Les réglettes Cuisenaire et la mathématique moderne[1]

par Louis Jeronnez et Isabelle Lejeune
(Waterloo)

I. Evolution de l'enseignement de la mathématique

La mathématique dite moderne est née au siècle dernier avec entre autres les travaux d'Evariste Galois (1811-1832), de Cayley (1821-1895), de Cantor (1845-1918) et de Félix Ydein (1849-I925)...

Mais si des ouvrages classiques comme les «Leçons d'Algèbre» d'Emile Borel destinés aux élèves de polytechnique des années 1880 contiennent déjà une introduction à la théorie des ensembles, il n'en reste pas moins que là mathématique moderne est venue à la connaissance commune des professeurs du secondaire à partir des années 1950, avec les congrès de mathématiciens et des cours de niveau universitaire comme par exemple celui de Gaston Choquet.

Ainsi vint progressivement une *réforme de l'enseignement secondaire*, réforme qui est toujours en cours de réalisation et qui se propage dans le monde entier. Les problèmes pédagogiques que pose cette réforme ne sont pas tous résolus. La Belgique a en tout cas, une place de choix dans cette révolution de l'enseignement mathématique.

En ce qui concerne l'enseignement primaire, il y a eu une sorte de préréforme commencée elle aussi à partir des années 50. Pourtant, la création par Georges Cuisenaire en 1953/54 de ses *Nombres en couleurs* n'avait pas reçu des pédagogues un accueil enthousiaste. Notre illustre compatriote rappelait d'ailleurs en juillet dernier, au Congrès annuel de l'*Association Cuisenaire-Belgique*, qu'il avait eu, à cette époque, *l'impression d'être seul dans le désert*.

Ce n'est pas tout-à-fait exact. Les professeurs de mathématique avaient décelé, dès le premier contact, les possibilités extraordinaires des réglettes. Ceux qui passèrent à Thuin dès 1954 furent enthousiasmés par les *Nombres en couleurs*. Ils eurent le sentiment d'être mis en présence d'une découverte géniale et ce, dans la perspective de la mathématique moderne. Il ne faut pas oublier que Gaston Choquet fut l'un des premiers à défendre avec vigueur l'idée d'une réforme radicale de l'enseignement mathématique à tous les degrés. Il pressentait le rôle que le matériel Cuisenaire allait jouer, tant au point de vue de la formation mathématique des enfants de l'école primaire qu'au point de vue de la formation de la pensée calculatrice.

Ce fut Caleb Gattegno qui partit, une boîte de réglettes sous le bras, et répandit les *Nombres en couleurs* dans les cinq continents, créant sociétés et associations Cuisenaire, promouvant une pédagogie de situations merveilleusement adaptée au matériel. Ce fut alors cet admirable ouvrage de Madeleine Goutard: «Les Mathématiques et les Enfants», livre de pédagogie authentique basé principalement sur une expérience vécue au Québec et qui révéla au monde du primaire une nouvelle méthodologie de l'enseignement mathématique.

Ce qui est remarquable, c'est l'étonnante simultanéité de la naissance des *Nombres en couleurs* et la venue à la connaissance des professeurs d'une nouvelle mathématique: c'est ce qui explique cette impulsion que reçut l'enseignement primaire dès 1954 et qui prépara la réforme actuelle.

1. Article publié dans *Math-Ecole* no 51, mai 1973 pp. 30 à 38

Les Nombres en couleurs, c'est un matériel structuré, le seul qui ait résisté au temps, qui n'ait pas disparu dans la tourmente actuelle. Regardez cette boîte de réglettes, regardez-la avec les yeux du mathématicien qui y voit un ensemble muni d'une relation d'équivalence (avoir même couleur), et de deux ordres naturels; un ensemble dans lequel on peut définir une opération notée + qui jouit des propriétés que la mathématique met en évidence dans certaines structures.

Nous y reviendrons plus loin.

II. La réforme du primaire

1. Les objectifs

Dès septembre 1971, de nombreuses écoles belges ont adopté de nouveaux programmes de mathématique en première année. Pour certaines d'entre elles, ce sera une transformation importante qui n'est pas sans danger et qui demande beaucoup de savoir et de savoir-faire: on ne s'improvise pas professeur de mathématique, même à des enfants de six ans.

Pour d'autres écoles, il n'y aura que peu de changements. C'est que, depuis 1954, cette préréforme dont nous avons parlé s'est accomplie grâce aux *Nombres en couleurs*, matériel qui a introduit un esprit nouveau dans l'enseignement et lui a donné plus d'efficacité.

