Remarques sur l'éducation mathématique *

par le professeur Jean Piaget

Ce texte a été lu, pour le compte de Jean Piaget, au «Congrès international pour l'enseignement des mathématiques» à Exeter en septembre 1972. Le professeur Sir James Lighthill de l'Université de Cambridge, président du Congrès, en a aimablement autorisé la publication dans Math-Ecole *qui lui exprime sa reconnaissance.*

1. L'orientation que l'on compte assigner à l'éducation mathématique dépend naturellement de l'interprétation que l'on adopte de la formation psychologique ou de l'acquisition des opérations et des structures logico-mathématiques, mais elle dépend tout autant de la signification épistémologique qu'on leur attribue, les deux questions de leur psychogenèse et de leur épistémologie étant d'ailleurs liées de près. Si le platonisme est dans le vrai et que les êtres mathématiques existent indépendamment du sujet, ou si le positivisme logique a raison en les réduisant à une syntaxe et une sémantique générales, dans les deux cas il sera justifié de mettre l'accent sur une simple transmission des vérités du maître à l'élève et d'utiliser le plus tôt possible le langage du maître c'est-à-dire le langage axiomatique, sans trop se soucier des idées spontanées des enfants.

2. Nous croyons au contraire qu'il existe en fonction du développement de l'intelligence en son ensemble, une construction spontanée et graduelle des structures logico-mathématiques élémentaires et que ces structures «naturelles» (au sens où l'on parle de nombres «naturels») sont beaucoup plus proches de celles qu'utilisent les mathématiques dites modernes que de celles dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il y a donc là un ensemble de réalités en général peu connues de l'éducateur, mais dont, avec une meilleure connaissance psychologique, il pourrait largement tirer parti, ce qui faciliterait sa tâche au lieu de la compliquer et ce qui surtout favoriserait l'éclosion de vocations créatrices au lieu de faire des élèves de simples récepteurs conformistes.

3. Mais, pour en arriver là, il importe avant tout de réviser nos notions quant aux rapports entre le langage et l'action. Il semble, en effet, psychologiquement clair que la logique n'est pas issue du langage mais d'une source beaucoup plus profonde, qui est à chercher dans les coordinations générales de l'action. En effet, avant tout langage et à un niveau encore purement sensori-moteur les actions sont susceptibles de répétition et de généralisation constituant ainsi ce que l'on peut appeler des schèmes d'assimilation. Or ces schèmes s'organisent selon certaines lois auxquelles il est impossible de refuser une parenté avec celles de la logique: deux schèmes peuvent être coordonnés ou dissociés (réunion), l'un peut être partiellement emboîté en un autre (cf. l'inclusion), ou ne présenter avec lui qu'une partie commune (intersection), les parties d'un schème ou la coordination de deux ou plusieurs schèmes peuvent comporter un ordre de succession invariant ou certaines permutations (types d'ordre), de même que des correspondances terme à terme, un à plusieurs ou plusieurs à un (bijections, etc.) et lorsqu'un schème impose un but à l'action il est contradictoire pour le sujet de s'orienter en sens contraire.

* Article publié dans *Math-Ecole* no 58, mai 1973 pp. 1 à 7

Bref, il y a là une logique de l'action conduisant jusqu'à la construction de certaines identités dépassant la perception (permanence d'un objet caché) et à l'élaboration de certaines structures (groupe pratique des déplacements déjà décrit par Poincaré en ses essais épistémologiques).

