68

MATH ECOLE

MAI 1975

14e ANNÉE

MATH ECOLE 68

14e ANNÉE MAI 1975

Pouvoir calculer

Ce numéro de Math-Ecole est consacré pour une bonne part au calcul, c'est-à-dire aux opérations telles qu'on va les enseigner dans la ligne du programme romand. Or, avant même que cet enseignement soit généralisé à l'ensemble des classes de troisième, on entend souvent répéter: «Ils ne savent plus calculer !» Analysons d'un peu plus près cette affirmation qui recouvre en fait deux propositions: «Jadis et naguère, les élèves sortaient de l'école en sachant calculer; aujourd'hui les élèves qui sortent de l'école ne savent pas calculer.»

Rendons cette justice à ceux qui s'expriment ainsi: la première proposition est vraie, tout au moins en ce qui les concerne. Les enseignants et d'une manière générale les personnes qui donnent leur opinion sur les réformes scolaires «ont de l'instruction» et connaissent leurs rudiments de calcul, voire leur algèbre élémentaire. Mais on ne peut en inférer que tout adulte formé par l'enseignement traditionnel est capable de calculer aisément; tant s'en faut. Il suffit de consulter des statistiques sur la question pour savoir qu'il n'en est rien et que c'est bien l'échec des méthodes traditionelles d'enseignement du calcul qui a été un des éléments moteurs des réformes en cours.

Quant à la seconde proposition, elle devrait au moins être nuancée: «Il y a des élèves qui sortent de l'école et qui ne savent pas calculer». Quel enseignement ont-ils reçu ? modernisé ou non ? Qu'entend-on par calcul ?

Il est clair que les objectifs de l'enseignement ne sont plus ceux d'autrefois. Rien ne sert de calculer «à la main» un résultat avec une très grande précision quand il existe maintenant déjà des calculatrices électroniques de poche capables d'effectuer toutes les opérations mathématiques de la vie courante et qui coûtent moins cher qu'un vélo. En revanche, à la fin de la scolarité obligatoire, un élève doit pouvoir estimer rapidement l'ordre de grandeur d'un résultat par larges approximations. Voilà pour ce qui est du calcul proprement dit.

Mais l'enseignement actuel s'attache plus encore à une réflexion sur le rôle des opérations, sur leur enchaînement. Pour calculer aujourd'hui, il faut pouvoir lire, interpréter et même construire des organigrammes, utiliser des représentations graphiques et des barèmes de tous genres. Il en coûtera tout au plus l'abandon de recettes de mélanges et de vidanges de bassin.

L'enseignement moderne des mathématiques donne à l'adulte de demain les moyens d'appréhender le réel avec plus de méthode, plus d'imagination et plus d'efficacité. Il dote l'élève d'aujourd'hui de pouvoirs accrus, ceux d'une intelligence mieux musclée, qui, à la fois, renforcent et dépassent le «pouvoir calculer» de jadis.

A. Calame

Mathématique 3^e année (seconde partie)

Note liminaire

Les lecteurs de «Math-Ecole» ont trouvé dans le numéro 67, du mois de mars, une présentation des avenues ER (Ensembles et Relations) et DE (Découverte de l'Espace) de l'ouvrage romand «Mathématique 3e année». Les auteurs de ces articles ont tenté de décrire une sorte de trajectoire, dans ces avenues, de quelques thèmes à travers les quatre premières années de l'enseignement primaire.
Nous procédons ici de la même façon, tenant compte du fait que les enseignants de nos cantons ont déjà l'ouvrage entre leurs mains. On ne trouvera donc pas ici une description complète des avenues NU (Numération) et OP (Opérations); il nous semble plus intéressant de centrer notre propos sur un thème: les «Echanges», d'en montrer les difficultés et la richesse, tout en établissant des liaisons avec d'autres notions et techniques.
Nous croyons simplifier la lecture du texte qui suit en utilisant, pour les références, les abréviations suivantes: Méth.: Méthodologie; F.: fiches; 1. P., 2. P., 3. P., 4. P.,: première, deuxième, troisième, quatrième année primaire.

F. B.

AVENUES NU (Numération) et OP (Opérations)

Echanges, équivalence de collections, propriétés des opérations

par François Brunelli, professeur de mathématique, Sion

Dans la vie courante du monde des adultes, les notions d'*échange* et de *valeur* sont liées la plupart du temps à des activités commerciales. Aux échanges sous forme de troc ont succédé très vite les échanges de marchandises contre de la monnaie, celle-ci devenant à son tour une marchandise, et pas seulement pour les numismates. La notion de valeur est plus complexe: dans bien des situations, cette notion est grevée de subjectivité et d'éléments affectifs qu'il est bien difficile de mesurer.
Dans le monde de l'enfance, le poids de l'affectivité est considérable. Franklin ne s'est-il pas dépossédé de toute sa bourse contre un misérable sifflet ? Pouvoir magique d'égaler les trilles d'un rossignol ! Voyez des enfants qui échangent des billes: un tel préfère les grosses «agates», un autre ne veut que des «bleues transparentes» et celui-là accumule les «marbres» de terre. Donnez à choisir à un enfant de six ans entre cinq pièces de 20 c, deux pièces de 50 c et une pièce de 1 fr: on peut tenir le pari qu'il aura l'impression d'être plus «riche» — d'obtenir davantage dans un magasin — en prenant les cinq pièces de quatre sous.

Les auteurs de «*Mathématique 3e année*» précisent (Méth. 3. P., p. 43) dans une introduction ce qu'ils croient être essentiel dans les activités faisant intervenir les échanges:

«Le JEU 3 et le JEU 4 concernent les échanges. La notion d'équivalence apparaît évidemment déjà dans les jeux de groupement; dans les jeux d'échanges, on remplace l'idée de groupement par celle de valeur attribuée aux différentes pièces utilisées. Les échanges conviennent particulièrement bien pour illustrer les mécanismes opératoires. Signalons qu'à un degré plus élevé les échanges sont très utiles pour l'étude des unités de mesure, de même que pour l'introduction des nombres à virgule.»

Cette citation nous donne l'occasion de préciser la signification du terme *équivalence:* deux collections sont équivalentes si, dans la règle du jeu choisie, elles ont la même valeur; ainsi, une collection de dix pièces de 20 c est équivalente à une collection de vingt pièces de 10 c, elle-même équivalente à la collection ne comportant qu'une pièce de 2 fr. En aucun cas ces trois collections ne sont égales: à vrai dire, une collection n'est égale qu'à elle-même.

En *première année*, plusieurs jeux de *groupement* font intervenir des échanges; cependant, il ne s'agit pas encore de la vraie notion d'échange, trop difficile pour cet âge.

