Résolution de problèmes et évaluation

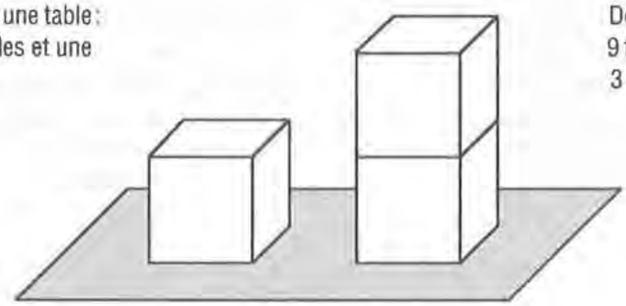
Michel Brêchet

En mathématiques, l'évaluation qui porte sur l'acquisition de répertoires mémorisés, de règles de calculs, de formules ou d'algorithmes ne pose en général pas de grandes difficultés aux enseignants. Ce type d'évaluation, largement répandu, a toute sa raison d'être, puisque tout apprentissage passe par une phase de consolidation, de structuration, voire d'automatisation. Mais faire des mathématiques, c'est aussi – et surtout – résoudre des problèmes, c'est-à-dire se poser des questions, mettre en œuvre ce que l'on sait, établir des liens entre ses connaissances, élargir l'étendue d'un champ notionnel, en découvrir de nouveaux, envisager des solutions, les vérifier, les communiquer... En conséquence, l'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes mérite, elle aussi, une place de choix dans l'enseignement des mathématiques. Mais elle est assez délicate à conduire, car elle ne se réduit pas à un « simple » contrôle des performances.

A titre d'exemple, voici un problème[1] qui a été soumis, durant une période de 45 minutes, à des élèves de 7e année d'une section à niveau d'exigences peu élevé :

Faces visibles et faces cachées

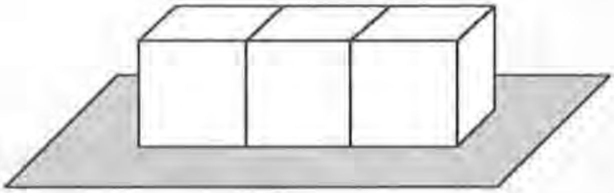
Un cube posé sur une table : 5 faces sont visibles et une face est cachée



Deux cubes empilés : 9 faces sont visibles et 3 faces sont cachées

1. Des problèmes proches de celui-ci figurent dans plusieurs moyens d'enseignement.

Trois cubes alignés sur une table : 11 faces sont visibles et 7 faces sont cachées



a) 1000 cubes empilés : combien de faces visibles et combien de faces cachées ?
b) 1000 cubes alignés : combien de faces visibles et combien de faces cachées ?

Pour le résoudre, les élèves avaient à leur disposition des petits cubes, la calculatrice, le matériel de géométrie (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et un dictionnaire de français. Ils ont travaillé seul. Cependant, ce problème aurait pu également être résolu par groupes de deux élèves et conduire ainsi à une évaluation de travaux de groupes. Un tel procédé pédagogique est par ailleurs intéressant, car il stimule les interactions entre élèves et favorise la communication.

Les travaux ont fait l'objet d'une évaluation chiffrée[2] établie sur la base de critères qui ont été communiqués aux élèves, présentés et explicités :

Présentation générale :	2 points
Précision du langage :	2 points
Clarté du compte rendu :	6 points
Résultats obtenus :	10 points

2. Dans le canton du Jura, les enseignants secondaires traduisent les compétences et les connaissances de leurs élèves par des notes allant de 1 à 6.

Reprenons ces critères un à un pour préciser – au mieux – ce qu'ils recouvrent :

• *Présentation générale*
Il s'agit d'apprécier ici la propreté, l'aptitude à rédiger correctement, la précision des tracés géométriques, la qualité des dessins...

• *Précision du langage*
Les termes utilisés sont-ils corrects ? La formation des phrases correspond-elle aux règles grammaticales en vigueur ? L'utilisation des symboles mathématiques est-elle adéquate ? Les écritures et les notations mathématiques sont-elles précises ?...