Mais efficacité à quel point de vue? Il faut donc définir les objectifs de notre réforme. C'est bien là que gît la difficulté. Dans le programme belge, on n'a pas cru bon d'insister suffisamment sur l'un des buts essentiels de la mathématique: la formation de la pensée. Et il s'agit aussi, bien sûr, d'apprendre la mathématique, mais l'acquisition de connaissances et de techniques doit céder le pas à la formation de l'esprit en général, et à la formation de l'esprit mathématique en particulier. Il faut apprendre aux enfants à raisonner de façon déductive. Il faut surtout les habituer au travail personnel de recherche.

Dans les expériences multiples que nous avons réalisées depuis plusieurs années, nous avons été comblés lorsque nos visiteurs décelaient l'aptitude de nos élèves à aborder une situation nouvelle avec un souci de réflexion (L'enfant qui a travaillé avec les réglettes ne dit plus: «Je ne sais pas»; il essaye de résoudre le problème proposé.).

Les élèves d'aujourd'hui seront, dans quelques années, confrontés à des situations nouvelles et imprévisibles, ils devront s'y adapter et créer sans cesse du nouveau, ce qui implique des méthodes d'enseignement variées à partir de situations diversifiées et des programmes d'étude en perpétuelle transformation. La mathématique moderne est une matière riche de substance qui est susceptible de donner à notre enseignement une efficacité plus grande au point de vue de la formation de la pensée. Encore faut-il que l'on bannisse les méthodes stéréotypées qui ont parfois sclérosé l'enseignement traditionnel.

2. *Mathématique d'aujourd'hui et d'hier*

Si nous assistons à un bouleversement en ce qui concerne les fondements de la mathématique (ensembles, relations, structures...) nous constatons en outre un regroupement de matières jadis éparpillées dans des directions diverses, ce qui provoque une sorte de décantation de la mathématique traditionnelle. Des points considérés comme importants deviennent sans intérêt ou découlent de théories plus générales. Par contre, des matières déjà anciennes et bien connues ont pris une importance nouvelle et ont parfois été projetées dans l'enseignement élémentaire. Nous en avons de nombreux exemples. L'étude des systèmes de numération de position dans des bases autres que 10 figurait jadis en bonne place au programme de seconde scientifique. Les nombres négatifs, la notation exponentielle s'introduisaient jusqu'il y a deux ou trois ans en classe de cinquième du secondaire. L'analyse indéterminée (résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$) et l'analyse combinatoire étaient réservées aux classes de seconde (et c'est encore vrai aujourd'hui). Les équations du premier degré apparaissaient timidement en cinquième. Et cette liste est loin d'être exhaustive.

Il serait intéressant de faire le relevé des matières (jadis réservées aux classes du secondaire) qu'abordent aujourd'hui les enfants de six ans avec une réussite et un profit évidents et qu'on a tendance à classer dans la mathématique moderne.

A l'entrée du primaire, le rythme des acquisitions est beaucoup plus élevé que dans la suite. A sept ans, les enfants calculent dans le binaire sans avoir été drillés. Ils manient les puissances entières des naturels. Ils écrivent des équations. En troisième année, ils résolvent des équations à une et deux inconnues, des problèmes d'analyse indéterminée et de programmation linéaire. Et il n'est pas question, répétons-le d'acquisition de techniques mais bien de formation de la pensée...

Dans la réforme actuelle du primaire, il y a aussi une chose nouvelle, c'est l'accent mis sur l'étude des propriétés des opérations. Et cela, nous le faisons depuis plus de quinze ans dans nos classes Cuisenaire de première et de deuxième années.

III. Les réglettes Cuisenaire

1. *Les réglettes Cuisenaire se sont répandues dans le monde entier* et ont fait réaliser des progrès tangibles à l'enseignement primaire. Une pédagogie dans l'optique de la mathématique moderne est née du maniement de ce matériel, pédagogie que nous avons mise au point par un travail d'équipe dans les classes expérimentales de l'Athénée Royal de Waterloo. Les résultats obtenus avec les enfants de six et sept ans nous ont amenés à raconter cette expérience dans un de nos ouvrages*. L'introduction du plan d'études nouveau ne vient que confirmer la justesse de nos vues.

Si nous l'examinons, nous y trouvons deux volets :

- formation de la pensée mathématique ;

- formation de la pensée calculatrice.