Lorsque les enfants se groupent pour faire des rondes de quatre, puis des carrousels de seize, en se donnant la main, ils peuvent contrôler par comptage si rondes et carrousels sont correctement constitués (Méth. 1. P., NU, JEU 1); lorsqu'ils groupent trois cailloux dans un cornet, puis trois cornets dans un sac, ils peuvent palper ou ouvrir cornets et sacs pour procéder à une vérification (Méth. 1. P., NU, JEU 2); lorsqu'ils travaillent avec du matériel multibase (cube, barre, plaque), ils peuvent toujours reconstruire eux-mêmes une barre ou une plaque à partir de petits cubes.

Autrement dit, dans cette première phase, le comptage ou la mesure sous-jacente permettent de vérifier les échanges. On utilise bien le vocabulaire: «J'échange trois cornets contre un sac; j'échange une barre contre cinq petits cubes; etc.», mais la valeur se fonde sur le nombre d'objets ou, implicitement, sur une mesure de longueur, et non sur une convention gratuite adoptée d'un commun accord.

Néanmoins (Méth. 1. P., NU, JEU 7), on propose une première approche de la notion d'échange: une vache contre trois moutons, cinq petits ronds contre un grand rond, une noix contre quatre noisettes. On laisse les enfants effectuer leurs échanges librement et on constate souvent que chacun cherche à avoir le plus d'objets possible: c'est l'histoire des cinq pièces de 20 c (cf supra)... L'équivalence de collections est encore fortement chargée d'affectivité. C'est la raison pour laquelle, en 1. P., les opérations ne sont abordées qu'à partir des groupements. Du reste, au moins dans les Fiches, on se limite au groupement de première espèce, laissant pour les années suivantes l'approche du processus récurrentiel.

En *deuxième année,* on développe les activités de groupement, en mettant l'accent sur les groupements de deuxième espèce dans un système récurrentiel. Par exemple (Méth. 2. P., NU, JEU 1), des fraises sont rassemblées dans un panier, puis les paniers dans des caisses.
On respecte toujours les étapes d'approche: jeu, manipulation, expression orale, code verbal, code chiffré. Les échanges se font dans les deux sens; si l'on met six fraises dans un panier et six paniers dans une caisse:

— une collection de 45 fraises peut être échangée contre une caisse (de 36 fraises), un panier (de 6 fraises) et 3 fraises isolées;
— on peut échanger une caisse, deux paniers et 5 fraises isolées contre une collection de 53 fraises.

Ces deux aspects correspondent aux activités de codage et de décodage.

Arrêtons-nous un instant au JEU 6, NU, 2. P. et aux fiches qui s'y rapportent (F. 2. P., NU, 33 à 38).
On propose aux enfants une activité «commerciale»: divers jouets sont à vendre et la monnaie d'échange est constituée de formes carrées et triangulaires, selon la règle:

un carré vaut trois triangles.

On voit le parti qu'on peut tirer d'une telle situation:

— établir la règle d'un commun accord: il s'agit d'une pure convention, où l'affectivité ne joue plus aucun rôle;
— contrôler la compréhension de la règle par tous: contre quoi peut-on échanger deux carrés ? trois carrés ? douze triangles ? un carré et deux triangles ? etc.;
— former des collections équivalentes:

3 c. $\equiv$ 2 c. et 3 t. $\equiv$ 1 c. et 6 t. $\equiv$ 9 t.

— comparer les prix de plusieurs jouets: une poupée qui coûte 8 t. vaut autant qu'un ours qui coûte 2 c. et 2 t.; une voiture qui coûte 3 c. et 2 t. est plus chère que la poupée, etc.;
— payer avec le moins de pièces possible;
— voir si l'on est assez riche pour acheter deux objets;
— rendre la monnaie.

Dans ce type d'activité comme dans de nombreuses autres situations, il est nécessaire de faire varier et le matériel et la règle d'échange. Les enfants voudront peut-être jouer avec la monnaie courante: c'est un exemple intéressant de règle non récurrentielle.

Nous donnons (fig. 1, page 11) quelques exemples tirés des fiches, en indiquant chaque fois l'objectif qu'elles recouvrent.

Nous avons développé ailleurs («Math-Ecole» numéro 63, mai 1974, pp. 15 à 25) les propriétés des opérations illustrées par les «*machines*» numériques ou non numériques. Plusieurs activités prévues en deuxième année (Méth. 2. P., OP, JEUX 6, 7 et 8) permettent la découverte de ces propriétés. Nous ne retiendrons ici qu'un aspect de cette recherche: les chaînes *équivalentes*. Bien que le terme équivalent signifie ici «fait le même travail que», on n'est pas si loin qu'il peut paraître de l'équivalence de collections. En effet les relations de liens verbaux:

— «... est équivalent à...» dans le sens de «... a la même valeur que...» et
— «... est équivalent à...» dans le sens de «... fait le même travail que...» peuvent toutes deux être exprimées par le lien verbal:
— «... peut être remplacé par...».

Dans un cas, chaque classe d'équivalence est constituée par l'ensemble des collections qui ont la même valeur; dans l'autre cas, il s'agit de l'ensemble des chaînes de «machines» telles que, pour toutes les chaînes de la classe, l'ensemble de définition est le même, et qu'à une collection donnée placée à l'entrée corresponde toujours une même collection à la sortie. Il paraît intéressant de noter que, dans le premier cas, le cardinal d'une classe est un nombre fini tandis que, dans le deuxième cas, on peut trouver une infinité de chaînes équivalentes à une chaîne donnée: les enfants ne manquent pas d'imagination dans ce domaine.

Le jeu du tourniquet (Méth. 2. P., OP, JEU 7), par exemple, avec les quatre opérateurs (boutons) notés **1** (avancer d'une case), **2** (avancer de deux cases), **3** (avancer de trois cases) et **0** (avancer de quatre cases, c'est-à-dire rester en place) conduit à des équivalences telles que:

$$\mathbf{1\,3\,2\,1} \equiv \mathbf{3\,2\,1\,1} \equiv \mathbf{0\,3} \equiv \mathbf{2\,2\,3} \equiv \mathbf{1\,2} \equiv \ldots$$

C'est à partir de l'observation de ces équivalences que se dégagent l'existence de l'opérateur neutre, la commutativité et l'associativité de la composition des déplacements. Se dégagent aussi des techniques permettant de découvrir, de cas en cas, des méthodes pour trouver, dans une classe de chaînes équivalentes, celle(s) qui comporte(nt) le plus petit nombre d'opérateurs.
Dans le cas du tourniquet à quatre positions, toute chaîne d'opérateurs est équivalente à l'un seulement des opérateurs **0**, **1**, **2** ou **3**. L'avantage des situations non numériques est le petit nombre d'objets sur lesquels les «machines» opèrent, ce qui permet de centrer l'attention sur les propriétés des opérations, en évitant une certaine dispersion due aux difficultés du calcul mental.

