème de math » et, d'autre part, proposés en référence directe aux contenus mathématiques qui viennent d'être enseignés : répartition de bouteilles dans des casiers, dans le chapitre portant sur la division ; modification des quantités nécessaires à la confection d'un gâteau pour huit personnes quand la recette originale a été conçue pour quatre, dans le chapitre proportionnalité ; etc. Il est clair qu'il s'agit d'une ***application immédiate****, voire guidée, de connaissances désignées, application certes indispensable mais qui ne fait pas travailler la* ***disponibilité différée*** *de ces connaissances, disponibilité souvent mise en défaut dans les évaluations nationales par exemple. Or, c'est bien dans des situations toujours nouvelles et rencontrées à des moments divers et hors de l'école que les élèves doivent être capables de réinvestir leurs savoirs et savoir-faire.*

« Situation », « problème » ou « situation-problème[4] » ?

Il y a, aujourd'hui encore, beaucoup de confusion sur ces mots et sur ce qu'ils recouvrent, confusion que nous allons tenter brièvement de lever

Dans le cadre scolaire, le mot « problème » a longtemps désigné un énoncé, à la forme stéréotypée évoquant le monde des adultes (panier de la ménagère, salaires, etc.) contenant quelques données, souvent numériques, et se terminant par une question. Pour répondre à cette question, il fallait effectuer un calcul en utilisant une ou plusieurs des « quatre opérations ». Le contrat implicite de la résolution de problèmes reposait sur l'idée d'un entraînement des savoir-faire acquis préalablement à cette résolution. Par exemple, après avoir « appris » à « faire des multiplications », l'énoncé suivant pouvait être proposé aux élèves alors censés le résoudre par application directe de la « leçon » précédente : « La fermière porte au marché 26 boîtes contenant chacune une douzaine d'œufs. Combien a-t-elle d'œufs ? »[5]. La même page du fichier contenait une dizaine d'énoncés du même type. La fonction de cet énoncé est clairement l'application de connaissances qui viennent d'être enseignées. Souvent, le chapitre à la fin duquel ces énoncés sont regroupés porte la mention « multiplication » de manière à ce que les élèves sachent à quels contenus se réfèrent les énoncés en question. Voici, à titre d'exemple, la définition du problème proposée dans un livre d'arithmétique[6] datant des années trente : « Un problème est une question d'application relative à une règle mathématique (partages égaux, surfaces) ou à une règle pratique consacrée par l'usage (bénéfice, loyer), question enveloppée ou compliquée par des données accessoires, variables selon les cas multiples de la vie courante ». On ne proposait pas à un élève de CE1 qui n'avait pas encore « appris la multiplication » un énoncé du type : « Un jardinier a planté 3 rangées de 25 salades chacune. Combien a-t-il planté de salades ? », alors que ce problème peut être résolu sans la multiplication par addition itérée : 25 + 25 + 25.

3 Apprendre… oui, mais comment ?, ESF, 1988
4 Ce paragraphe pourra être sauté en première lecture.
5 *Math en herbe*, CE1, collection Diagonale, Nathan, 1992
6 E. Martin (inspecteur du Primaire), *Arithmétique, livre du maître*, Delagrave.