4. Ce serait donc, même en pédagogie mathématique, une grande erreur de négliger le rôle des actions et de s'en tenir toujours au plan du langage. Chez les jeunes élèves l'action sur des objets est au contraire indispensable à la compréhension des relations arithmétiques aussi bien que géométriques (comme c'était le cas au niveau de la mathématique empirique des Egyptiens). Or la répugnance des maîtres de mathématique à l'égard de toute action ou expérience matérielles est très compréhensible: ils y voient une sorte d'appel à des propriétés physiques et craignent que les constatations empiriques ne nuisent au développement de l'esprit déductif et purement rationnel qui caractérisent leur discipline. Mais en fait il y a là un malentendu fondamental et l'analyse psychologique permet de le dissiper et de rassurer les mathématiciens quant à leur exigence essentielle d'une éducation de l'esprit déductif et formel. Il existe, en effet, deux formes bien différentes d'expériences liées aux actions matérielles du sujets. Il y a, en premier lieu, les expériences physiques (au sens large), qui consistent à agir sur les objets pour en découvrir des propriétés qui existaient en eux avant que le sujet ne les manipule: par exemple comparer des poids ou des densités, etc. Mais il existe aussi, et on l'ignore généralement, ce que l'on peut appeler des expériences logico-mathématiques, car elles tirent leur information non pas des objets particuliers en tant que physiques, mais des actions elles-mêmes (ou plus précisément de leurs coordinations) que le sujet exerce sur les objets, ce qui n'est nullement équivalent. Je suis lié d'amitié avec un mathématicien bien connu qui fait remonter le début de ses intérêts mathématiques à une expérience de ce second type, qu'il a faite aux environs de 4 ou 5 ans: assis dans son jardin il s'est amusé à mettre des cailloux en une rangée linéaire et à les compter, par exemple de 1 à 10 en procédant de gauche à droite. Après quoi il les a comptés de droite à gauche et à son grand étonnement il a retrouvé le nombre de 10. Il les a alors mis en cercle et, avec enthousiasme, il a de nouveau obtenu 10, dans l'un des sens de rotation comme dans l'autre! Il a continué avec d'autres figures et a fini par se persuader que la somme 10 était indépendante de l'ordre. Or, il est évident que ni la somme ni l'ordre n'appartenait aux cailloux avant que le sujet ne les range ou ne les réunisse en un tout: ce que l'enfant a découvert c'est donc que l'action de réunir donne des résultats indépendants de l'action d'ordonner et c'est ce qu'il aurait pu constater sur des solides quelconques, sans que les propriétés physiques des cailloux jouent de rôle particulier (sauf qu'ils se sont «laissé faire» en tant que se conservant mais la conservation elle aussi donne lieu à des expériences logico-mathématiques).

5. Or, ce rôle initial des actions et des expériences logico-mathématiques, loin de nuire au développement ultérieur de l'esprit déductif, en constitue au contraire la préparation nécessaire et cela pour deux raisons. La première est que les opérations mentales ou intellectuelles qui interviennent dans ces déductions ultérieures dérivent précisément des actions: ce sont des actions intériorisées et lorsque cette intériorisation, avec les coordinations qu'elle suppose, sera suffisante, les expériences logico-mathématiques, en. tant qu'actions matérielles deviendront inutiles et la déduction intérieure se suffira à elle-même. La seconde raison est que les coordinations d'actions et les expériences logico-mathématiques provoquent en s'intériorisant la formation d'une variété particulière d'abstraction qui correspond précisément à l'abstraction logique et mathématique: contrairement à l'abstraction ordinaire, ou aristotélicienne, qui part des propriétés

physiques des objets et que nous appellerons pour cette raison une «abstraction empirique», l'abstraction logico-mathématique peut être désignée du terme d'«abstraction réfléchissante» et cela selon deux significations solidaires: d'une part, elle «réfléchit» (au sens d'un réflecteur ou d'une projection) ce qui est tiré d'un plan inférieur (par exemple des actions) pour le projeter sur un plan supérieur de pensée ou de représentation mentale; d'autre part, elle est une «réflexion» au sens d'une activité mentale de réorganisation puisqu'elle reconstruit sur ce plan supérieur ce qui est tiré des coordinations de l'action.

6. Mais entre l'âge où l'action matérielle et les expériences logico-mathématiques sont nécessaires (avant 7-8 ans) et l'âge où la pensée abstraite commence à devenir possible (vers 11-12 ans et encore par paliers successifs jusqu'à 14-15 ans) il faut distinguer une étape dont les caractères sont intéressants pour le psychologue et utiles à connaître pour l'éducateur: entre 7 et 11-12 ans, en effet, on assiste à un important développement spontané des opérations déductives, avec leurs caractères de conservation, de réversibilité, etc., ce qui permet l'élaboration d'une logique élémentaire des classes et des relations, la construction opératoire de la série des nombres entiers par synthèse de l'inclusion et de l'ordre[1], la construction de la mesure par synthèse de la partition d'un continu et du déplacement ordonné de la partie choisie comme unité, etc.