De plus, lorsqu'on aborde des chaînes de «machines» numériques, tout n'est pas aussi simple:

— si l'on décide, par exemple, de ne travailler qu'avec les nombres de 0 à 50 (référentiel), des chaînes de «machines» à additionner peuvent se bloquer; par exemple la chaîne:

(+5) (+3) (+7)

se bloque au départ pour les nombres strictement supérieurs à 45; elle se bloque à la deuxième étape pour les nombres strictement supérieurs à 42, et à la troisième étape pour les nombres strictement supérieurs à 35. Ainsi, cette chaîne ne «fonctionne» que si, à l'entrée, on a un nombre de 0 à 35.

— On peut faire une remarque analogue pour une chaîne de «machines» à soustraire; cependant, des chaînes équivalentes de «machines» à additionner fonctionneront toutes pour le même ensemble de départ; de même pour des chaînes de «machines» à soustraire; on peut néanmoins remarquer que les blocages n'ont pas lieu aux mêmes étapes.

— Les choses se passent encore différemment lorsqu'une chaîne se compose de «machines» à additionner et de «machines» à soustraire. Par exemple, avec le même référentiel que ci-dessus, la chaîne:

(+12) (-7)

n'est pas équivalente à la chaîne:

(-7) (+12)

car la première fonctionne pour les nombres de 0 à 38 tandis que la seconde fonctionne pour les nombres de 7 à 45. Prudence donc, avant d'affirmer — ce qui est faux — que chacune des deux chaînes est équivalente à la «machine» unique (+5) !

Ces considérations n'apparaissent pas en deuxième année (Méth. 2. P., OP, JEU 8) — mais les enfants peuvent y entraîner leur maîtresse —; elles apparaissent dans la Méthodologie de troisième année (Méth. 3. P., OP, JEUX 2 et 7) et trouvent un développement en quatrième; de plus, elles permettront, en temps voulu, une introduction de l'ensemble **Z** des entiers relatifs et, si l'on considère les «machines» à multiplier et à diviser, une approche de l'ensemble **Q** des nombres rationnels.
Nous donnons, pour mémoire, quelques situations issues des Fiches de troisième année, accompagnées d'un bref commentaire (fig. 2, page 12).

Trois jeux de la méthodologie de *troisième année* portent expressément sur les échanges (Méth. 3. P., NU, JEUX 3 et 4; OP, JEU 5). De plus trois autres jeux proposent des activités à partir de «machines» numériques (Méth. 3. P., OP, JEUX 2 et 7) ou non numériques (Méth. 3. P., OP, JEU 8). Nous voulons ici analyser leur contenu, du point de vue que nous nous sommes fixé.

Dans l'avenue Numération, il s'agit de la pratique des échanges:

— suivant une règle récurrentielle à deux niveaux (on échange un rubis contre trois saphirs et un saphir contre trois topazes soit:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{s\ s\ s} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{s} \equiv \mathbf{t\ t\ t});$$

— suivant une règle usuelle non récurrentielle (pièces de monnaie de 2 fr, 1 fr, 50 c, 20 c, 10 c et 5 c).

Avec les pierres précieuses, les enfants

— comparent deux collections, par exemple:
la collection comprenant **8 t** a moins de valeur que la collection composée de **1 r**;
— trouvent des (les) collections équivalentes à une collection donnée, par exemple:

$$\mathbf{1\ r,\ 2\ s,\ 2\ t} \equiv \mathbf{1\ r,\ 1\ s,\ 5\ t} \equiv \mathbf{1\ r,\ 8\ t} \equiv \mathbf{5\ s,\ 2\ t} \equiv \ldots$$

La recherche de toutes les collections équivalentes est particulièrement intéressante: elle permet à la fois une émulation entre groupes d'élèves, une mise en commun des trouvailles, une organisation des résultats qui donne la certitude qu'on n'a oublié aucune collection;
— trouvent une règle d'échange à partir d'une équivalence donnée, par exemple si

$$\mathbf{1\ r,\ 2\ s,\ 2\ t} \equiv \mathbf{1\ r,\ 6\ t,}$$

on peut définir deux règles d'échanges différentes;
— découvrent, au niveau du matériel, la distributivité de la multiplication sur l'addition: si quatre enfants reçoivent chacun la collection: **2 r, 1 s, 3 t**, en réunissant leurs collections ils obtiennent: **8 r, 4 s, 12 t**, le nombre de chaque catégorie étant multiplié par quatre;
— cherchent la collection équivalente à une collection donnée en utilisant le moins de pièces possible, ou éventuellement en n'utilisant qu'une catégorie de pièces;
— écrivent les codes de collections données et constituent les collections définies par leurs codes;
— comparent les codes de collections équivalentes;
— réunissent plusieurs collections, écrivent le code correspondant à chaque collection ainsi que le code correspondant à leur réunion;
— répartissent une collection de pierres précieuses entre plusieurs personnes, de façon que chacune reçoive une collection de même valeur.

On décèle aisément, à travers ces activités apparemment ludiques, un certain nombre d'intentions: faire prendre conscience de la notion d'échange qui intervient dans toute opération numérique (la mal nommée «retenue», terme qui devrait disparaître du langage scolaire); vivifier, par expérimentation, les propriétés des opérations et préparer une intériorisation des techniques; consolider la compréhension de la valeur positionnelle des chiffres dans un système de numération, en particulier dans celui de base dix:

3578 = 3 **M**(ille), 5 **C**(entaine), 7 **D**(izaine), 8 **U**(nité).

Pour souligner l'arbitraire qui préside au choix d'une convention, on veille à varier le plus possible les règles d'échange avec du matériel donné; par exemple, toujours avec les pierres précieuses, ces règles peuvent être:

— **r** ≡ **s s s** et **s** ≡ **t t t** ,
— **r** ≡ **s s s s** et **s** ≡ **t t t t** , etc.,
— **s** ≡ **t t t t t** et **t** ≡ **r r r r r**, etc.

On peut aussi changer de thème et de matériel. En particulier, il est souhaitable, à titre de contre-exemple, d'adopter une règle d'échange non récurrentielle:

t t ≡ **s s s** et **s s** ≡ **r r r r** ;

il est bien entendu qu'alors le lien avec la numération de position s'estompe en faveur des échanges, mais les propriétés opératoires restent contrôlables. Un exemple plus usuel de règle non récurrente est celui de la monnaie (Méth. 3. P., NU, JEU 4).
Le lecteur trouvera plus loin (fig. 3) quelques illustrations tirées soit de la Méthodologie, soit du cahier de Fiches.