Permettez-nous de citer à nouveau quelques extraits du nouveau plan d'études des écoles de l'Etat (juillet 1971) : « Dans le monde d'aujourd'hui et, plus encore dans celui de demain, il apparaît que les forces à mettre en oeuvre pour que s'accomplisse le destin de l'homme sont celles qui orientent dès l'enfance vers l'initiative, vers la créativité ».

« ... Le nouveau programme veille à introduire un équilibre entre la pensée mathématique et l'activité calculatrice ; ce serait mal l'interpréter que de centrer toute l'action éducative sur un de ces deux objectifs aux dépens de l'autre... »

« ... En un mot, pas de mathématiciens qui ne sachent pas calculer... »

Pour nous, et compte tenu de notre expérience qui se poursuit en quatrième année, il ne fait pas de doute que *la formation de la pensée calculatrice doit essentiellement se faire en première année primaire*.

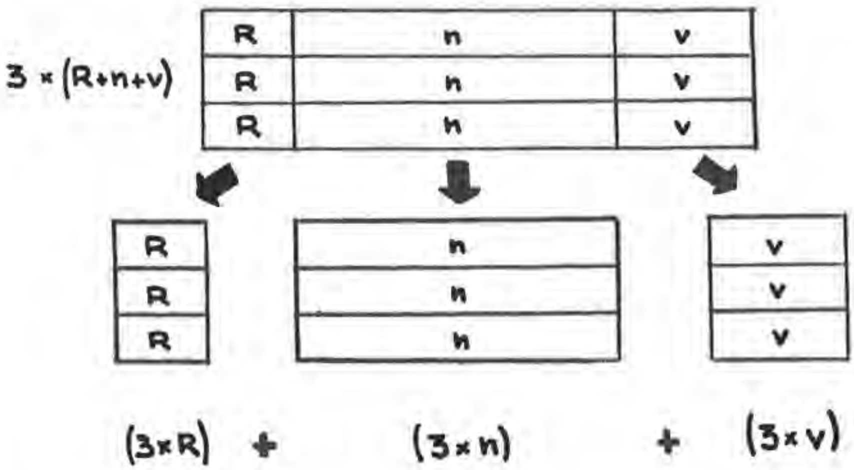
Dans le plan d'études, il y a les nombres et les opérations sur ces nombres. Ici, l'efficacité des nombres en couleurs n'est mise en doute par personne. L'introduction de l'addition dans

* *A la découverte de la mathématique et les réglettes Cuisenaire.* L. Jeronnez et I. Lejeune, Editions Calozet, Bruxelles.

le qualitatif, puis dans le quantitatif, avec les trains construits par les enfants, avec les propriétés de commutativité et d'associativité introduites dès le début de la première année est une des plus belles choses qui soient.

Et puis, il y a la multiplication par un nombre entier positif, la construction de rectangles, de croix, de tours. Ces constructions introduisent simplement et rigoureusement les produits de plusieurs facteurs et leurs propriétés (associativité et commutativité).

Il faudrait parler de la distributivité de la multiplication sur l'addition introduite dès le qualitatif comme le montre le dessin ci-dessous:



La propriété d'associativité est connue depuis très longtemps. Seulement, l'expression ne se trouvait pas dans les plans d'études. On parlait bien, par exemple, de multiplier un produit par un nombre ou d'ajouter un nombre à une somme. Jamais, on n'attirait l'attention sur la propriété qui était utilisée. C'est pourtant ce qu'on fait avec le Cuisenaire depuis plus de quinze ans. La propriété d'associativité est, par ailleurs, *fondamentale dans la structure de groupe*.

Quant à la distributivité de la multiplication sur l'addition, elle est nécessaire pour l'explication de certaines règles de calcul écrit. *Elle conditionne aussi les structures d'anneau et de corps*.

Mais revenons aux tours Cuisenaire qui nous ont conduits aux produits de plusieurs facteurs. Ceux-ci nous amènent aux puissances des nombres (avec des tours dont tous les étages ont la même couleur). L'étude de ces puissances doit être faite en première année. C'est le moment idéal. L'enfant est capable de manier la notation exponentielle avec sûreté. Des milliers, d'instituteurs l'ont expérimenté depuis des années.