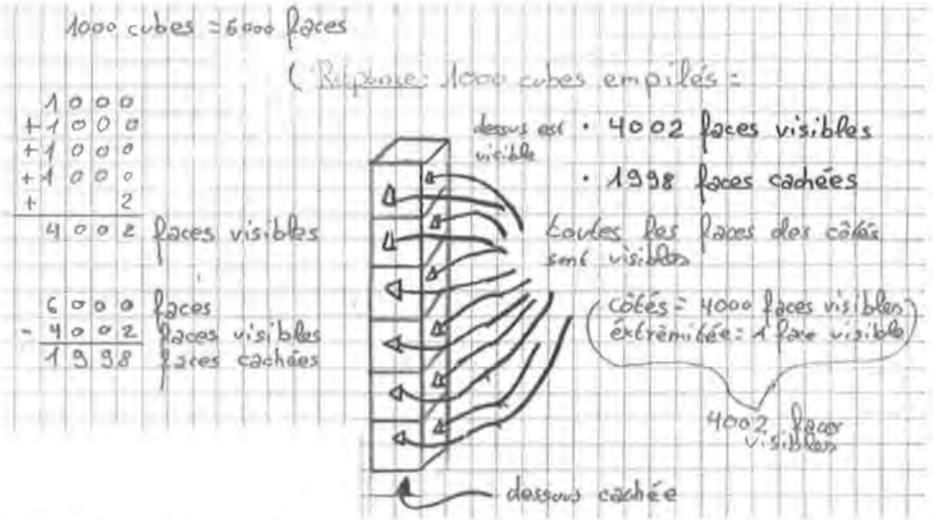
• *Clarté du compte rendu*
Plusieurs aspects relatifs à ce critère peuvent être évalués : la mise en page, la disposition des divers éléments d'information, la clarté des explications, l'aptitude à communiquer une démarche, les observations réalisées...

• *Résultats obtenus*
Dans ce problème qui touche notamment au domaine des fonctions, l'évaluation des résultats peut porter sur les essais réalisés, les méthodes mises en œuvre, les solutions trouvées, les liens effectués d'une situation à l'autre, la perception des objets géométriques en jeu...

Regards sur quelques travaux d'élèves[3]

1. S'agissant de l'empilement des cubes

A.


1000 cubes = 6000 faces
(Réponse: 1000 cubes empilés :
· 4002 faces visibles
· 1998 faces cachées
dessus est visible
toutes les faces des côtés sont visibles
côtés = 4000 faces visibles
extrémité : 1 face visible
4002 faces visibles
dessous cachée

	1000
+	1000
+	1000
+	1000
+	2
	4002 faces visibles

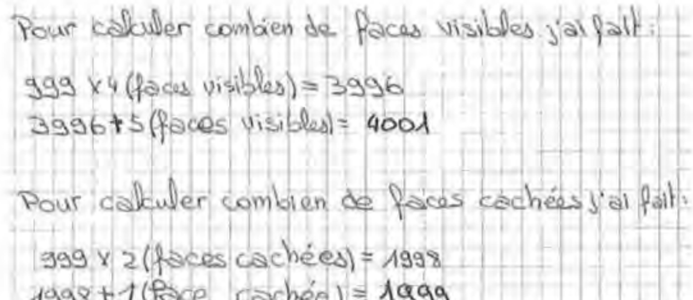
	6000 faces
−	4002 faces visibles
	1998 faces cachées

Précision du langage: A plusieurs reprises, l'emploi du signe « = » est abusif, car il ne traduit pas une relation d'égalité entre deux objets.

Clarté du compte rendu: La disposition des informations ne facilite pas la lecture du compte rendu. Il est cependant possible de saisir la démarche suivie.

Résultats obtenus: A l'exception d'une petite erreur (inattention ?), tout est juste.

B.


Pour calculer combien de faces visibles j'ai fait :
999 x 4 (faces visibles) = 3996
3996 + 5 (faces visibles) = 4001
Pour calculer combien de faces cachées j'ai fait :
999 x 2 (faces cachées) = 1998
1998 + 1 (face cachée) = 1999
(4001 + 1999 = 6000 faces cachées et visibles)

Précision du langage: La formulation des intentions pourrait être meilleure.