Dans l'avenue Opération, le jeu de la soupe aux légumes (Méth. 3. P., OP, JEU 5) s'inscrit particulièrement bien dans la suite de notre propos.
Le thème: pour faire une soupe aux légumes il faut, par exemple, pour une personne, un poireau, deux carottes et trois pommes de terre. Nous représentons ci-après par **v** (vert) le poireau, par **r** (rouge) la carotte et **j** (jaune) la pomme de terre; les enfants, pour les manipulations, disposent de jetons de trois couleurs. Dans une première étape, ils établissent le tableau suivant:

	v	**r**	**j**
1 personne	1	2	3
2 personnes	2	4	6
3 personnes	3	6	9
...	...	...	...
9 personnes	9	18	27
etc.			

qui illustre, comme nous l'avons noté plus haut, la distributivité de la multiplication sur l'addition; mais on peut y observer d'autres choses, par exemple: la suite des entiers naturels dans la colonne **v**, la suite des nombres pairs dans la colonne **r**, la suite des multiples de 3 dans la colonne **j**; le passage d'une

ligne à la suivante peut se faire par addition du code $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$; pour 9 personnes, on triple les nombres du code correspondant à 3 personnes; etc.
En modifiant la recette de la soupe aux légumes, on fait apparaître d'autres suites intéressantes.

Si maintenant, on convient d'une règle d'échanges telle que:

v ≡ **r r r r r** et **r** ≡ **j j j j j**,

une motivation étant indiquée en cours de jeu, les enfants obtiennent deux séries de codes qu'ils placent côte à côte:

v	r	j
	2	3
	4	6
	6	9
	8	12
	10	15
	12	18
	14	21
etc.		

v	r	j
	2	3
1	0	1
1	2	4
2	0	2
2	3	0
3	0	3
3	3	1
etc.		

La liste de droite est une série de codes en base cinq: les échanges ont été tous effectués, et on a la soupe... la plus claire possible ! Il faut remarquer que dans la liste de gauche, on ne peut parler de base: tant que les échanges n'ont pas été faits, on peut se permettre d'écrire, par exemple, 15 dans la colonne **j**. Précisons: le code $\boxed{}\boxed{10}\boxed{15}$ est équivalent, selon la règle convenue, au code $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{0}$, mais seul le second est une écriture correcte en base cinq.

Diverses observations sont possibles en regardant de plus près le tableau de droite. En voici trois, significatives:

— Pour obtenir le code $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}$ on peut procéder de deux façons:

$$\begin{array}{rr} & 2\ 3 \\ + & 2\ 3 \\ + & 2\ 3 \\ \hline & 1\ 2\ 4 \end{array} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{array}{rr} & 2\ 3 \\ \times & 3 \\ \hline & 1\ 2\ 4 \end{array}$$

L'une des dispositions correspond à l'addition itérée, l'autre à la disposition classique — du moins chez nous — de la multiplication. Tous les échanges («retenues») qui interviennent dans ces deux opérations sont fondés sur une manipulation que l'on peut, que l'on doit permettre à l'enfant chaque fois qu'il en éprouve le besoin. C'est un truisme de dire que l'enfant n'est pas une machine, mais un petit homme qui veut comprendre le pourquoi de techniques que les adultes utilisent; et pourtant, parfois, que d'impatiences chez celui qui enseigne !

— La comparaison des codes $\boxed{}\boxed{2}\boxed{3}$ et $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{0}$ est fondamentale. En troisième année, le programme romand prévoit la multiplication par un nombre strictement inférieur à la base; cette comparaison interviendra donc en quatrième année: En mettant en regard l'addition itérée et l'écriture multiplicative, on conduit au pourquoi du décalage vers la gauche et de l'apparition du zéro, lorsqu'on multiplie un nombre par la base. Cette compréhension, qui doit intervenir bien sûr dans plusieurs situations — exemple d'utilité des diverses bases de numération — fonde la technique de la multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

— Utilisons encore le même tableau pour illustrer cette technique. On peut y lire:

$$\begin{array}{rrrr} & & 2 & 3 \\ \times & & 1 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrrr} & & 2 & 3 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 4 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{rrrr} & 2 & 3 & 0 \\ + & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 4 & 0 & 4 \end{array}$$

Mais ce dernier code serait celui de la ligne suivante du tableau, et il correspond à la multiplication suivante, disposée suivant notre technique traditionnelle:

$$\begin{array}{rrrr} & & 2 & 3 \\ \times & & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \\ + & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 4 & 0 & 4 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rrrr} & & 2 & 3 \\ \times & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 4 \\ + & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 4 & 0 & 4 \end{array}$$

Nous ne risquerons rien de répréhensible en répétant qu'ici, nous n'avons présenté qu'un raccourci de lentes démarches pédagogiques: tant que cela paraîtra nécessaire à tel enfant pris individuellement, on l'autorisera à recourir à un matériel, de façon à éviter à tout prix de vieilles formulations dénuées de sens qui surgissent de mon enfance: «trois fois sept, vingt et un, je «pose» un et je «retiens» deux; je «mets» un zéro (ou «un petit trait»), etc. «Posons» une fois pour toutes que l'enseignement est chose sérieuse, «retenons» que l'enfant mérite notre respect et... «mettons» qu'il y a des progrès à faire en bonne pédagogie.

Mais trêve de plaisanterie. En guise de conclusion, nous laissons le lecteur méditer quelques situations choisies dans la Méthodologie ou les Fiches de troisième année (fig. 3, page 13). Nous espérons l'avoir convaincu que la notion d'*échange*, après avoir été décantée de sa charge affective, est un puissant moyen de faire avec nos enfants de la bonne mathématique.

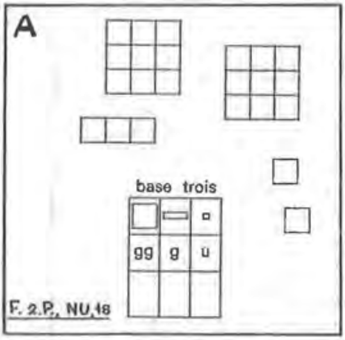
FIGURE 1.

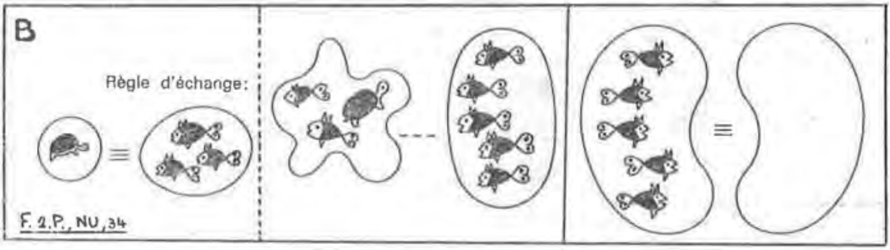
A. CODAGE D'UNE COLLECTION EN BASE TROIS.
LE MATERIEL SUGGERE PERMETTRAIT DES "ECHANGES" AVEC IDEE SOUS-JACENTE DE MESURE.