Quant aux *bases de numération*, elles sont introduites de différentes façons. On a d'ailleurs souvent confondu dans bien des écoles: «bases de numération» et «mathématique moderne». Ce fut souvent la «tarte à la crème» de l'enseignement primaire. On a parfois aussi infantilisé leur présentation. Nous croyons de plus en plus que les réglettes complétées par les carrés et les cubes Cuisenaire sont encore l'outil idéal pour introduire les «bases». Avec les élèves ayant une première idée des puissances, cela devient un jeu. C'est la manière la plus intelligente de s'y prendre. Quand l'enfant écrit 121 en base trois, il sait:

– que le chiffre de gauche représente un carré vert clair (ou 3^2 ou 3 x 3);

– le chiffre du milieu représente 2 réglettes vert clair (ou 2 x 3);

– que le chiffre de droite représente 1 « petit blanc » (ou 1).

En base dix le nombre vaut:

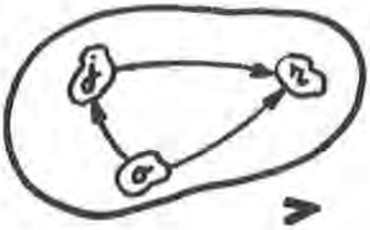
$(1 \times 9) + (2 \times 3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16.$

Ainsi, quand nous parlons de la formation de la pensée calculatrice, nous pensons calcul dans différentes bases de numération, mais aussi étude des nombres et des propriétés des opérations sur les nombres, mais encore introduction des nombres négatifs, et enfin application au réel, au monde physique. Et nous ne parlerons pas de la fraction-opérateur, si fondamentale dans les domaines pratique et théorique. Chacun sait que le matériel Cuisenaire constitue, à ce point de vue, le matériel idéal.

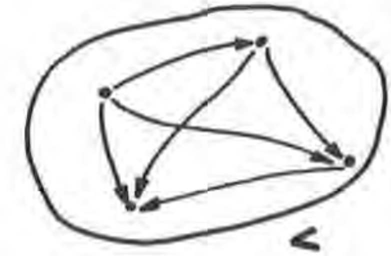
Au premier degré primaire, il y a aussi l'introduction des ensembles et des relations. Nous construisons, dès les premiers jours de classe des ensembles d'élèves, d'objets classiques, d'objets familiers, d'objets pris dans des matériels structurés, de nombres.

Le matériel Cuisenaire conserve sa place * pour introduire de nombreuses notions sur les ensembles, les relations et les structures. Donnons-en des exemples bien précis:

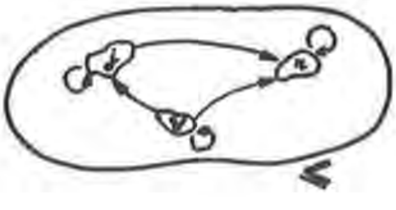
N. B. – Dans les exemples suivants, nous considérons uniquement des ensembles formés de réglettes de couleurs différentes:



– Les réglettes sont représentées par des points munis de taches (pour les tout-petits qui n'écrivent pas encore le nom des réglettes). Les taches indiquent les réglettes représentées. *Les enfants tracent les flèches* qui disent: « est plus grand que ».

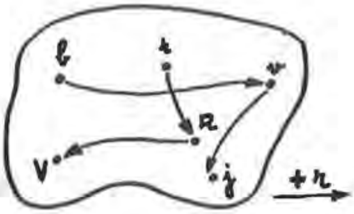


– Graphe muet: *Les élèves doivent placer des taches de couleur* près des points représentant les réglettes (plusieurs solutions).

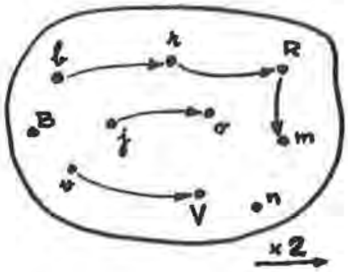


– Les réglettes sont représentées par des points munis de taches. Les élèves dessinent les flèches de la relation: « est inférieur ou égal à ».

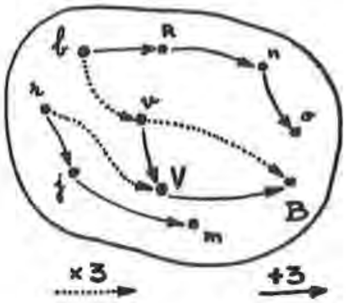
* Voir aussi notre brochure *Ensembles, Relations, Structures avec le Matériel logique Jihel-Set*, par L. Jeronnez et I. Lejeune, Editions Calozet, Bruxelles.



