Niveaux de référence en mathématiques pour des élèves de 16 ans, en Europe [1]

Lucia Grugnetti
Unité locale de recherche en didactique,
Département de Mathématiques,
Université de Parme

Introduction

Sous les auspices du «Comité sur l'enseignement des mathématiques» (Committee on Mathematics Education) de l'EMS (European Mathematical Society»[2]), l'étude «Niveaux de référence en mathématiques, en Europe, à 16 ans»[3], («Reference levels in School Mathematics Education in Europe at the age 16») projette d'identifier des niveaux de référence à propos des connaissances en mathématiques qui pourraient être partagés par tous les pays de l'Union européenne, et peut-être aussi par d'autres pays, comme le disent Bodin et Villani (*International Report*, 2001).

Le «Comité sur l'enseignement des mathématiques» de l'EMS a constitué un groupe d'experts, (professeurs d'école secondaire, chercheurs en didactique, formateurs, auteurs de plans d'études ou de manuels) sous la présidence de Vinicio Villani, de façon à ce que la plus grande partie possible des pays de la Comunauté européenne et de l'Europe en général, soient représentés.

L'IREM de Besançon a servi de centre de coordination, sous la responsabilité d'Antoine Bodin.

Pour se donner une base objective d'élaboration du projet, les membres du groupe de travail ont présenté la structure de leurs différents systèmes éducatifs par des «Rapports nationaux» en décrivant avec une précision particulière la situation en fin de scolarité obligatoire (en général vers l'âge de 16 ans).

Un des objectifs du projet est l'élaboration d'un ensemble de questions, qui ont été appelées initialement «dream questions» (questions idéales ou questions de rêve) et sont devenues ensuite «reference level questions»[4]: (questions de référence), choisies pour leurs qualités, selon des critères de culture et de formation.

Questions de référence

Le projet s'est immédiatement révélé assez complexe, mais une volonté commune d'éviter toute proposition d'une standardisation de l'enseignement des mathématiques en Europe s'est dégagée très clairement.

1 Cet article reprend le texte d'une conférence donnée à Barcelone, en septembre 2001 sur l'invitation de la Société Mathématique de Catalogne.

2. L'auteure a fait partie de ce comité et s'est engagée dans la rédaction finale du projet.

3. International Report, Antoine Bodin et Vinicio Villani, éditeurs, (2001).

4. Des interrogations et divergences subsistent encore à propos de cette appellation. Lors de la rencontre internationale de mai 2001, à Luxembourg, où le projet a été présenté à des délégués des associations nationales d'enseignants et à d'autres responsables du secteur de la didactique des mathématiques, le nom de *Points of reference* a été proposé.

Au cours de l'étude. il est apparu clairement que la proposition aurait dû être, ou mieux, devrait être celle d'indiquer une sorte de «style de travail» dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, susceptible de se révéler, en quelque sorte, complémentaire ou en support à ce qui se fait habituellement à l'école.

65 questions ont été proposées et discutées, puis réécrites pour être présentées dans leur forme finale par Antoine Bodin et l'auteure de cet article à la rencontre internationale de mai 2001 à Luxembourg.

Pour organiser et classifier ces questions, on s'est référé aux instruments du projet PISA pour aboutir à une structuration qui tient compte des aspects suivants:

- **Domaines (Idées force, «bigs ideas»):**

  P_1 – Quantité
  P_2 – Espace et formes
  P_3 – Changements et relations
  P_4 – Hasard et probabilités

- **Niveau de mathématisation:**

  CLASSE 1: reproduction, définitions, opérations numériques,
  CLASSE 2: connections et intégration pour la résolution de problème (problem solving)
  CLASSE 3: pensée mathématique, généralisation et intériorisation

- **Compétences mathématiques**

  C_1 – Raisonnement mathématique
  C_2 – Argumentation mathématique
  C_3 – Modélisation
  C_4 – Pose et résolution de problèmes
  C_5 – Représentation
  C_6 – Symbolisme, formalisme et technique
  C_7 – Communication
  C_8 – Aides et outils

- **Population cible:**

  T_1 – Pour tous
  T_2 – Pour ceux qui sont censés utiliser les mathématiques dans des études ultérieures
  T_3 – Pour ceux qui ont envie de se diriger vers les mathématiques supérieures

Les questions sont proposées aussi selon une classification qui permet de les envisager comme *activité individuelle* ou comme *activité par groupes.*

D'autres caractéristiques émergent de ces questions:

- elles ne sont pas liées à des curriculums nationaux particuliers,
- elles ne mettent pas en oeuvre seulement des habiletés techniques,
- elles impliquent des stratégies différenciées,
- elles offrent des niveaux de réponses différents,
- elles ne sont pas conçues dans l'optique d'une évaluation sommative,
- elles demandent aux élèves, non seulement de fournir les solutions, mais de donner des informations sur leurs procédures de résolution,
- elles proposent un certain «style» d'activité mathématique.