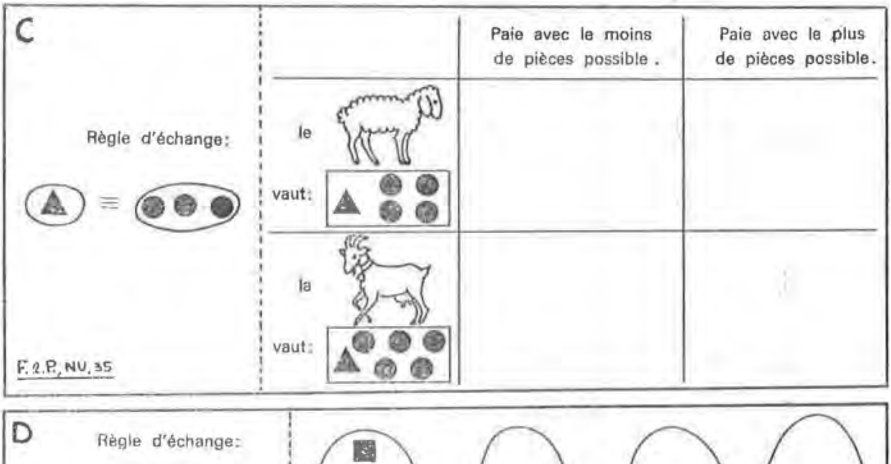
B. ICI, LA REGLE D'ECHANGE EST ARBITRAIRE ET CONVENTIONNELLE.

C. REGLE D'ECHANGE SUGGERANT LA MONNAIE. L'ACCENT EST MIS SUR L'EQUIVALENCE DE COLLECTIONS, L'AFFECTIVITE NE DEVANT PLUS JOUER AUCUN ROLE.

D. RECHERCHE DE TOUTES LES COLLECTIONS EQUIVALENTES, DANS UNE REGLE D'ECHANGE "DEUX CONTRE TROIS".







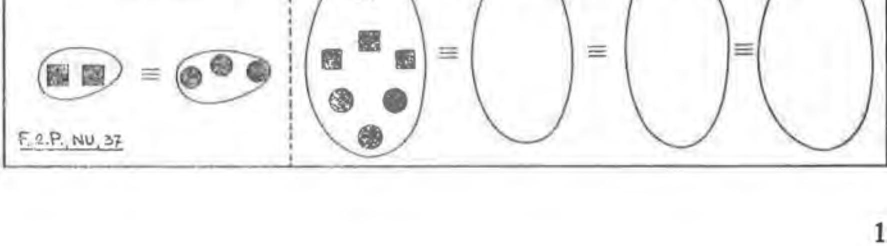
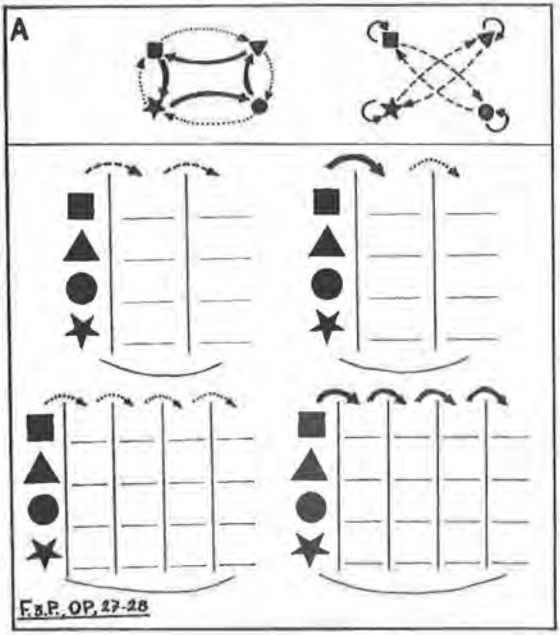


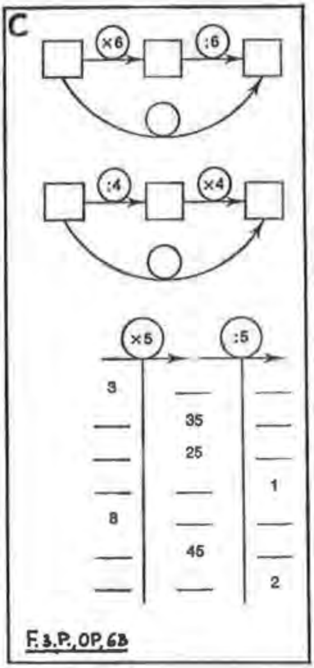
FIGURE 2

A. FAIRE FONCTIONNER UNE CHAINE DE "MACHINES" NON NUMERIQUES; TROUVER LA "MACHINE" UNIQUE E-QUIVALENTE.
ON RECONNAITRA UNE STRUCTURE DE GROUPE.

B. DECOMPOSER UNE "MACHINE" EN UNE CHAINE EQUIVALENTE; LA SECONDE PARTIE PORTE SUR LA "MACHINE" NEUTRE.
Y A-T-IL DES DECOMPOSITIONS QUI PROVOQUENT DES BLOCAGES ?

C. DANS LE PREMIER ET LE TROISIEME CAS, IL N'Y A PAS POSSIBILITE DE BLOCAGE. DANS LE DEUXIEME CAS, SEULS LES MULTIPLES DE 4 CONVIENNENT A L'ENTREE.