C'est toute la réflexion menée principalement en France par les chercheurs en didactique de mathématiques sur le rôle de la résolution de problèmes dans la construction des connaissances qui a provoqué un changement radical des points de vue, changement qui s'exprime nettement dans l'évolution des programmes depuis ceux de 1991.
Voici une définition du problème bien utile aujourd'hui, donnée par Jean Brun[7]*: «Un problème est une situation initiale, avec un but à atteindre demandant au sujet d'élaborer une suite d'opérations ou d'actions pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet-situation où la solution n'est pas disponible d'emblée mais peut être construite.» On voit bien que la majeure partie des énoncés proposés dans les différents manuels sous le nom de «problème» ne sont pas des problèmes au sens où l'entend Jean Brun et avec lui de nombreux didacticiens. Nous les appellerions volontiers des exercices d'application, mais il paraît difficile d'aller contre des habitudes si fortement ancrées dans les mentalités!*
Si l'on parle aujourd'hui de situation et de situation-problème, c'est d'abord pour insister sur la ***globalité de l'activité de résolution****: analyse du contexte, recherche et tri des informations, élaboration de démarches de résolution qui ne se réduisent pas à la seule application d'une connaissance nouvellement acquise. On pourrait dire que l'important est de bien repérer la «situation du problème».*
Il nous semble que l'essentiel, pour les enseignants, est de distinguer la ***fonction des situations*** *qu'ils proposent à leurs élèves, cette fonction impliquant des choix didactiques différents quant à leur mise en œuvre en classe: la situation est-elle destinée à engager la construction d'un savoir nouveau? S'agit-il de mettre les élèves en situation de recherche, de construction de méthodes? Ou bien, encore, l'occasion est-elle donnée aux élèves d'utiliser l'ensemble de leurs connaissances à bon escient, sans que celles-ci aient été explicitement désignées comme adéquates? Le vocabulaire utilisé actuellement cherche à faire cette distinction: les* ***situations-problèmes***[8] *désignent les problèmes destinés à la construction d'un savoir notionnel ou procédural nouveau. Le terme* ***problème-ouvert***[9] *recouvre les problèmes de recherche et l'on nomme* ***problèmes d'application, problèmes de réinvestissement, problèmes complexes****, les situations qui visent à engager les élèves dans une utilisation immédiate ou différée de ce qu'ils ont appris.*

Cet ouvrage ne contient pas de «problèmes» au sens où la didactique des mathématiques[10] *entend ce mot aujourd'hui. En effet, les situations-problèmes font partie des progressions qu'utilisent les enseignants et sont organisées par années scolaires, avec une cohérence qui leur impose une programmation rigoureuse dans le temps. Les problèmes-ouverts, quant à eux, ceux qui ont pour principal objectif d'amener les élèves à construire des méthodes de résolution, d'argumentation, de pensée, ne sont pas ce que l'on pourrait appeler les «problèmes de la vie courante», en tout cas pas ceux qui peuvent concerner les élèves de l'école élémentaire. Les situations proposées dans cet ouvrage sont clairement des* ***situations de réinvestissement****. Pourtant, nous avons choisi de proposer, dans un dernier chapitre, quelques situations du type problème-ouvert, permettant aux élèves de s'exercer, à leur niveau, à ce jeu de l'esprit qui fait toute la beauté et la saveur des mathématiques que l'on aurait grand tort de qualifier, en les opposant aux mathématiques appliquées, «d'inutiles» même si elles ne sont pas «pratiques»!*

...

7 Université de Genève
8 Ces situations sont également qualifiées de situations d'apprentissage ou de situations didactiques avec des nuances que nous n'évoquerons pas ici.
9 Expression provenant de l'IREM de LYon
10 On pourra consulter sur ce sujet les travaux de l'IREM de Bordeaux ou les publications de l'Équipe de didactique des mathématiques de l'INRP, connue sous le nom d'ERMEL: *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, six tomes de la GS au CM2, Hatier.

Public

… Dans le cas de notre sujet, il nous a semblé important de sortir du cloisonnement de l'année, le cycle 3 et le début du collège étant particulièrement propice à l'utilisation de connaissances construites dès le cycle 2. Bien sûr, ce choix amène quelques difficultés, en particulier en ce qui concerne l'utilisation de nombres qui ne sont pas des entiers : les élèves du CE2, par exemple, ne connaissent ni les nombres décimaux ni les nombres fractionnaires et peuvent ainsi être mis en difficulté sans avoir les moyens standards de contourner l'obstacle. Ce n'est pas toujours le cas, car certaines situations dans lesquelles se trouvent des décimaux, par exemple, peuvent souvent être résolues à l'aide de nombres complexes, «assemblages» de nombres entiers un peu particuliers, comme les mesures de durées, par exemple.