– Les réglettes sont représentées par des points munis de lettres. Les élèves dessinent les flèches de la relation : « augmenté de r ».

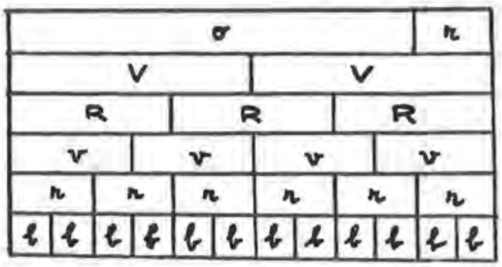


– Les réglettes sont représentées par des points munis de leur nom. Les enfants tracent les flèches rouges qui disent : « a pour double ».



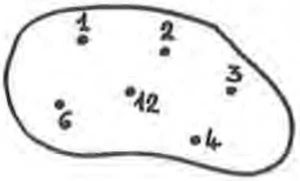
– Voici l'ensemble des réglettes différentes : (b. r. v. R, j, V, n, m, B, 0).

Les enfants tracent : les flèches pleines qui disent : « augmenté de 3 », les flèches pointillées qui disent : « a pour triple ».



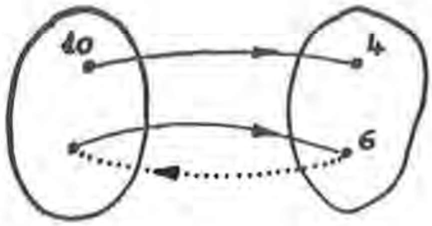
12 = 1 x 12 = 2 x 6 = 3 x 4 = 4 x 3 = 6 x 2 = 12 x 1

– L'ensemble des diviseurs de 12 est obtenu en construisant le « tapis 12 ». Représentons cet ensemble par un diagramme.



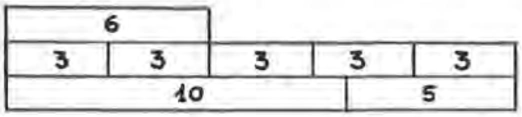
– Représenter l'ensemble formé par les réglettes b, r, v, V, B par un dessin (un diagramme). Tracer les flèches rouges qui disent : « x 3 ».

– On forme l'escalier vert clair: pour passer d'une marche à la suivante « on fait + 3 ». On va aussi loin qu'on peut… Représentons cette situation par un graphe…

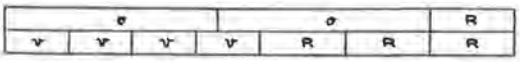


– Un ensemble de prix d'achat et un ensemble de bénéfices. Le bénéfice vaut 40 % ou les 2/5 du prix d'achat. Si j'achète un chocolat pour 10 F, je gagne… 2/5 x 10F = 4F. Si j'ai gagné 6 F…

Que dit la flèche pointillée ?
Trouver la réponse avec les réglettes !



6 = 2 x 3 et 5 x 3 = les 5/2 de 6.
3 = 1/2 x 6



– Formons un train 24 avec des réglettes vert clair et des réglettes roses (plusieurs solutions). Représentons par un graphe. Exemple de solution:

– Formons un train 21 avec des réglettes 2 et des réglettes 5. Représentons par un graphe (plusieurs solutions).

2. Conclusion

Il s'agit maintenant de conclure. La réforme actuelle du primaire, en ce qui concerne la mathématique, est souvent passée par les réglettes.

Dans la formation de la pensée mathématique, elles ont joué jusqu'ici un rôle important. Nul doute que leur utilisation au degré primaire conserve toute sa valeur.

Le nouvel enseignement de la mathématique, même s'il nous paraît difficile, est très attrayant pour nos enfants qui adorent vaincre des difficultés et se plaisent dans une certaine abstraction. Ils forment des ensembles, réalisent des inclusions et éprouvent une grande joie à réfléchir a propos de situations mathématiques prises dans la vie de la classe ou suscitées à l'aide de matériels structurés.

Nos enfants rejetteront alors l'apprentissage du calcul à l'aide de méthodes et de matériels surannés, tels que capsules, boutons, pions…

Nous devons leur donner là encore un matériel structuré qui puisse assouvir leur besoin de réfléchir et de créer : le matériel Cuisenaire est pour cela irremplaçable, sans vouloir prétendre que ce sera là le matériel unique pour l'enseignement de toute la mathématique. Il lui reste un domaine d'application si important, si dense qu'il n'est nul besoin de vouloir à tout prix le mettre à toutes les sauces.