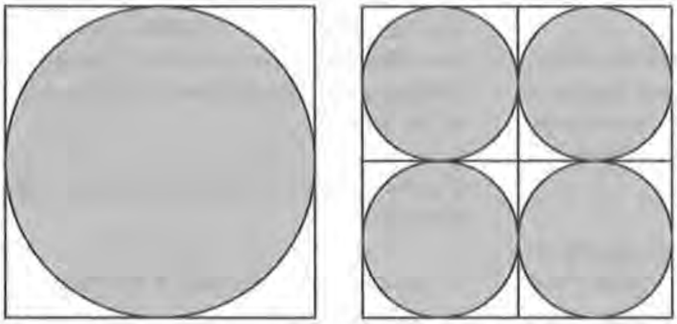
Quelques exemples

Je commente, dans les lignes suivantes, seulement quelques-unes des 65 questions ou points de référence, de manière à donner au lecteur une idée du genre d'activités mathématiques que le Comité européen suggère. Leur présentation ne prétend pas être exhaustive, elle ne le pourrait pas. L'ensemble des questions, figure dans le document présenté à Luxembourg: A. Bodin, L. Grugnetti «Bundle of proposed reference questions, Part 2». (Voir bibliographie)

EMS Question de référence N° 002 **Mosaïque de cercles**

Q est un carré de 1 m de côté et C en est le cercle inscrit.

Si on partage Q en carrés plus petits et que l'on y trace leurs cercles inscrits respectifs, on obtient la figure suivante:



Augmentez, autant que vous pouvez l'imaginer, le nombre de subdivisions. L'aire de la partie hachurée (LA PARTIE COUVERTE PAR LES DISQUES) croît-t-elle, décroît-t-elle, ou reste-t-elle toujours la même?

Et qu'en est-il si on se pose le problème dans l'espace?

EMS Question de référence	**Carte d'identité**
Nom et numéro de la question	**Mosaïque de disques – EMS 002**
Origine de la question	Proposé par Vinicio Villani (Italy)
Domaine de problèmes («big ideas»)	P_2
Principaux contenus supposés abordés	Similitude qui amène à une réponse synthétique ou simple activité de calcul algébrique
Compétences supposées mises en oeuvre	$C_1 - C_4$
Classe de complexité (mathématisation)	Classe 3
Public cible	Cible 1 (pour tous)
Type d'organisation	Travail individuel

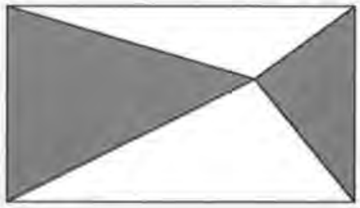
Cette question, comme les autres, donne une idée du style de travail suggéré par le projet. Elle implique des connaissances à la portée d'élèves de 16 ans qui sont appelés à les utiliser de manière problématique, et non comme une simple application de formules, afin de produire une procédure de réponse autonome. C'est l'élève qui doit mobiliser ses propres connaissances et établir une stratégie de résolution. Il me paraît aussi significatif que le passage du plan à l'espace se situe dans le même domaine de problème.

EMS Question de référence N°009 **L'héritage**

Deux frères héritent d'un terrain de forme rectangulaire.

Pour le diviser en deux parties de même aire, un voisin leur suggère de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de le relier avec des piquets plantés aux quatre sommets du terrain.

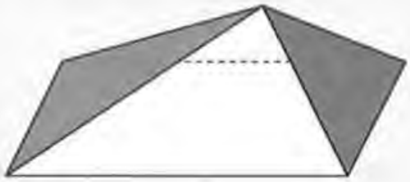
Un des frères prendra la partie en gris sur la figure, l'autre la partie restante.



Les deux parties seront-elles vraiment égales?
Justifiez votre raisonnement.

RMT

Cherchez ce qu'il advient si la figure est constituée des faces d'une pyramide (par exemple, le toit d'une maison) vu de dessus.



