Tangram mathématique issu du dodécagone convexe régulier

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

Nous avons vu dans un article précédent les remarquables propriétés du nombre d'or φ et comment on peut les illustrer géométriquement à l'aide des triangles isocèles issus de la découpe d'un pentagone régulier.

Accessoirement nous avions illustré la suite de Fibonacci et $\sqrt{5}$.

Un raisonnement similaire avec le dodécagone régulier va nous permettre d'illustrer $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{6};\sqrt{8};\sqrt{12}$ aussi sous forme de jeux. Mais d'abord essayons de faire sentir la profonde parenté qui existe dans la famille des polygones convexes réguliers.

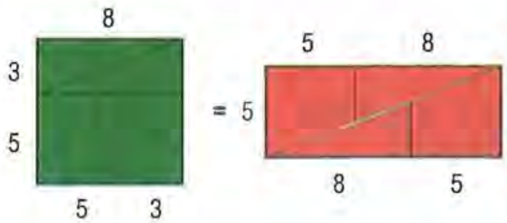
En effet tous gardent un lien avec la suite de Fibonacci, comme nous le montrons dans cet article.

Les nombres de Fibonacci ont la propriété suivante :

$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ relation qui se vérifie très vite à partir du tableau :

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	...
1	1	2	3	5	8	13	

Cette formule est à la base de paradoxes mathématiques, par exemple en utilisant une illusion géométrique (angles pas exacts) pour faire croire que 64 = 65.



Le dessin ci-contre illustre ce pseudo paradoxe, on remarquera la fente très fine de surface égale à 1 dans le rectangle rouge.

Le 1 manquant apparaît sous la forme d'un parallélogramme de surface 1 ayant pour côtés :

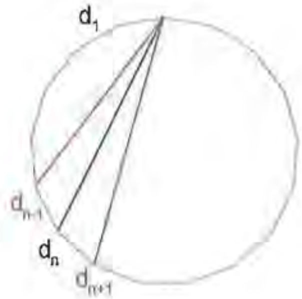
$a = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} = 8.544$ et pour angles respectifs 1.245° et 178.755°

$b = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5.385$

Cas du polygone convexe régulier:

On normalise à 1 le côté de tous les polygones convexes réguliers (ceci nous autorise à considérer les diagonales d_n issu d'un même sommet et reliant tous les autres à la fois comme des longueurs certes, mais aussi comme des nombres).

Quand on examine les diagonales successives issues d'un même sommet:



Nous avons: $d_n = d_1 \dfrac{\sin n\pi/N}{\sin \pi/N}$ qui devient $d_n = \dfrac{\sin n\pi/N}{\sin \pi/N}$

(à déduire du théorème du sinus) quand d1 est normalisé à 1

A l'aide de cette formule on déduit que:

$d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + d_1^2$ qui devient $\boxed{d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1}$

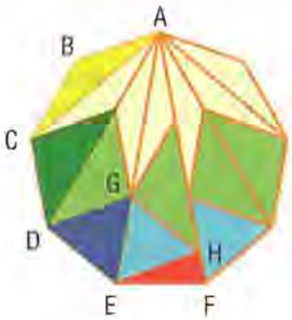
Cette formule se démontre aisément par la trigonométrie. On s'aperçoit que cette dernière relation est quasiment la même que la relation précédente reliant les nombres de Fibonacci entre eux:

$F_n^2 = F_{n-1}\, F_{n+1} + (-1)^{n+1}$

Toutefois il existe une élégante démonstration géométrique de $d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1$

Le découpage en isotriangles (triangles isocèles de côtés isocèles égaux au côté du polygone régulier et d'angles à valeurs entières de π/N) permet assez simplement de généraliser à tout N impair.

Considérons les triangles:



ACG vaut en surface $(1/2)\, d_2^2 \sin 2\pi/N$
ACG vaut aussi 2 triangles jaunes et un 1/2 losange vert

ABD vaut en surface $(1/2)\, d_1\, d_3 \sin 2\pi/N$
on a normalisé les côtés d_1 à 1
ABD vaut aussi 2 triangles jaunes + 1 triangle vert, moins le triangle BCD équivalent à un triangle jaune

A noter que 2 triangles verts issus du même losange coupé par l'une ou l'autre de ses diagonales ont même surface.