Pour cette raison, nous avons introduit dans le tableau destiné aux enseignants une colonne leur indiquant quels types de nombres entrent en jeu dans chaque situation. Ceci devrait leur faciliter les choix de situations en fonction du niveau de leur classe.

De même, les capacités en calcul d'un élève de CE2 ne sont pas les mêmes que celles d'un élève de CM2 et le temps d'exécution des calculs ainsi que leur niveau d'expertise pourront donc varier. Pour pallier ces difficultés, nous pensons que ***l'usage réfléchi de la calculette*** *permettra un engagement plus grand dans le traitement d'un problème en allégeant la tâche de calcul, car il ne s'agit pas pour la plupart des situations proposées d'un entraînement au calcul écrit. La calculette pourra donc être un outil à la disposition constante des élèves engagés dans ce travail. Les enseignants qui ne partagent pas ce point de vue pourront bien sûr conserver la maîtrise de cette disponibilité.*

Conscients de ces difficultés éventuelles, nous avons cependant choisi de proposer aux élèves de résoudre des problèmes sans étiquette d'un niveau précis. Certains élèves de CE2 sont parfois intéressés par des situations qui ne leur sont pas habituellement proposées parce que jugées trop «difficiles[11]» pour eux, alors que des élèves de CM2 trouvent souvent plaisir à résoudre un problème qui, pour une fois, ne leur semble pas hors de leurs possibilités. Ceci nous a paru également un moyen de réconciliation avec l'activité de résolution de problèmes pour des élèves qui, sans cesse confrontés à des difficultés nouvelles, ne peuvent jamais se réassurer en venant à bout d'une situation qui à la fois les intéresse et reste à leur portée. Ces élèves-là disent, quand on prend la peine de les interroger sur le sujet, qu'ils n'aiment pas les problèmes parce qu'ils ne réussissent jamais et que les seules «mathématiques» qu'ils aiment sont les opérations… Ce rejet global nous semble extrêmement préjudiciable à ces élèves lorsque l'on sait que le monde du travail qui les attend a su confier les tâches de calcul, comme beaucoup de tâches répétitives, à des machines et que c'est l'esprit d'initiative et la capacité à résoudre des problèmes professionnels[12] qui sont d'abord valorisés.

…

Les auteurs relèvent encore, dans cette partie de l'introduction, l'intérêt de ce recueil de fiches pour les classes à degrés multiples.

Le dernier chapitre de l'introduction présente les modes de travail possible, en fonction des pratiques et conceptions des enseignants : travail par centres d'intérêt, par groupes, activités à l'initiative des élèves… et donne les clés de lecture de l'ouvrage noté par des signes typographiques permettant de reconnaître le niveau de difficulté, des informations spécifiques de la situation, des aides ponctuelles à la résolution, des corrigés. Une remarque nous paraît essentielle dans ce chapitre :

… Il nous semble utile de préciser encore que les situations proposées doivent conserver leur complexité, même (et surtout ?) si cette complexité est source de difficultés, voire

11 Mais il faudrait analyser de plus près la nature de cette difficulté supposée.

12 Avec une programmation des calculs et non leur exécution à la main.

d'ambiguïté. Pour nous, l'intérêt principal de l'ouvrage est d'offrir aux élèves des contextes, des informations, un langage, qui n'ont pas été simplifiés pour en faire des « beaux problèmes » scolaires. Il ne s'agit pas non plus de faire un travail préalable de « lecture d'énoncés » qui garantit la compréhension univoque de la situation. Si les élèves d'une même classe n'interprètent pas les données de la même façon, ce sera une bonne occasion de débat, de choix, de recherche de précisions.
Dans chaque chapitre, quelques «énigmes», dites «énigmes des jumelles» ont été insérées de manière à permettre une respiration, dans la fiction, par des situations de recherche très courtes. Elles sont indiquées par un logo spécifique.
L'ouvrage étant conçu pour une possible utilisation en autonomie totale ou relative, comme nous l'avons évoqué plus haut, il nous semble important que l'enseignant prenne le temps de bien définir avec ses élèves le contrat qu'il choisit d'instaurer à propos de ce travail et de présenter la forme particulière de ces fiches photocopiables