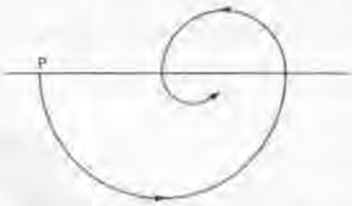
EMS Question de référence	**Carte d'identité**
Nom et numéro de la question	**L'héritage – EMS 009**
Origine de la question	Proposée par Lucia Grugnetti (tirée du RMT 2000)
Domaine («big ideas»)	P_2
Principaux contenus supposés abordés	Aire du triangle – Théorème de Pythagore…
Compétences supposées mises en oeuvre	$C_3 - C_2$
Classe de complexité (mathématisation)	Classe 2
Public cible	Cible I (pour tous)
Type d'organisation	Travail individuel pour la première partie – travail par groupes pour la seconde

La première partie de la question est un problème proposé aux élèves des catégories 7 et 8 (septième et huitième années de scolarité) d'une épreuve du Rallye mathématique transalpin (RMT), une confrontation de mathématiques par classes. Les élèves, dans ce cas, ont travaillé en groupes. Nous pensons que, à 16 ans un élève pourrait affronter individuellement cette question et il est intéressant, comme dans le cas du RMT[5], d'analyser les procédures de résolution utilisées par les élèves. Se contenteront-ils d'examiner le cas de la figure proposée en recourant à des vérifications empiriques ou jugeront-ils nécessaire de conduire un raisonnement «démonstratif» de type général?

La seconde partie de la question, comme dans cas précédent, concerne l'espace. Dans ce cas, le niveau de difficulté augmente considérablement en raison du passage du plan à l'espace. On conseille donc de proposer l'activité en travail par groupes, qui implique une discussion constructive au sein de la classe, pour une approche ou un approfondissement relatif au rôle de la démonstration.

EMS Question de référence N° 010 — **Une étrange spirale**

D'un point de départ, on parcourt un demi-cercle de rayon 1, puis on continue par un demi-cercle de rayon 1/2. ainsi de suite, chaque demi-cercle a un rayon qui est la moitié du précédent.



A quelle distance du départ se situera l'arrivée? Quelle sera la longueur du chemin?

EMS Question de référence	**Carte d'identité**
Nom et numéro de la question	**Une étrange spirale – EMS 010**
Origine de la question	Proposée par François Jaquet (Suisse)
Domaine («big ideas»)	P_1
Principaux contenus supposés abordés	Longueur du cercle, somme infinie
Compétences supposées mises en oeuvre	C_3 _ C_1
Classe de complexité (mathématisation)	Classe 3
Public cible	Cible I
Type d'organisation	Travail par groupes

5. Grugnetti, L.: 2001, «‹Dimostrazione› e prove empiriche in problemi di geometria del RMT» in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 – Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

A l'origine un autre problème avait été proposé au groupe de travail international, tiré aussi du RMT, dans un domaine cognitif similaire:

La Ferrari

Depuis longtemps, Cirillo et Antonio rêvent chacun de s'acheter une belle Ferrari rouge. Mais cette voiture coûte 100000 Euros et ils n'ont pas l'argent nécessaire.

Nous sommes en l'an 2003. Cirillo vient d'hériter 50000 Euros. Il décide de mettre cette somme de côté pour l'achat de la Ferrari, d'y ajouter 25000 Euros l'an prochain, 12500 en 2005 et, ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente.

Antonio n'a pas fait d'héritage, mais il a déjà épargné 30000 Euros en 2001, la moitié de cette somme en 2002, le tiers en 2003, le quart en 2004, le cinquième en 2005 et ainsi de suite. Chaque année, il ajoutera donc une somme équivalente à 30000 divisé par le nombre formé des trois derniers chiffres de l'année.

Qui arrivera à acheter la Ferrari ? Et quand ?

Donnez les détails de vos calculs.

Le contexte du problème de «La Ferrari» a été trouvé trop spécifique de la réalité de certains pays et a été remplacé par celui de «une étrange spirale». Ce problème, proposé par un manuel scolaire (Calame, Jaquet, 1989), a fait l'objet d'une recherche didactique dans plusieurs classes et dans des cours de formation d'enseignants, comme activité problématique ouvrant le long chemin qui conduit au concept de limite (Grugnetti, Jaquet, 1996).

Un élève de 15, 16 ans peut commencer à affronter de manière autonome cette activité qui ne requiert, au début, que des connaissances élémentaires sur les fractions et la circonférence. Mais de telles connaissances ne sont pas suffisantes pour permettre la résolution du problème.