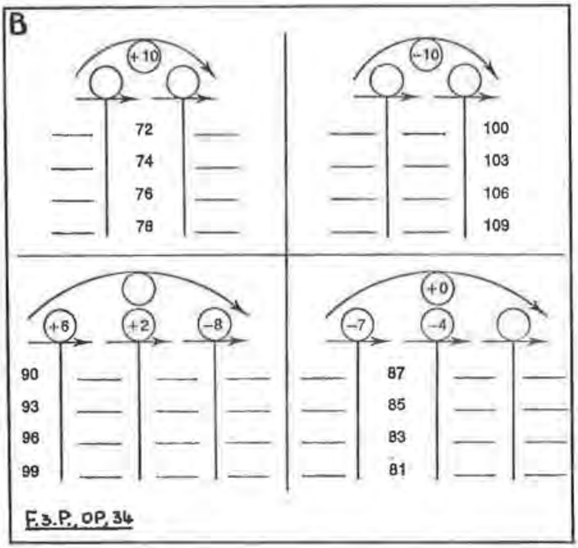
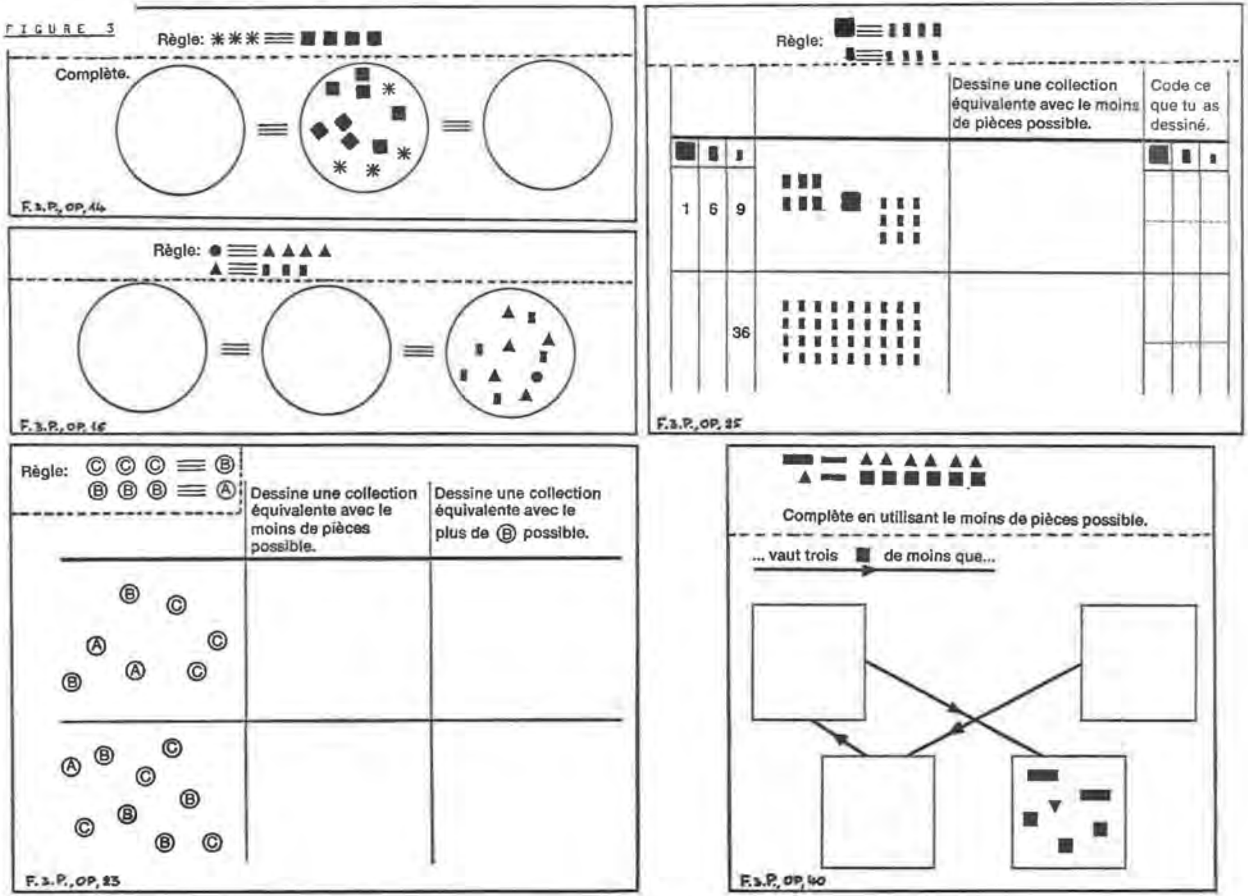


FIGURE 3



Règle:
Complète.
F.3.P., OP, 14
Règle:
F.3.P., OP, 16
Règle:
Dessine une collection équivalente avec le moins de pièces possible.
Code ce que tu as dessiné.
1
6
9
36
F.3.P., OP, 25
Règle: Ⓒ Ⓒ Ⓒ ≡ Ⓑ
Ⓑ Ⓑ Ⓑ ≡ Ⓐ
Dessine une collection équivalente avec le moins de pièces possible.
Dessine une collection équivalente avec le plus de Ⓑ possible.
F.3.P., OP, 23
Complète en utilisant le moins de pièces possible.
... vaut trois de moins que...
F.3.P., OP, 40

Le Théorème de Pythagore

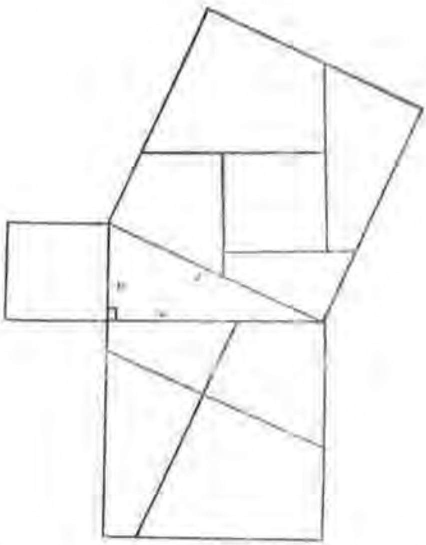
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Bien sûr, par le calcul vectoriel, il est facile à démontrer.
Mais quel maître n'a-t-il pas eu l'envie d'en montrer géométriquement à ses élèves le bien-fondé ?

Voici la solution de Henry Perigal. Elle date de 1830:

Construisons des carrés sur les deux cathètes (côtés adjacents à l'angle droit) d'un triangle rectangle.
Partageons le plus grand en quatre parties par deux droites orthogonales et dont l'une est parallèle à l'hypoténuse (le plus grand côté du triangle).
Chaque droite coupe deux côtés parallèles du carré.
Les quatre parties, plus le petit carré, peuvent être disposées de façon à donner un nouveau carré que l'on construira sur l'hypoténuse du triangle (voir la figure ci-dessous).

Découpez et essayez !



(D'après Martin Gardner: «Nouveaux divertissements mathématiques», Dunod, Paris, 1970).

Nouvelles de l'Europe

Le Comité de l'enseignement général et technique du Conseil de l'Europe a convoqué, en décembre 1973, une réunion pour «comparer les résultats obtenus au plan national par l'introduction des mathématiques modernes dans le curriculum de l'école primaire». La rencontre a été présidée par le délégué de la Suisse, M. Emile Blanc, directeur adjoint du Centre suisse de documentation en matière d'enseignement et d'éducation (Genève). Un rapport de synthèse sur les travaux entrepris dans huit pays d'Europe a été demandé à M. Samuel Roller, directeur de l'IRDP. Ce rapport paraîtra en fin 1975 avec deux études de cas sur la Formation des enseignants et sur la Méthodologie dans le secteur de la mathématique. Un tirage réduit et provisoire a été autorisé (Rapport IRDP/S 75.03).
Voici, en primeur, le résumé du rapport.

Résumé

1. A l'occasion de la réunion d'experts des 18 et 19 décembre 1973 à Strasbourg, réunion convoquée pour «*comparer les résultats obtenus au niveau national par l'introduction des mathématiques modernes dans le curriculum de de l'école primaire*», huit rapports ont été élaborés par les pays suivants: Autriche, Belgique, Confédération helvétique, République fédérale d'Allemagne, France, Grande-Bretagne, Irlande et Finlande.
La rédaction de ces rapports n'a pas été standardisée, d'où la difficulté de présenter un tableau d'ensemble cohérent; d'où, aussi, un avantage: chaque pays a pu se présenter avec une particulière authenticité.