Pour se faire une idée plus précise des situations proposées, nous en reproduisons quatre dans les pages suivantes, avec l'accord des auteurs.
«Respiration difficile» et «Un sourire ne coûte rien mais produit beaucoup» tirée de la partie «Corps à corps» (p. 57), «Le budget du chat» du chapitre «Nos amies les bêtes» (p. 24) et «Des panneaux à déchiffrer» de la partie «Voyages». On constatera que les contextes géographiques ne sont, évidemment, pas romands et que la monnaie de référence n'est pas notre franc suisse. Ça ne nous paraît pas un handicap pour nos élèves qui verront peut-être l'entrée de la Suisse dans l'Europe et qui doivent bien compter en Euros lorsqu'ils sont en vacances à l'étranger. La maîtrise d'un taux de change, dont l'approximation de 1,5 est tout à fait suffisante pour la vie courante, participe aussi de l'ouverture des mathématiques sur la réalité.
On pourra constater, au travers de ces exemples, que les situations proposées sont simples, sans prétentions, comme on peut en rencontrer souvent, mais qu'elles ont le mérite d'être prêtes à l'emploi, afin de donner du sens aux connaissances mathématiques qu'elles appellent pour leur résolution.

Destinataires :
enseignants de l'école primaire et du secondaire I, formateurs

Mots-clés :
problèmes, école primaire, vie courante, interdisciplinarité, sens

F.J.

★★ Respiration difficile

Fumer est dangereux pour la santé. La loi oblige même les fabricants de cigarette à l'écrire sur chaque paquet.
Pour frapper les imaginations, des études ont montré qu'une cigarette faisait perdre $\frac{1}{4}$ h de vie.

C'est bien sûr une façon de parler à partir de savants calculs de moyenne et cela ne se passe pas heureusement ainsi pour chaque fumeur.

? **1. Malgré tout, on peut se demander ce que cela donnerait pour quelqu'un ayant fumé en moyenne un paquet de 20 cigarettes par jour pendant 15 ans. Et pendant 30 ans ?**

Impressionné par les résultats de ces calculs, mon père a enfin décidé d'arrêter de fumer. Cela va, en plus, lui faire faire des économies car il fumait un paquet et demi par jour !
Ses cigarettes préférées coûtaient 3 euros 40 centimes le paquet.

? **2. Peux-tu calculer quelle sera son économie en 1 mois ? et en 1 an ?**

★ "Un sourire ne coûte rien mais produit beaucoup." (Gandhi)

Un simple mouvement comme lever le bras l'espace d'une seconde nécessite l'intervention d'une douzaine de muscles.
Quand nous marchons, nous utilisons plus de 200 muscles différents.
Tous nos mouvements sont assurés par quelques 600 muscles environ qui composent notre corps.
Même sourire n'est possible qu'en utilisant une partie des 30 petits muscles de notre visage, dont les célèbres zygomatiques.

Voici une petite énigme qui te permettra de découvrir combien de muscles sont utilisés pour sourire :

? **Si...**
- **tu commences par multiplier le nombre de muscles utilisés pour sourire par 10 ;**
- **puis tu ajoutes 5 au résultat ;**
- **tu doubles le nombre ainsi obtenu ;**
- **et enfin tu divises ce dernier résultat par 7 ;**

tu obtiens 50.

Les muscles de notre visage

Extrait de Des problèmes pour le cycle 3 M. Pomme et D. Valentin. Hatier Ed. (p. 57)

★★★ Le budget du chat

* 1 kg, c'est la même chose que 1 000 g.