Mais ces progrès logiques en un sens considérables demeurent néanmoins assez limités: à ce niveau l'enfant ne parvient, en effet, pas encore à raisonner sur de pures hypothèses, exprimées verbalement, et, pour parvenir à une déduction cohérente, il a besoin de l'appliquer à des objets manipulables (en réalité ou en imagination). C'est pourquoi nous ne parlons à ce niveau que d'«opérations concrètes», par opposition à formelles, et l'on voit qu'elles demeurent en fait en une situation intermédiaire entre les actions préopératoires des débuts et la pensée abstraite dont la possibilité reste plus tardive.

7. Or, une fois rétablie ainsi la continuité entre les actions spontanées de l'enfant et sa pensée réflexive, on s'aperçoit du fait que les notions essentielles caractérisant les mathématiques nouvelles sont en réalité beaucoup plus proches des structures de la pensée «naturelle» que les concepts dont se contentait l'enseignement traditionnel. Il faut d'abord signaler à cet égard le rôle spontané considérable que jouent les opérations de mise en correspondance entre ensembles, donc la construction de morphismes, en particulier lorsqu'on peut les combiner avec des suites récurrentielles. Nous avons, par exemple, demandé avec B. Inhelder à des enfants de 4-5 à 7-8 ans de mettre d'une main une perle dans un bocal transparent, et de l'autre main (et simultanément) une autre perle dans un second bocal mais masqué par un écran; les questions étaient de savoir si les deux ensembles ainsi constitués étaient équivalents ou non, et, d'autre part, si, en continuant indéfiniment, cette égalité se conserverait ou non. Or, tous les enfants interrogés admettaient l'égalité au cours même de l'action, mais les plus jeunes se refusaient à généraliser pour

1. Plusieurs auteurs (Freudenthal, etc.) m'ont compris comme si je regardais le nombre ordinal comme plus primitif que le cardinal, ou l'inverse. Or je n'ai jamais rien dit de pareil et ai toujours considéré ces deux aspects du nombre comme indissociables dans le fini et comme s'appuyant psychologiquement l'un sur l'autre en une synthèse qui dépasse à la fois l'inclusion des classes et l'ordre sérial des relations asymétriques transitives. Si l'ordre est nécessaire c'est que les unités, rendues équivalentes par l'abstraction des qualités ne se distinguent plus alors les unes des autres que par leur ordre d'énumération. Mais l'ordre des unités élémentaires est lui-même relatif au nombre (cardinal) de celles qui précèdent chacune des unités ainsi ordonnées.

ce qui est de la suite. Par contre, dès 5-6 ans, ils admettaient cette généralisation et un petit garçon de cinq ans et demi a même trouvé cette jolie formule: «Quand on sait pour une fois, on sait pour toujours». Or, ce même sujet, pour 10 jetons rouges posés sur la table en correspondance terme à terme avec 10 jetons bleus, niait encore la conservation de cette équivalence lorsque l'on espaçait quelque peu les éléments de l'une des deux rangées et que la correspondance cessait ainsi d'être optiquement constatable. On voit en cet exemple le rôle constructif de la mise en correspondance combiné avec la récurrence.

8. Un exemple frappant de convergence entre la théorie et le développement spontané est celui des intuitions géométriques. Historiquement celles-ci ont débuté par les formes euclidiennes, les structures projectives n'ayant été dégagées que plus tardivement et la topologie au XIXe siècle seulement. Or psychologiquement les enfants de 3-4 ans qui ne savent pas encore dessiner des carrés et les assimilent comme les cercles, rectangles, triangles, etc. à de simples courbes fermées, marquent au contraire soigneusement la différence entre celles-ci et des figures ouvertes et dessinent avec le même soin un petit cercle à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière d'un grand. De ces intuitions topologiques précoces dérivent ultérieurement et simultanément les notions projectives (ponctuelles avec vérification par visée, etc.) et euclidiennes, selon un processus qui est donc plus proche de la théorie que de l'histoire.