2. *L'histoire de la rénovation de l'enseignement des mathématiques comprend* quatre «moments»: le séminaire de Royaumont (1959), une phase préparatoire (1964-1967), la promulgation des programmes (1968-1971), la généralisation progressive du nouvel enseignement (1972...).

3. *Les plans d'études concernant la mathématique* s'inscrivent dans le cadre du renouvellement général de l'enseignement. Ils visent essentiellement à développer la pensée logico-mathématique. Le plus souvent, et pour demeurer dans l'esprit de la rénovation, on a voulu que ces programmes soient peu contraignants, l'accent étant mis sur un certain nombre d'objectifs assez généraux. Les notions anciennes voisinent avec les notions nouvelles: les exigences de de l'arithmétique de jadis ne sont pas abandonnées. Les programmes nouveaux, enfin, sont presque toujours considérés comme expérimentaux et provisoires.

4. *Les méthodes d'enseignement* mettent l'accent sur l'enfant lui-même. Elles insistent sur la motivations et font, de ce fait, une large part aux activités

ludiques et à celles qui répondent aux intérêts profonds des élèves. Pour cela, on insiste sur l'importance des «situations» qui doivent solliciter l'activité des enfants. Cette activité, cependant, doit être «créatrice» en ce sens qu'il importe que ce soit toujours l'esprit qui dirige la main. De la sorte, les actes s'intériorisant et se coordonnant, peuvent donner naissance à une pensée logico-mathématique, concrète d'abord, formelle ensuite. Le travail des enfants doit aussi être individualisé et donner lieu à des activités de groupe. La présence du maître est hautement requise. C'est elle qui fait rebondir l'activité et lui fait produire les savoirs et les savoir-faire de nature mathématique.
Les moyens d'enseignement demeurent le plus souvent des manuels relativement classiques. L'emploi de fiches de travail est signalé. Les «matériels» didactiques sont reconnus comme utiles. On insiste pourtant sur la très grande importance de la manipulation, aux fins de mise en ordre, par exemple, des objets qui constituent l'environnement familier des enfants.

5. *La formation du corps enseignant* est considérée comme l'élément le plus important de la réforme. Les rapports insistent sur le recyclage des maîtres. Ce dernier est de durées très variables selon les pays. Le contenu porte sur la mathématique proprement dite et sur la psycho-pédagogie de son enseignegnement. Le plus souvent, on a organisé des enseignements par groupes avec des moniteurs. Des centres de mathématiques sont institués; les intéressés peuvent s'y retrouver et s'y livrer à des discussions fécondes. L'important paraît être la possibilité offerte à chaque maître de se donner progressivement sa propre méthode d'enseignement.

6. *Les moyens d'application* du nouvel enseignement comprennent l'expérimentation, la généralisation et l'évaluation.
On a attaché un grand prix à l'*expérimentation* en raison de l'enjeu que comportait le renouvellement de l'enseignement d'une discipline aussi importante que la mathématique. Les centres de recherche ont joué un rôle capital dans cette expérimentation.
La *généralisation* des nouvelles mesures se fait, presque partout, avec prudence et d'une manière très progressive. Les maîtres ne devraient faire leurs les nouveautés qu'au moment où ils se sentent maîtres de leur insertion dans leur propre activité professionnelle.
L'*évaluation* des effets du nouvel enseignement s'est faite d'une manière sporadique et encore relativement peu systématique. Si, en bien des endroits, on est satisfait des résultats obtenus, quelques réserves se font jour: excès de formalisme, médiocrité du «sens des mathématiques» chez certains enseignants, lassitude parfois due au fait que l'effort de recyclage porte aussi sur des disciplines autres que la mathématique, désarroi des parents qui ne peuvent plus aider leurs enfants, craintes même de certains pédiatres...

7. En conclusion, on peut dire qu'on se trouve en présence d'un mouvement de rénovation du curriculum scolaire qui s'est développé depuis une quinzaine d'années et qui continue de le faire avec le souci très marqué de réussir une

opération qu'on veut pleinement profitable sur les plans *culturel* (il n'est plus permis d'ignorer la mathématique), *scientifique* (rôle éminent de la mathématique dans la découverte scientifique), *technique* (les ordinateurs, par exemple) et *économique* (pas de prospérité désormais, dans les pays «occidentaux» du moins, sans cette néo-culture à fondement mathématique).
Le séminaire de Royaumont avait, dans une certaine mesure, consacré le triomphe du structuralisme. Actuellement, un mouvement s'esquisse, en sens inverse. Le professeur René Thom revendique, contre un structuralisme excessif, les droits du sens, les droits du plein et du réel. On revient ainsi à quelque chose de plus équilibré et, somme toute, de plus satisfaisant et qui pourrait bien être cette «ouverture à l'expérience» du professeur suisse Ferdinand Gonseth. Cela ne signifie pas que la réforme soit en train d'avorter. Elle gagne au contraire en profondeur. On a compris, et on semble comprendre désormais toujours mieux, que la nouvelle formation «mathématique» à assurer à la génération montante, est plus une affaire d'éducation que d'instruction. L'équipement logico-mathématique n'est pas un «bagage», c'est un «pouvoir». Il devrait donner à qui en est muni plus d'autonomie et de courage pour affronter les problèmes de l'existence.

Nouvelles de la Suisse

● Forum pour l'enseignement mathématique

Ce forum est lancé par la sous-commission élargie de la Commission pédagogique de la Conférence suisse des chefs des départements de l'instruction publique.

Il rend possible l'échange d'informations entre les responsables de la réforme de l'enseignement des mathématiques dans les cantons et les régions.

a) Activités

— Information sur les principales tendances de l'enseignement mathématique en Suisse et à l'étranger;
— Etude des travaux existants;
— Confrontation, évent. échange de plans d'études, de moyens d'enseignement, de matériel, de résultats d'expériences;
— Etude de situations et de notices mathématiques en vue de leur utilisation dans l'enseignement;
— Etude des buts et des objectifs de l'enseignement des mathématiques et de leurs conséquences sur les procédés et le style de présentation, ainsi que sur la vie de la classe;
— Impulsions pour des travaux de recherche ou d'expérimentation (p. ex. évaluation des réformes);

— Etude des diverses manières de présenter un sujet;
— Projets d'expériences communes au niveau local;
— Prise en considération des possibilités de rapprocher le langage, les symboles et la terminologie;
— Etudes des problèmes intéressant la formation des enseignants;
— Projets de cours de perfectionnement communs;
— Echanges éventuels de moniteurs de cours;
etc.

b) Mode de travail

Suivant les besoins, le forum se réunit en une ou plusieurs sessions de travail (d'un ou de plusieurs jours) par an. Pour 1975, on prévoit une session d'un jour et une session de plusieurs jours.
Le travail se fait en règle générale en groupes, ce qui n'exclut pas des exposés ou des discussions en séance plénière. Il conviendrait de donner à ces rencontres la structures la plus flexible possible.

c) Participants

Le forum n'a pas de membres attitrés; sa composition doit pouvoir se modifier selon le sujet traité; en principe, le forum doit accueillir tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques.
Les cantons seront invités à déléguer aux manifestations du forum les responsables de l'enseignement mathématique.
La sous-commission élargie peut aussi inviter des experts à titre personnel.
Les manifestations seront annoncées dans la presse pédagogique, pour permettre aux personnes intéressées de s'inscrire.

