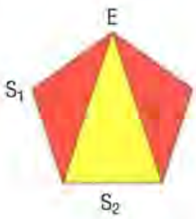
Autour du nombre d'or φ

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

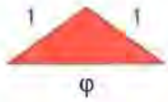
Les professeurs de mathématiques trouveront ci-dessous, sous forme de jeux, quelques idées qui les aideront à rendre très accessibles à leurs élèves, les remarquables propriétés du nombre d'or et de la suite de Fibonacci. Nous vous proposons une série de 3 articles. Le premier, paraissant dans ce numéro, est consacré au nombre d'or φ et à ses propriétés mathématiques, au travers de la géométrie du pentagone régulier, dont on sait que le rapport de la diagonale au côté vaut précisément le nombre d'or. Le deuxième présentera un jeu basé sur les propriétés du dodécagone régulier et sur ce que nous pourrions appeler la quadrature du dodécagone (et non pas la quadrature du cercle!). Quant au troisième article il généralisera les propriétés communes des rapports des diagonales aux côtés des polygones convexes réguliers à N côtés, et montrera une illustration du calcul matriciel pour tout N.

Pentagones réguliers et nombre d'or

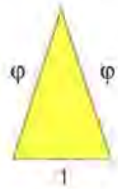
Coupons un pentagone régulier par les 2 diagonales issues d'un même sommet E, on obtient respectivement :



2 triangles isocèles



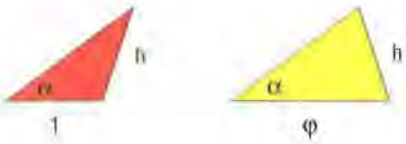
et 1 triangle isocèle



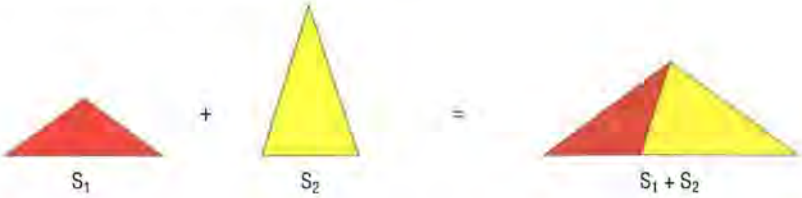
Le côté du pentagone vaut 1 cm, dans ce cas la longueur de la diagonale vaudra φ cm,
φ étant pour l'instant un nombre égal à la longueur de la diagonale (si le côté vaut 1)

$S_2 = S_1\varphi$ en effet :

Montrons que S_2 (surface du triangle) = $\varphi\ S_1$ (où S_1 est la surface du triangle). Ces 2 triangles ont en commun l'angle $\alpha = 36°$; ils sont isocèles. Ils ont la même hauteur h et ne diffèrent que par leurs bases qui sont respectivement de 1 et φ, donc $S_2 = \varphi\ S_1$



Additionnons maintenant $S_1 + S_2 = S_1 (1 + \varphi) = S_3$



On voit que par construction S_3 est semblable à S_1 (mêmes angles) et que ses côtés sont multipliés par φ. Il en résulte que $S_3 = S_1\varphi^2$. Nous avons donc:
$S_1\varphi^2 = S_1 (\varphi + 1)$ et en simplifiant par S_1, l'équation algébrique du nombre d'or apparaît:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

avec pour solution $\varphi = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dont seule la solution positive nous intéresse ici.

Continuons notre progression, chaque nouvelle figure est obtenue par l'addition des 2 figures précédentes:

A chaque étape nous multiplions la surface par un facteur φ. Comptons simplement le nombre de triangles au total dans chaque figure (sans les différencier), nous obtenons la suite de Fibonacci où chaque terme est bien la somme des 2 précédents.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

Or F_n / F_{n-1} tend vers φ quand $n \to \infty$ et ceci est vrai quel que soient F_1 et F_2
On peut donc sans abus assimiler F_1 à S_1 et F_2 à $S_2 = \varphi S_1$ ainsi dès $n = 2$ (si l'on considère les surfaces) $F_n / F_{n-1} = \varphi$.
(On montrera que à partir de $\varphi^2 = \varphi + 1$ on peut tirer $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$)

Algébriquement on peut montrer que $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$ en posant $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

mais on peut le démontrer géométriquement, ce qui est le plus plaisant, ainsi:

$\underbrace{\varphi^2 + 1}_{\varphi + 2} = \varphi\sqrt{5} \Rightarrow (\varphi + 2)^2 = \varphi^2 5$ il suffit de comparer le nombre de triangles :

$\varphi + 2$ φ

De même si $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$ alors $\varphi^2 + 1/\varphi^2 = 3$ et $\varphi^4 + 1 = 3\,\varphi^2$ donc :

$(\varphi + 1)^2 \quad + 1 \quad = \quad 3\,\varphi^2$

$\varphi + 1$ 1 φ

Pour vous aider il existe des jeux, sous forme de tangrams mathématiques, en mousse et en bois très agréables à manipuler et posant des énigmes bien illustrées que vous pouvez vous procurer auprès de Trigam SA, Neuchâtel CH, tél. 032 7212838, mais il est aussi tout à fait possible de découper simplement des morceaux de carton.

Remarque :

On peut trouver la relation d'Euler-Binet donnant les nombres de Fibonacci à partir des 2 relations que nous avons vues précédemment et qui se démontre facilement par induction.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi - 1/\varphi = 1 \\ \varphi + 1/\varphi = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n \right]$$

Asymptotiquement on aura : $F_n = \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ (c'est ainsi qu'on trouve les grandes valeurs de F_n)