Clarté du compte rendu: Seule la justification des réponses est présente. Les différentes étapes de la résolution du problème n'apparaissent pas.

Résultats obtenus: Les solutions sont exactes. L'élève a par ailleurs trouvé un moyen de les valider.

3. Pour éviter les redondances, le point concernant la présentation générale n'est pas repris.

C.

Pour 10 cubes 41 faces visibles
19 faces cachées
Pour 20 cubes 81 faces visibles
39 faces cachées
Pour 30 cubes 121 faces visibles
59 faces cachées
Pour 40 cubes 161 faces cachées
79 faces visibles
Pour 1000 cubes 4001 faces visibles
1999 faces cachées

Précision du langage: Rien à signaler.

Clarté du compte rendu: Aucune information n'est fournie concernant la manière de trouver les résultats. Les cinq empilements considérés traduisent toutefois une parfaite maîtrise de la situation.

Résultats obtenus: Tout est juste.

D.

pour 10 cubes = 41 faces visibles

pour 1000 cubes = 4000 faces visibles plus la face du haut que l'ont compte en dernier parceque après les dix elle vient cachée. total <u>4001</u> faces visibles

celle-ci vient cachée, parcequ'il en vient encore 990 cubes dessus donc 40 faces visibles. celle ci vient tout en haut donc <u>4001</u> faces visibles

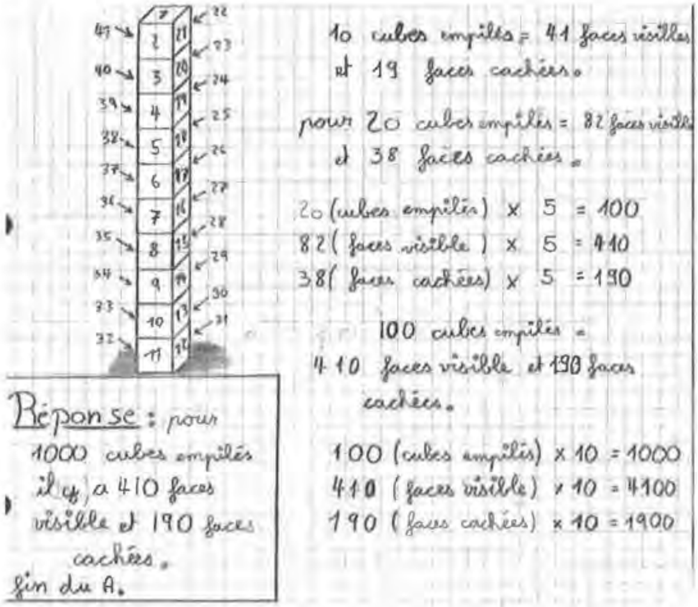
il signifie dernière

Précision du langage: La syntaxe laisse à désirer, l'utilisation du signe « = » est inadéquate.

Clarté du compte rendu: Un effort est réalisé pour décrire les différentes étapes du cheminement suivi. L'imbrication des divers éléments d'information ne facilite pas la compréhension du texte.

Résultats obtenus: La solution présentée est exacte. L'élève n'a pas abordé le cas des faces cachées.

E.



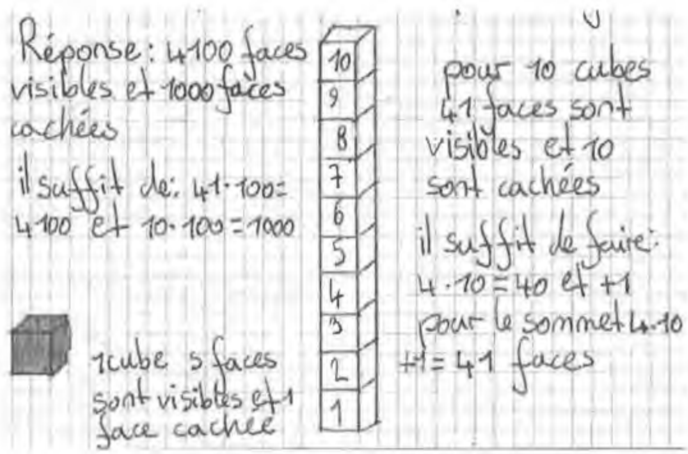
Précision du langage: A trois reprises, le signe «=» ne correspond pas à sa signification mathématique.