Grâce à ces mesures, la CDIP espère avoir réuni les conditions nécessaires à la coordination de l'enseignement mathématique en Suisse, du moins à ce premier niveau qui représente le minimum de ce qui doit être entrepris. Pourra-t-on, dans quelques années, atteindre un niveau supérieur et étendre la coordination, par exemple par l'élaboration de plans d'études-cadres qui soient communs à l'ensemble des cantons ? La réponse dépendra essentiellement des progrès qui auront été réalisés à ce premier niveau.

Voir bulletin numéro 52, 10-12.74 du Centre suisse de documentation en matière d'enseignement et d'éducation. Genève. Page 6.

● Math - première année: un sondage d'opinion

a) L'évaluation de l'enseignement du nouveau programme de mathématiques adopté par l'ensemble des cantons romands a été confiée à l'IRDP. Celui-ci a engagé une collaboratrice dans ce but, et a mis en place une commission d'évaluation des mathématiques (CEM).
Jusqu'à présent, le travail s'est engagé dans les quatre voies suivantes:

Une enquête auprès des maîtresses de première année (et auprès des maîtresses de deuxième année qui enseignaient l'an passé à des premières) sera lancée dans le courant du mois d'avril. Cette recherche devrait permettre de connaître l'opinion du corps enseignant sur le nouveau programme, la façon dont il est appliqué.
Il est également prévu de tester des élèves ayant reçu l'enseignement nouveau des mathématiques en juin 1976. Pour l'instant, on s'efforce de dégager les objectifs opérationnels de cet enseignement.

b) Il est prévu, en outre, d'évaluer les résultats de l'enseignement traditionnel des mathématiques chez les élèves de quatrième année. A cet effet, une grille d'objectifs a été construite. Elle permettra de mettre au point des tests de connaissance pour comparer l'enseignement traditionnel avec, dans quelques années, le nouvel enseignement. Les courbes de réussite à chaque item permettront d'examiner si les déplacements des maxima correspondent bien aux changements d'objectifs.
Enfin, un groupe de travail formé de praticiens, dans chaque canton, va, sur la base de cas observations, déterminer quels seraient les changements à apporter à la nouvelle édition des manuels. Ils travailleront en étroite collaboration avec les auteurs et l'IRDP.
Alors que Mathématique - quatrième année est en voie d'édition, l'IRDP et la CEM travaillent à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique dans nos cantons romands.

C. R. et M. G.

(Extrait du Bulletin «Coordination romande», numéro 0, mars 1975, IRDP)

● Dire tout haut...

par Jean Grignon, conseiller pédagogique, du bulletin *«Instantanés mathématiques»*, vol. XI, numéro 3, février 1975 (Association pour l'avancement des mathématiques à l'élémentaire, Montréal).

Ma décision est prise. Et s'il faut dire: «Ce soir on fait peur au monde» en parodiant Charlebois, je le dis.
Qcels sont les objectifs de l'élémentaire ? Ce sont les objectifs de l'élémentaire.
Qui est l'élève de l'élémentaire ? C'est l'élève de l'élémentaire.
L'enfant entre à l'école soit disant pour accélérer son processus de socialisation. Et si c'est vrai, il se doit de s'initier et surtout d'utiliser divers moyens de communication, divers langages, que ce soit sa langue maternelle ou que ce soit le langage artistique, mathématique, musical, ou autre... L'élève est à l'école pour agir, non pas pour répondre à des questions mais pour trouver des «challenges» à sa mesure.
Si l'on n'arrive pas à définir la vie de l'élève élémentaire dans l'action, acceptons que nous sommes ridicules.
L'élève n'est pas à l'école pour se préparer. Il est à l'école pour travailler sur des projets suggérés ou sortis de son imagination. L'élève veut agir. A nous d'apprendre à le regarder agir et à travailler avec lui.
Cessons de croire que l'élève de troisième se prépare à passer en quatrième... ou que l'élève de l'élémentaire se prépare au secondaire. Qu'est-ce qui est le plus important, préparer les bagages, ou voyager ?

La vie pédagogique, l'élan vital de l'enfant à l'école se situe moins que faiblement dans le passé, immensément dans le présent et partiellement dans l'avenir, qui agit comme pôle d'attraction...
Ce n'est pas un éditorial que je vous livre, c'est un cri.
Et ne me demandez pas ce qu'il faut comprendre...

● Innovations dans l'enseignement des mathématiques

Un numéro spécial du Bulletin de la Commission pédagogique de la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (Conférence DIP) sera consacré aux «Innovations dans l'enseignement des mathématiques». Il donnera un aperçu de la situation de cet enseignement en 1974 dans tous les cantons suisses. Son but est de faciliter les contacts entre les cantons en informant chacun d'eux sur les réformes en cours dans les autres.

Au sommaire:

- Coordination de l'enseignement mathématique pendant la scolarité obligatoire. (Mesures adoptées par la Conférence DIP en novembre 1974).
- Caractérisation des tendances de réformes (résultats d'une enquête auprès des responsables des cantons).
- Moyens d'enseignement utilisés actuellement dans tous les cantons suisses.
- Bibliographie des manuels utilisés.
- Organes et personnes responsables des réformes dans les cantons.
- Présentation de trois cas d'innovations:
  - Tessin;
  - Suisse romande;
  - Thurgovie.

Les personnes qui désirent recevoir cette publication de 70 pages sont priées d'en faire la demande au moyen du bulletin de commande ci-dessous. Elle leur sera adressée gratuitement jusqu'à épuisement du stock.

BULLETIN DE COMMANDE

Le soussigné désire recevoir .... exemplaires du numéro du Bulletin sur «Les innovations dans l'enseignement des mathématiques».

Nom et prénom: ____________________

Fonction: ____________________

Rue: ____________________

Numéro postal et localité: ____________________

Date: ____________________ Signature: ____________________

A envoyer au Secrétariat de la Conférence DIP, Palais Wilson, CH-1211 Genève 14.

Erratum

Numéro 67, présentation de la thèse de Jean Brun, *Education mathématique et développement intellectuel*, p. 17, première ligne: il s'agit d'«un retour au *fonctionnalisme* de Claparède» (voir, de ce dernier, «*L'éducation fonctionnelle*»; 1931).

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311