9. Une autre convergence intéressante tient au fait que l'on retrouve, à partir du niveau des «opérations concrètes» de 7-8 ans, un équivalent élémentaire des trois «structures mères» distinguées par les Bourbaki, ce qui montre leur caractère «naturel». On relève d'abord la construction de structures de caractère algébrique, en ce sens que leurs lois de composition comportent des opérations inverses et un élément neutre $+ A - A = 0$. On les observe notamment dans les systèmes de classes (classifications, etc. avec quantification des inclusions $A \subset B$ si $B = A + A'$ non nulles). On trouve en second lieu des structures d'ordre dont les lois de composition reposent sur la réciprocité et qui caractérisent les systèmes de relations (sériations), etc. On distingue enfin des structures topologiques fondées sur le continu, les voisinages et séparations, etc. Or de telles structures élémentaires peuvent se combiner dans la suite. En particulier les inversions ou négations (-A) et les réciprocités, qui ne se composent pas entre elles au niveau des opérations concrètes, se combinent dès le niveau de 11-12 ans, en un groupe de quaternalité rendant possibles de telles compositions: c'est le cas lorsqu'aux structures élémentaires de classes et de relation se superpose un début de logique des propositions avec la combinatoire (ensemble des parties) qu'elle suppose. Le sujet devient alors capable de manipuler des systèmes comportant quatre transformations, par exemple $p \supset q$ maintenue identique I, son inverse N = «p et non-q», sa réciproque $R = q \supset p$ et sa corrélative C = «non-p et q». En ce cas $RC = N$, $RN = C$, $NC = R$ et $NRC = I$, ce qui assure enfin la coordination en un système unique, des inversions et des réciprocités.

10. On pourrait citer bien d'autres exemples, en particulier la construction de formes élémentaires et triviales de catégories». Mais il convient surtout de montrer maintenant ce que l'éducateur peut tirer de ces convergences entre la pensée spontanée de l'enfant en son développement «naturel» et un certain nombre de notions théoriques fondamentales. Il peut arriver, en effet, que l'on cherche à enseigner à de jeunes élèves les «mathématiques modernes» avec des méthodes pédagogiques archaïques, exclusivement fondées sur la transmission verbale du maître à l'enfant et avec un emploi prématuré de la formalisation. Il en est résulté quelques échecs qui expliquent le scepticisme affiché par certains grands mathématiciens, comme J. Leray. Mais la faute n'est

pas alors à chercher dans le caractère «modeme» du programme mathématique lui-même: elle tient uniquement au caractère archaïque de la pédagogie et de la psychologie utilisées en de tels cas. Il est, en effet, particulièrement difficile à un maître de mathématiques, dont l'esprit est professionnellement abstrait, de se placer dans la perspective essentiellement concrète qui est celle de ses jeunes élèves, alors que du point de vue du développement et de l'assimilation progressive des structures en jeu, il n'y a aucune contradiction (comme on l'a vu plus haut) entre les phases concrètes initiales et leur aboutissement abstrait; mais c'est à la condition (et c'est là qu'est la difficulté pour le maître) de bien connaître les détails et le mécanisme de ces structurations spontanées successives. En un mot, le problème pratique difficile à résoudre est de greffer des notions de type général, que le maître conçoit dans son propre langage, sur des cas particuliers de ces mêmes notions, construits et utilisés par les enfants, mais sans qu'ils soient encore pour eux des objets de réflexion ni des sources de généralisation.

Pour opérer cette jonction nécessaire entre les structures logico-mathématiques du maître et celles de l'élève aux différents niveaux de son développement, il convient alors de se rappeler quelques principes psycho-pédagogiques très généraux. Le premier est que la compréhension réelle d'une notion ou d'une théorie implique sa réinvention par le sujet. Certes, celui-ci peut souvent donner une impression de compréhension sans remplir cette condition de réinvention, lorsqu'il devient capable de répétition et de quelques applications dans les situations apprises. Mais la vraie compréhension, c'est-à-dire celle qui se manifestera par de nouvelles applications spontanées, autrement dit par une généralisation active, suppose bien davantage: elle exige que le sujet ait pu trouver par lui-même les raisons de la vérité qu'il s'agit de comprendre, donc qu'il l'ait au moins partiellement réinventée pour lui-même. Cela ne signifie naturellement pas que le maître soit inutile, mais son rôle doit moins consister à donner des «leçons» qu'à organiser des situations provoquant la recherche et à la favoriser par des dispositifs appropriés. En cas d'erreur de l'élève au cours de ses tâtonnements, les procédés propres aux méthodes actives» consisteront non pas à la corriger directement mais à susciter des contre-exemples tels que les nouveaux essais de l'enfant le conduisent à se corriger lui-même.