Clarté du compte rendu: Malgré l'absence d'explications verbales, le raisonnement mis en place par l'élève apparaît clairement.

Résultats trouvés: L'élève pense que la situation relève de la linéarité. Il s'appuie alors sur la propriété du produit de toute fonction linéaire pour calculer ses solutions. Par exemple:

	x 2	x 5	x 10	
Nombre de cubes empilés	10	20	100	1000
Nombre de faces visibles	41	82	410	4100
	x 2	x 5	x 10	

F.



Précision du langage: Dans l'expression «il suffit de faire: 4·10 = 40 et + 1 pour le sommet», le signe «+» pourrait avantageusement être remplacé par le mot «ajouter».

Clarté du compte rendu: La stratégie mise en place pour calculer le nombre de faces visibles est évidente. Elle est plus obscure à propos des faces cachées.

Résultats trouvés: L'élève pressent, à tort, que la situation est linéaire:

10 cubes $\mapsto$ 41 faces visibles
1000 cubes $\mapsto$ 4100 faces visibles.

Pour affirmer qu'à 10 cubes empilés correspondent 10 faces cachées, ce qui est faux, l'élève a sans doute procédé par linéarité (1 cube ↦ 1 face cachée, 10 cubes ↦ 10 faces cachées), ou peut-être a-t-il compté toutes les surfaces de contact (entre les cubes et entre le premier cube et la table).

2. S'agissant de l'empilement et de l'alignement des cubes

G.

a) on fait (4·1)+1=5   (4·2)+1=9   (3·4)+1=13   il
faut faire (1000·4)+1=4001 vis je fais toujours ·4+1
il y a 4001 faces visibles
1 cube: 1 face cachée   2 cubes: 3 faces cachées
1'000 cube 19'999 faces cachees

a) 1 cube = à 5 faces visi   2 cubes = à 9 faces visi   3 cubes = à 13
faces visi.

a) il y a 19'999 faces cachées

b) on fait (3·3)+2=11   (4·3)+2=14   (5·3)+2=17   il faut faire
(1'000·3)+2=3'002
il y a 3002 faces visibles

b 19'999 + 1'000 = 20'999 faces cachées
il y a 20'999 faces cachées

Précision du langage: Comme dans d'autres travaux, l'utilisation du signe «=» est à certaines reprises inadéquate.

Clarté du compte rendu: Les différentes étapes du cheminement sont parfois imbriquées. La lecture du compte rendu n'est donc pas très aisée. La procédure utilisée pour calculer le nombre de faces cachées de 1000 cubes empilés n'apparaît pas.

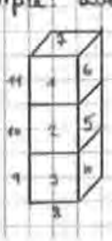
Résultats trouvés: Les solutions concernant les faces visibles sont justes. A propos des faces cachées, le lien effectué par l'élève entre les deux situations est perceptible: l'ajout du nombre 1000, d'un cas à l'autre, correspond au nombre de faces en contact avec la table d'un alignement de 1000 cubes. Il n'y a pas de remise en question de l'ordre de grandeur des résultats trouvés.

H.

	×1000		
Cubes	1	2	1000
Visibles	5	9	5000
Cachées	1	3	1000
		×1000	

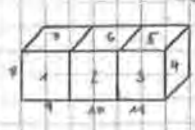
	×1000		
Cubes	3	3	1000
Visibles	15	11	5000
Cachées	7	7	1000
		×1000	

C'est la même chose Empilés ou Alignés.
Exemple : avec 3 carré



il y a 11 face con voin et 7 con voix pas.

C'est le même



il y a 11 face con voix et 7 con voix pas.

Précision du langage: L'élève n'est pas de langue maternelle française. Certaines expressions sont imprécises.

Clarté du compte rendu: Le recours à des tableaux de valeurs et à une exemplification facilite la compréhension du compte rendu.