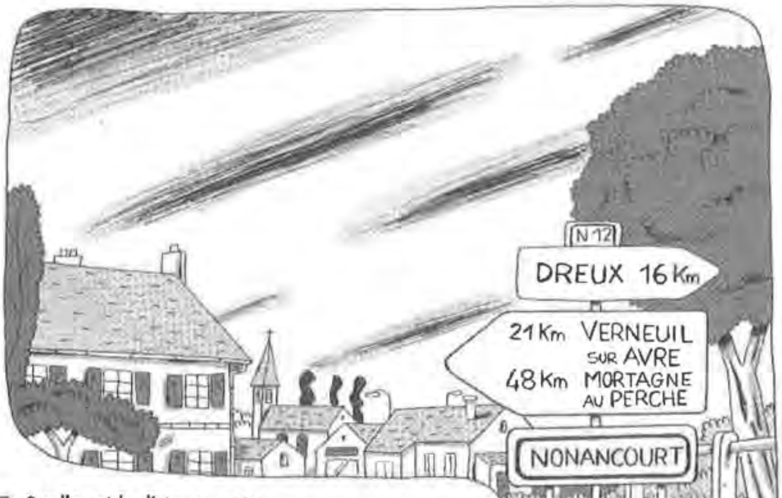
Peut-être as-tu un chat chez toi ou aimerais-tu en avoir un. Mais son entretien coûte de l'argent. Aussi je te propose de calculer ce que tu dépenses (ou devras dépenser) pour ton chat sur une année.

Voici les principales dépenses à prévoir :

Achats...	Pour combien de temps...	Prix unitaire en euros
Litière	1 sac de 10 kg tous les 15 jours	2,85
Croquettes	50 g par jour vendues par sac de 1,5 kg	12,00
Visite chez le vétérinaire + vaccin	1 fois par an	46
Collier anti-puces	1 tous les 4 mois	6,50
Jouets	1 petite souris et 1 balle tous les 6 mois	Souris 2,25 Balle 1,85

? Calcule le total de ces dépenses sur une année.

★ Des panneaux à déchiffrer



? Quelle est la distance entre... :

- Nonancourt et Mortagne-au-Perche ?
- Dreux et Verneuil-sur-Avre ?
- Dreux et Mortagne-au-Perche ?
- Verneuil-sur-Avre et Mortagne-au-Perche ?

Extrait de Des problèmes pour le cycle 3 M. Pomme et D. Valentin. Hatier Ed. (pp. 24 et 35)

EXPOSITION & DÉMONSTRATIONS

MATÉRIEL ET JEUX MATHÉMATIQUES

Hall de la Haute Ecole Pédagogique

5 – 9 juillet 2004 de 8 h. à 18 h.

Organisée conjointement par

MATHS
PRÉSCOLAIRE - 1P-6P - 7-9

CFDP
CENTRE FRIBOURGEOIS
DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUES

Service de la
Formation continue

Vous aurez l'occasion de découvrir:

- **les acquisitions récentes du CFDP;**
- **l'intégralité des ouvrages et le matériel accompagnant les moyens officiels romands de mathématiques de 1P à la 9e;**
- **du matériel didactique d'accompagnement et de modélisation;**
- **des jeux mathématiques et logiques pour tous les niveaux.**

De plus, du lundi au jeudi, de 16 h 30 à 18 h. vous pourrez assister à une présentation de matériel, de jeux ou de livres par des professionnels:

Lundi 5 et jeudi 8 juillet
Présentation de jeux et de matériel
pour l'école enfantine et l'école primaire.

Mardi 6 juillet
Présentation de matériel de modélisation
pour le Cycle d'orientation.

VIVISHOP

Mercredi 7 juillet
Présentation de jeux et de matériel
pour l'école enfantine.

Tout le matériel présenté vous sera proposé en prêt, au CFDP, dès le mois d'août 2004.