Une seconde considération doit demeurer constamment présente à l'esprit du maître: c'est que, à tous les niveaux jusqu'à l'adolescence y compris, et de façon d'autant plus systématique que le niveau est plus élémentaire, l'élève est capable de «faire» et de «comprendre en action» bien davantage que ce qu'il parvient à exprimer verbalement. Autrement dit une bonne partie des structures que l'enfant met en oeuvre lorsqu'il cherche à résoudre activement un problème demeure inconsciente. C'est, en effet, une loi psychologique très générale que la prise de conscience est toujours en retard sur l'action elle-même, autrement dit, que le sujet possède bien plus de pouvoirs que ceux dont il parvient à faire la théorie ou simplement à décrire l'exercice[2]. Dans la mesure, par conséquent, où le maître, une fois renseigné par les travaux psychologiques mentionnés plus haut, connaît les structures sous-jacentes dont l'enfant dispose, il pourra l'aider à en prendre conscience, soit par des discussions appropriées entre l'élève et lui-même, soit par l'organisation de travaux en équipe où les partenaires du même âge ou d'âges voisins (un aîné agissant comme meneur et un petit groupe dont il est responsable) discutent entre eux, ce qui favorise la verbalisation et la prise de conscience.

Une troisième remarque s'imposait au temps de l'enseignement traditionnel des mathématiques, lorsque l'on obligeait les élèves à

2. Euclide lui-même n'avait pas conscience de toutes les structures opératoires dont il se servait en réalité, par exemple du groupe des déplacements.

résoudre quantités de problèmes souvent absurdes, supposant de nombreux calculs sur des données numériques ou métriques. En ces cas, la seule manière de réussir avec les élèves non particulièrement doués était de procéder en deux étapes (mais on l'oubliait trop souvent): une étape purement qualitative portant sur la structure logique du problème, puis ensuite seulement, l'introduction des données métriques, avec les difficultés supplémentaires que le calcul comportait. Avec les programmes de mathématiques modernes la question est bien moins aiguë, puisqu'elles sont essentiellement qualitatives. Mais elle se retrouve sur un autre plan, lorsque le maître est tenté de présenter trop tôt les notions et opérations en un cadre déjà formalisé. En ce cas la procédure qui me semble indispensable consiste à partir du qualitatif concret, autrement dit de représentation ou modèles correspondant à la logique naturelle du niveau considéré des élèves, et de réserver la formalisation pour plus tard, à titre de couronnement et de systématisation de notions déjà acquises. Cela revient certes à faire appel à l'«intuition» avant toute axiomatisation et nous connaissons bien le mépris des logiciens pour toute pensée intuitive ou «naïve». Mais lorsqu'on se rappelle que l'intuition mathématique est essentiellement opératoire et que le propre des structures opératoires est de dissocier la forme du contenu, la formalisation finale apparaît alors comme préparée et rendue progressivement nécessaire par la construction elle-même de ces structures initialement intuitives. Nous ne croyons donc pas avec Pasch que la formalisation s'engage en sens contraire des tendances de la pensée naturelle, mais, pour qu'il n'y ait pas conflit entre celles-ci et celle-là, il faut qu'elle se constitue à son heure et non pas en vertu de contraintes prématurées.

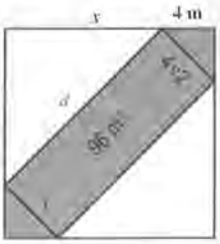
...suite de la page 22

16. La bannière du château (Cat. 8)

Ce problème a été bien réussi dans l'ensemble des classes de huitième, avec recours au théorème de Pythagore, du genre:

– L'aire du rectangle est ainsi de 112 – 16 = 96 m^2, sa largeur est la diagonale d'un carré de 4m de côté: $4\sqrt{2}$ et par conséquent, sa longueur est (en mètres) $96/4\sqrt{2} = 24/\sqrt{2}$

Puis trouver x d'après la relation $x = d/\sqrt{2}$



(en mètres) $x = (24\sqrt{2})/\sqrt{2} = 24/2 = 12$

et finalement en déduire la mesure du côté: 12 + 4 = 16 (mètres)

Une autre méthode consiste à former un carré avec les deux triangles qui n'appartiennent pas à la bande et de transformer ainsi celle-ci en une figure d'aire équivalente, constituée d'un carré de 4 m de côté et deux rectangles de 4 m de largeur.

La longueur de chacun des deux rectangles se calcule ainsi immédiatement:

$2(4x) + 16 = 112 \longrightarrow x = 12$