Si l'on veut montrer la formule $d_n^2 = d_{n-1}\, d_{n+1} + 1$ il suffit de montrer que 1 triangle jaune vaut en surface $(1/2)\, d_1^2 \sin 2\pi/N$. Or l'angle en B du triangle ABC vaut $(N-2)\, \pi/N$, soit $\pi - 2\pi/N$, et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, donc on a bien l'égalité pour $d_2^2 = d_3 + 1$

Pour $d_3{}^2 = d_2 d_4 + 1$ on fait le même raisonnement, il manquera toujours l'équivalent d'un triangle jaune à $d_{n-1}\, d_{n+1}$ pour égaler $d_n{}^2$.

Pour $d^2_{\frac{N-1}{2}}$ on considère les 2 triangles ADE et AEF

$ADE = (1/2)\ d_{\frac{N-3}{2}}\ d_{\frac{N-1}{2}}\ \sin \pi/N$

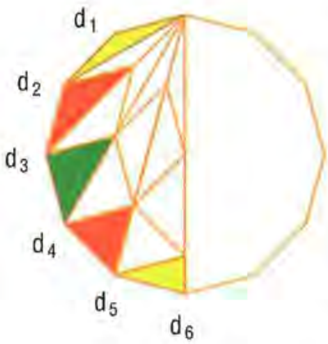
$AEF = (1/2)\ d^2_{\frac{N-1}{2}}\ \sin \pi/N$ et en différence il y a un triangle rouge.

Ce triangle est semblable à AEF, sa surface vaut : $(1/2)\ d_1{}^2 \sin \pi/N$, donc l'égalité est ici aussi démontrée.

Pour N pair, la même démonstration reste valable. A noter que pour $d_{\frac{N}{2}}$ les théorèmes de Thalès + Pythagore donnent directement :

$d^2_{\frac{N}{2}} = d^2_{\frac{N}{2}-1} + 1$

Tangram mathématique du dodécagone régulier



On peut découper le dodécagone en succession de triangles isocèles dits isotriangles (avec des côtés isocèles égaux au côté du dodécagone et des angles de valeur entière de $\pi/12 = 15°$).

Les théorèmes de Thalès et Pythagore donnent :

$d_2\sqrt{2} = d_3$

$d_2\sqrt{3} = d_4$

$2\, d_2 = d_6 = \sqrt{d_5^2 + 1}$

$$\left.\begin{array}{l} d_3 = 1 + \sqrt{3} \\ d_4 = d_2 + \sqrt{2} \\ d_5 = d_3 + 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} \\ d_5 = d_2^2 \end{array}$$

Ces propriétés permettent avec les isotriangles issus d'un dodécagone (et en utilisant toutes les pièces) de réaliser successivement les illustrations de $\sqrt{2}$;$\sqrt{3}$;$\sqrt{6}$;$\sqrt{8}$;$\sqrt{12}$: (démonstration similaire possible où des carrés remplacent les dodécagones)

dodécagone entier

1/2 dodécagone

1/3 dodécagone

1/4 dodécagone

1/6 dodécagone

1/8 dodécagone

1/12 dodécagone

1 carré

1/2 carré

Les pièces choisies ont des angles respectifs de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 105° et des longueurs de côtés comme indiqué entre les parenthèses.

(1 ; 1 ; d_2)

(1 ; 1 ; $\sqrt{3}$)

(1 ; 1 ; $\sqrt{2}$)

(1 ; 1 ; 1)

(1 ; 1 ; $1/d_2$)

On peut découper les pièces dans du carton mais nous avons réalisé des jeux en bois et en mousse, très agréables à manipuler, fort bien illustrés par différentes énigmes accessibles à des enfants dès 8 ans, pour vous faciliter la préparation. Vous pouvez les obtenir auprès de Trigam SA, Neuchâtel CH, tél. 032 721.28.38

Nous verrons dans un troisième article comment généraliser cette approche des polygones réguliers par les diagonales et ceci nous permettra d'illustrer le calcul matriciel d'une manière très concrète.

Voici quelques exemples d'équivalences de surfaces: (les 2 cadres contiennent les mêmes pièces)