L'élève se trouve ainsi face à une situation pour laquelle le réinvestissement des connaissances préalables n'est pas suffisant, bien qu'il soit utile, évidemment.

La situation est assez riche pour susciter des conjectures suffisamment «consistantes» parce que les premières tentatives ne conduisent pas à la solution, du fait de l'émergence d'un conflit cognitif.

Une première approche consiste généralement à recourir au dessin géométrique qui, pourtant, révèle très vite ses propres limites. Ensuite, la recherche des abscisses des points d'intersection des demi-cercles avec l'axe, à partir du point de départ, conduit à une succession «irrégulière». C'est un moment important où les allers et retours entre les contextes géométrique et arithmétique se multiplient. Le point d'arrivée se trouvera sans doute entre les points d'abscisses 1 et 2: 1 + «*quelque chose*».

A ce moment, le travail collectif et les discussions mettent en évidence l'alternance des termes positifs et négatifs. Naissent alors des interrogations, des perplexités: c'est alors le temps des essais, des conjectures. En ce qui concerne le chemin parcouru, il sera, selon certains, *aussi long que l'on veut*. D'autres, en additionnant quelques longueurs de demi-cercles, commencent à douter que le chemin *ne pourra pas être aussi long*.

L'activité, coordonnée par l'enseignant, aboutit à la somme d'une progression géométrique et à l'émergence de l'idée de «infinitésimal», «d'infini», de «convergence» d'une série, de «limite»: une première idée seulement; évidemment.

Une réponse aux deux demandes du problème peut être construite selon le parcours suivant:

1) La somme des termes de la succession «irrégulière» évoquée précédemment: $2 - 1 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + \dots$ (série géométrique de raison $q = -1/2$) peut se réécrire sous la forme $1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots$ en additionnant le premier et le deuxième terme, le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième, et ainsi de suite[6]. En appelant S cette somme, si l'on considère $S/4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots$ et si l'on effectue la différence $S - S/4$, on obtient 1. On en tire $4S/4 - S/4 = 1$; $3S/4 = 1$ et, finalement, $S = 4/3$. La conjecture 1 + «quelque chose» devient alors $1 + 1/3$.

2) En ce qui concerne la longueur du chemin: $\pi + \pi/2 + \pi/4 + \pi/8 + \dots$, une fois écrite la somme sous la forme $\pi\,(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots)$ on peut appeler S' la somme entre parenthèses et en soustraire $S'/2 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$. On obtient alors $S' - S'/2 = 1$, dont on tire $S'/2 = 1$, et par conséquent $S' = 2$. La longueur du chemin est donc 2π.

Dans une phase successive, il s'agira de passer à «l'institutionnalisation» des connaissances, mais en tant que prolongement d'activité (de celle-ci ou d'une autre) et non une théorisation pour elle même.

EMS Question de référence N° 018 **Le tunnel**

Quatre personnes s'apprêtent à traverser un tunnel étroit et sombre.
Elles disposent d'une lampe de poche qui a une durée de fonctionnement limitée à 18 minutes.
Il leur faut, respectivement, 1, 2, 5, et 10 minutes pour traverser le tunnel.
Sans lampe, elles ne peuvent le faire.
Le tunnel est si étroit que deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble.

Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser le tunnel?

EMS Question de référence	**Carte d'identité**	
Nom et numéro de la question	**Le tunnel**	**EMS 018**
Origine de la question	Proposé par Sandor Dobos (Hungary)	
Domaine («big ideas»)	P_3	

6. Il faut cependant se rappeler que, en général, dans le cas de somme d'un nombre infini de termes, l'associativité, qui est vraie ici, n'est pas «garantie». Cette propriété est vérifiée si la série est absolument convergente, c'est-à-dire que la somme des valeurs absolues de ses termes converge. Au niveau didactique, il serait important d'envisager aussi un exemple comme la célèbre série de Grandi: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, qui (comme l'histoire nous le rappelle) a été considérée comme égale à 1/2, ou à 0, ou encore à 1. Le paradoxe vient du fait que les valeurs absolues de ses termes ne forment pas une série convergente.

Principaux contenus supposés abordés	Raisonnement logique
Compétences supposées mises en oeuvre	C_1
Classe de complexité (mathématisation)	Classe 2
Public cible	Cible I (pour tous)
Type d'organisation	Travail individuel

Je pense que cette question est un bon exemple de mathématiques qui vont au-delà des formules et de la technique de calcul. On demande aux élèves de comprendre et utiliser des données, non pas pour trouver un résultat numérique, mais pour analyser « logiquement » une situation et déterminer si un fait est possible ou peut au moins se vérifier.