Résultats obtenus: L'élève ne prend en compte que la première colonne de chacun de ses tableaux (cas d'un seul cube posé sur une table) pour fournir ses réponses. Il ne vérifie pas la validité de son raisonnement (fondé sur la linéarité) pour deux cubes empilés ou trois cubes alignés. Le dénombrement des faces visibles de trois cubes empilés ou alignés ne correspond pas à la réalité. Cette dernière procédure découle peut-être des résultats précédents.

I.

- On s'est amusé à chercher de combien augmente les faces visibles et les faces cachées, de toujours un cube en plus.
- avec 10 cubes il y a 41 faces visibles et 19 faces cachées
- avec 100 cubes il y a 401 faces visibles et 199 faces cachées
- avec 1000 cubes il y a 4001 faces visibles et 1999 faces cachées

Réponse : avec 1000 cubes : 4001 faces visibles et 1999 faces cachées

Explication : entre 10 cubes par exemble il y a un intervale de 9 entre les 10 cubes, alors on a fait 9 x 2 (parce qu'entre 1 intervale il y 2 faces chachées) + 1 (parce qu'il reste une face cachée dessous la tour !) facile !

Et pour les faces visibles on les a comptées ! facile aussi !

pour 10 cubes : il y a 32 faces visibles et 28 faces cachés

pour 100 cubes : il y a 302 faces visibles et 208 faces cachées

pour 1000 cubes : il y a 3002 faces visibles et 2008 faces cachées

Réponse : avec 1000 cubes, 3002 faces visibles et 2008 faces cachées

Précision du langage: Dans certaines phrases, la combinaison des unités linguistiques n'est pas correcte.

Clarté du compte rendu: La méthode mise en œuvre apparaît clairement. Un bel effort d'explication est réalisé.

Résultats obtenus : Les solutions relatives à l'empilement des cubes sont justes. A partir d'un alignement de 10 cubes et de l'observation des nombres de faces visibles de 10, 100 et 1000 cubes empilés, l'élève déduit, à tort, les nombres de faces visibles et cachées de 100 et 1000 cubes alignés :

10 cubes empilés	↦	41 faces visibles		
100 cubes empilés	↦	401 faces visibles		
1000 cubes empilés	↦	4001 faces visibles		
10 cubes alignés	↦	32 faces visibles	et	28 faces cachées
100 cubes alignés	↦	302 faces visibles	et	208 faces cachées
1000 cubes alignés	↦	3002 faces visibles	et	2008 faces cachées

Pour conclure

L'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes prend tout son sens lorsqu'elle est répétée à intervalles réguliers. Elle permet alors de témoigner de progrès accomplis, voire de capacités mentales stables. Elle s'inscrit donc – prioritairement – dans le long terme, tout comme les apprentissages d'ailleurs. Plusieurs évaluations sont ainsi nécessaires pour esquisser une image globale du développement des compétences des élèves.

La multiplication est-elle commutative ?
De M. Bernard Lamirel, Dijon

[ndlr] *Notre fidèle fournisseur de cryptarithmes, nous offre de nouveaux casse-tête sur un thème qui lui est cher. Après voir trouvé un cas de commutativité de la multiplication en allemand VIER + VIER + VIER = ZWÖIF et DREI + DREI + DREI + DREI + = ZWÖIF, (Voir* Math-Ecole *no 195, p. 17) il a passé à l'espagnol, au français et à l'italien. Mais ce n'est pas facile, il y a des cas où ça marche pour un produit, mais de là à arriver à la commutativité, le chemin est encore long.*

Nous nous permettons de rappeler les règles de ces opérations arithmétiques à reconstituer, à l'intention de ceux qui les auraient oubliées ou qui ne les connaissent pas encore :
- *chaque chiffre est représenté par une même lettre,*
- *deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,*
- *aucun nombre ne commence par le chiffre 0.*

En espagnol il y a une solution dans un cas et aucune pour l'autre.

a)
```
   C U A T R O
   C U A T R O
   C U A T R O
   C U A T R O
 + C U A T R O
 -------------
   V E I N T E
```

a')
```
     C I N C O
     C I N C O
     C I N C O
 +   C I N C O
 -------------
   V E I N T E
```

(suite page 41)