ABONNEMENTS ET COMMANDES

❑ **Veuillez m'abonner à *Math-Ecole* (tarifs en page 2 de couverture).**

Veuillez me faire parvenir le(s) ouvrage(s) suivant(s) :

Extrait du catalogue de la Boutique de *Math-Ecole*, liste complète sur le site www.math-ecole.ch

Encyclopédie du kangourou, ACL	....	(ex à Fr. 28.-)
Exos-malices, ACL	....	(ex à Fr. 26.-)
Kangourou au pays des contes, ACL	....	(ex à Fr. 14.-)
Les fables du Kangourou, ACL	....	(ex à Fr. 14.-)
Le monde des pavages, ACL	....	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 1, ACL	....	(ex à Fr. 18.-)
Les maths & la plume 2, ACL	....	(ex à Fr. 18.-)
Magie et Maths, ACL	....	(ex à Fr. 18.-)**
Apprivoiser l'infini, ACL	....	(ex à Fr. 22.-)
Jeux 5. Des activités mathématiques au Collège, APMEP	....	(ex à Fr. 18.-)**
Jeux 6. Des activités mathématiques pour la classe, APMEP	....	(ex à Fr. 20.-)**
L'Almanach du petit matheux en herbe, Edition Archimède G. Sarcone	....	(ex à Fr. 18.-)**
10 expériences mathématiques, (HyperCube 32/33)	....	(ex à Fr. 20.-)
La perspective dans la poche, (HyperCube 39/40)	....	(ex à Fr. 24.-)**
Découpages mathématiques (Hypercube Hors Série no 2)	....	(ex à Fr. 25.-)**
Nouveaux découpages mathématiques, Ed. Pentaèdre et ACL	....	(ex à Fr. 18.-)**
Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM	....	(ex à Fr. 24.-)
Construire et représenter (un aspect de la géométrie de 4 à 18 ans), CREM	....	(ex à Fr. 32.-)
Formes et mouvements (perspectives pour l'ens. de la géométrie), CREM	....	(ex à Fr. 29.-)
Des grandeurs aux espaces vectoriels, CREM	....	(ex à Fr. 40.-)**
Points de départ (Numéro spécial *Grand N*)	....	(ex à Fr. 28.-)**
Puzzle Pythagore et Euclide (en bois)	....	(ex à Fr. 55.-)
Problèmes de rallyes et concours :		
Actes des rencontres internationales du RMT (Brigue, 97, 98)	....	(ex à Fr. 18.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Siena, 99, Neuchâtel 00)	....	(ex à Fr. 25.-)
Actes des rencontres internationales du RMT (Parma, 01, Torre delle Stelle, 02)	....	(ex à Fr. 28.-)**
Fichier Evariste I, APMEP *(degrés 5 à 9)*	....	(ex à Fr. 20.-)
Fichier Evariste II, APMEP *(degrés 5 à 9)*	....	(ex à Fr. 25.-)
Panoramath 96, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	....	(ex à Fr. 10.-)
Panoramath 2, CIJM, APMEP ACL *(degrés 5 à 9)*	....	(ex à Fr. 14.-)
Panoramath 3, CIJM, APMEP ACL (degrés 5 à 9)	....	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour l'école (degrés 5, 6...)	....	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	....	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques faciles (degrés 6, 7...)	....	(ex à Fr. 14.-)
52 Nouvelles énigmes mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	....	(ex à Fr. 14.-)
7 x 7 Enigmes et défis mathématiques pour tous (degrés 8, 9...)	....	(ex à Fr. 14.-)
50 Enigmes mathématiques pour lycéens (degrés 10...)	....	(ex à Fr. 14.-)
40 Jeux littéraires faciles (POLE Editions)	....	(ex à Fr. 16.-)**
40 Jeux littéraires pour tous (POLE Editions)	....	(ex à Fr. 16.-)**

Nom et prénom : ❑ Mme / ❑ M. ....

Adresse (rue et numéro) : ....

Code postal et localité : .... Tél. : ....

Date : .... Signature : ....

Les frais de port ne sont pas inclus dans les prix indiqués *derniers exemplaires disponibles **nouveautés

Bulletin à remplir sur le site Internet www.math-école.ch ou à photocopier et à retourner à :
Math-Ecole p/a Martine Simonet, Montagne de Cernier, 2052 La Vue des Alpes

JAB
1950 Sion 1

envois non distribuables à retourner à:
Math-Ecole, Institut de mathématiques,
11, rue Emile-Argand, 2007 Neuchâtel