EMS Question de référence N° 006 **La courte paille**

Cinq personnes tirent à la courte paille.
Parmi 5 pailles, il y en a 4 de même longueur et une plus courte que les autres.
Les pailles sont présentées de manière à ce que les joueurs ne puissent pas se rendre compte de leurs longueurs.

A tour de rôle, les joueurs tirent une des pailles, sans la remettre en jeu.
Le gagnant est celui qui tire la plus courte paille.
La dernière personne, qui doit prendre la dernière paille, prétend qu'elle est défavorisée, car elle n'a plus le choix.

Qu'en pensez-vous?

EMS Question de référence **Carte d'identité**

Nom et numéro de la question	**La courte paille EMS 018**
Origine de la question	Proposé par Michel Henry (IREM Besançon)
Domaine («big ideas »)	P_4
Principaux contenus supposés abordés	Probabilités
Competences supposées mises en oeuvre	$C_3 - C_1 - C_2$
Classe de complexité (mathématisation)	Classe 3
Public cible	Cible I (pour tous)
Type d'organisation	Travail par groupes

Cette question est l'une des rares qui touche au thème des probabilités, les responsables du projet étant conscients du fait que ce thème ne figure pas officiellement dans les programmes de tous les pays européens. Toutefois, l'idée a prévalu d'ouvrir un débat en classe sur des questions qui appartiennent au domaine de la pensée non déterministe.

Diffusion des questions

Le premier objectif de la rencontre internationale de mai 2001 à Luxembourg était de présenter le projet à un public allant de représentants des associations d'enseignants de mathématiques ou de mathématiciens à des personnes ayant des responsabilités ministérielles dans les différents pays européens et à des cadres du secteur de l'éducation, en vue d'une diffusion des «questions de référence» – ou «points de référence» si l'on préfère.

Au moment où les grandes enquêtes internationales connaissent un regain d'intérêt – pensons à TIMSS ou à PISA – il paraît important que d'autres modalités de confrontations se développent entre enseignants de mathématiques de régions et pays différents. Les enquêtes comparatives sur les compétences des élèves ont certes leur intérêt, mais elles portent en elles des risques : ceux des abus de leurs exploitation statistiques, ceux des biais dus aux facteurs qui influencent les résultats des élèves mais qui sont difficiles à déterminer ou à mesurer, ceux du poids trop élevé accordé aux réponses par rapport aux procédures.

Ces «questions de référence» sont une alternative, complémentaire, à cette tendance à la «mesure». Elles suggèrent, elles proposent des analyses plus fines de compétences et d'attitudes fondamentales en mathématiques, que sont le résolution de problèmes, l'argumentation et choix de stratégies...

Les auteurs du projet ont recherché, par leurs propositions, de s'approcher de problèmes assimilables à des «dream questions». Il y a une part de rêve dans cette expression, mais il y a aussi une volonté de dépasser le questionnement traditionnel des élèves en mathématiques pour entraîner, en retour, des effets positifs sur les phases d'apprentissage et enseignement où se construisent les connaissances.

Ces «questions de référence» sont à la disposition des organismes éducatifs et des enseignants qui pourront en faire un usage raisonné. Elles sont aussi là pour la formation des enseignants dans ses diverses modalités.

Le revues d'éducation des mathématiques, pourraient aussi, comme le fait ici *Math-Ecole*, être un facteur essentiel de diffusion de ces questions et du style de travail qu'elles induisent.

Bibliographie

Bodin, A, Villani, V.: «Reference Levels in School Mathematical Education in Europe. International Report», présentées at Luxembourg meeting of EMS in May 2001.

Bodin, A., Grugnetti, L.: «Reference Levels in School Mathematical Education in Europe. Bundle of proposed reference questions, part 2», présentées at Luxembourg meeting of EMS in May 2001.

Calame, J.A., Jaquet, F.: 1989, *Mathématique 7-8-9*, Neuchâtel, Département de l'instruction publique.

Grugnetti, L.: 2001, «‹Dimostrazione› e prove empiriche in problemi di geometria del RMT» in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino*, Siena 1999 – Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

Grugnetti, L., Jaquet, F.: 1996, «Senior Secondary School Practices (chapter 16)», in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 615-645.